

Universitatea din Craiova
Școala Doctorală de Științe
Domeniul Fizică

Rezumat

Teză de doctorat

Integrabilitate și clase de soluții pentru
ecuații de evoluție neliniare

Doctorand: Alina-Maria STRECHE (PĂUNA)

Conducător de doctorat:
Prof. univ. dr. Radu CONSTANTINESCU

Craiova
2022

Cuprins

1	Introducere	2
2	Sisteme dinamice și ecuații de evoluție	4
2.1	Ecuatii diferențiale ordinare	4
2.2	Stabilitatea punctelor de echilibru. Clasificarea punctelor staționare în \mathbb{R}^2 . .	8
2.3	Sisteme dinamice cu comportament haotic. Atractori	11
2.4	Procese dinamice în mai multe dimensiuni	14
2.4.1	Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul I	14
2.4.2	Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul al doilea	15
2.4.3	Modele de procese neliniare în mai multe dimensiuni	16
3	Metode directe de rezolvare	18
3.1	Metoda fluxului atașat	19
3.2	Metoda tangentei hiperbolice. Soluții predefinite pentru modele neliniare . .	27
3.3	Metode de rezolvare ce implică ecuații auxiliare	27
3.3.1	Utilizarea ecuației Riccati ca ecuație auxiliară	27
3.3.2	Metoda G'/G	30
3.3.3	Metoda ecuației de test extinse (ETEM)	33
3.3.4	Metoda generalizată Kudryashov	37
3.3.5	Utilizarea ecuației eliptice ca ecuație auxiliară	38
4	Metoda de Împrăștiere Inversă	46
4.1	Reprezentarea Lax în abordarea AKNS	51
4.2	Problema directă de împrăștiere pentru sistemul Z-S	56
4.3	Spectrul operatorului L	59
5	Metoda de "dressing". Modelul Kulish-Sklyanin	68
5.1	Modelul Kulish-Sklyanin $SO(2r+1)/S(O(2) \otimes O(2r-1))$	68
5.2	Metoda de dressing Zakharov-Shabat pentru soluții solitonice	73
5.3	Efectele metodei de dressing asupra soluțiilor Jost și matricei de împrăștiere	80
5.4	Spectrul operatorului L degenerat	82
5.5	Modelul Kulish-Sklyanin $SO(2r+1)/(SO(2r-2k+1) \otimes SO(2k))$	85
5.6	Soluții solitonice și relații de completitudine ale FAS	93
6	Concluzii	98

Teza de doctorat cu titlul "Integrabilitate și clase de soluții pentru ecuații de evoluție neliniare" expune unele metode de analiză a integrabilității unor sisteme neliniare, precum și abordări care vizează determinarea anumitor tipuri de soluții ale ecuațiilor care descriu evoluțiile posibile ale acestora. Aproximările numerice nu sunt suficient de precise și este foarte dificil de formulat o teorie generală privind rezolvarea ecuațiilor neliniare, astfel încât există mai multe metode rezolvare. Diversitatea și multitudinea metodelor de rezolvare rezultă din particularitățile fiecărei ecuații. Ordinul neliniarității, dispersia, disipația, toate acestea joacă un rol important în căutarea și găsirea soluțiilor sau în determinarea integrabilității sistemului considerat. Deoarece principiul superpoziției nu mai este valabil, existența și unicitatea soluțiilor nu sunt garantate.

În funcție de caracteristicile fiecărei metode, acestea au clasificate în prezentul studiu doctoral în două categorii mari:

- metode de rezolvare directă ce pot genera mai multe clase de soluții: soluții de tip soliton, soluții de tip undă călătoare, soluții singulare și periodice, soluții exprimate prin intermediul funcțiilor eliptice;

- metode riguroase pentru studiul exhaustiv al sistemelor neliniare, care să ofere informații referitoare la integrabilitate, dar și la soluțiile speciale, de tip soliton sau multi-soliton, pe care sistemul investigat le admite. Din această categorie de metode vom prezenta metoda de împrăștiere inversă (Inverse Scattering Method), metoda perechii de operatori Lax (Lax Pair) și metoda de dressing (Dressing Method).

Lucrarea este structurată în șapte secțiuni.

După **prima secțiune**, care constituie introducerea lucrării, în cea de-a **doua secțiune** se realizează o prezentare a noțiunilor generale de dinamică neliniară, concepte de bază, elementare, precum aspecte generale din teoria ecuațiilor diferențiale, stabilitate și puncte de echilibru, sisteme dinamice cu comportament haotic.

Cea de-a **treia parte**, care este consistentă în privința contribuțiilor originale, are ca obiectiv investigarea unor modele principale cu dinamică neliniară, prezentând metode de rezolvare directă și clase de soluții ale ecuațiilor atașate acestor modele. Pornind de la premisa că o ecuație cu derivate parțiale poate fi transformată într-o ecuație diferențială ordinară, prin introducerea transformării de undă $\xi = kx \pm \lambda t$, $u(x, t) = U(\xi)$, unde k este numărul de undă și λ reprezintă viteza undei, au fost studiate mai multe metode de rezolvare pentru obținerea soluțiilor sistemelor considerate.

3.1 Metoda fluxului atașat. În primul paragraf al acestei părți este descrisă de *Metoda fluxului atașat*, ce ne asigură, în cazul modelelor studiate, că soluțiile acestora pot fi exprimate în termenii soluțiilor altor ecuații. Metoda constă în suplimentarea ecuației de studiat cu o ecuație de ordin întâi, de tipul ecuațiilor pentru flux din cazul sistemelor dinamice, în care derivata de ordinul I a variabilei dependente $U'(\xi)$ este exprimată prin intermediul unei funcții $V(U)$, identificată ca fluxul atașat variabilei. Rezolvarea ecuației considerate inițial

se reduce la rezolvarea unei ecuații având ca nouă variabilă independentă pe $V(U)$. Avantajul acestei metode este că reduce ordinul ecuației rezultate în urma introducerii variabilei de undă. Deși soluțiile găsite sunt particulare, datorate constrângerii $U' = V(U)$, metoda oferă soluții de tip undă călătoare "traveling wave" sau chiar de tip soliton. Aceasta metodă reprezintă contribuția proprie, propusă în urma dificultăților întâmpinate în găsirea soluțiilor unor ecuații dificil de rezolvat, precum ecuațiile Fisher și Gardner, prin metode alternative.

Folosind metoda fluxului atașat am obținut soluții particulare pentru modele neliniare importante.

Ecuația Benjamin-Bona-Mahony descrie propagarea unidirecțională a undelor lungi, cu amplitudine mică, de la suprafața apei, dar și propagarea undelor acustice:

$$u_t - u_{xxt} + u_x(1 + u^n) = 0. \quad (0.1)$$

Pentru $n = 1$ soluția ecuației BBM este:

$$u(x, t) = \frac{3(\lambda - 1)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2\lambda}(x - \lambda t)\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}\right)}. \quad (0.2)$$

Soluția (0.2) este reprezentată grafic în Fig. 10.

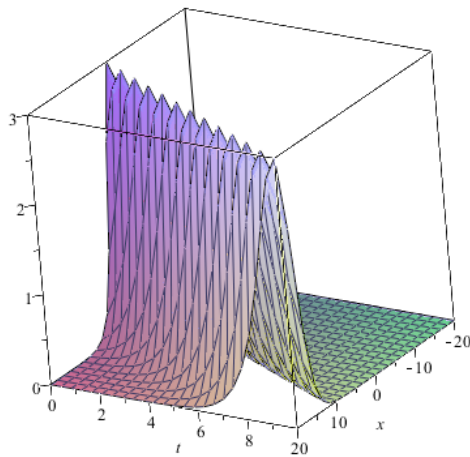


Fig. 10. Soluția ecuației BBM pentru $\lambda = 1$.

Pentru $n = 2$ soluția ecuației are forma:

$$u(x, t) = \frac{24\lambda(\lambda - 1) (\cosh A + \sinh A)}{\cosh 2A + \sinh 2A + 24\lambda^2(\lambda - 1)}, \quad (0.3)$$

unde

$$A = \frac{(x - \lambda t)\sqrt{\lambda - 1}}{\sqrt{\lambda}} \quad (0.4)$$

.Pentru $n = 4$ soluția ecuației BBM este:

$$u(x, t) = -\frac{2\sqrt{15\lambda(\lambda - 1)}(\cosh A + \sinh A)}{\sqrt{\cosh 4A + \sinh 4A + 60\lambda^2(\lambda - 1)}}, \quad (0.5)$$

reprezentată grafic în Fig. 11a pentru $\lambda = 2$, Fig. 11b pentru $\lambda = 3$.

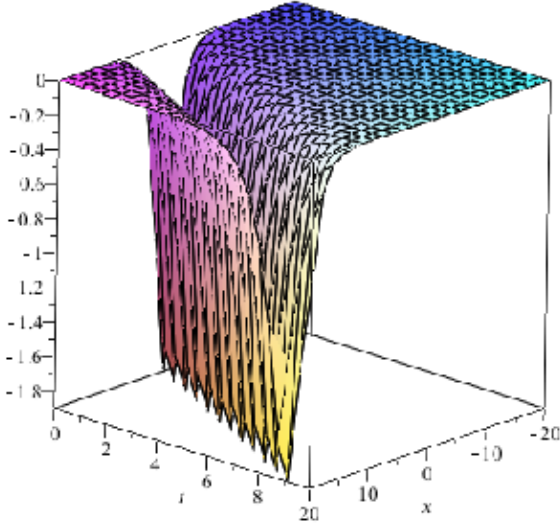


Fig. 11a

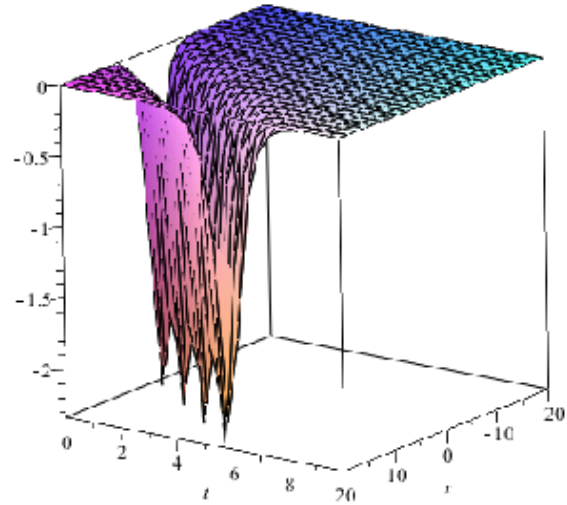


Fig. 11b

Ecuația Fisher cu aplicații în transferul de căldură și de masă, propagarea flăcărilor, procesele de mișcare browniene, chiar și în teoria reactoarelor nucleare:

$$u_t = \alpha u_{xx} + \beta u(1 - u). \quad (0.6)$$

soluția ecuației (0.6) este:

$$u(x, t) = \frac{(\cosh A - \sinh A)(3 \cosh A - \sinh A)}{4 \cosh^2 A}, \quad (0.7)$$

cu

$$A = \frac{\sqrt{-6\alpha\beta x - 5\alpha\beta t}}{12\alpha}. \quad (0.8)$$

Ecuația Gardner ce modelează propagarea ionilor acustici în plasmă:

$$u_t + u_{xxx} + 2\alpha u u_x - 3\beta u^2 u_x = 0. \quad (0.9)$$

are soluția:

$$u(x, t) = \frac{144\lambda (\cosh A - \sinh A)}{-2592\lambda\beta + 576\alpha^2 + 48\alpha (\cosh A - \sinh A) + (\cosh 2A - \sinh 2A)}, \quad (0.10)$$

cu $A = (x - \lambda t) \sqrt{\lambda}$.

Ecuția de flux Ricci:

$$u_t = \frac{u_{xy}}{u} - \frac{u_x u_y}{u^2}. \quad (0.11)$$

are soluția:

$$u(x, y, t) = \frac{k}{\sinh\left(\frac{\lambda k(\alpha x + \beta y - \lambda t)}{2\alpha\beta}\right) + \cosh\left(\frac{\lambda k(\alpha x + \beta y - \lambda t)}{2\alpha\beta}\right) - 2}, \quad (0.12)$$

reprezentată grafic în Fig. 12.

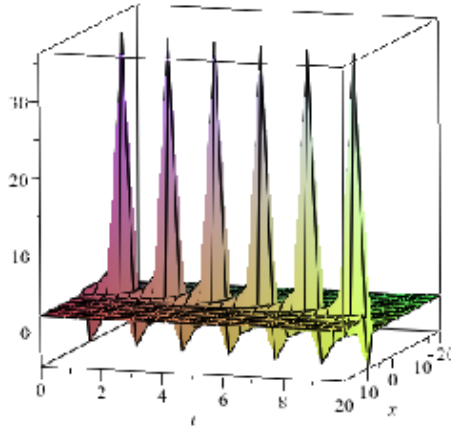


Fig. 12. Soluția ecuației Ricci pentru $\alpha = 1/5$, $\beta = -1$, $\lambda = 1$, $k = 0,5$, $y = 0$.

Ecuția Tîțeica ce a apărut inițial în domeniul geometriei în 1907, propusă de G. Tîțeica, cu numeroase aplicații în teoria cuantică a câmpurilor:

$$u_{xt} = e^u - e^{-2u} \quad (0.13)$$

soluția ecuației Țițeica (Fig. 13):

$$u(x, t) = -\ln(2) - 2 \ln \left(\cosh \frac{(x - \lambda t)\sqrt{3}}{2\sqrt{\lambda}} \right) + \ln \left(3 - 2 \cosh^2 \frac{(x - \lambda t)\sqrt{3}}{2\sqrt{\lambda}} \right). \quad (0.14)$$

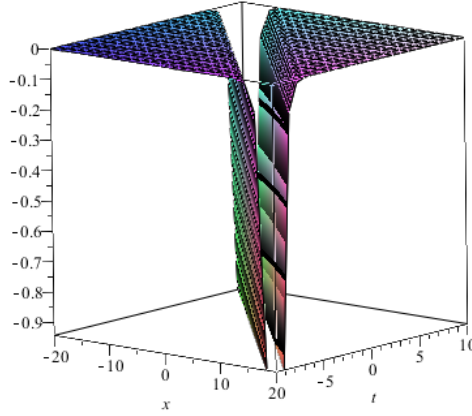


Fig. 13 Soluția ecuației Țițeica.

Sistemul Whitham–Broer–Kaup (WBK) modelul ce descrie undele dispersive de la suprafața apei:

$$u_t + uu_x + h_x + \beta u_{2x} = 0 \quad (0.15)$$

$$h_t + (hu)_x + \alpha u_{3x} - \beta h_{2x} = 0 \quad (0.16)$$

are soluțiile (Fig. 14):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{2\lambda(\cosh A + \sinh A)}{\cosh B + \sinh B - (\cosh A + \sinh A)} \\ h(x, t) &= -\frac{2\lambda^2(\sqrt{\beta^2 + \alpha} + \beta)(\cosh C + \sinh C)}{\sqrt{\beta^2 + \alpha}(\cosh B + \sinh B - \cosh A - \sinh A)^2} \end{aligned} \quad (0.17)$$

$$\text{cu } A = \frac{\lambda^2 t}{\sqrt{\beta^2 + \alpha}}, \quad B = \frac{\lambda x}{\sqrt{\beta^2 + \alpha}}, \quad C = \frac{\lambda(x + \lambda t)}{\sqrt{\beta^2 + \alpha}}.$$

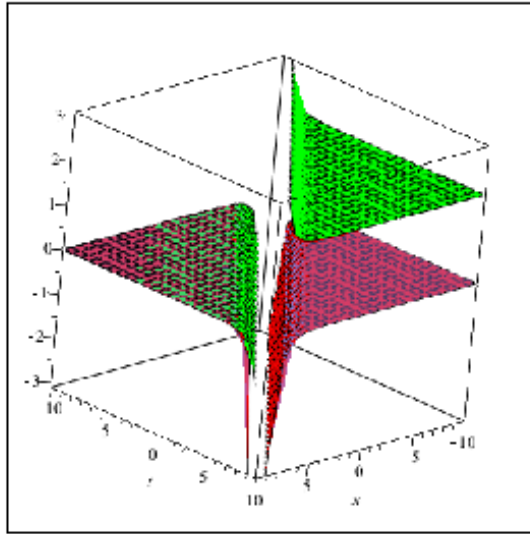


Fig. 14. Soluțiile sistemului WBK pentru $\alpha = 0, 2$, $\beta = 0, 66$, $\lambda = 1$. Soluția $h(x, t)$ este reprezentată cu roșu, iar $u(x, t)$ este reprezentată cu verde.

Din metoda fluxului atașat observăm că impunerea condiției $U' = V(U)$ nu face altceva decât să exprime soluțiile ecuațiilor investigate în termenii soluției ecuației rezultate în urma descoperirii formei specifice a lui $V(U)$. Rezultatele obținute au fost publicate în reviste de specialitate indexate.

3.3 Tehnica ecuației auxiliare.

3.3.1 Ecuația Riccati O metodă, des folosită în literatură, pentru căutarea soluțiilor de tip undă călătoare, este reprezentată de *Metoda tangentei hiperbolice* ce impune căutarea unor soluții sub forma unor expresii predefinite, construite cu ajutorul acestei funcții $Z = \tanh(\mu\xi)$. Această metodă ne ajută să exprimăm soluția ecuației diferențiale ordinare, rezultată în urma introducerii transformării de undă, într-o dezvoltare în serie a tangentei hiperbolice $U(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i Z^i$. Unde $m > 0$ este un număr întreg, ce se determină realizând balansul între ordinul cel mai mare al derivatei și ordinul cel mai mare al neliniarității, reprezentative ecuației studiate [17].

Descrierea acestei metode a fost realizată doar pentru a susține prezentarea metodelor de rezolvare ce au în comun utilizarea ecuațiilor auxiliare, ce se regăsesc în cel de-al treilea paragraf al secțiunii 3.

Această idee de utilizare a ecuațiilor auxiliare, ca metodă de rezolvare, a provenit din faptul că ecuația Riccati $G' = k + G^2$ admite tangenta hiperbolică ca soluție fundamentală. Aceasta reprezintă o altă abordare în care soluțiile ecuațiilor neliniare să fie exprimate în

termenii soluțiilor unei alte ecuații, ce se poate rezolva și care este numită ecuație auxiliară. Folosind ecuația Riccati ca ecuație auxiliară am obținut soluții pentru modelul ce descrie propagarea sunetului în membranele biologice cilindrice, similară cu ecuația ce descrie propagarea pulsurilor nervoase prin neuroni, o variantă generalizată a ecuației Boussinesq:

$$u_{2t} - A'(u)u_x^2 - A(u)u_{2x} + hu_{4x} = 0. \quad (0.18)$$

cu:

$$A(u) = au^2 + bu + \alpha. \quad (0.19)$$

pentru $a \neq 0$:

$$u(x, t) = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{6h}{a}} \sqrt{-\frac{-b^2 - \lambda^2 a + 4\alpha a}{8ah}} \tanh \sqrt{-\frac{-b^2 - 4\lambda^2 a + 4\alpha a}{8ah}} (x + \lambda t),$$

iar pentru $a = 0$:

$$u(x, t) = -\frac{\alpha - \lambda^2 - 8hk}{b} + \frac{12h}{b} k \tanh^2(\sqrt{-k}x + \sqrt{-k}\lambda t).$$

3.3.2 Metoda $\frac{G'}{G}$. Folosind metoda $\frac{G'}{G}$ pentru același model generalizat Boussinesq $u_{2t} - A'(u)u_x^2 - A(u)u_{2x} + hu_{4x} = 0$, am extins familia de soluții ale ecuației considerate. Această metodă, pe lângă apelul la o ecuație auxiliară de forma $G' = r + pG + qG^2$, dezvoltă soluțiile ecuației studiate în termenii unei relații între derivata soluției și soluția ecuației auxiliare considerată $U(\xi) = \sum_{i=1}^n d_i (G'/G)^i$ [11].

a) pentru $p^2 - 4qr > 0$, $pq \neq 0$, $qr \neq 0$, soluția ecuației auxiliare este $G_1(\xi) = -\frac{\sqrt{p^2 - 4qr} \tanh(\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4qr}\xi)}{2q}$, astfel pentru ecuația considerată avem soluția:

$$u_1(x, t) = -\frac{b}{2a} - \frac{2rq\sqrt{6ah}}{a(p + B \tanh(\frac{1}{2}B(x - \frac{1}{2}\sqrt{At}))} - \frac{\sqrt{6ah}B \tanh(\frac{1}{2}B(x - \frac{1}{2}\sqrt{At}))}{2a}$$

unde $A = 4\alpha + 2hp^2 + 16hqr - \frac{b^2}{a}$, $B = \sqrt{p^2 - 4qr}$.

b) pentru $G_2(\xi) = \frac{2r \cosh(\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4qr}\xi)}{\sqrt{p^2 - 4qr} \sinh(\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4qr}\xi) - p \cosh(\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4qr}\xi)}$ avem următoarea soluție:

$$u_2(x, t) = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{6ah}B \sinh(\frac{1}{2}B(x - \lambda t))}{2a \cosh(\frac{1}{2}B(x - \lambda t))} + \frac{2r\sqrt{6ah} \cosh(\frac{1}{2}B(x - \lambda t))}{a(\sqrt{p^2 - 4qr} \sinh(\frac{1}{2}B(x - \lambda t)) - p \cosh(\frac{1}{2}B(x - \lambda t)))}.$$

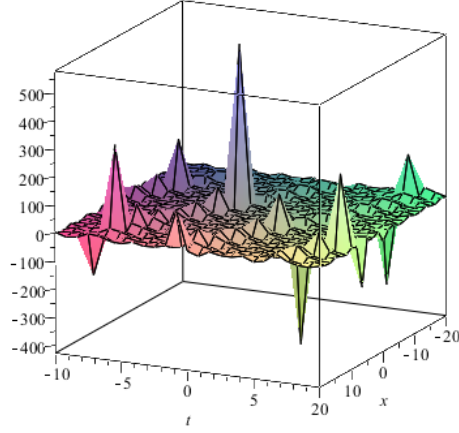


Fig. 15 Soluție obținut pentru valorile
 $q = 2, p = 0, 5, r = 0, 25, a = 1,$
 $b = 0, 125, h = 1, \alpha = 0, 66.$

c) pentru soluția ecuației Riccati $G_3(\xi) = \frac{2r \sinh(\sqrt{p^2 - 4qr}\xi)}{\sqrt{p^2 - 4qr} - p \sinh(\sqrt{p^2 - 4qr}\xi) - \sqrt{p^2 - 4qr} \cosh(\sqrt{p^2 - 4qr}\xi)}$ vom avea soluția ecuației Boussinesq generalizată:

$$u_3(x, t) = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{6ah}B \cosh(B(x - \lambda t))}{2a \sinh(B(x - \lambda t))} - \frac{\sqrt{6ah}B}{2a \sinh(\lambda t - x)} + \frac{2rq\sqrt{6ah} \sinh(B(x - \lambda t))}{a(-p \sinh(B(x - \lambda t)) - \cosh B(x - \lambda t))B + B},$$

unde $B = \sqrt{p^2 - 4qr}$.

d) pentru $p^2 - 4qr < 0, pq \neq 0, qr \neq 0$, soluția ecuației auxiliare este $G_4(\xi) = -\frac{1}{2q}(p + \sqrt{4qr - p^2} \cot(\frac{\sqrt{4qr - p^2}}{2}\xi))$ vom avea următoarea soluție:

$$u_4(x, t) = -\frac{b}{2a} - \frac{2rq\sqrt{6ah}}{a(p + C \cot(\frac{1}{2}C(x - \lambda t)))} - \frac{\sqrt{6ah}C \cot(\frac{1}{2}C(x - \lambda t))}{2a}$$

unde $C = \sqrt{4qr - p^2}$.

Observăm că făcând apel la o ecuație auxiliară de un ordin superior, precum și la o dezvoltare mai complexă în termenii soluției ecuației respective putem generaliza familii de soluții ale ecuațiilor pe care dorim să le investigăm. În funcție de relațiile dintre parametrii ce intervin în ecuația Riccati, în literatură se regăesc peste 27 de soluții, în termenii cărora putem obține soluții noi pentru varianta generalizată a ecuației Boussinesq.

3.3.3 *Metoda ecuației de test extinse* Metoda ecuației de test extinse (ETEM-Extended Trial Equation Method) a fost aplicată modelului LS (Long Short wave resonance model). Această metodă folosește o ecuație auxiliară generală $(\Gamma')^2 = \Lambda(\Gamma) = \frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)} = \frac{\xi_p \Gamma^p + \dots + \xi_1 \Gamma + \xi_0}{\nu_n \Gamma^n + \dots + \nu_1 \Gamma + \nu_0}$, care în urma impunerii unor constrângeri pentru compatibilitatea cu sistemul analizat este de forma $\frac{\Phi'}{2\Psi} = \frac{a_1(4\xi_4 \Gamma^3 + 3\xi_3 \Gamma^2 + 2\xi_2 \Gamma + \xi_1)}{2\nu_0}$. Modelul undelor LS este descris de următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned} iS_t + \alpha S_{xx} - LS &= 0, \\ L_t + \beta (|S|^2)_x &= 0, \end{aligned} \quad (0.20)$$

iar una dintre soluțiile obținute folosind metoda ecuației de test extinse:

$$S_4(t, x) = \exp(i(\mu_1 x + \mu_2 t)) \frac{K_2}{P + \cosh[R(\rho_1 x + \rho_2 t)]}, \quad (0.21)$$

$$L_4(t, x) = \frac{1}{2\mu_1} \left[\frac{K_2}{P + \cosh[R(\rho_1 x + \rho_2 t)]} \right], \quad (0.22)$$

unde $K_2 = \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)a_1}{\alpha_3 - \alpha_2}$, $p = \frac{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2} \neq 0$, $R = \frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{K}$.

3.3.4 *Metodei Kudryashov*. O generalizare a metodei Kudryashov a fost folosită pentru același model LS, folosind ca ecuație auxiliară $Q' = Q^2 - Q$ (ecuația Kudryashov). Una dintre soluțiile obținute folosind metoda Kudryashov este:

$$S_9(t, x) = -\exp(i(\mu_1 x + \mu_2 t)) \frac{a_2}{2} \tanh\left(\frac{\rho_1 x + \rho_2 t}{2}\right), \quad (0.23)$$

$$L_9(t, x) = \frac{a_2^2}{8\mu_1} \left[\tanh\left(\frac{\rho_1 x + \rho_2 t}{2}\right) \right]^2. \quad (0.24)$$

Analiza modelului LS s-a realizat folosind o nouă perspectivă ce a condus la o clasificare a soluțiilor exacte prin intermediul a două metode, metoda ETEM și metoda Kudryashov. Astfel, au fost evidențiați solitoni întunecați și strălucitori, soluții exprimate cu ajutorul funcțiilor raționale, unde singulare și periodice. În termenii soluțiilor acestor două ecuații auxiliare au fost obținute soluții noi, raportate într-o lucrare publicată în revista Open Physics [ISI 1].

3.3.5 *Ecuația eliptică Jacobi*. În continuare am considerat modelul Bullough-Dodd pentru care am folosit ca ecuație auxiliară, ecuația eliptică Jacobi $(\phi')^2 = h_0 + h_1\phi(\xi) + h_2\phi^2(\xi) + h_3\phi^3(\xi) + h_4\phi^4(\xi)$ care în anumite condiții degenerază în mai multe ecuații ce implică un număr scăzut de parametri. Folosind acest subset de ecuații am construit o nouă serie de soluții pentru modelul Bullough-Dodd (BD) cu aplicații vaste în dinamica fluidelor, optică neliniară sau fizica stării solide. Rezultatele obținute se bazează pe ideea principală de a găsi relațiile între cei 12 parametri ce intervin pe parcursul aplicării metodei și au fost publicate

în revista Symmetry [ISI 2].

Pornind de la ecuația generală:

$$u_{xt} = -pe^u - qe^{-2u} \quad (0.25)$$

și folosind transformarea $u = \ln v$ am găsit soluțiile ecuației:

$$vv_{xt} - v_xv_t + pv^3 + q = 0, \quad (0.26)$$

în termenii soluțiilor ecuației eliptice Jacobi. Pentru $h_0 = h_1 = 0$, $h_2 = 4$, $h_3 = -\frac{4(2\beta+\rho)}{\alpha}$, $h_4 = \frac{\gamma^2+4\beta^2+4\beta\rho}{\alpha^2}$, soluțiile hiperbolice ce depind de 6 parametri sunt:

$$v(x, t) = a \left[1 - \frac{3(\gamma^2 + 4\beta^2)}{8\beta} \frac{[\sec h(kx + \lambda t)]^2}{\beta [\sec h(kx + \lambda t)]^2 + \gamma \tanh(kx + \lambda t) - \frac{\gamma^2+4\beta^2}{8\beta}} \right]. \quad (0.27)$$

În cea de-a **patra parte** am prezentat noțiuni despre problema de împrăștiere inversă (Inverse scattering problem), reprezentarea Lax și analiza spectrală a operatorilor Lax, noțiuni referitoare la analiza integrabilității ecuațiilor de evoluție neliniare. Iar în cea de-a **cincea parte** au fost obținute rezultate originale, în urma colaborării cu Prof. Vladimir Gerdjikov, de la Institutul de Cercetare Nucleară și Energie Nucleară și Institutul de Matematică și Informatică din Sofia, Bulgaria. Am considerat o clasă de operatori Lax care aparțin spațiilor simetrice $BD.I$, cu ajutorul cărora am rezolvat clasa de ecuații vectoriale neliniare cu aplicații în condensatul Bose-Einstein, respectiv modelul Kulish-Sklyanin. În al doilea paragraf al acestei secțiuni, cu ajutorul metodei de dressing Zakharov-Shabat, au fost generate soluții de tip 1-soliton, folosind proiectori de rang 1, dar și de rang 2, însă forma explicită a cărei structură internă este descrisă de proiectorul de rang 2 este foarte complicată. În cel de-al șaselea paragraf al acestei părți a fost ales un proiector general de rang 2 cu o parametrizare convenabilă a vectorilor de polarizare. Am construit nucleul rezolventului ce determină spectrul operatorului Lax și am demonstrat că soluțiile analitice fundamentale satisfac relațiile de completitudine pe un subspațiu al spațiului vectorial considerat.

Problema de împrăștiere inversă (ISP) este percepută ca o abordare echivalentă cu problema Riemann-Hilbert [23],[24].

În [22] Kulish și Sklyanin au descoperit o clasă de ecuații vectoriale neliniare Schrodinger (VNLS):

$$i\vec{q}_t + \vec{q}_{xx} + 2(\vec{q}^\dagger, \vec{q})\vec{q}(x, t) - (\vec{q}, s_0\vec{q})s_0\vec{q}^*(x, t) = 0, \quad (0.28)$$

unde $\vec{q}(x, t)$ este o funcție vectorială cu $2r - 1$ componente ce tind la zero pentru $|x| \rightarrow \infty$,

iar s_0 este o matrice constantă:

$$S_0 = \sum_{k=1}^{2r+1} (-1)^{k+1} E_{k,2r+2-k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -s_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (E_{kn})_{ij} = \delta_{ik}\delta_{nj}, \quad (0.29)$$

unde condiția de ortogonalitate este dată de relația:

$$X \in SO(2r+1) \text{ dacă și numai dacă } X + S_0 X^T S_0 = 0. \quad (0.30)$$

Modelul KS a fost intens studiat datorită aplicațiilor sale în Condensatul Bose-Einstein (BEC). Ecuațiile permit reprezentarea Lax:

$$[L(\lambda), M(\lambda)] = 0, \quad (0.31)$$

caz în care operatorii sunt dați de relațiile:

$$L\psi(x, t, \lambda) \equiv i\partial_x \psi + (Q(x, t) - \lambda J)\psi(x, t, \lambda) = 0, \quad (0.32)$$

$$M\psi(x, t, \lambda) \equiv i\partial_t \psi + (V_0(x, t) - \lambda V_1(x, t) - \lambda^2 J)\psi(x, t, \lambda) = 0, \quad (0.33)$$

Soluțiile Jost ale operatorului Lax sunt definite prin asimptotele lor pentru $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x, t, \lambda) e^{i\lambda J x} = \mathbf{1}, \quad (0.34)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x, t, \lambda) e^{i\lambda J x} = \mathbf{1}. \quad (0.35)$$

În cazul clasei de ecuații corespunzătoare spațiilor simetrice de tip $BD.I$ (0.28) alegem matricele $(2r+1) \times (2r+1)$ cu structura complementară matricelor bloc:

$$Q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & \vec{q}^T & 0 \\ \vec{q}^* & 0 & s_0 \vec{q} \\ 0 & \vec{q}^\dagger s_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \text{diag}(1, 0, \dots, 0, -1) \quad (0.36)$$

Alegerea matricei J determină structura spațiului simetric [?]. Ținând cont de alegerea matricei J , precum și de faptul ca soluțiile Jost și matricea $T(t, \lambda) = \psi^{-1}(x, t, \lambda) \phi(x, t, \lambda)$, aparțin grupului $SO(2r+1)$ se poate folosi următoarea structură a matricii de împrăștiere și a inversei sale $\hat{T}(\lambda, t)$:

$$T(\lambda, t) = \begin{pmatrix} m_1^+ & -\vec{b}^{-T} & c_1^- \\ \vec{b}^+ & \mathbf{T}_{22} & -s_0 \vec{B}^- \\ c_1^+ & \vec{B}^{+T} s_0 & m_1^- \end{pmatrix}, \quad \hat{T}(\lambda, t) = \begin{pmatrix} m_1^- & \vec{B}^{-T} & c_1^- \\ -\vec{B}^+ & \hat{\mathbf{T}}_{22} & s_0 \vec{b}^- \\ c_1^+ & -\vec{b}^{+T} s_0 & m_1^+ \end{pmatrix}, \quad (0.37)$$

unde $\vec{b}^\pm(\lambda, t) = \mathbf{b}^\pm(\lambda, t)$ și $\vec{B}^\pm(\lambda, t) = \mathbf{B}^\pm(\lambda, t)$ sunt vectori cu $(2r-1)$ componente, $\mathbf{T}_{22}(\lambda)$ sunt

matrici bloc $(2r - 1) \times (2r - 1)$ și $m_1^\pm(\lambda)$, $c_1^\pm(\lambda)$ sunt funcții scalare.

Reducerea ISP la problema Riemann-Hilbert se realizează prin construirea efectivă a soluțiilor fundamental analitice (FAS), ca orice altă soluție fundamental analitică a lui L , liniar dependente de soluțiile Jost:

$$\xi(x, t, \lambda) = \psi(x, t, \lambda) \exp(i\lambda Jx), \quad (0.38)$$

$$\varphi(x, t, \lambda) = \phi(x, t, \lambda) \exp(i\lambda Jx). \quad (0.39)$$

Presupunem că știm soluția problemei Riemann-Hilbert $\xi_0^\pm(x, t, \lambda)$ care are poli simpli în $\lambda_j^\pm \in \mathbb{C}_\pm$, $j \neq k$. Metoda de dressing constă în construirea unor noi FAS $\xi^\pm(x, t, \lambda)$ care sunt dependente de $\xi_0^\pm(x, t, \lambda)$ prin factorul de dressing:

$$\xi^\pm(x, t, \lambda) = u(x, t, \lambda) \xi_0^\pm(x, t, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (0.40)$$

unde $u(x, t, \lambda)$ aparține grupului ortogonal și are poli în punctele $\lambda = \lambda_k^\pm \neq \lambda_j^\pm$ ceea ce ne permite să alegem factorul de dressing de forma:

$$u(x, t, \lambda) = \exp(\ln(c_k(\lambda))(P_k - \bar{P}_k)). \quad (0.41)$$

$$c_k(\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_k^+}{\lambda - \lambda_k^-}, \quad (0.42)$$

$$\bar{P}_k = S_0 P_k^T S_0. \quad (0.43)$$

Alegem proiectorul P_k de rang 1 astfel încât $P_k \bar{P}_k = 0$. O astfel de alegere conduce la:

$$u(x, t, \lambda) = \mathbf{1} + (c_k(\lambda) - 1) P_k + \left(\frac{1}{c_k(\lambda)} - 1 \right) \bar{P}_k \quad (0.44)$$

$$u^{-1}(x, t, \lambda) = \mathbf{1} + \left(\frac{1}{c_k(\lambda)} - 1 \right) P_k + (c_k(\lambda) - 1) \bar{P}_k \quad (0.45)$$

Factorul de dressing și matricea inversă lui trebuie să satisfacă următoarele ecuații:

$$i \frac{du}{dx} + (Q(x, t) - \lambda J) u(x, t, \lambda) - u(x, t, \lambda) (Q_0(x, t) - \lambda J) = 0, \quad (0.46)$$

$$i \frac{du^{-1}}{dx} + (Q_0(x, t) - \lambda J) u^{-1}(x, t, \lambda) - u^{-1}(x, t, \lambda) (Q(x, t) - \lambda J) = 0. \quad (0.47)$$

Ținând cont că $u(x, t, \lambda)$ și $u^{-1}(x, t, \lambda)$ au poli în $\lambda = \lambda_k^\pm$ reziduurile trebuie să fie zero, conducând către următoarele ecuații pentru P_k și \bar{P}_k :

$$i \frac{dP_k}{dx} + (Q(x, t) - \lambda_k^- J) P_k(x, t) - P_k(x, t) (Q_0(x, t) - \lambda_k^- J) = 0 \quad (0.48)$$

$$i \frac{d\bar{P}_k}{dx} + (Q(x, t) - \lambda_k^+ J) \bar{P}_k(x, t) - \bar{P}_k(x, t) (Q_0(x, t) - \lambda_k^+ J) = 0 \quad (0.49)$$

Luând limitele ecuațiilor (0.46)-(0.47) pentru $\lambda \rightarrow \infty$ rezultă noul potențial $Q(x, t)$:

$$Q(x, t) - Q_0(x, t) = -(\lambda_k^+ - \lambda_k^{+-}) [J, P_k - \bar{P}_k] \quad (0.50)$$

unde proiectorii P_k au forma:

$$P_k = \frac{|n_k\rangle\langle m_k|}{\langle m_k|n_k\rangle}. \quad (0.51)$$

Pentru $Q_0 = 0$ avem $|n_k\rangle = e^{(z_k - i\phi_k)J}|n_{k0}\rangle$ unde:

$$\lambda_k^\pm = \mu_k \pm i\nu_k, \quad z_k = \nu_k(x + 2\mu_k t), \quad \phi_k = \mu_k x + (\mu_k^2 - \nu_k^2)t, \quad (0.52)$$

iar $|n_{k0}\rangle$ și $\langle m_{k0}|$ sunt vectori constanți de polarizare $\langle m_{k0}|S_0|n_{k0}\rangle = 0$.

Soluția soliton pentru modelul KS este parametrizată de valorile proprii λ_k^\pm și de vectorii de polarizare $|n_{k0}\rangle$ și $\langle m_{k0}|$, $\langle m_{k0}| = |n_{k0}\rangle^\dagger$. Vectorii sunt constanți de condiția $\langle m_{k0}|S_0|n_{k0}\rangle = 0$. Dacă introducem:

$$|n_{k0}\rangle = (n_{k0,1}, \nu_{k0}, \bar{n}_{k0,1})^T, \quad \langle m_{k0}|S_0|n_{k0}\rangle = 2n_{k0,1}\bar{n}_{k0,1} - \nu_{k0}^T s_0 \nu_{k0} = 0, \quad (0.53)$$

pentru cazul în care $\chi_0^\pm(x, t, \lambda)$ este soluție regulată a RHP, adică $\chi_0^\pm(x, t, \lambda) = \exp(-i(\lambda x + \lambda^2 t)J)$, pentru $r = 3$ vom avea modelul KS cu 3 componente și o soluție soliton \vec{q}_{1s} de forma:

$$\vec{q}_{1s}(x, t; z_1, \phi_1) = -\frac{i\sqrt{2}\nu_1 e^{-i(\phi_1)} (e^{-z_1} s_0 |\vec{\nu}_{01}\rangle + e^{z_1} |\vec{\nu}_{01}^*\rangle)}{\cosh(2z_1) + (\vec{\nu}_{01}^\dagger, \vec{\nu}_{01})}.$$

Rezultatele obținute pot fi generalizate și extinse oferind direcții viitoare cercetare și dezvoltare [P3], [P4].

Cea de-a șasea parte a lucrării conține concluziile, iar **ultima parte** listează bibliografia folosită și citată pe parcursul elaborării acestei lucrări.

Bibliografie

- [1] A. D. Polyanin, Valentin F. Zaitsev. Handbook on nonlinear partial differential equations. Chapman & Hall/CRC. ISBN 1-58488-355-3. 2004.
- [2] H. D. I. Abarbanel, M. I. Rabinovich, M. M Sushchik, Introduction to nonlinear dynamics for physicists, World Scientific Publications Co. Pte. Ltd. 1993.
- [3] Julien Clinton Sprott, Elegant Chaos, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2010.
- [4] Lorenz EN. Deterministic Nonperiodic Flow. J Atmos Sci. 1963;20:130-41.
- [5] J. David Logan, An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations, A JOHN WILEY & SONS, INC., PUBLICATION, 2008.
- [6] T. B. Benjamin, J. L Bona, J. J. .Mahony, "Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems", Society Philosophical Transactions Mathematical Physical & Engineering Sciences, 1972, Vol. 272.
- [7] A.R. Seadawy, A. Sayed, " Traveling wave solutions of the Benjamin-Bona-Mahony water wave equation", Abstract and applied analysis, 2014, Vol. 2014
- [8] Durmus Daghan, Orhan Donmez, Adnan Tuna, "Explicit solutions of the nonlinear partial differential equations", Nonlinear analysis. Real world applications, 2010, Vol.11, 2152-2163.
- [9] Kudryashov N.A., One method for finding exact solutions of non linear diferential equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2012, 17, 2248–2253.
- [10] Vakhnenko V.O., Parkes E.J., Morrison A.J., A Bäcklund transformation and the inverse scattering transform method for the generalised Vakhnenko equation, Chaos Soliton Fract., 2003,17, 683–692.
- [11] Kudryashov N.A., A note on the G'/G -expansion method, Appl.Math. Comput., 2010, 217(4), 1755–1758.
- [12] Benny D.J., A general theory for interactions between short and long waves, Stud. Appl. Math., 1977, 56(1), 81–94.
- [13] E. Tala-Tebue, E.M.E. Zayed, New Jacobi elliptic function solutions, solitons and other solutions for the $(2+212\ 1)$ -dimensional nonlinear electrical transmission line equation, Eur. Phys. J. Plus 133(8) (2018) 314.
- [14] A.M. Wazwaz, The tanh method: solitons and periodic solutions for the Dodd–Bullough–Mikhailov and the Tzitzeica–Dodd–Bullough equations, Chaos Soliton Fract. 25(1) (2005) 55–63.

- [15] J.H. He, X.H Wu, Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos Soliton Fract.* 30 (3) (2006) 267–700–708.
- [16] G. Xu, Z. Li, Exact travelling wave solutions of the Whitham–Broer–Kaup and Broer–Kaup–Kupershmidt equations, *Chaos Soliton Fract.* 24(2) (2005) 549–556.
- [17] W. Malfiet, The tanh method: a tool for solving certain classes of non-linear PDEs, *Mathematical methods in the Applied Sciences*, 2005, Vol. 28 (17), 2031–2035.
- [18] Cimpoiasu, Rodica. Nerve pulse propagation in biological membranes — Solitons and other invariant solutions. *International Journal of Biomathematics*. Volume 9, issue 5 (2016).
- [19] P. D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm. Pure Appl. Math.*, 21:467–490, 1968.
- [20] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov.Phys.-JETP*, 34:62–69, 1972.
- [21] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. *Stud. Appl. Math.*, 53:249–315, 1974.
- [22] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin(1981). $O(N)$ -invariant nonlinear Schrodinger equation - a new completely integrable system, *Phys. Lett.* 84A, 349–352.
- [23] Gerdjikov, V.S.:Basic aspects of soliton theory. In: Mladenov, I.M., Hirshfeld, A.C. (eds.) *Geometry, Integrability and Quantization*, pp. 78–125. Softex, Sofia (2005).
- [24] Gerdjikov, V.S., Kostov, N.A., Valchev, T.I.: Bose-Einstein condensates with $F = 1$ and $F = 2$: reductions and soliton interactions of multi-component NLS models. In: *Proceedings of SPIE*, vol. 7501, 7501W (2009).
- [25] Ivanov, R.: On the dressing method for the generalised Zakharov-Shabat system. *Nucl. Phys.B* 694, 509–524 (2004).
- [26] Zakharov, V.E., Manakov, S.V., Novikov, S.P., Pitaevskii, L.I.: *Theory of solitons. The inverse scattering method*, Plenum, N.Y. (1984).
- [27] E. V. Doktorov, S. B. Leble. *A dressing method in mathematical physics. Mathematical physics study 28*. Springer Verlag, Berlin (2007).

Articole publicate în reviste cotate ISI:

1. R. Cimpoiasu, A. Pauna, Complementary wave solutions for the long-short wave resonance model via the extended trial equation method and the generalized Kudryashov

method, Open Physics 16 (1), 2018, pp. 419-426, 2018. <https://doi.org/10.1515/phys-2018-0057>.

2. R. Cimpoiasu, R. Constantinescu, A. Streche Pauna. Solutions of the Bullough-Dodd model of scalar field through Jacobi type equations, Symmetry 13(8), 2021, 1529. <https://doi.org/10.3390/sym13081529>.

Lucrări publicate în reviste, volume sau Proceedings-uri indexate

1. R. Constantinescu, C. Ionescu, A. Florian, A. Streche (Păuna), Power law method for finding soliton solutions of the 2+1 Ricci flow model, "Proceedings of 9th Mathematical Physics Meeting", Institute of Physics Belgrade, ISBN: 978-86-82441-48-9 (2018), pp 135-146. <http://mphys9.ipb.ac.rs/proceedings.html>

2. R. Constantinescu, F. Iacobescu, A. Pauna, Nonlinear mathematical models for physical phenomena, AIP Conference Proceedings 2075 (2019), 100005.

3. R. Constantinescu, C. Ionescu, A. Pauna, A reduction method for solving nonlinear PDEs, Physics AUC – vol. 30 (part II) 2020, 158-165.

4. A. Florian, V. S. Gerdjikov, A. Streche-Pauna, On generalized Kulish-Sklyanin models, Physics AUC, vol. 30 (part II) 2020, 175-195.

5. A. Streche-Pauna, A. Florian, V. S. Gerdjikov, On the Spectral Properties of Lax Operators Related to BD.I Symmetric Spaces, Chapter in "Advanced Computing in Industrial Mathematics", BGSIAM 2018: Studies in Computational Intelligence, Springer vol 961, 2021, pp 345-358. https://doi.org/10.1007/978-3-030-71616-5_31

Lucrări și comunicări la workshop-uri și conferințe internaționale

1. Carmen Ionescu, Mihai Stoicescu, Alina Streche, A special case of Chua system. Chaos and regular behavior, Poster presentation in "The Joint Meeting on Quantum Fields and Nonlinear Phenomena". 09-13 March 2016, Sinaia, Romania.

http://cis01.central.ucv.ro/physics/en/workshop_Sinaia_2016/Contributions.pdf

2. R. Cimpoiasu, R. Constantinescu, M.A. Streche, Chaos and symmetries in mathematical neural flow models, BELBI Conference, Belgrade, June 2016 (prezentare)

<http://alas.matf.bg.ac.rs/~websites/bioinfo/wp-content/uploads/2015/11/program.Friday.pdf>

3. R. Constantinescu, C. Ionescu, A. Florian, A. Streche (Păuna), Methods for solving solitonic equation. Examples. Poster in "The Joint Meeting on Quantum Fields and Nonlinear Phenomena", Sinaia, April, 2018.

http://cis01.central.ucv.ro/physics/en/workshop_Sinaia_2018/program.html

4. A. Florian, J. Ivic, A. Streche (Păuna), M. Stoicescu, Reduction method for reaction-diffusion equations from biology, Belgrade Bio-Informatics Conference. June, 2018, (prezentare).

http://belbi2018.matf.bg.ac.rs/wp-content/uploads/2020/09/FridayProgramBelBi2018_2.pdf

5. A. Streche (Păuna), Reduction method for finding traveling wave solutions, Prezentare la New Bulgarian University, Sofia, August 2018.

<http://iaps.institute/reduction-method-for-finding-traveling-wave-solutions/>