

Matematici Speciale

Conf.Dr. Dana Constantinescu
Departamentul de Matematici Aplicate
Universitatea din Craiova

Cuprins

1. Ecuatii diferențiale	
1.1. Considerații generale	3
1.2. Ecuatii diferențiale de ordinul I.....	5
1.2.1. Ecuatii cu variabile separabile	6
1.2.2. Ecuatii liniare	7
1.2.3. Ecuatii cu diferențiale totale	8
1.2.4. Ecuatii reductibile la ecuații fundamentale.....	9
1.3. Ecuatii diferențiale liniare de ordin n	14
1.3.1. Ecuatii cu coeficienți constanți.....	14
1.3.2. Ecuatii cu coeficienți variabili	17
1.4. Sisteme de ecuații diferențiale	19
1.5. Elemente de calcul operațional și aplicații	23
1.5.1. Transformata Laplace directă	23
1.5.2. Transformata Laplace inversă	26
1.5.3. Calcul operațional	27
1.5.3.1. Rezolvarea ecuațiilor liniare	28
1.5.3.2. Rezolvarea sistemelor liniare	29
1.6. Aplicații în studiul circuitelor electrice.....	30
2. Analiză complexă	
2.1. Mulțimea numerelor complexe	32
2.2. Funcții elementare	35
2.3. Elemente de calcul diferențial	39
2.4. Elemente de calcul integral	40
2.4.1. Integrala curbilinie complexă	40
2.4.2. Integrala definită	41
2.4.3. Integralele lui Cauchy	41
2.4.4. Teorema reziduurilor și aplicații	42
3. Analiză Fourier	
3.1. Serii Fourier	48
3.2. Formula integrală Fourier	50
3.3. Transformata Fourier continuă	51
3.4. Transformata Fourier discretă	52
3.5. Transformata Fourier rapidă	53
4. Transformata Z	
4.1. Transformata Z directă.....	54
4.2 Transformata Z inversă	55
4.3. Rezolvarea ecuațiilor recurente	56
Bibliografie	58

1. ECUAȚII DIFERENȚIALE

Studiul ecuațiilor diferențiale formează obiectul unui capitol foarte important al matematicii, atât datorită rezultatelor teoretice deosebit de interesante cât și pentru că ele au nenumărate aplicații în cele mai diverse domenii.

Ceea ce deosebește o ecuație diferențială de o ecuație algebrică este faptul că necunoscuta nu este un număr ci o funcție care satisface o anumită egalitate și care trebuie determinate.

Multe fenomene sunt descrise cu ajutorul ecuațiilor diferențiale obținute prin metoda cunoscută sub numele de “metoda diferențialelor. Aceasta constă în înlocuirea unor relații ce apar între creșterile infinite mici ale unor cantități (care variază în timp) prin relații între diferențialele (derivatele) lor.

Spre exemplu viteza instantanee $v(t_0)$ de deplasare a unui mobil care la momentul t a parcurs distanța $s(t)$ este $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$. La rândul său accelerația corpului la momentul t_0 este $a(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0) = s''(t_0)$. În relațiile ce descriu mișcarea viteza se va considera $v(t) = s'(t)$ și $a(t) = v'(t)$.

Exemplu : Mișcarea unui corp sub acțiunea greutății sale și întâmpinând o rezistență a aerului proporțională cu viteza sa (acest caz corespunde vitezelor mici) poate fi descrisă cu ajutorul unei ecuații diferențiale.

Se notează $v(t)$ viteza instantanee a corpului la momentul de timp $t > 0$. Rezistența aerului va fi $R(t) = kv(t)$. Legea fundamentală a mecanicii ($\vec{F} = m\vec{a}$) conduce la relația

$$mg - kv(t) = mv'(t)$$

care reprezintă o ecuație diferențială cu necunoscuta $v = v(t)$. Pentru a determina viteza instantanee a corpului trebuie rezolvată această ecuație.

Problema fundamentală a teoriei ecuațiilor (în general) este determinarea soluțiilor lor sau aproximarea lor dacă determinarea analitică nu este posibilă.

Teoria ecuațiilor diferențiale are mai multe ramuri:

- **teoria cantitativă** se ocupă de rezolvarea analitică a ecuațiilor. Sunt precizate tipurile de ecuații și tehnicile de rezolvare a lor.
- **teoria calitativă** încearcă să deducă proprietățile soluțiilor, chiar dacă expresia lor analitică nu poate fi cunoscută
- **metodele numerice** sunt tehnici prin care valorile soluțiilor ecuației sunt approximate numeric.

Scopul acestui capitol este prezentare celor mai importante elemente ale teoriei cantitative a ecuațiilor diferențiale.

1.1 Considerații generale

Definiția 1 Se numește ecuație diferențială o ecuație în care intervine o variabilă reală independentă x , o funcție necunoscută $y = y(x)$ depinzând de acea variabilă și derivatele ei

$y', y'', y^{(n)}$, adică o egalitate de forma $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$
(1)

unde $F: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă.

Dacă derivata de ordin maxim care apare în ecuație este $y^{(n)}$ spunem că ecuația are ordinul n .

Definiția 2 Se numește soluție a ecuației diferențiale (1) pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$ orice funcție $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă de n ori pe I , care verifică ecuația, adică pentru orice $x \in I$ are loc egalitatea $F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$.

- **Soluția generală** a ecuației (1) este soluția care depinde de n constante arbitrare (exact atâtea cât este ordinul ecuației), adică este de forma $y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$. Aceasta este forma explicită a soluției pentru că se precizează modul în care funcția necunoscută y depinde de variabila independentă x

Uneori soluția generală este prezentată în formă implicită (integrala generală a ecuației) $\Omega(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$.

Soluția generală se poate obține și sub formă parametrică :

$$x = f(t, C_1, \dots, C_n), \quad y = g(t, C_1, \dots, C_n)$$

- Orice soluție care se obține din soluția generală pentru anumite valori particulare ale constantelor se numește **soluție particulară**.
- Soluțiile ecuației care nu se pot obține prin acest procedeu din soluția generală se numesc **soluții singulare**.

În probleme practice, alături de ecuația diferențială trebuie considerate și condiții inițiale

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (2)$$

Problema determinării unei soluții a ecuației (1) care să satisfacă condițiile inițiale (2) se numește **problemă Cauchy**.

Soluția unei probleme Cauchy (1)+(2) se obține impunând condițiile inițiale (2) soluției generale a ecuației (1)

Exemple

1. $y' = 3x^2$ este o ecuație diferențială de ordinul I.

Soluția sa generală este $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = x^3 + C$. Ea depinde de o singură constantă.

$y(x) = x^3 + 1$, $y(x) = x^3 - \sqrt{2}$ sunt soluții particulare ale ecuației pentru că au fost obținute din soluția generală pentru $C=1$, respectiv $C = -\sqrt{2}$. Există o infinitate de soluții particulare ale ecuației.

2. $y' = \sqrt{1-y^2}$ este o ecuație diferențială de ordinul I.

Funcția $y: \left[C - \frac{\pi}{2}, C + \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = \sin(x - C)$ reprezintă soluția generală a ecuației.

$y: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow R, y(x) = \sin x$ este soluție particulară (obținută din soluția generală pentru $C = 0$)

$y: [0, \pi] \rightarrow R, y(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ este soluție particulară (obținută din soluția generală pentru $C = \frac{\pi}{2}$)

Alte soluții particulare se pot obține în același mod, pentru fiecare domeniul de definiție fiind altul.

Ecuția admite soluțiile singulare $y_1: R \rightarrow R, y_1(x) = 1$ și $y_2: R \rightarrow R, y_2(x) = -1$.

3. $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} - 2y^{(2)} = 0$ este o ecuație diferențială de ordinul 5.

Soluția sa generală este $y: R \rightarrow R, y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{2x} + C_4 \cos x + C_5 \sin x$.

$y(x) = x, y(x) = 3 - \sin x$ sunt exemple de soluții particulare.

4. Problema Cauchy
$$\begin{cases} y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4 = 0 \\ y(0) = 5, y'(0) = 2, y''(0) = 3, y'''(0) = 24 \end{cases}$$

are soluția $y(x) = 2xe^{2x} + 5 \cos x$. Această soluție se obține din soluția generală a ecuației diferențiale, anume $y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$ determinând constantele din

$$\text{sistemul } \begin{cases} y(0) = C_1 + C_3 = 5 \\ y'(0) = 2C_1 + C_2 + C_4 = 2 \\ y''(0) = 4C_1 + 4C_2 - C_3 = 3 \\ y'''(0) = 8C_1 + 12C_2 - C_4 = 24 \end{cases} \quad \text{cu soluția } \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 2 \\ C_3 = 5 \\ C_4 = 0 \end{cases}$$

O problemă importantă în teoria ecuațiilor diferențiale este determinarea soluției generale a unei ecuații diferențiale date. Acest lucru este posibil numai pentru un număr restrâns de ecuații. Unele din aceste cazuri sunt prezentate în cele ce urmează.

1.2. Ecuații diferențiale de ordinul I

Ecuațiile de ordinul I au forma $F(x, y, y') = 0$. Cel mai adesea ele sunt scrise în formă explicită. Soluția lor generală depinde de o singură constantă.

Nu orice ecuație diferențială de ordinul I poate fi rezolvată analitic.

Din punctul de vedere al rezolvării există două categorii importante de ecuații :

- ecuații fundamentale (ecuațiile cu variabile separabile, ecuațiile liniare, ecuații cu diferențiale totale)

- ecuații reductibile la ecuații fundamentale (ecuații omogene și reductibile la ecuații omogene, ecuații care admit factor integrant, ecuații de tip Bernoulli, de tip Riccati, de tip Lagrange, de tip Clairaut etc)

Este foarte importantă cunoașterea algoritmului de rezolvare a ecuațiilor fundamentale și metodele de reducere a celorlalte ecuații la ecuațiile fundamentale.

1.2.1. Ecuații cu variabile separabile

Forma generală a ecuației este

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad (3)$$

unde $f, g: I \rightarrow R$ sunt funcții date, continue pe domeniul de definiție.

Soluțiile ecuației $g(y) = 0$ sunt soluții, de obicei singulare, ale ecuației (3).

Dacă $g(y) \neq 0$ rezolvarea constă în separarea variabilelor urmată de integrare.

Metoda de rezolvare:

- se rezolvă ecuația $g(y) = 0$ cu soluțiile y_1, y_2, \dots, y_k
- se scriu soluțiile singulare ale ecuației: $y(x) = y_1, y(x) = y_2, \dots, y(x) = y_k$.
- se scrie integrala generală a ecuației: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$. Se obține astfel forma implicită a soluției.
- din integrala generală se calculează (dacă este posibil) y și se obține forma explicită a soluției
- Soluția particulară a ecuației (3) care îndeplinește condiția inițială $y(x_0) = y_0$ este dată de

$$\int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^x f(t) dt \text{ sau se obține din soluția explicită.}$$

O formă particulară a ecuației cu variabile separabile este $y' = f(x)$. Soluția generală a acestei ecuații este $y(x) = \int f(x) dx$

Exemple : Să se rezolve

1. $y' = x^2 + \sin x$ (ecuație cu variabile separabile)

Soluția generală este $y(x) = \int (x^2 + \sin x) dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + C$

2. $y' = \frac{x}{x^2 + 1}$ (ecuație cu variabile separabile)

Soluția generală este $y(x) = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$

3. $y' = -\frac{y}{x}$ (ecuație cu variabile separabile)

În acest caz $f(x) = -\frac{1}{x}$ și $g(y) = y$, deci ecuația $g(y) = 0$ are soluția $y = 0$ și funcția $y: R - \{0\} \rightarrow R, y(x) = 0$ este soluție singulară a ecuației.

Dacă $y \neq 0$ ecuația devine $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$ și integrala ei generală este $\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{1}{x} dx$.

Rezultă $\ln|y| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| + C_1 \stackrel{\text{notatie}}{=} \ln\left|\frac{1}{x}\right| + \ln C = \ln C \left|\frac{1}{x}\right|$, adică $y = \frac{C}{x}$

Soluția generală a ecuației este deci $y: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{C}{x}$

1.2.2. Ecuații liniare

Forma generală a ecuației liniare este

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x) \quad (4)$$

unde $P, Q: I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții date, continue pe domeniul de definiție.

Această ecuație se rezolvă prin metoda variației constantei.

Metoda de rezolvare

- se rezolvă ecuația omogenă $y' = P(x) \cdot y$ care este o ecuație cu variabile separabile și se obține soluția nenulă $y = C \cdot f(x)$.
- Se consideră constanta C ca fiind funcție de x , adică se scrie $y(x) = C(x) \cdot f(x)$
- Se calculează $y'(x) = C'(x)f(x) + C(x)f'(x)$ și se introduce în ecuația (4). Termenii care conțin pe $C(x)$ se reduc și se obține o ecuație mai simplă de forma $C'(x) = g(x)$.
- se rezolvă ecuația $C'(x) = g(x)$ și se obține soluția $C(x) = \int g(x)dx + K$
- se introduce expresia lui $C(x)$ în $y(x) = C(x)f(x)$ și se obține forma explicită a soluției ecuației (4).

Observație : Forma explicită a soluției ecuației (4) este

$$y(x) = \left[K + \int_{x_0}^x \left(Q(s) e^{\frac{s}{x_0} \int P(t) dt} \right) ds \right] \cdot e^{\int_{x_0}^x P(t) dt} .$$

Această expresie se obține folosind algoritmul anterior dar e dificil de memorat și de aceea se recomandă folosirea algoritmului pentru rezolvarea fiecărei ecuații.

Exemplu : Să se rezolve problema Cauchy $\begin{cases} y' = y \cdot \operatorname{ctgx} + 2x \cdot \sin x \\ y(\pi/2) = a \end{cases}$ (ecuație liniară)

Funcția ctgx nu este definită în punctele $n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Din cauza condiției inițiale se va căuta soluția generală a ecuației pe intervalul $(0, \pi)$.

Ecuația omogenă $y' = y \cdot \operatorname{ctgx}$ are integrala generală $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$.

Rezultă $\ln|y| = \ln|\sin x| + C_1 = \ln(C|\sin x|)$ care dă soluția $y(x) = C \sin x$

Se aplică variația constantei, adică se consideră $y(x) = C(x) \sin x$.

Introducând $y'(x) = C'(x) \sin x + C(x) \cos x$ în ecuația neomogenă obținem

$C'(x) \sin x + C(x) \cos x = C(x) \sin x \frac{\cos x}{\sin x} + 2x \sin x$. Termenii conținând factorul $C(x)$ se reduc

și se obține ecuația $C'(x) = 2x$ cu soluția $C(x) = x^2 + K$.

Introducând această expresie în forma lui $y(x)$ obținem soluția generală a ecuației, anume

$y:(0,\pi) \rightarrow R, y(x) = (x^2 + K)\sin x$ unde $K \in R$ este o constantă arbitrară.

Din condiția $y(\pi/2) = a$ rezultă $\left(\frac{\pi^2}{4} + K\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$, adică $K = a - \frac{\pi^2}{4}$. Deci soluția

problemei Cauchy este $y:(0,\pi) \rightarrow R, y(x) = \left(x^2 + a - \frac{\pi^2}{4}\right)\sin x$.

1.2.3. Ecuații cu diferențiale totale

Forma generală a ecuației este

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (5)$$

unde P, Q sunt funcții date, de clasă C^2 pe domeniul $D \subset R^2$ și satisfac relația $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Rezolvarea ecuației se bazează pe faptul că există funcții de forma

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, t)dt$$

astfel încât $dU_{(x,y)} = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Soluția ecuației (5) va fi dată în forma explicită de relația $U(x, y) = C$.

Metodă de rezolvare

- se identifică în ecuație $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ și se verifică egalitatea $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
- se determină funcția U
- se scrie soluția ecuației sub formă implicită $U(x, y) = 0$. Dacă este posibil, din această egalitate se află y în funcție de x și se obține forma explicită a soluției.

Exemplu : Să se determine soluția generală a ecuației $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$.

In acest caz $P(x, y) = x + y + 1$ și $Q(x, y) = x - y^2 + 3$ și $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$

$$U(x, y) = \int_0^x P(t, 0)dt + \int_0^y Q(x, t)dt = \int_0^x (t+1)dt + \int_0^y (x-t^2+3)dt = \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y.$$

Soluția generală a ecuației este dată sub formă implicită de relația

$$\frac{x^2}{2} + x + 3y + xy - \frac{y^3}{3} = C.$$

Această ecuație nu poate fi rezolvată analitic în raport cu necunoscuta y , deci nu se poate preciza forma explicită a soluției.

1.2.4. Ecuații reductibile la ecuații fundamentale

Numele Ecuației	Forma generală	Metoda de reducere la ecuații fundamentale
Omogenă	$y' = f(y/x)$	Prin schimbarea de variabilă $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ se obține o ecuație cu variabile separabile

Reductibilă la ecuație omogenă	$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$	<p>- dacă $a/a' \neq b/b'$ se rezolvă sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ care are soluția (x_0, y_0)</p> <p>Prin schimbarea de variabile $x = u + x_0$, $y = v + y_0$ se obține o ecuație omogenă cu variabila independentă u și funcția necunoscută v.</p> <p>- dacă $a/a' = b/b'$ se folosește substituția $z = ax + by$ și ecuația se transformă într-o ecuație cu variabile separabile</p>
Ecuatii ce admit factor integrant	$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ cu $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ dar pentru care există factorul $\mu(x, y)$ a.î. $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$	<p>Dacă factorul integrant $\mu(x, y)$ poate fi determinat atunci ecuația $\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$ este o ecuație cu diferențială totală</p> <p>- dacă $(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x)/Q$ depinde doar de x atunci $\mu = \mu(x)$ satisface ec. $\mu' = \mu \frac{\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x}{Q}$</p> <p>- dacă $(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)/P$ depinde doar de y atunci $\mu = \mu(y)$ satisface ec. $\mu' = \mu \frac{\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y}{P}$</p>
Bernoulli	$y' = P(x) \cdot y + Q(x) \cdot y^\alpha$	Prin schimbarea de funcție $z = y^{1-\alpha}$ se obține o ecuație liniară. Soluția ecuației inițiale este $y = z^{\alpha-1}$
Riccati	$y' + P(x) \cdot y^2 + Q(x) \cdot y + R(x) = 0$	<p>Aceste ecuații se pot rezolva numai dacă se cunoaște măcar o soluție particulară a lor :</p> <p>- dacă se cunoaște o soluție $y_1(x)$, prin transformarea $y = y_1 + 1/z$ se obține o ecuație liniară și neomogenă</p> <p>- dacă se cunosc două soluții y_1 și y_2, prin schimbare de funcție $z = \frac{y - y_1}{y - y_2}$ se obține o ecuație liniară și omogenă.</p> <p>- dacă se cunosc trei soluții y_1, y_2, y_3 atunci soluția se obține direct din relația $\frac{y - y_1}{y - y_2} \cdot \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C$</p>
Lagrange	$y = x \cdot A(y') + B(y')$ unde $A(y') \neq y'$	<p>Se derivează ecuația și se notează $y' = p$.</p> <p>Se obține o ecuație liniară cu funcția necunoscută x și variabila independentă p.</p> <p>Această ecuație are soluția de forma $x = x(p)$ iar soluția generală a ec. Lagrange se dă în formă parametrică $\begin{cases} x = x(p) \\ y = x(p)A(p) + B(p) \end{cases}$</p>

Clairaut	$y = xy' + B(y')$	Soluția generală este $y(x) = Cx + B(C)$. Ecuția admite și soluția (parametrică) singulară $\begin{cases} x = -B'(p) \\ y = -B'(p)p + B(p) \end{cases}$
----------	-------------------	--

Exemple : Să se determine soluțiile generale ale următoarelor ecuații :

1. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ (ecuație omogenă)

Pentru $x \neq 0$ ecuația se scrie $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$. Cu schimbarea de variabilă $z(x) = \frac{y(x)}{x}$,

adică $y(x) = x \cdot z(x)$, ecuația devine $z(x) + xz'(x) = z(x) + \sqrt{1 + z^2(x)}$, care este o ecuație cu variabile separabile, anume $z'(x) = \frac{1}{x} \sqrt{1 + z^2}$. Integrala generală a ecuației este

$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{1}{x} dx$, adică $\ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = \ln|x| + C_1 = \ln(C|x|)$. Rezultă $z + \sqrt{1 + z^2} = Cx$ deci soluția generală a ecuației este

$$y: R - \{0\} \rightarrow R, \quad y(x) = x \frac{C^2 x^2 - 1}{2C|x|}$$

2. $(2x + 3y - 1) - (x - y - 3)y' = 0$ (ecuație reducibilă la ecuație omogenă)

Ecuția se scrie sub forma $y' = \frac{2x + 3y - 1}{x - y - 3}$. Sistemul $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ are soluția unică $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

Se face substituția $\begin{cases} x = u + 2 \\ y = v - 1 \end{cases}$ și se obține ecuația omogenă $(2u + 3v) + (v - u)v' = 0$ cu funcția

necunoscută v . Notând $z = \frac{v}{u}$, adică $v = zu$ ecuația se reduce la ecuația cu variabile

separabile $z' = \frac{1}{u} \cdot \frac{z^2 + 2z + 2}{1 - z}$. Integrala generală a acestei ecuații este $\int \frac{1 - z}{z^2 + 2z + 2} dz = \int \frac{1}{u} du$.

Calculând cele două integrale obținem $\frac{\ln(z^2 + 2z + 2)}{2} - 2 \operatorname{arctg}(z + 1) = \ln u + C$.

Tinând cont că $z = \frac{v}{u} = \frac{y + 1}{x - 2}$ se obține soluția generală sub formă implicită

$$\ln\left((y + 1)^2 + 2(x - 2)(y + 1) + 2(x - 2)^2\right) - 4 \operatorname{arctg} \frac{x + y - 1}{x - 2} = 0.$$

Forma explicită a soluției nu se poate determina.

3. $(4x + 6y + 4) - 3(6x + 9y - 2)y' = 0$ (ecuație reducibilă la ecuație omogenă)

Ecuția se scrie sub forma $y' = \frac{4x + 6y + 4}{3(6x + 9y - 2)}$. Deoarece $\frac{a}{a'} = \frac{4}{18} = \frac{b}{b'} = \frac{6}{27}$ se va folosi

substituția $2x + 3y = z$. Din $y = \frac{z - 2x}{3}$ rezultă $y' = \frac{z' - 2}{3}$. Ecuția devine $\frac{z' - 2}{3} = \frac{2z + 4}{9z - 6}$ adică

$z' = \frac{8z}{3z-2}$. Aceasta este o ecuație cu variabile separabile care se poate scrie sub forma

$$\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4z}\right)z' = 1.$$

Integrala generală a acestei ecuații conduce la relația $\frac{3}{8}z - \frac{1}{4}\ln z = x + C$. Ținând cont de expresia lui z se obține soluția generală a ecuației inițiale, soluție scrisă sub formă implicită :

$$3(2x+3y) - \ln(2x+3y)^2 - 8x = C$$

4. $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$ (ecuație de tip Bernoulli)

În acest caz $\alpha = 1/2$. Se folosește substituția $z = y^{1-1/2} = y^{1/2}$. Rezultă $y = z^2$ și $y' = 2 \cdot z \cdot z'$.

Ecuația devine $2 \cdot z \cdot z' = \frac{4}{x}z^2 + xz$ adică $z\left(2z' - \frac{4}{x}z - x\right) = 0$.

Din soluția $z = 0$ rezultă soluția singulară $y = 0$.

Ecuația liniară $z' = \frac{2}{x}z + \frac{x}{2}$ are soluția $z(x) = \left(\frac{1}{2}\ln x + K\right) \cdot x^2$ care conduce la

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}\ln x + K\right)^2 \cdot x^4.$$

5. $(4x + 3y + 3y^2)dx + (2xy + x)dy = 0$ (ecuație ce admite factor integrant)

În acest caz $P(x, y) = 4x + 3y + 3y^2$ și $Q(x, y) = 2xy + x$.

$\frac{\partial P}{\partial y} = 6y + 3$ și $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + 1$. Deoarece $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ ecuația nu are diferențială totală.

Totuși $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2}{x}$ depinde numai de x , deci se poate alege un factor integrant de forma

$\mu = \mu(x)$. El va satisface ecuația $\mu' = \mu \cdot \frac{2}{x}$ care este o ecuație cu variabile separabile cu

soluția $\mu(x) = x^2$. Din înmulțirea cu x^2 a ecuației inițiale se obține ecuația cu diferențială totală

$$(4x^3 + 3x^2y^2 + 3x^2y)dx + (2x^2y + x^3)dy = 0.$$

Funcția $U(x, y) = \int_0^x 4t^3 dt + \int_0^y (2x^2t + x^3) dt = x^4 + x^2y^2 + x^3y$. Soluția ecuației, scrisă sub formă

implicită va fi deci $x^4 + x^2y^2 + x^3y = C$.

6. $y' + \frac{1}{x^3-1}y^2 - \frac{x^2}{x^3-1}y - \frac{2x}{x^3-1} = 0$ (ecuație Riccati)

a) știind că admite soluția $y_1 = -x^2$

b) știind că admite soluțiile $y_1(x) = -x^2$ și $y_2(x) = -1/x$

c) știind că admite trei soluții $y_1(x) = -x^2$, $y_2(x) = -1/x$ și $y_3(x) = x+1$

a) Dacă se cunoaște numai soluția y_1 se face schimbarea de variabilă $y = \frac{1}{z} - x^2$ adică $y' = -\frac{1}{z^2}z' - 2x$.

Se obține ecuația $(x^3 - 1)\left(-\frac{1}{z^2}z' - 2x\right) + \left(\frac{1}{z} - x^2\right)^2 - x^2\left(\frac{1}{z} - x^2\right) - 2x = 0$ din care, după efectuarea calculelor rezultă ecuația liniară $z' + \frac{3x^2}{x^3 - 1}z - \frac{1}{x^3 - 1} = 0$ cu soluția $z = \frac{k + x}{x^3 - 1}$.
Rezultă $y = \frac{-1 - kx^2}{x + k}$.

b) Dacă se cunosc două soluții se face substituția $z = \frac{y + x^2}{y + 1/x}$ adică $y = \frac{z - x^3}{x(1 - z)}$ și $y' = \frac{(z' - 3x^2)x(1 - z) - (z - x^3)(1 - z - xz')}{x^2(1 - z)^2}$. Introducând aceste expresii în ecuația diferențială

obținem (după calcule) ecuația liniară $z' = \frac{z}{x}$ care are soluția $z = cx$. Rezultă $y = \frac{c - x^2}{1 - cx}$.
Observăm ca soluția obținută coincide cu cea de la a) dacă considerăm $c = -1/k$.

c) dacă se cunosc y_1, y_2, y_3 , soluția generală se obține direct din formula $\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = k$
de unde rezultă $y = \frac{x^2 - k}{kx - 1}$.

7. $y = x \cdot (y')^2 - y'$ (ecuație de tip Lagrange)

Prin derivarea ecuației se obține $y' = (y')^2 + 2xy'y'' - y''$. Se notează $y' = p$ și se ajunge la ecuația $p - p^2 = (2px - 1)p'$ în care p este funcție de x . Dacă se consideră x ca funcție de p (se inversează aplicația p) și se ține cont de faptul că $x' = 1/p'$ (din formula de derivare a funcției inverse) se obține ecuația liniară $x' + \frac{2x}{p-1} - \frac{1}{p(p-1)} = 0$ pentru $p(p-1) \neq 0$.

Rezultă $x = (C + \ln p)/(p-1)$ și soluția ecuației este data parametric prin

$$x = (C + \ln p)/(p-1), \quad y = p^2(C + \ln p)/(p-1) - p$$

Pentru $p=0$ și $p=1$ se obțin două soluții singulare: $y=K$ și $y=x+L$. Inlocuind aceste funcții în ecuația inițială se obține $K=0$, respectiv $L=-1$. Deci soluțiile particulare vor fi $y=0$ și $y=x-1$.

8. $y = xy' - (y')^2$ (ecuație de tip Clairaut)

Soluția generală este $y = Cx - C^2$ (vezi tabelul anterior) și o soluție particulară este dată parametric de
$$\begin{cases} x = 2p \\ y = xp - p^2 \end{cases}.$$

Exerciții propuse

Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale sau probleme Cauchy:

1. $y' - y/x = 0$ (liniară) **R** : $y = Cx + x^2$
2. $y' - 2y/x = x^3$ (liniară) **R** : $y = x^4/6 + C/x^2$
3. $xy' + y - e^x = 0, y(a) = b$ (liniară) **R** : $y = e^x/x - (ab - e^a)/x$
4. $y' - y/(1-x^2) - 1 - x = 0, y(0) = 0$ (liniară) **R** :

$$y = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x \in (-1, 1)$$
5. $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, y(0) = 0$ (liniară) **R** : $y = x/\cos x, \quad x \in [0, \pi/2)$
6. $xy' - y = y^3$ (Bernoulli) **R** : $y = Cx/\sqrt{1-C^2x^2}$
7. $(x-y)y - x^2y' = 0$ (omogenă) **R** : $y = 1/(\ln|x| + C)$
8. $(1-x^2)y' + xy = ax$ (cu var. sep) **R** : $y = a + C\sqrt{x^2 - 1}$
9. $xy' - 2y = x^3/2$ (liniară) **R** : $y = x^3/2 + Kx^2$
10. $y' - 2xy = x^3$ (liniară) **R** : $y = (x^2 - 1)/2 + Ce^{-x^2}$
11. $xy' - y = \ln x$ (liniară) **R** : $y = -\ln x - 1/(2x) + Cx$
12. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$ (dif. totale) **R** : $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 = C$
13. $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$ (dif. totale) **R** : $x^2 + 2xy + 2y^2 = C$
14. $xy' = y, y(1) = 0$ (cu var.sep.) **R** : $y = 0$
15. $xy' = y, y(1) = 1$ (cu var.sep.) **R** : $y = x$

1.3 Ecuații diferențiale liniare de ordin superior

O problemă importantă este rezolvarea ecuațiilor diferențiale de ordin mai mare ca 1. Sunt puține ecuațiile pentru care se poate preciza forma analitică a soluției. Cel mai frecvent utilizate sunt ecuațiile liniare.

Forma generală a ecuației liniare de ordin n este

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \quad (6)$$

Ecuația liniară omogenă asociată ecuației (6) este

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \quad (7)$$

Teoremă : Soluția generală a ecuației (6) este suma dintre soluția generală a ecuației omogene atașată și o soluție particulară a ecuației (6).

1.3.1. Ecuații cu coeficienți constanți

Metoda de rezolvare a ecuației liniare cu coeficienți constanți:

- se rezolvă ecuația omogenă și se obține soluția y_G
- se determină o soluție y_P a ecuației neomogene
- se scrie soluția generală a ecuației neomogene $y = y_G + y_P$.

A1) Rezolvarea ecuației omogene

Forma generală a unei ecuații cu coeficienți constanți este

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (8)$$

Teoremă : Dacă n soluții y_1, \dots, y_n formează un sistem fundamental de soluții al ecuației (9), atunci soluția generală a ecuației are forma

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (9)$$

unde $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ sunt constante arbitrare.

Problema rezolvării ecuației (9) se reduce deci la determinarea unui sistem fundamental de soluții. În cele ce urmează prezentăm principalele metode de rezolvare pentru ecuațiile liniare.

O soluție a ecuației se caută sub forma $y(x) = e^{\lambda x}$, prin analogie cu cazul $n=1$. Prin înlocuire în ecuația (8) se obține, după simplificarea cu $e^{\lambda x}$, ecuația caracteristică

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (10)$$

Teoremă : Fie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soluțiile ecuației (10).

- dacă $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt reale și distincte ale ecuației (10), atunci $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ sunt soluții liniar independente ale ecuației (8).
- Dacă λ_1 este rădăcină reală cu ordinul de multiplicitate p pentru ecuația (10), atunci $e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{p-1} e^{\lambda_1 x}$ sunt p soluții liniar independente ale ecuației (8).

c) Dacă $\lambda_1 = a + ib$ este rădăcină complexă de ordinul p a ecuației (10) atunci

$$\begin{array}{ll} e^{ax} \cos(bx), & e^{ax} \sin(bx) \\ x e^{ax} \cos(bx), & x e^{ax} \sin(bx) \\ x^2 e^{ax} \cos(bx), & x^2 e^{ax} \sin(bx) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x^{n-1} e^{ax} \cos(bx), & x^{n-1} e^{ax} \sin(bx) \end{array}$$

sunt soluții liniar independente ale ecuației (8).

Sistemul fundamental de soluții se obține prin reunirea soluțiilor liniar independente corespunzătoare tuturor rădăcinilor ecuației (10), iar soluția generală a ecuației (8) se obține folosind formula (9).

Exemple : Să se determine soluția generală a următoarelor ecuații :

1. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

Ecuția caracteristică este $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ și are soluțiile $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, Se aplică a) din Teoremă și se obține sistemul fundamental de (trei) soluții format din $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$. Soluția generală este

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

2. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

Ecuția caracteristică este $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ și are soluțiile $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Se aplică b) din Teoremă pentru $p = 3$. Sistemul fundamental de (trei) soluții este format din $y_1 = e^{-x}, y_2 = x e^{-x}, y_3 = x^2 e^{-x}$, iar soluția generală este

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}$$

3. $y'' + 4y' + 5y = 0$

Ecuția caracteristică este $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ și are soluțiile $\lambda_1 = -2 + i$ și $\lambda_2 = -2 - i$ deci se aplică c) din Teoremă pentru $a = -2, b = 1, p = 1$. Sistemul fundamental de (două) soluții este format din soluțiile $y_1 = e^{-2x} \cos x$ și $y_2 = e^{-2x} \sin x$ iar soluția generală este

$$y(x) = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x$$

4. $y^{IV} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$

Ecuția caracteristică este $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ cu soluțiile $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = i$ și $\lambda_4 = -i$. Soluția generală este

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

A2) Determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene

Forma generală a ecuației neomogene cu coeficienți constanți este

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

Nu există metode generale de determinare a unei soluții particulare dar, în unele cazuri simple, se pot folosi rezultatele următoare :

- a) Dacă $f(x) = P(x)$ este un polinom de grad k atunci soluția particulară este un polinom de același grad, cu coeficienți necunoscuți care se vor determina prin înlocuirea în ecuație.
- b) Dacă $f(x) = e^{ax}P(x)$ unde $P(x)$ este un polinom de grad k există două situații
- Dacă a nu este rădăcină a ecuației caracteristice soluția particulară se caută sub forma $y_p = e^{ax}Q(x)$, unde Q este un polinom de grad k cu coeficienți necunoscuți
 - Dacă a este rădăcină de ordin r a ecuației caracteristice atunci soluția particulară se caută sub forma $y_p = x^r e^{ax}Q(x)$, unde Q este un polinom de grad k cu coeficienți necunoscuți
- c) Dacă $f(x) = e^{ax}(P(x)\cos(bx) + Q(x)\sin(bx))$ atunci există de asemenea două situații
- Dacă $z = a + bi$ nu este soluție a ecuației caracteristice soluția particulară se caută sub forma $y_p(x) = e^{ax}(S(x)\cos(bx) + T(x)\sin(bx))$, unde $R(x)$ și $S(x)$ sunt polinoame cu coeficienți necunoscuți având drept grad cel mai mare dintre gradele lui P și Q
 - Dacă $z = a + bi$ este soluție de ordin r a ecuației caracteristice soluția particulară se caută sub forma $y_p(x) = x^r e^{ax}(S(x)\cos(bx) + T(x)\sin(bx))$, unde $R(x)$ și $S(x)$ sunt polinoame cu coeficienți necunoscuți având drept grad cel mai mare dintre gradele lui P și Q .

Exemple : Să se determine câte o soluție particulară pentru următoarelor ecuații :

5. $y'' - 2y' + y = x$

Funcția $f(x)$ este un polinom de gradul I, deci soluția particulară se caută sub forma

$y_p(x) = ax + b$. Atunci $y'(x) = a$ și $y''(x) = 0$. Introducând în ecuație obținem

$0 - 2a + ax + b = x$ și din identificarea coeficienților rezultă $a = 1$ și, adică $b = 2$. Soluția particulară este $y_p(x) = x + 2$.

Soluția generală a ecuației este $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + x + 2$

6. $y'' - 2y' + y = x e^x$

Deoarece $f(x) = x e^x = e^{1 \cdot x} P(x)$ se încadrează la b) pentru $a = 1$, $P(x) = x$ și $a = 1$ este rădăcină dublă a ecuației caracteristice, soluția particulară se va căuta sub forma

$y_p(x) = x^2 e^x (Ax + B)$.

Atunci $y'(x) = e^x (Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2x)$ și $y''(x) = e^x (Ax^3 + Bx^2 + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax + 2B)$.

Introducând în ecuație obținem $e^x (6Ax + 2B) = x e^x$. Din identificarea coeficienților se obține $A = 1/6$ și $B = 0$.

Soluția particulară este deci $y_p = x^3 e^x / 6$.

Soluția generală a ecuației este $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^3 e^x / 6$.

7. $y'' + y = x \sin x$

Funcția $f(x) = x \sin x = e^{0x} (0 \cdot \cos x + x \sin x)$ se încadrează la c) pentru $a = 0, b = 1, P(x) = 0$ și $Q(x) = x$. Deoarece $z = 0 + i$ este soluție a ecuației caracteristice $\lambda^2 + 1 = 0$, soluția particulară se va căuta sub forma $y_p = x e^{0x} [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$. Înlocuim în ecuație și identificând coeficienții se obține sistemul

$$2A + 2D = 0, \quad 4C = 0, \quad -2B + 2C = 0, \quad -4A = 1$$

cu soluția $A = 1/4, B = 0, C = 0, D = 1/4$. Soluția particulară este deci $-x^2 \cos x / 4 + x \sin x / 4$.

Soluția generală a ecuației este $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x^2 \cos x / 4 + x \sin x / 4$

1.3.2. Ecuații cu coeficienți variabili

Pentru determinarea soluției generale a ecuației omogene cu coeficienți variabili nu există metode generale. Dacă însă această soluție poate fi precizată, pentru determinarea unei soluții particulare se poate folosi metoda variației constantelor.

Teoremă: Fie $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ soluția generală a ecuației omogene

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0.$$

Dacă $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ satisfac sistemul

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + \dots + C_n'(x) y_n = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \dots + C_n'(x) y_n' = 0 \\ \dots \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)} + C_2'(x) y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

atunci $y(x) = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \dots + C_n(x) y_n$ este soluție a ecuației (7)

Exemplu : Să se determine soluția generală a ecuației $xy'' + y' = x, \quad x > 0$

Se notează $y' = z$. Ecuația omogenă asociată este $xz' + z = 0$. Rezultă $z = C_1 \frac{1}{x}$ adică

$y = C_1 \ln(x) + C_2$ Se folosește metoda variației constantelor pentru $y_1(x) = \ln x$ și $y_2(x) = 1$.

Sistemul devine

$$\begin{cases} C_1'(x) \ln x + C_2' = 0 \\ C_1'(x) \frac{1}{x} + C_2' = 0 = x \end{cases} \text{ cu soluțiile } \begin{cases} C_1(x) = x^2 \\ C_2(x) = -x^2 \ln x \end{cases} \text{ . Rezultă } \begin{cases} C_1(x) = \frac{x^3}{3} + A \\ C_2(x) = -\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + B \end{cases} .$$

Soluția generală a ecuației este $y(x) = \frac{x^3}{9} + A \ln x + B$.

Observație: Metoda variației constantelor poate fi folosită și pentru determinarea soluțiilor particulare ale ecuațiilor omogene cu coeficienți constanți atunci când funcția $f(x)$ nu se încadrează în situațiile prezentate anterior. În acest caz soluția generală a ecuației omogene se obține prin procedeul cunoscut.

Exemplu: Să se determine soluția generală a ecuației $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$, $x > 0$.

Soluția generală a ecuației omogene este $y_G(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Se aplică variația constantelor pentru $y_1(x) = e^x$ și $y_2(x) = x e^x$.

$$\text{Sistemul obținut este } \begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0 \\ C_1' e^x + C_2'(e^x + x e^x) = \frac{e^x}{x} \end{cases} \text{ cu soluțiile } \begin{cases} C_1(x) = -x + A \\ C_2(x) = \ln x + B \end{cases}$$

Soluția generală a ecuației este $y(x) = (-x + A)e^x + x e^x (\ln x + B)$.

Exerciții propuse : Determinați soluțiile generale ale următoarelor ecuații :

1. $y'' - 4y' + 4y = x^2$ **R :** $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{6}(2x^2 + 4x + 3)$
2. $y'' - y' + y = x^2 + 6$ **R :** $y(x) = e^{x/2} \left(C_1 \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right) + x^2 + 2x + 6$
3. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ **R :** $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$
4. $y'' - 8y' + 7y = 14$ **R :** $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{7x} + 2$
5. $y'' - y' = e^x$ **R :** $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{x}{2}e^x$
6. $y'' + y' - 6y = x e^{2x}$ **R :** $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x \left(\frac{x}{10} - \frac{1}{25} \right) e^{2x}$
7. $y'' + y = \cos x$ **R :** $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x \sin x$
8. $y'' + y = \sin^2 x$ **R :** $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{6} \cos(2x)$
9. $y''' - 13y'' + 12y' = 0$ **R :** $y(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{12x}$
10. $y''' - y = 0$ **R :** $y(x) = C_1 e^x + e^{-x/2} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right)$
11. $y^{IV} + 4y = 0$ **R :** $y(x) = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x} (C_3 \cos x + C_4 \sin x)$
12. $y^{IV} - 2y''' + y'' = e^x$ **R :** $y(x) = C_1 + C_2 x + \left(C_3 + C_4 x + \frac{x^2}{2} \right) e^x$
13. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$, $x > 0$ **R :** $y(x) = (C_1 + x C_2) e^{-x} + x e^{-x} \ln x$
14. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3 \sin 2x$ **R :** ec. omogenă are soluția $y(x) = C_1 x + C_2 x^2$
 $y(x) = 1 + C_1 x + C_2 x^2 - x \sin 2x / 2 - x^2 \cos 2x$
15. $x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$ **R :** ec omogenă are soluția $y(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$

Soluțiile fundamentale ale sistemului vor fi căutate sub forma $Y_i = (\alpha_{1i} \alpha_{2i} \dots \alpha_{ni})^T e^{\lambda_i x}$ unde λ_i sunt valori proprii a matricii A , adică soluțiile ecuației caracteristice a sistemului :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

iar constantele α_{ij} trebuiesc determinate din sistem. Soluția generală a sistemului este

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n \quad (14)$$

Există următoarele situații importante :

- Dacă ecuația caracteristică (13) are soluțiile reale și distincte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ și V_1, V_2, \dots, V_n sunt vectorii corespunzători acestor valori atunci soluția sistemului este

$$Y(x) = C_1 V_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 V_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n V_n e^{\lambda_n x}$$

- Dacă ecuația caracteristică (13) are soluții multiple (reale sau complexe), fiecare soluție λ cu ordinul de multiplicitate p contribuie în suma (14) cu termenii

$$Y_1 = V_1 e^{\lambda x}, Y_2 = e^{\lambda x} \left(\frac{x}{1!} V_1 + V_2 \right), \dots, Y_p = e^{\lambda x} \left(\frac{x^{p-1}}{(p-1)!} V_1 + \frac{x^{p-2}}{(p-2)!} V_2 + \dots + \frac{x}{1!} V_{p-1} + V_p \right)$$

unde V_1, V_2, \dots, V_p sunt vectorii proprii principali corespunzători valorii proprii λ

Problema rezolvării sistemului (13) se reduce deci la determinarea valorilor proprii ai matricii A și a vectorilor proprii corespunzători acestor valori.

Metoda de rezolvare :

- Se scrie matricea A a sistemului.
- Se determină valorile proprii ale matricii rezolvând ecuația (13)
- Pentru fiecare valoare proprie λ_i se determină vectorii proprii (atâția cât e ordinul de multiplicitate al lui λ_i și se scriu soluțiile corespunzătoare lui λ_i
- Se scrie sistemul fundamental de soluții al sistemului
- Se scrie soluția generală

Exemple : Să se determine soluția generală a sistemelor următoare

$$1. \begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

a) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) Valorile proprii ale matricii A sunt soluțiile ecuației $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ adică

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 \text{ și } \lambda_3 = 6.$$

c) Valoarea λ_1 are ordinul de multiplicitate 1, deci va avea un singur vector propriu

principal, $V_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ care verifică ecuația $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$.

Din rezolvarea sistemului compatibil nederminat cu un grad de libertate

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 2\alpha_1 \\ -\alpha_1 + 5\alpha_2 - 3\alpha_3 = 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 2\alpha_3 \end{cases}$$

se obține soluția $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$. Se dă lui α o valoare particulară, de exemplu $\alpha = 1$ și obținem

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. În mod asemănător obținem $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ și $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ corespunzător valorilor λ_2 și λ_3 .

d) Sistemul fundamental de soluții este $Y_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ -e^{2x} \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$, $Y_3 = \begin{pmatrix} e^{6x} \\ -2e^{6x} \\ e^{6x} \end{pmatrix}$.

e) Soluția generală este $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x} \\ y_2 = C_2 e^{3x} - 2C_3 e^{6x} \\ y_3 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x} \end{cases}$

$$2. \begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_3 + y_1 \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{cases}$$

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ecuația caracteristică, $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$ are rădăcinile

$\lambda_1 = 2$ și $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Un vector propriu al lui λ_1 este $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Subspațiul valorii proprii

$\lambda_2 = \lambda_3$ are dimensiunea 2. Vectorii proprii satisfac ecuația $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, adică

sistemul cu două grade de nedeterminare $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$. Alegând $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 0$ se obține

$\alpha_3^* = 1$ și pentru $\alpha_1^* = 0, \alpha_2^* = 1$ se obține $\alpha_3^* = -1$. Cei doi vectori proprii principali vor fi

$$V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ și } V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soluția generală a sistemului este $Y = C_1 V_1 e^{2x} + C_2 V_2 e^{-x} + C_3 (x V_2 + V_3) e^{-x}$ adică

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} - C_3 x e^{-x} \\ y_2 = C_1 e^{2x} + C_3 e^{-x} \\ y_3 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 (x-1) e^{-x} \end{cases}.$$

1.4.2. Sisteme liniare neomogene

Forma generală este $Y'(x) = A \cdot Y(x) + F(x)$ (14)

Ca și în cazul ecuațiilor liniare neomogene, soluția generală a sistemului neomogen este suma dintre soluția generală a sistemului omogen și o soluție particulară a sistemului neomogen.

Pentru determinarea soluției particulare se poate folosi metoda variației constantelor.

Teoremă : Dacă $Y = C_1 Y_1 + \dots + C_n Y_n$ este soluția sistemului omogen asociat lui (14) atunci o soluție particulară a acestuia este $Y_p = C_1(x) Y_1 + \dots + C_n(x) Y_n$ unde funcțiile $C_1(x), \dots, C_n(x)$ satisfac ecuația

$$C_1'(x) Y_1 + C_2'(x) Y_2 + \dots + C_n'(x) Y_n = F(x) \quad (15)$$

Din ecuația (15) se calculează $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ și apoi, prin integrare se obțin C_1, C_2, \dots, C_n .

Exerciții propuse

1 Să se rezolve sistemele următoare :

1. $\begin{cases} y' + 2y + 4z = 1 + 4x \\ z' + y - z = 3x^2 / 2 \end{cases}$ **R :** $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x^2 + x, z = -C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} / 4 - x^2 / 2$

2. $\begin{cases} y' + 2y + z = \sin x \\ z' - 4y - 2z = \cos x \end{cases}$ **R :** $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{3}{8} \cos x - \frac{1}{8} \sin x, z(x) = \sin x - y' - 2y$

3. $\begin{cases} y' = z \\ z' = u \\ u' = y \end{cases}$ **R :** $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x/2} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + C_3 e^{-x/2} \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}$
 $z(x) = y'(x)$
 $u(x) = z'(x)$

$$\begin{array}{l}
4. \begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 2x - y \end{cases} \quad \mathbf{R}: \begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} \\ y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-3t} \end{cases} \\
5. \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y + t \end{cases} \quad \mathbf{R}: \begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{2t} - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \\ y(t) = -C_1 + C_2 e^{2t} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \end{cases} \\
6. \begin{cases} y' = z + u \\ z' = y + u \\ u' = y + z \end{cases} \quad \mathbf{R}: \begin{cases} y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \\ z(x) = C_1 e^{2x} + C_3 e^{-x} \\ u(x) = C_1 e^{2x} - (C_2 + C_3) e^{-x} \end{cases}
\end{array}$$

1.5. Elemente de calcul operațional și aplicații în teoria ecuațiilor diferențiale

Calculul operațional se ocupă cu studiul transformărilor integrale. Acestea, numite și “operatori integrali”, transformă derivarea și integrarea în operații algebrice. Ecuațiilor diferențiale și integrale le corespund ecuații algebrice. Pentru a rezolva o ecuație diferențială este sufficient să se rezolve ecuația algebrică și să se aplice transformarea Laplace inverse soluției obținute. Cele mai directe aplicații în studiul ecuațiilor diferențiale îl are transformata Laplace

1.5.1. Transformata Laplace

Transformata Laplace este un operator între două spații de funcții, operator care transformă derivarea și integrarea în operații algebrice.

Notăm $F_R = \{f : R \rightarrow R\}$.

Definiție: Funcția $f \in F_R$ este un original dacă satisface condițiile următoare:

- $f(t) = 0$ pentru orice $t < 0$
- f e derivabilă pe porțiuni
- există $M > 0$ și $s > 0$ astfel încât $|f(t)| < M \cdot e^{st}$ pentru orice $t > 0$.

Numărul pozitiv $s_0 = \min\{s \mid |f(t)| < M \cdot e^{st}, \forall t > 0\}$ se numește indice de creștere (sau abscisă de convergență).

Mulțimea funcțiilor original se notează O_R .

Exemple: Următoarele funcții sunt funcții original:

$$\begin{array}{l}
a) f(t) = \begin{cases} e^{kt}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (M = 1, s_0 = k) \\
b) \sigma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (M = 1, s_0 = 0)
\end{array}$$

Această funcție se numește “treapta lui Heaviside”.

c) Dacă funcția f satisface condițiile b) și c) din definiția precedentă atunci $\phi(t) = \sigma(t) \cdot f(t)$ este un original.

Definiție : Aplicația $L : O_R \rightarrow R$ definită de

$$(Lf)(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

se numește transformata Laplace.

Funcția $Lf : (s_0, \infty) \rightarrow R$ este imaginea lui f prin transformata Laplace.

Prin calcul direct se pot obține transformatele Laplace pentru multe funcții elementare.

Exemple : Să se calculeze transformatele Laplace ale funcțiilor

1) $f(t) = \sigma(t) \cdot e^{kt}$.

$$(Lf)(p) = \int_0^{\infty} e^{kt} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{(k-p)t} dt = \frac{1}{k-p} e^{(k-p)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{p-k}$$

2) $f(t) = \sigma(t) \sin t$

$$(Lf)(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin t dt = -e^{-pt} \cos t \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} p e^{-pt} \cos t dt = 1 - p \left(e^{-pt} \sin t \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^{\infty} p e^{-pt} \sin t dt \right)$$

Rezultă

$$(Lf)(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

Principalele proprietăți ale transformatei Laplace sunt listate în tabelul următor.

Numele proprietății	Formula
1. Definiție	$Lf(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$
2. Teorema omotetiei	$L(f(\lambda t))(p) = \frac{1}{\lambda} (Lf)\left(\frac{p}{\lambda}\right)$
3. Derivarea originalului	$(Lf')(p) = p \cdot (Lf)(p) - f(0)$ $(Lf'')(p) = p^2 \cdot (Lf)(p) - p \cdot f(0) - f'(0)$ $(Lf^{(n)})(p) = p^n (Lf)(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
4. Derivarea imaginii	$(Lf)^{(n)} = \int_0^{\infty} (-t)^n f(t) e^{-pt} dt$
5. Integrarea originalului	$\left(L \int_0^t f(\tau) d\tau \right) = \frac{(Lf)(p)}{p}$

6. Integrarea imaginii	$\int_p^\infty (Lf)(q) dq = \left(L \left(\frac{f(t)}{t} \right) \right) (p)$ <p>pentru $p=0$ $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty (Lf)(p) dp$</p>
7. Teorema translației	$L(e^{p_0 t} f(t))(p) = (Lf)(p - p_0)$
8. Teorema întârzierii	$L(f(t - \tau))(p) = e^{-p\tau} (Lf)(p)$
9. Imaginea produsului de convoluție	$L\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)dt\right)(p) = (Lf)(p) \cdot (Lg)(p)$

Folosind formulele din tabelul de mai sus (toate formulele se demonstrează prin calcul direct) se pot calcula transformatele Laplace ale multor funcții elementare.

Exemple : Găsiți imaginile următoarelor funcții originale :

1. $f(t) = \sigma(t) \cdot \sin(\lambda t)$

Se folosește teorema de omotetie și rezultă $(Lf)(p) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{(p^2/\lambda^2 + 1)} = \frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}$.

2. $f(t) = \sigma(t) \sin^2 t$

Se folosește derivarea originalului. Din $f'(t) = \sigma(t) 2 \sin t \cos t = \sigma(t) \sin(2t)$ și

$(Lf')(p) = p(Lf)(p) - f(0)$ rezultă $(Lf)(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)}$.

3. $g(t) = t^2 e^t$

Se folosește derivarea imaginii pentru $f(t) = e^t$ și $n = 2$. Rezultă

$\left(L \left((-t)^2 e^t \right) \right) (p) = (Lf)^{(n)}(p) = \left(\frac{1}{p-1} \right)^{(n)} = \frac{2}{(p-1)^2}$

4. $h(t) = \frac{\sin t}{t}$

Se folosește integrarea imaginii : $L\left(\frac{\sin t}{t}\right)(p) = \int_p^\infty (Lf)(q) dq = \int_p^\infty \frac{1}{q^2 + 1} dq = \arctg q \Big|_{q=p}^{q=\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctg p$

Imaginile celor mai importante funcții elementare sunt conținute în tabelul următor :

Originalul	Imaginea
1	$\frac{1}{p}$
$t^n, n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

$t^n \cdot e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$sh(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$ch(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{p^2 + \omega^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\sin(t - \tau)$	$\frac{e^{-p\tau}}{p^2 + 1}$
$\cos(t - \tau)$	$\frac{pe^{-p\tau}}{p^2 + 1}$
$\ln t$	$\frac{1}{p} \left(\ln \frac{1}{p} - \gamma \right)$ cu $\gamma \approx 0.57722$

1.5.2. Inversa transformatei Laplace

Prin transformata Laplace L definită pe O_r se calculează imaginile funcțiilor original $f \in O_r$. Prin transformata Laplace inversă L^{-1} se regăsește funcția original care corespunde unei imagini date.

Principalele cazuri în care funcția original poate fi determinată analitic sunt prezentate în cele ce urmează.

1. Dacă $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ este o fracție rațională atunci ea se descompune în fracții simple și

se găsește originalul fiecărei fracții folosind tabelul anterior.

Exemple : Să se determine originalul următoarelor funcții

$$\text{a) } F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$$

Se observă că $\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = -\frac{1}{4} \frac{1}{p} + \frac{1}{5} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{20} \frac{p}{p^2+4}$. Originalul lui $\frac{1}{p}$ este 1 (în tabelul transformatelor Laplace pe coloana din stânga corespunzătoare lui $1/p$ este scrisă funcția "1", originalul lui $\frac{1}{p-1}$ este e^t , originalul lui $\frac{p}{p^2+4}$ este $\cos 2t$ iar originalul lui $\frac{1}{p^2+4}$ este $\frac{1}{2} \sin 2t$.

Rezultă că originalul lui $F(p)$ este $f(t) = -\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{5} e^t + \frac{1}{20} \cos 2t - \frac{1}{10} \sin 2t$.

$$\text{b) } F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$$

Se observă că $F(p) = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1}$ este imaginea unui produs de convoluție, adică

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} = L \left(\int_0^t \sin \tau \cdot \sin(t-\tau) d\tau \right) (p) = (Lf)(p).$$

Rezultă că $f(t) = \int_0^t \sin \tau \cdot \sin(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\cos(t-2\tau) - \cos t}{2} d\tau = \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} \sin t$.

2. Dacă $F(p) = \frac{Q(p)}{(p-p_1)^{n_1} \cdot (p-p_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (p-p_k)^{n_k}}$ este o fracție în care $n_1, n_2, \dots, n_k \geq 2$ atunci

descompunerea în fracții simple este dificilă și se poate folosi direct formula

$$f(t) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n_i-1)!} \cdot \lim_{p \rightarrow p_i} \left(F(p) \cdot e^{pt} \cdot (p-p_i)^{n_i} \right)^{(n_i-1)}$$

unde exponentul (n_i-1) arată că expresia din paranteză se derivatează de (n_i-1) ori.

Exemplu : Să se determine originalul lui $F(p) = \frac{p}{(p^2-1)^2}$

Deoarece $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+1)^2}$ se folosește formula anterioară pentru $p_1=1, p_2=-1, n_1=n_2=2$.

Deci

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow 1} \left(\frac{p}{(p+1)^2} e^{pt} \right)' + \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow -1} \left(\frac{p}{(p-1)^2} e^{pt} \right)' = \\ &= \lim_{p \rightarrow 1} \left(e^{pt} \left(\frac{p^2}{(p+1)^2} + \frac{(p+1)^2 - 2p(p+1)}{(p+1)^4} \right) \right) + \lim_{p \rightarrow -1} \left(e^{pt} \left(\frac{p^2}{(p-1)^2} + \frac{(p-1)^2 - 2p(p-1)}{(p-1)^4} \right) \right) = \frac{1}{4} t(e^t + e^{-t}) = \frac{1}{2} t \cdot \text{sh}t \end{aligned}$$

3. Dacă funcția $F(p)$ conține factorul $e^{-\lambda p}$ se folosește teorema întârzierii.

Exemplu : Să se determine originalul funcției $F(p) = \frac{2e^{-p}}{p^2}$.

Deoarece $F(p) = e^{-p} \frac{2!}{p^2} = e^{-p} (Lt^2)(p) = (L(t-1)^2)(p)$, ceea ce s-a obținut aplicând teorema întârzierii pentru $\tau=1$ și $t=t^2$, rezultă că $f(t) = (t-1)^2 \cdot \sigma(t-1)$. Înmulțirea cu $\sigma(t-1)$ este necesară pentru ca f să fie o funcție originală.

1.5.3. Calcul operațional

Calculul operațional, numit și calcul simbolic, a fost introdus la sfârșitul secolului XIX de fizicianul englez O. Heaviside. Acesta a pus în evidență (fără nici o justificare matematică) faptul că este posibilă rezolvarea rapidă a unor ecuații folosind un operator simbolic, evitând astfel calcule lungi ce apar în rezolvarea clasică. Această metodă se justifică parțial folosind Transformata Laplace care transformă derivarea în înmulțire cu variabila p și integrarea în împărțire la aceeași variabilă.

Pentru rezolvarea anumitor tipuri de ecuații (E) folosind transformata Laplace se parcurg următoarele etape :

a) Se formează ecuația operațională (EO) prin aplicarea transformatei Laplace celor doi membri ai ecuației.

Ecuație operațională este o ecuație algebrică de gradul I având drept necunoscută imaginea (prin transformata Laplace) a necunoscutei ecuației.

b) Se rezolvă ecuația operațională

Soluția (unică) a ecuației este imaginea necunoscutei din ecuația inițială

c) Se determină originalul funcției soluție de la b). Acesta reprezintă soluția ecuației inițiale.

Principalele aplicații ale calculului operațional sunt :

- calculul integralelor improprii
- rezolvare ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți
- rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți
- rezolvarea unor ecuații integrale
- rezolvarea unor ecuații integro-diferențiale
- rezolvarea ecuațiilor cu argument întârziat
- rezolvarea unor ecuații cu derivate parțiale

1.5.31 Rezolvarea ecuațiilor liniare cu coeficienți constanți și a problemelor Cauchy atașate

Problema Cauchy având necunoscuta $y = y(t)$ are forma

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = f(t) \\ y(0) = y_{00}, y'(0) = y_{01}, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{0n-1} \end{cases} \quad (E).$$

Aplicând transformata Laplace ecuației (E) se obține ecuația operațională

$$a_n (Ly^{(n)})(p) + a_{n-1} (Ly^{(n-1)})(p) + \dots + a_0 (Ly)(p) = (Lf)(p).$$

Se notează $(Ly)(p) = Y(p)$, se folosește teorema de derivare a originalului și se obține ecuația operațională

$$a_n(p^n Y(p) + p^{n-1}y(0) + \dots y^{(n-1)}(0)) + \dots + a_1(pY(p) - y(0)) + a_0Y(p) = F(p) \quad (\text{EO}).$$

Se aplică apoi algoritmul de rezolvare prezentat anterior.

Metoda se poate folosi și pentru determinarea soluției generale a ecuației diferențiale. În acest caz valorile $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ reprezintă cele n constante ce apar în soluția generală.

Exemple : 1. Să se determine soluția generală a ecuației $y'' - 3y' + 2y = e^{-t}$

a) Ecuația operațională este $(p^2 - 3p + 2)Y(p) - py(0) - y'(0) + 3y(0) = \frac{1}{p+1}$.

b) Soluția ecuației operaționale este

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)(p+1)(p-2)} + y(0) \frac{p}{(p-1)(p-2)} + (y'(0) + 3y(0)) \frac{1}{(p-1)(p-2)}.$$

După descompunerea în fracții simple rezultă

$$Y(p) = \left(-\frac{1}{2} + 2y(0) + y'(0) \right) \frac{1}{p-1} + \frac{1}{6} \frac{1}{p+1} + \left(\frac{1}{3} + 5y(0) + 3y'(0) \right) \frac{1}{p-2} = C_1 \frac{1}{p-1} + C_2 \frac{1}{p-2} + \frac{1}{6} \frac{1}{p+1}$$

c) Originalul lui $Y(p)$ este $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \frac{1}{6} e^{-t}$. Aceasta este soluția generală a ecuației liniare.

În această situație aplicarea transformatei Laplace pentru rezolvarea ecuației nu ușurează calculele. Aplicarea ei este justificată mai ales în rezolvarea problemelor Cauchy.

2. Să se rezolve problema Cauchy $\begin{cases} y'' + y = 2 \cos t \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$

a) Ecuația operațională este $p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) + Y(p) = \frac{2p}{p^2 + 1}$.

b) Soluția ecuației operaționale este $Y(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} + \frac{1}{p^2 + 1}$. Pentru a nu efectua operații

aritmetice inutile este recomandabil să nu se aducă fracțiile la același numitor.

c) Originalul clui $Y(p)$ este $y(t) = \sigma(t)(t \sin t + \sin t)$.

Soluția problemei Cauchy este $y(t) = (t+1) \sin t$.

1.5.3.2. Rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți

Pentru a rezolva astfel de sisteme se obține sistemul de ecuații operaționale aplicând transformata Laplace tuturor ecuațiilor sistemului.

Soluțiile sistemului sunt imaginile funcțiilor necunoscute ale sistemului inițial. Prin aplicarea transformatei Laplace inversă se obțin soluțiile căutate.

Exemplu : Să se rezolve problema Cauchy
$$\begin{cases} x'' + x + y'' - y' = e^t \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t} \\ x(0) = y(0) = y'(0) = 0, x'(0) = 1 \end{cases}$$

Sistemul operațional este
$$\begin{cases} p^2 X(p) - 1 + pX(p) + p^2 Y(p) - Y(p) = \frac{1}{p-1} \\ pX(p) + 2X(p) - pY(p) + Y(p) = \frac{1}{p+1} \end{cases}$$
. El este un sistem de

ecuații liniare cu necunoscutele $X(p)$ și $Y(p)$.

Soluția sistemului este
$$\begin{cases} X(p) = \frac{1}{8} \frac{1}{p-1} + \frac{3}{4} \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{8} \frac{1}{p+1} \\ Y(p) = \frac{3p}{3(p^2-1)^2} \end{cases}$$

Soluția sistemului este
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4} \cdot \text{sh}t + \frac{3}{4} t e^{-t} \\ y(t) = \frac{3}{4} t \cdot \text{sh}t \end{cases}$$

Exerciții propuse : Aplicând metodele calculului operațional să se rezolve următoarele probleme Cauchy :

1. $y'' + 20y = 0, y(0) = 0.5, y'(0) = 4$

R : $y(t) = \frac{1}{2} \cos(2t\sqrt{5})$

2. $x' + x = e^{-t}, x(0) = 1$

R : $x(t) = (t+1)e^{-t}$

3. $x' - x = 1, x(0) = -1$

R : $x(t) = -1$

4. $x' + 2x = \sin t, x(0) = 0$

R : $x(t) = \frac{1}{5} (e^{-2t} - \cos t + 2 \sin t)$

5. $x'' = 1, x(0) = 0, x'(0) = 1$

R : $x(t) = t + \frac{1}{2} t^2$

6. $x'' + x' = 1, x(0) = 0, x'(0) = 1$

R : $x(t) = t$

7. $x'' + 3x' = e^t, x(0) = 0, x'(0) = -1$

R : $x(t) = \frac{1}{4} e^t + \frac{5}{12} e^{-3t} - \frac{2}{3}$

8. $x''' + x' = 1, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

R : $x(t) = t - \sin t$

9. $x''' + x' = t, x(0) = 0, x'(0) = -1, x''(0) = 0$

R : $x(t) = \frac{1}{2} t^2 - 1 + \cos t - \sin t$

10. $x''' - x'' = \sin t, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

R : $x(t) = \frac{1}{2} e^t - t - 1$

11. $x'' - 2x' = e^{2t}, x(0) = x'(0) = 0$

R : $x(t) = \frac{1}{4} (1 - e^{2t} + 2te^{3t})$

12. $x''' + x'' = \sin t, x(0) = -1, x'(0) = 2, x''(0) = 0$

R : $x(t) = \frac{3}{5} e^{-t} \sin 2t - \frac{4}{5} e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{5}$

13. $x''' + x'' = \sin t$, $x(0) = x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$ **R** : $x(t) = 2t + \frac{1}{2}(e^{-t} + \cos t - \sin t)$
14. $x'' + x = \cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$ **R** : $x(t) = \frac{1}{2}(t \sin t - \cos t + \sin t)$
15. $x'' + 2x' + x = t^2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ **R** : $x(t) = t^2 - 4t + 6 - 5e^{-t} - te^{-t}$

1.6. Aplicații ale ecuațiilor diferențiale în studiul circuitelor electrice

1.6.1. Descărcarea unui condensator printr-o rezistență

Fenomenul este important pentru că apare în circuitele folosite la transmisiunile radio, de televiziune, la radare etc.

Problema : Se consideră un circuit electric format dintr-un condensator cu capacitatea C și o rezistență R . Se cere intensitatea curentului, $i(t)$ și diferența de potențial $v(t)$ la bornele condensatorului în funcție de momentul t la care se face măsurarea dacă sarcina inițială este Q .

Rezolvare : Considerăm funcțiile $i, q, v: [0, +\infty) \rightarrow R$ care indică intensitatea, sarcina și diferența de potențial la bornele condensatorului.

Intre ele există relația $q(t) = Cv(t)$.

Intensitatea curentului electric la descărcare este $i(t) = -q'(t)$ și la bornele rezistenței ea satisface relația $i = \frac{v}{R}$ (legea lui Ohm).

Relațiile anterioare arată că acest circuit este caracterizat de problema Cauchy

$$\begin{cases} q'(t) = -\frac{q(t)}{C \cdot R} \\ q(0) = Q \end{cases} \quad (\text{CR})$$

în care $q = q(t)$ este funcția necunoscută iar C și R sunt constante date în problemă.

Ecuația diferențială poate fi considerată ca o ecuație cu variabile separabile sau ca o ecuație liniară și omogenă de ordinul I. Soluția problemei Cauchy este

$$q(t) = Qe^{-\frac{t}{CR}}.$$

Intensitatea curentului (la descărcare) este $i(t) = -q'(t) = \frac{Q}{CR} e^{-\frac{t}{CR}} = I_0 e^{-t/(CR)}$ iar

$$v(t) = R \cdot i(t) = \frac{Q}{C} e^{-\frac{t}{CR}}.$$

Momentul începând de la care descărcarea este practic terminată se consideră a fi τ pentru care $i(\tau) = \frac{I_0}{100}$. Se obține $e^{-\frac{\tau}{CR}} = \frac{1}{100}$ adică $\tau = 2 \cdot C \cdot R \cdot \ln 10 \approx 4,6 \cdot C \cdot R$

1.6.2. Incărcarea unui condensator printr-o rezistență în prezența unei surse de curent continuu

Problemă : Se consideră un circuit alcătuit dintr-un condensator cu capacitatea C , o rezistență R și o sursă de curent continuu având forța electromotoare constantă E . Se cere să se determine intensitatea curentului și diferența de potențial la bornele condensatorului în funcție de momentul la care se face măsurarea.

Rezolvare : Se consideră funcțiile $i, q, v: [0, +\infty) \rightarrow R$ care reprezintă intensitatea curentului, sarcina condensatorului și diferența de potențial la bornele acestuia.

La încărcarea condensatorului $i(t) = q'(t)$ iar $v(t) = \frac{q(t)}{C}$.

Legea lui Kirchoff arată că $i(t) = \frac{E - v(t)}{R}$, deci problema Cauchy ce caracterizează circuitul este

$$\begin{cases} R \cdot q'(t) + \frac{q(t)}{C} = E \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

Soluția generală a ecuației (liniară și neomogenă de ordinul I) este $q(t) = CE + Ke^{-\frac{t}{CR}}$ iar soluția problemei Cauchy este

$$q(t) = C \cdot E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right).$$

Rezultă imediat $v(t) = \frac{q(t)}{C} = E \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right)$ și $i(t) = q'(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{CR}}$.

Momentul în care condensatorul este practic încărcat este cel la care diferența de potențial este $v(\tau) = \frac{99}{100} E$. Din $\frac{99}{100} E = E \left(1 - e^{-\frac{\tau}{CR}} \right)$ rezultă $\tau = C \cdot R \cdot \ln 100 \approx 4,6 \cdot C \cdot R$

1.6.3. Formula fundamentală a curentului alternativ

Problemă : Se consideră un circuit în care acționează o forță electromotoare datorată unei variații de flux și conținând o rezistență R și o bobină cu inductanța proprie L montate în serie. Să se determine intensitatea curentului electric din circuit.

Rezolvare : Pentru a obține o variație a fluxului electric $\Phi(t)$ se consideră un cadru cu n spire de arie S mișcându-se într-un camp magnetic cu inducția B , cadru închis printr-un circuit exterior. Acest cadru se rotește uniform cu viteza unghulară ω .

Fluxul captat $\Phi(t)$ se descompune în două părți :

- Fluxul $\Phi_1(t) = n \cdot B \cdot S \cdot \sin \omega t$ provenind de la polul nord al câmpului magnetic
- Fluxul $\Phi_2(t) = L \cdot i(t)$ generat de cadrul parcurs de curentul electric

Din relația (dată în problemă) $E(t) = -\Phi'(t)$ și ținând cont de faptul că $i(t) = \frac{E(t)}{R}$ se obține

ecuația $i(t) = -\frac{n \cdot B \cdot S \cdot \omega}{R} \cos \omega t - \frac{L}{R} \cdot i'(t)$. Ea se scrie sub forma

$$L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = -n \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \cos \omega t = E_0 \cos \omega t$$

Pentru rezolvarea acestei ecuații se poate folosi calculul operațional.

Ecuația operațională corespunzătoare este (pentru $i(0) = 0$)

$$L \cdot (p \cdot I(p) - 0) + R \cdot I(p) = E_0 \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

din care rezultă (notând $k = R/L$)

$$I(p) = E_0 \frac{p}{(p^2 + \omega^2) \cdot (Lp + R)} = \frac{E_0}{L} \cdot \frac{p}{(p^2 + \omega^2)(p + k)} = \frac{E_0}{L(k^2 + \omega^2)} \left(-k \cdot \frac{1}{p + k} + k \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \omega^2 \cdot \frac{1}{p^2 + \omega^2} \right)$$

Intensitatea curentului electric este originalul lui $I(p)$ adică

$$i(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2 \omega^2} \left(R \cos \omega t + L \omega \sin \omega t - R e^{-\frac{R}{L} t} \right).$$

Aceasta are o componentă periodică dominantă (anume $R \cos \omega t + L \omega \sin \omega t$) și o

componentă neglijabilă (anume $R e^{-\frac{R}{L} t}$) atunci când timpul t este mare. Din acest motiv curentul obținut se numește curent alternativ.

2. ANALIZA COMPLEXA

2.1. Mulțimea numerelor complexe

2.1.1. Definiție și structură algebrică

În mulțimea $R^2 = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$ se definesc două operații (legi de compoziție internă)

- adunarea $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

- înmulțirea $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$

în raport cu care R^2 este corp comutativ.

Mulțimea numerelor complexe este mulțimea R^2 dotată cu aceste două operații. Se notează C .

Obiectul $z = (x, y) \in C$ se numește număr complex. x este partea reală a lui z și se notează

$\operatorname{Re} z$, iar y este partea sa imaginară și se notează $\operatorname{Im} z$.

- Două numere complexe sunt egale dacă au aceeași parte reală și aceeași parte imaginară.

Numerele complexe $(x, 0)$, care au partea imaginară 0, se numesc numere reale și se notează x .

Se notează $i = (0, 1)$. O proprietate importantă a lui i este $i^2 = -1$.

$$\text{Se poate arăta că } i^n = \begin{cases} 1 & \text{daca } n = 4k \\ i & \text{daca } n = 4k + 1 \\ -1 & \text{daca } n = 4k + 2 \\ -i & \text{daca } n = 4k + 3 \end{cases}$$

Numerele complexe $(0, y) = iy$, cu partea reală 0, se numesc pur imaginare.

- Se scrie $z = x + iy$ deoarece $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy$. Aceasta este **forma algebrică** a unui număr complex.

Complex conjugatul numărului $z = x + iy$ este numărul $\bar{z} = x - iy$.

Mulțimea numerelor complexe se identifică cu planul geometric R^2 . Numărul $z = x + iy$ este asociat punctului $A(x, y)$ care se numește afixul lui z .

- Modulul numărului complex $z = x + iy$ este $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Modulul lui $z = x + iy$ reprezintă distanța de la punctul $A(x, y)$ la punctul $O(0, 0)$, originea axelor de coordonate în planul complex.

Propoziție : Modulul are următoarele proprietăți

1. $|z| \geq 0$ oricare ar fi $z \in C$
 2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ oricare ar fi $z_1, z_2 \in C$. Rezultă $|z^n| = |z|^n$
 3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ oricare ar fi $z_1, z_2 \in C$.
 4. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ oricare ar fi $z_1, z_2 \in C$, $z_2 \neq 0$.
 5. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ oricare ar fi $z \in C$
- Argumentul redus al numărului complex $z = x + iy$ este unghiul pe care segmentul OA îl face cu sensul pozitiv al axei Ox . Se notează $\arg z$ și se calculează folosind următoarea formulă

$$\arg z = \phi = \begin{cases} \arctg(y/x) & \text{daca } x > 0, y > 0 \\ \pi/2 & \text{daca } x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctg(y/x) & \text{daca } x < 0 \\ 3\pi/2 & \text{daca } x = 0, y < 0 \\ 2\pi + \arctg(y/x) & \text{daca } x > 0, y < 0 \end{cases} . \text{ Au loc relațiile } \begin{cases} x = |z| \cdot \cos \phi \\ y = |z| \sin \phi \end{cases}$$

- Forma trigonometrică a numărului complex $z = x + iy$ este $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$.

Ea este utilă pentru efectuarea operațiilor cu numere complexe

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$$

$$z = |z|^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

- Rădăcina de ordin n a numărului $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$ este formată din n numere complexe calculate prin $z_k = (|z|)^{1/n} \left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right)$, cu $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Exerciții rezolvate

1. Să se determine partea reală și partea imaginară a numerelor complexe următoare

- $z = 1 + 3i$. $\operatorname{Re} z = 1$ și $\operatorname{Im} z = 3$

- $z = \frac{1}{1-i}$. Se scrie $z = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1-i^2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + i \frac{1}{2}$ deci $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ și $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}$

2. Să se determine modulul și argumentul următoarelor numere complexe

- $z = i$. Deoarece $z = 0 + 1i$ rezultă că $|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ și $\arg z = \pi/2$

- $z = -3$. Deoarece $z = -3 + 0i$ rezultă că $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$ și $\arg z = \pi + \operatorname{arctg} 0 = \pi$

- $z = 1 + i^{223}$. Deoarece $223 = 4 \cdot 55 + 3 = 4k + 3$ rezultă că $i^{223} = -i$ deci $z = 1 - i$.

$$\text{Atunci } |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ și } \arg z = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

- $z = \frac{1-i}{1+i}$. Deoarece $z = \frac{(1-i)^2}{(1-i^2)} = \frac{1-2i+i^2}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i$ rezultă că $|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$ și

$\arg z = 3\pi/2$.

2.1.2. Structură topologică

Structura topologică (geometrică) este legată de noțiunea de distanță. Această structură este necesară pentru dezvoltarea teoriei funcțiilor complexe.

Distanța între două numere complexe $z_1 = x_1 + iy_1$ și $z_2 = x_2 + iy_2$ este

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Cercul $C(z_0, r)$ cu centrul în z_0 și raza r este dat de ecuația $|z - z_0| = r$.

Discul deschis cu centrul în z_0 și raza r , notat $D(z_0, r)$ este interiorul cercului

$C(z_0, r)$ și este descris de ecuația $|z - z_0| < r$.

Vecinătățile numărului $z_0 \in C$ sunt mulțimi care conțin un disc centrat în z_0 . Topologia lui C este de fapt topologia lui R^2 .

Exerciții rezolvate : 1. Să se calculeze distanța între $z_1 = i$ și $z_2 = 1 - i$.

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(0-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{5}$$

2. Care este interpretarea geometrică a următoarelor mulțimi ?

- $A = \{z \in C \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ R: semiplanul format din cadranele I și IV

- $A = \{z \in C \mid |\operatorname{Im} z| < 1\}$ R: Porțiunea din plan cuprinsă între dreptele $y = -1$ și $y = 1$.

- $A = \{z \in C \mid |z| < 1\}$ R: interiorul cercului cu centrul în origine și raza 1

- $A = \{z \in C \mid |z - i| > 2\}$ R: exteriorul cercului cu centrul în i și raza 2

- $A = \{z \in C \mid 1 < |z| < 3\}$ R : coroana circulară dintre cercurile cu centrul în origine cu razele 1 și 3

- $A = \{z \in C \mid |z-1| = |z+i|\}$ R : mediatoarea segmentului ce unește afixele numerelor $z_1 = 1$ și $z_2 = -i$

2.1.3. Mulțimea extinsă a numerelor complexe

Mulțimea extinsă a numerelor complexe este $\bar{C} = C \cup \{\infty\}$. Obiectul " ∞ ", care completează mulțimea numerelor complexe are următoarele proprietăți:

- $|\infty| = +\infty \in \bar{R}$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $a \cdot \infty = \infty$ pentru orice $a \in C - \{0\}$
- $\frac{a}{0} = \infty$ pentru orice $a \in C - \{0\}$
- $\frac{\infty}{a} = 0$ pentru orice $a \in C - \{0\}$
- $\frac{a}{\infty} = 0$ pentru orice $a \in C$

Nu sunt definite operațiile $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$.

Mulțimea extinsă a numerelor complexe nu are structură algebrică.

Vecinătățile lui ∞ conțin exteriorul unui disc cu centrul în origine.

Mulțimea $\{z \in C \mid |z-1| > 1\}$ este vecinătate a lui ∞ dar mulțimea $\{z \in C \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ nu e vecinătate a lui ∞ .

2.2 Funcții complexe elementare

Se numește funcție complexă de variabilă complexă o funcție definită pe o submulțime D a mulțimii numerelor complexe C cu valori în C . Se notează $f: D \rightarrow C$.

Pentru $z = x + iy$ se scrie $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + v(x, y)$.

Funcția $u: D \rightarrow R$ se numește partea reală a lui f și se notează $\operatorname{Re} f(x, y) = u(x, y)$.

Funcția $v: D \rightarrow R$ se numește partea imaginară a lui f și se notează $\operatorname{Im} f(x, y) = v(x, y)$.

Example: 1. Să se determine partea reală și partea imaginară a următoarelor funcții

1. $f: C \rightarrow C$, $f(z) = z^2$

Putem scrie $f(z) = f(x, y) = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$. Rezultă că

$\operatorname{Re} f(x, y) = x^2 - y^2$ și $\operatorname{Im} f(x, y) = 2xy$.

2. $f: C \rightarrow C$, $f(z) = |z|$

Putem scrie $f(z) = f(x + iy) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Rezultă $\operatorname{Re} f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $\operatorname{Im} f(x, y) = 0$.

Printre funcțiile complexe există unele mai importante, cu ajutorul cărora se obțin alte funcții complexe. Ele se numesc funcții elementare și sunt descrise în cele ce urmează

2.2.1. Funcțiile algebrice

Funcțiile algebrice sunt

- polinoamele $f: C \rightarrow C$, $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Toate rezultatele legate de polinoamele reale

se extind pentru polinoame complexe. Operațiile cu polinoame complexe (adunarea, înmulțirea și împărțirea) se definesc ca și cele pentru polinoame reale.

- funcțiile raționale $f: C - \{z_1, z_2, \dots, z_h\} \rightarrow C$, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, unde P, Q sunt polinoame

complexe și z_1, z_2, \dots, z_h sunt numerele complexe pentru care se anulează numitorul fracției.

Un caz important îl reprezintă funcțiile omografice $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$

2.2.2. Funcția exponențială

Funcția exponențială este $f: C \rightarrow C$, $f(z) = e^z$ definită prin

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Deoarece $e^x > 0$ pentru orice $x \in R$ și $\cos y + i \sin y \neq 0$ pentru orice $y \in R$ rezultă că funcția exponențială nu poate avea valoarea 0.

Sunt importante următoarele proprietăți ale funcției exponențiale :

$$- e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$- e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

$$- e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

$$- \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$$

Dacă $z = x + 0i$ este număr real atunci $e^z = e^x (\cos 0 + i \sin 0) = e^x$, deci exponențiala complexă este o extindere a exponențialei reale.

2.2.3. Funcțiile hiperbolice

Funcțiile hiperbolice complexe sunt definite în mod asemănător cu cele reale.

$$- \text{sinusul hiperbolic este } shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$- \text{cosinusul hiperbolic este } chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Aceste funcții au următoarele proprietăți (analoge funcțiilor hiperbolice reale):

$$- ch^2 z - sh^2 z = 1$$

$$- ch(z_1 + z_2) = chz_1 \cdot chz_2 + shz_1 \cdot shz_2$$

$$- sh(z_1 + z_2) = shz_1 \cdot chz_2 + chz_1 \cdot shz_2$$

2.2.4. Funcțiile trigonometrice

Funcțiile trigonometrice complexe se definesc cu ajutorul funcției exponențiale :

$$- \text{sinusul este } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

- cosinusul este $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

- tangenta este $tgz = \frac{\sin z}{\cos z}$

Aceste funcții au proprietățile cunoscute ale funcțiilor trigonometrice reale :

- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

- $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$

- $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2$

Intre funcțiile hiperbolice și cele trigonometrice există următoarele relații :

$\cos z = ch(iz)$, $i \cdot \sin z = sh(iz)$, $i \cdot tgz = th(iz)$, $chz = \cos(iz)$, $i \cdot shz = \sin(iz)$, $i \cdot thz = tg(iz)$

2.2.5. Funcții multivoce

Funcțiile multivoce (numite și funcții multiforme) fac să corespundă fiecărui element din domeniul de definiție mai multe valori.

- Funcția Argument este $Arg: C \rightarrow P(C)$, $Argz = \{\arg z + 2k\pi, k \in Z\}$

Această definiție este justificată de faptul că, pentru orice $\phi_k = \arg z + 2k\pi \in Argz$ are loc relația $z = |z| \cdot (\cos \phi_k + i \sin \phi_k) = |z| e^{i\phi_k}$, deci există mai multe valori ce pot înlocui argumentul lui z în forma sa trigonometrică.

Se scrie $z = |z| e^{i \cdot Argz}$

- Funcția radical $f(z) = z^{\frac{1}{n}}$ asociază lui z mulțimea de valori $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, unde $z_k = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right)$. Toate aceste valori satisfac $z_k^n = z$.

- Funcția logaritmică $f(z) = Lnz$ este dată de $Lnz = \{\ln |z| + i \cdot Argz\} = \{\ln |z| + i \cdot (\arg z + 2k\pi), k \in Z\}$.

Ea poate fi interpretată ca fiind inversa funcției exponențiale în sensul că $e^{Lnz} = z$.

- Funcția putere $f(z) = z^A$, unde $A \in C$ este definită prin $z^A = e^{A \cdot Lnz}$.

Se definesc de asemenea inversele funcțiilor trigonometrice și ale funcțiilor hiperbolice, dar ele sunt mai rar folosite în calcule.

Exerciții : 1. Să se calculeze : e^i , $e^{1+\pi i}$, $e^{\frac{k\pi}{2}i}$, $\cos(i)$, $\sin \frac{\pi}{2}i$, $tg(1 + \pi i)$

- $e^i = e^{0+1i} = e^0 (\cos 1 + i \sin 1)$. In această expresie numărul 1 reprezintă un radian, adică

$\frac{360}{2\pi} \approx 57,32$ grade.

- $e^{1+\pi i} = e^1 (\cos \pi + i \sin \pi) = e$

- $e^{\frac{k\pi}{2}i} = e^0 (\cos k \frac{\pi}{2} + i \sin k \frac{\pi}{2})$ și valorile depend de k

- $\cos(i) = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e^1}{2} = \frac{e^2 + 1}{2}$

$$- \sin\left(\frac{\pi}{2}i\right) = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{-\frac{i\pi}{2}}}{2i} = \frac{e^{-\pi/2} - e^{\pi/2}}{2i} = i \frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{2}$$

$$- \operatorname{tg}(\pi + i) = \frac{\sin(\pi + i)}{\cos(\pi + i)} = \frac{(e^{i(\pi+i)} - e^{-i(\pi+i)})}{i(e^{i(\pi+i)} + e^{-i(\pi+i)})} = \frac{e^{-1+\pi i} - e^{1-\pi i}}{i(e^{-1+\pi i} + e^{1-\pi i})} = \frac{e^{-1}(-1) - e^1(-1)}{i(e^{-1}(-1) + e^1(-1))} = \frac{e-1/e}{(e+1/e)} \cdot i.$$

2. Să se rezolve următoarele ecuații: $chz = 0$, $\sin z = 3$, $e^z = 1 + i$

$$- \text{din } chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \text{ rezultă } e^z + \frac{1}{e^z} = 0 \text{ adică } e^{2z} = e^{2(x+iy)} = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) = -1.$$

$$\text{Din sistemul } \begin{cases} e^{2x} \cos 2y = -1 \\ e^{2x} \sin 2y = 0 \end{cases} \text{ rezultă } \begin{cases} \sin 2y = 0 \\ \cos 2y = -1 \\ e^{2x} = 1 \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} x = 0 \\ y = (2k+1)\pi \end{cases}. \text{ Soluțiile ecuației sunt}$$

$$\text{numerele complexe } z_k = i(2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

$$- \text{în ecuația } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3 \text{ notăm } t = e^{iz}; \text{ rezultă } t^2 - 6it - 1 = 0 \text{ adică } t_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

Din $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos x + i \sin x) = 3 + 2\sqrt{2}$ rezultă, prin identificarea părților reale și imaginare, $\cos x = 0$, $\sin x = 1$, $e^{-y} = 3 + 2\sqrt{2}$. Soluțiile ecuației sunt

$$z_k = \ln(3 + 2\sqrt{2}) \left(\cos \frac{4k+1}{2}\pi + i \sin \frac{4k+1}{2}\pi \right), k \in \mathbb{Z}$$

$$- e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = 1 + i \text{ arată că } \begin{cases} e^x \cos y = 1 \\ e^x \sin y = 1 \end{cases}. \text{ Din împărțirea ecuațiilor rezultă}$$

$$\operatorname{tgy} = 1, \text{ adică } y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ (deoarece } \cos y > 0 \text{ și } \sin y > 0). \text{ Atunci } e^x = 1/\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2/\sqrt{2} \text{ și}$$

$$x = \ln \sqrt{2}.$$

$$\text{Soluțiile ecuației sunt } z_k = \ln \sqrt{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right).$$

2.3 Elemente de calcul diferențial

Calculul diferențial operează cu noțiunea de funcție derivabilă.

Funcția f este **derivabilă** în punctual z_0 dacă $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$ există și este

finită.

O funcție derivabilă în toate punctele unei mulțimi se numește **funcție olomorvă** pe mulțimea respectivă

Definiția este analogul complex al definiției derivatei unei funcții reale. În legătură cu derivabilitatea unei funcții într-un punct dat există un rezultat important, Teorema Cauchy-Riemann

Teoremă (Cauchy-Riemann) Dacă funcția $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ este derivabilă în $z_0 = x_0 + iy_0$ atunci u și v sunt derivabile în (x_0, y_0) și derivatele lor satisfac

condițiile (numite condițiile Cauchy-Riemann)
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}.$$

În cazul în care funcțiile u și v au derivate parțiale continue în (x_0, y_0) și acestea satisfac condițiile Cauchy-Riemann, funcția f este derivabilă în z_0 .

În punctele în care f este derivabilă, derivata ei se calculează folosind formula

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Exercițiu : Să se determine punctele în care funcția $f(z) = z^2 + \bar{z} \cdot z$ este derivabilă și să se calculeze derivata ei în aceste puncte.

Funcția f se scrie $f(z) = f(x + iy) = (x + iy)^2 + (x + iy)(x - iy) = 2x^2 + 2xyi$. Rezultă $u(x, y) = 2x^2$ și $v(x, y) = 2xy$. Cele două funcții au derivate parțiale continue, deci condiția necesară și suficientă pentru ca f să fie derivabilă în (x, y) este dată de condițiile Cauchy-Riemann.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{ conduc la } \begin{cases} 4x = 2x \\ 0 = 2y \end{cases} \text{ cu soluția } \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}. \text{ Rezultă că singurul punct în care } f \text{ este}$$

derivabilă este $z_0 = 0 + 0i = 0$. Derivata funcției este $f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = 0 + i0 = 0$.

Teorema este verificată de toate funcțiile elementare definite în paragraful anterior în toate punctele domeniului de definiție. Rezultă că aceste funcții sunt derivabile pe domeniul lor de definiție, adică sunt olomorfe pe domeniul de definiție.

Pentru calculul derivatelor funcțiilor elementare se pot folosi regulile de derivare și principalele derivate cunoscute din liceu pentru funcțiile reale.

Exercițiu : Să se determine mulțimile pe care funcțiile următoare sunt olomorfe și să se calculeze derivata lor :

1. $f(z) = 1 + 3z + 9z^5$; Funcția este definită pe C , deci este olomorfă pe C , iar derivata este $f'(z) = 3 + 9 \cdot 5z^4 = 3 + 45z^4$

2. $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$; Funcția este definită pe $C - \{1\}$, deci este olomorfă pe $C - \{1\}$. Derivata ei este $f'(z) = \frac{(1+z)'(1-z) - (1-z)'(1+z)}{(1-z)^2} = \frac{1-z+1+z}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2}$

3. $f(z) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}$. Domeniul de definiție al lui f este mulțimea punctelor pentru care $e^z + 1 \neq 0$. Ecuația $e^z + 1 = 0$ are soluțiile $z_k = (2k + 1)\pi i$, deci $f : C - \{(2k + 1)\pi i, k \in Z\}$ și este olomorfă pe

această mulțime. Derivata sa este

$$f'(z) = \frac{(e^z + 1)'(e^z - 1) - (e^z - 1)'(e^z + 1)}{(e^z - 1)^2} = \frac{e^z(e^z - 1) - e^z(e^z + 1)}{(e^z - 1)^2} = \frac{-2e^z}{(e^z - 1)^2}.$$

2.4. Elemente de calcul integral

Funcțiile complexe $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ sunt în esență funcții definite pe o submulțime a lui R^2 cu valori în R^2 . Pentru astfel de funcții se poate calcula integrala curbilinie de al doilea tip pe o curbă γ netedă pe proiecții și orientată. De aceea integrala complexă este de fapt o integrală curbilinie “mascată” de formalismul complex.

2.4.1. Integrala curbilinie complexă

Dacă $\gamma: [a, b] \rightarrow C$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ este o curbă netedă pe porțiuni (are tangentă în toate punctele sale, cu excepția unui num finit dintre ele) și funcția $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ este continuă pe γ atunci integrala curbilinie complexă este definită prin

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy) = \int_{\gamma} (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i \int_{\gamma} (u(x, y)dy + v(x, y)dx).$$

În practică se poate folosi direct următoarea formulă

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \cdot [x'(t) + iy'(t)] dt.$$

Exerciții : Să se calculeze următoarele integrale curbilinii complexe

1. $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ pe curba $\gamma: [0, 1] \rightarrow C$, $\gamma(t) = (t, t^2)$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_{\gamma} (x - iy)(dx + idy) = \int_0^1 (t - it^2)(1 + i2t) dt = \int_0^1 (t - it^2 + i2t^2 - i^2 2t^3) dt = \\ &= \int_0^1 (t + 2t^3) dt + i \int_0^1 t^2 dt = \left(\frac{t^2}{2} + 2 \frac{t^4}{4} + i \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} = 1 + i \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. $\int_{\gamma} z^2 dz$ pe $\gamma: [0, 1] \rightarrow C$, $\gamma(t) = t + it^2$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_{\gamma} (x^2 - y^2 + 2xyi)(dx + idy) = \int_{\gamma} (x^2 - y^2) dx - 2xydy + i \int_{\gamma} 2xydx + (x^2 + y^2) dy = \\ &= \int_0^1 ((t^2 - t^4)1 - 2t^3 \cdot 2t) dt + i \int_0^1 (2t \cdot t^2 \cdot 1 + (t^2 - t^4)2t) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} - 4 \frac{t^5}{5} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} + i \left(2 \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} = -\frac{2}{3} + i \frac{19}{30} \end{aligned}$$

2.4.2. Integrala definită

Dacă funcția f este olomorfă pe un domeniu care conține curba γ atunci integrala curbilinie complexă a lui f pe γ nu depinde de expresia analitică a lui γ ci numai de

extremitățile sale. În acest caz se poate construi o teorie a integralelor analogă cu teoria cunoscută de la funcții reale.

Primitiva funcției f pe domeniul D este funcția $F : D \rightarrow C$, olomorfă pe D care satisface

$$F'(z) = f(z) \text{ pentru } \forall z \in D.$$

Dacă $f : D \rightarrow C$ este olomorfă pe D atunci, pentru orice $z_0 \in D$ funcția $F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$ este o primitivă a lui f .

Dacă D este un domeniu simplu conex, $f : D \rightarrow C$ este olomorfă pe D , F este o primitivă a sa, atunci și $z_1, z_2 \in D$ atunci

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Formula anterioară este analogul complex al formulei Leibnitz-Newton de la funcții reale. Pentru calculul primitivelor funcțiilor elementare se pot folosi formulele cunoscute din liceu.

De exemplu, o primitivă a funcției $f(z) = z^2$ este $F(z) = \frac{z^3}{3}$.

De asemenea, metodele de calcul pentru primitive (integrarea prin părți și schimbarea de variabilă) pot fi folosite după modelul funcțiilor reale.

Exerciții : Să se calculeze următoarele integrale definite

$$1. \int_0^{\pi i} e^z dz = e^z \Big|_{z=0}^{z=\pi i} = e^{\pi i} - e^0 = \cos \pi + i \sin \pi - 1 = -2$$

$$2. \int_0^i z \sin z dz = \int_0^i z (-\cos z)' dz = -z \cos z \Big|_{z=0}^{z=i} + \int_0^i \cos z dz = -i \cos i + \sin i = -i \left(\frac{e^{-1} + e^1}{2} + \frac{e^{-1} - e^1}{2i} \right)$$

$$3. \int_0^i \frac{1 + tgz}{\cos^2 z} dz = \int_0^i (1 + tgz)(1 + tgz)' dz = \frac{(1 + tgz)^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=i} = \frac{(1 + tgi)^2}{2} - \frac{1}{2}$$

2.4.3. Integralele lui Cauchy

Integralele lui Cauchy sunt integrale pentru funcții cu expresia analitică specială.

Teoremă (Cauchy) Fie $f : D \rightarrow C$ o funcție olomorfă pe domeniul D și continuă pe domeniul D reunit cu frontiera sa. Atunci f este indefinit derivabilă pe D și derivata sa de ordinul n în punctul $z_0 \in D$ este dată de formula

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{FrD} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Integralele din membrul drept al egalității de mai sus se numesc integralele lui Cauchy.

Formula este de obicei folosită pentru calculul integralelor, dar poate fi folosită și pentru calculul derivatei de ordinul n . Se observă că valoarea acestor derivate este obținută doar cu ajutorul valorilor lui f pe frontiera domeniului.

Metoda de calcul

- se identifică numerele complexe z care anulează numitorul și care sunt în interiorul domeniului
- se identifică funcția f și numărul n
- se aplică formula de calcul

Exerciții : Să se calculeze următoarele integrale

1. $I_1 = \int_{|z|=2} \frac{ch(iz)}{z^2 + 4z + 3} dz$. Se descompune în factori numitorul și se obține

$$I_1 = \int_{|z|=2} \frac{ch(iz)}{(z+1)(z+3)} dz$$

Numitorul se anulează în $z_1 = -1$ și $z_2 = -3$.

Deoarece $|z_1| = 1 < 2$ rezultă că z_1 este în interiorul domeniului mărginit de cercul $|z| = 2$.

Deoarece $|z_2| = 3 > 2$ rezultă că z_2 este în exteriorul domeniului mărginit de cercul $|z| = 2$.

Integrala se scrie $I_1 = \int_{|z|=2} \frac{ch(iz)}{(z+1)} dz = \int_{|z|=2} \frac{ch(iz)}{(z-(-1))} dz$. În această situație $f(z) = \frac{ch(iz)}{z+3}$, $z_0 = -1$

și $n+1=1$ deci $n=0$.

Din teorema lui Cauchy rezultă $I_1 = 2\pi i \cdot f(-1) = 2\pi i \frac{ch(-i)}{2}$.

2. $I_2 = \int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{(z^2-6z)} dz$. În acest caz numitorul se anulează în punctele $z_1 = 0$ și $z_2 = 6$.

Deoarece $|z_1 - 2| = 2 < 5$ și $|z_2 - 2| = 4 < 5$ rezultă că amândouă punctele sunt în interiorul curbei $|z-2|=5$. Formula din teoremă nu se poate aplica direct, de aceea se decompune integrala și se aplică formula pentru fiecare termen.

$$I_2 = \int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{6} \left(\frac{1}{z-6} - \frac{1}{z} \right) dz = \frac{1}{6} \int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z-6} dz - \frac{1}{6} \int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z} dz .$$

Pentru prima integrală $f(z) = e^{z^2}$, $z_0 = 6$ și $n=0$ iar pentru a doua integrală $f(z) = e^{z^2}$, $z_0 = 0$ și $n=1$.

$$I_2 = 2\pi i \left(\frac{1}{6} e^{36} - \frac{1}{6} e^0 \right)$$

2.4.4. Teorema reziduurilor și aplicații

Prin teorema reziduurilor sunt precizate metode de calcul mai simple printru unele integrale complexe. Această teoremă poate fi folosită și în calculul unor integrale reale.

Teorema se bazează pe calculul "reziduurilor" atașate punctelor în care funcția de integrat nu este definită, așa numite puncte "singulare" identificate și clasificate cu ajutorul dezvoltării în serie a funcției de integrat.

- **Seriile Taylor** au forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + \dots + a_n (z-z_0)^n + \dots$

Domeniul de convergență al seriei este discul $D(z_0, R)$, unde raza de convergență R se calculează prin $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Teoremă : Dacă funcția f este olomorvă pe discul $D(z_0, r)$ atunci pentru orice $z \in D(z_0, r)$ are loc relația

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \dots$$

Aceasta este **dezvoltarea funcției în serie Taylor**.

Următoarele dezvoltări în serie Taylor sunt foarte importante:

- $e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \dots + \frac{1}{n!}z^n + \dots$ pentru orice $z \in C$
- $\sin z = \frac{1}{1!}z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots$ pentru orice $z \in C$
- $\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \dots$ pentru orice $z \in C$
- $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots$ pentru orice $z \in C$ cu $|z| < 1$

Exerciții: Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctelor indicate următoarele funcții:

- $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Se scrie $f(z) = \frac{1}{1-(-z^2)}$ și se aplică dezvoltarea d).

Rezultă $f(z) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$, egalitate ce are loc pentru orice z cu proprietatea că $|z^2| < 1$.

- $f(z) = \operatorname{sh} z$. Deoarece $\operatorname{sh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ rezultă $f(z) = \frac{\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) + \left(1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)}{2}$,

adică $f(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$. Egalitatea are loc pentru orice $z \in C$

- $f(z) = \sin(2z+1)$. Se aplică dezvoltarea b). Rezultă $f(z) = \frac{(2z+1)}{1!} - \frac{(2z+1)^3}{3!} + \frac{(2z+1)^5}{5!} - \dots$

- $f(z) = \frac{1}{3z+1}$. Se scrie $f(z) = \frac{1}{1-(-3z)} = 1 - 3z + 3^2 z^2 - 3^3 z^3 + \dots$. Egalitatea are loc pentru orice z cu proprietatea că $|z| < 1/3$.

• **Seriile Laurent** au forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \dots + a_{-n} (z-z_0)^{-n} + \dots + a_{-1} (z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1 (z-z_0)^1 + \dots + a_n (z-z_0)^n + \dots$$

Expresia $\frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots$ se numește **partea principală** a seriei f

Expresia $a_0 + a_1 (z-z_0) + \dots + a_n (z-z_0)^n + \dots$ este **partea întreagă** a seriei.

Domeniul de convergență al seriei este coroana circulară $U(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$

unde $r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ și $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Teoremă : Dacă funcția f este olomorfă pe o coroană circulară $U(z_0, r, R)$, atunci

f este suma seriei Laurent $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z - z_0)^n$, unde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ și γ este un cerc

centrat în z_0 conținut în coroana U .

Pentru realizarea dezvoltării în serie Laurent se calculează coeficienții a_n folosind formula din teorema anterioară (ceea ce e dificil) sau se folosesc dezvoltări (în serie Taylor) cunoscute deja

Exerciții : Să se dezvolte în serie Laurent, în vecinătatea lui $z_0 = 0$ următoarele funcții :

1. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$. Folosind dezvoltarea funcției $\sin z$ obținem $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots$

2. $g(z) = e^{1/z}$. Din dezvoltarea în serie Taylor a lui e^z rezultă

$$g(z) = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$$

3. $h(z) = z^4 \cos \frac{1}{z}$. Avem $h(z) = z^4 \left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \dots \right) = z^4 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!z^2} + \dots$

• **Un punct z_0 se numește punct singular izolat pentru funcția f dacă f este olomorfă pe un disc centrat în z_0 , dar nu și în z_0 .**

Spre exemplu $z = 2$ este punct singular izolat pentru $f(z) = \frac{3}{z-2}$.

De obicei funcția f nici nu e definită în punctele sale singulare.

Pentru a clasifica punctele singulare considerăm dezvoltarea lui f în serie Laurent în jurul lui z_0

$$f(z) = \dots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots$$

Punctele singulare se clasifică astfel :

- **punct eliminabil**, dacă $b_n = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. În această situație $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ există și e finită.

- **pol de ordin n** dacă $b_n \neq 0$ și $b_p = 0$ pentru orice $p > n$.

În acest caz $f(z) = \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + \dots$ și $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = b_n \neq 0$

- **esențial**, dacă există o infinitate de termeni în partea principală a dezvoltării.

Exemple : 1. $z = 1$ este punct singular eliminabil pentru $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ deoarece f are dezvoltarea $f(z) = \frac{1 + z/1! + z^2/2! + \dots + z^n/n! + \dots - 1}{z} = \frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots + \frac{z^{n-1}}{n!} + \dots$, deci nu există termeni la partea principală a dezvoltării.

2. $z_1 = -1$ este pol de ordinul 2 și $z_2 = 1$ este pol de ordinul 1 pentru $f(z) = \frac{\sin z}{(z^3 + z^2 - z - 1)}$

deoarece $f(z) = \frac{\sin z}{(x-1)(x+1)^2}$ și $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin z}{(x+1)^2} = \frac{\sin 1}{4} \neq 0$ și

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin z}{(x-1)} = \frac{\sin 1}{2} \neq 0.$$

În majoritatea cazurilor ordinul polului este exponentul cu care expresia $(z - z_0)$ apare la numitorul funcției studiate.

3. $z = 0$ este punct singular esențial pentru $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ pentru că f are dezvoltarea

$f(z) = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{n!z^n} + \dots$, deci în partea principală a dezvoltării apare o infinitate de termeni.

- **Reziduul funcției f în punctul singular izolat z_0 este** $\text{Re } z_f(z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} f(z) dz$.

Se poate arăta că $\text{Re } z_f(z_0) = b_1$, unde b_1 este coeficientul fracției $\frac{1}{(z - z_0)}$ din dezvoltarea în serie Laurent a funcției f în jurul lui z_0 .

Practic el se calculează folosind următoarele formule:

- dacă z_0 este punct singular eliminabil atunci $\text{Re } z_f(z_0) = 0$.
- Dacă z_0 este pol de prdinul n atunci $\text{Re } z_f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \left[(z - z_0)^n f(z) \right]^{(n-1)} \Big|_{(z_0)}$

În această formula exponentul $(n-1)$ arată că expresia din paranteză se derivează de $n-1$ ori iar simbolul $\Big|_{(z_0)}$ arată că expresia care îl precede se calculează în $z = z_0$.

Formula este ușor de folosit în cazul $n=1$ și $n=2$. Dacă $n > 2$ e preferabil să se realizeze dezvoltarea în serie Laurent și să se identifice coeficientul b_1 .

Dacă z_0 este pol de ordinul I atunci $\text{Re } z_f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$.

Dacă z_0 este pol de ordinul 2 atunci $\text{Re } z_f(z_0) = \left[(z - z_0)^2 f(z) \right]' \Big|_{(z_0)}$

- Dacă z_0 este punct singular esențial atunci se folosește $\text{Re } z_f(z_0) = b_1$.

Exerciții : Să se calculeze reziduurile funcțiilor următoare în punctele indicate.

1. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ în $z_0 = 0$. Deoarece $z_0 = 0$ este punct singular eliminabil rezultă $\text{Re } z_f(0) = 0$

$$2. f(z) = \frac{\sin z}{(z-1)(z+1)^2} \text{ în } z_1 = -1 \text{ și în } z_2 = 1.$$

$z_1 = -1$ este pol de ordinul 2 deci

$$\operatorname{Re} z_f(-1) = \left[(z+1)^2 \frac{\sin z}{(z-1)(z+1)^2} \right]' \Big|_{z=-1} = \left(\frac{\sin z}{z-1} \right)' \Big|_{z=-1} = \frac{(z-1)\cos z - \sin z}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} = \frac{\sin 1 - 2\cos 1}{4}$$

$$z_2 = 1 \text{ este pol de ordinul 1 deci } \operatorname{Re} z_f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{\sin z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{\sin 1}{4}$$

3. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ în $z_0 = 0$. Deoarece $f(z) = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{n!z^n} + \dots$ rezultă că $z_0 = 0$ este punct singular esențial și $\operatorname{Re} z_f(z_0) = \frac{1}{1!} = 1$.

Teorema reziduurilor: Dacă $f: D \rightarrow C$ este o funcție olomorfă pe D , iar $\gamma \subset D$ este o curbă simplă, închisă, netedă pe porțiuni, care are în interiorul ei un număr finit de puncte singulare z_1, z_2, \dots, z_n ale lui f , atunci

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} z_f(z_k)$$

Exercițiu: Să se calculeze $I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)(z^2+1)}$.

Numitorul fracției se anulează în punctele $z_1 = 1$, $z_2 = i$ și $z_3 = -i$

Deoarece $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 < 2$ rezultă că cele trei puncte sunt în interiorul curbei pe care se calculează integrala.

$$z_1 = 1 \text{ este pol de ordinul 1 și } \operatorname{Re} z_f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{1}{2}$$

$z_2 = i$ este pol de ordinul 1 și

$$\operatorname{Re} z_f(i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z-1)(z+i)} = \frac{i}{(i-1)2i} = \frac{i+1}{-4i} = \frac{i-1}{4}$$

$z_3 = -i$ este pol de ordinul 1 și

$$\operatorname{Re} z_f(-i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{(z-1)(z-i)} = \frac{i}{(i+1)2i} = \frac{i-1}{-4i} = \frac{i+1}{4}$$

$$\text{Atunci } I = 2\pi i (\operatorname{Re} z_f(z_1) + \operatorname{Re} z_f(z_2) + \operatorname{Re} z_f(z_3)) = 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{i-1}{4} + \frac{i+1}{4} \right) = (1+2i)\pi i.$$

Există trei clase de integrale reale calculabile cu reziduuri :

I) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, unde P și Q sunt polinoame, cu $\text{grad}(Q) \geq \text{grad}(P) + 2$ iar Q nu are rădăcini reale.

Dacă z_1, z_2, \dots, z_k sunt polii lui $\frac{P(z)}{Q(z)}$ ce au partea imaginară pozitivă, atunci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{p=1}^k \text{Re } z_p \left(\frac{z_p}{Q} \right).$$

II) $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$. Pentru calcul se folosesc formulele $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ și

$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ și se notează $z = e^{ix}$. Atunci $x = \frac{1}{i} \ln z$ și $dx = \frac{1}{iz} dz$. Avem și $|e^{ix}| = |z| = 1$.

Integrala devine

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$
 iar integrala complexă se calculează cu teorema

reziduurilor.

III) $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos(\mu x) dx$ și $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin(\mu x) dx$, unde $R(x)$ este o funcție rațională și

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0.$$

Cele două integrale se calculează împreună

2. ANALIZA FOURIER

Analiza Fourier este un instrument important în studiul semnalelor cu grad mare de complexitate (semnale sonore, semnale electrice, unde seismice, etc.)

Problemele fundamentale ce se rezolvă cu ajutorul dezvoltării în serie Fourier sunt

- **analiza unui semnal periodic**, adică stabilirea semnalelor armonice fundamentale care îl compun. Din punct de vedere matematic aceasta înseamnă determinarea coeficienților Fourier în seria corespunzătoare funcției ce descrie semnalul.

- **sinteza unui semnal periodic**, adică stabilirea combinației de armonici fundamentale prin suprapunerea cărora se obține semnalul dorit. Din punct de vedere matematic aceasta înseamnă studiul convergenței seriei Fourier atașată armonicilor fundamentale considerate

Tratarea semnalelor neperiodice se face cu ajutorul integralei și a transformatei Fourier atașată funcției ce descrie semnalul.

Pentru prelucrarea numerică a semnalelor se folosește transformata Fourier discretă și varianta ei mai economică din punct de vedere al timpului de lucru, transformata Fourier rapidă.

În acest capitol sunt prezentate rezultate de bază legate de aceste obiecte și tehnici matematice

3.1. Serii Fourier

O funcție $f: D \rightarrow C$ este periodică cu perioada T dacă $f(x+T) = f(x)$ pentru orice $x \in A$

Exemple :

1. Funcțiile $f, g: R \rightarrow R$, $f(x) = \sin \omega x$ și $g(x) = \cos \omega x$ sunt periodice cu perioada $2\pi / \omega$.
2. Funcția armonică $f: R \rightarrow C$, $f(t) = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ este periodică cu perioada $2\pi / \omega$.
3. Suma unor funcții periodice nu este neapărat o funcție periodică.

Funcția $f(t) = \sum_{k=1}^n a_k (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t)$ este periodică doar dacă raportul $\frac{\omega_i}{\omega_j}$ este număr rațional pentru orice $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dacă măcar unul dintre rapoarte este irațional funcția obținută este foarte complicată.

Se consideră mulțimea de funcții $L^2([-l, l]) = \{f: [-l, l] \rightarrow R \mid f^2 \text{ este integrabilă}\}$.

Teoremă : Orice funcție $f \in L^2([-l, l])$ este suma unei serii trigonometrice , adică există numerele reale a_0, a_1, \dots și b_1, b_2, \dots astfel încât

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \text{ pentru orice } x \in [-l, l]. \quad (1)$$

Coeficienții seriei sunt

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (2)$$

Seria (1), cu coeficienții (2) este seria Fourier asociată funcției f pe intervalul $[-l, l]$.

In punctele în care f este continuă are loc relația

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

Observații: 1. Dacă funcția f este pară atunci $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ și $b_n = 0, \forall n \in N$

2. Dacă funcția f este impară atunci $a_n = 0, \forall n \in N$ și $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$.

Exemple: Să se dezvolte în serie Fourier următoarele funcții, pe intervalele indicate:

1. $f: [-\pi, \pi] \rightarrow C, f(x) = x$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0. \text{ Folosind formula (2) rezultă } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = 0.$$

Aceste calcule pot fi evitate observând că f este o funcție impară și folosind observația 1.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^n \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{2(-1)^n}{n}.$$

$$\text{Deci } f(x) = x = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \cos n\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n} \cdot \sin n\pi = 2 \left(\sin x - \sin \frac{2x}{2} + \sin \frac{3x}{3} - \sin \frac{4x}{4} + \dots \right).$$

Deoarece funcția este continuă pe $[-\pi, \pi]$, egalitatea are loc pentru orice $x \in [-\pi, \pi]$

$$2. f(x) = \begin{cases} x, & \text{daca } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{daca } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\pi dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \text{ Rezultă că}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{-2}{\pi} \cos x + \sin x \right) - \sin 2x + \left(-\frac{2}{9\pi} \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \right) - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

Pentru $x=0$ din formula de mai sus obținem $0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots \right]$,

adică

$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots$, ceea ce conduce la o aproximare a lui $\frac{\pi^2}{8}$. În multe

ocazii dezvoltările în serie sunt folosite pentru aproximarea unor numere reale.

Observație : Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, rezultă că funcția f poate fi aproximată folosind primii termeni ai seriei Fourier atașate, restul termenilor având o contribuție redusă. De obicei se folosesc primii 32 de termeni.

Seria (1), cu coeficienții Fourier (2) poate fi scrisă sub formă complexă astfel :

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{l}},$$

unde $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$, $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ pentru $k > 0$ și $c_0 = \frac{a_0}{2}$

Forma spectrală a seriei (1) este

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l} + \phi_k\right)$$

unde $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ și ϕ_k este arcul pentru care $\cos \phi_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$ și

$$\sin \phi_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}.$$

A_k se numește amplitudinea armonicilor de ordinul k iar ϕ_k este defazajul acestei armonici.

3.2. Formula integrală Fourier

O funcție $f: R \rightarrow K$ (unde $K = R$ sau $K = C$) este **derivabilă pe porțiuni** dacă în orice interval $[a, b]$ există o mulțime finită de puncte, x_1, x_2, \dots, x_n astfel încât

- f este derivabilă pe $[a, b]$ cu excepția punctelor x_1, x_2, \dots, x_n
- în fiecare din punctele x_1, x_2, \dots, x_n funcțiile f și f' au limite laterale.

Teoremă (formula integrală Fourier): Dacă $f: R \rightarrow K$ este o funcție derivabilă pe porțiuni și absolut integrabilă pe R (adică integrala improprie $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ este convergentă, atunci are loc relația

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \lambda(t-\tau) d\tau \right) d\lambda. \quad (3)$$

Observații : 1. Formula (3) poate fi scrisă sub următoarele forme :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i\lambda(t-\tau)} d\tau \right) d\lambda$$

sau $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \right) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \right) d\lambda.$

2. Dacă f este o funcție pară atunci formula (3) devine

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \lambda\tau d\tau \right) d\lambda$$

3. Dacă f este o funcție impară atunci formula (3) devine

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \lambda\tau d\tau \right) d\lambda$$

3.3. Transformata Fourier (integrală)

Transformata Fourier integrală a funcției f satisfacând condițiile din teorema anterioară este

$$F(f): R \rightarrow K, F(f)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

Funcția F se numește imaginea lui f prin operatorul de transformare Fourier iar f se numește originalul lui F . Intre f și F există următoarele formule de legătură :

Caz general	$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$
Pentru funcții pare	$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt$	$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\lambda) \cos \lambda t d\lambda$
Pentru funcții impare	$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt$	$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\lambda) \sin \lambda t d\lambda$

Principalele proprietăți ale transformatei Fourier sunt prezentate în tabelul următor :

Denumirea proprietății	Formula
Liniaritatea	$F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$
Omotetia	$F(f(at))(\lambda) = \frac{1}{ a } F(f)\left(\frac{\lambda}{a}\right)$
Translația	$F(f(t+a))(\lambda) = e^{i\lambda a} F(f)(\lambda)$
Derivarea originalului	$F(f^{(n)})(\lambda) = (i\lambda)^n F(f)(\lambda)$

Derivarea imaginii	$(F(f))^{(n)}(\lambda) = i^{n+2}F(t^n f(t))(\lambda)$
Produsul de convoluție	$F(f * g)(\lambda) = \sqrt{2\pi}F(\lambda)G(\lambda)$

In ultima proprietate produsul de convoluție a două funcții f și g este definit prin

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Cu ajutorul transformatei Fourier se pot rezolva unele ecuații integrale, numite ecuații de tip Fourier :

a) Ecuația $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda t} dt = g(\lambda)$, $\lambda \in R$ are soluția $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda t} d\lambda$, $t \in R$

b) Ecuația $\int_0^{+\infty} f(t)\cos \lambda t dt = g(\lambda)$, $\lambda \in R$ are soluția $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} g(\lambda)\cos \lambda t d\lambda$, $t \in R$

c) Ecuația $\int_0^{+\infty} f(t)\sin \lambda t dt = g(\lambda)$, $\lambda \in R$ are soluția $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} g(\lambda)\sin \lambda t d\lambda$, $t \in R$

Exerciții: Să se rezolve următoarele ecuații funcționale (cu necunoscuta f):

1. $\int_0^{\infty} f(t)\sin \lambda t dt = e^{-\lambda}$. Notând $g(\lambda) = e^{-\lambda}$ și aplicând formula c) obținem

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \sin \lambda t d\lambda = \frac{2t}{\pi(t^2 + 1)}$$
 (se integrează de două ori prin părți)

2. $\int_0^{\infty} f(t)\cos \lambda t dt = \frac{1}{\lambda^2 + 1}$. Notând $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 + 1}$ și folosind formula b) obținem

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 + 1} \cos \lambda t d\lambda$$
. Această integrală se calculează folosind teorema reziduurilor (de

la funcții complexe). Se notează $g(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Re} z_g(i) = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{itz}}{(1+z^2)}(z-i) = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{itz}}{(z+i)} = 2\pi i \frac{e^{-t}}{2i} = \frac{\pi}{e^t}.$$

Din $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itz}}{1+z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tz}{1+z^2} dz + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tz}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{e^t} + 0 \cdot i$ rezultă $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tz}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{e^t}$, deci $f(t) = \frac{1}{e^t}$

3.4. Transformata Fourier discretă

Această transformată se folosește pentru analizarea unor semnale discrete, adică ale unor funcții x definite pe mulțimea numerelor întregi. Valoarea $x(n)$ poate fi interpretată ca rezultat al unor măsurători realizate la momentul de timp n .

Fie N un număr natural dat și $x: Z \rightarrow C$ o funcție periodică cu perioada N , adică $x(n+N) = x(n)$ pentru orice număr natural n . Transformata Fourier discretă a funcției x este

$$X: Z \rightarrow C, X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left(\cos \frac{2\pi mn}{N} - i \sin \frac{2\pi mn}{N} \right). \quad (4)$$

Analogia cu transformata Fourier integrală este evidentă.

Observații : 1. Funcția X este și ea periodică de perioadă N , prin urmare atât x cât și X sunt perfect determinate dacă se cunosc valorile lor în punctele $1, 2, \dots, N$.

2. În practică semnalele nu sunt periodice, dar măsurătorile se realizează într-un interval finit de timp $[0, N]$. Pentru a folosi transformata Fourier discretă se consideră semnalul $x: \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow C$ prelungit prin periodicitate la mulțimea Z . Adică $x(n+kN) = x(n)$ pentru orice $k \in Z$

Transformata Fourier discretă inversă a semnalului $X: Z \rightarrow C$, periodic cu perioada N este

$$x: Z \rightarrow C, x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} X(m) \left(\cos \frac{2\pi mn}{N} + i \sin \frac{2\pi mn}{N} \right). \quad (5)$$

Formula (4) permite descompunerea semnalului discret într-o sumă de semnale discrete fundamentale iar formula (5) reconstruiește un semnal discret atunci când se cunosc semnalele fundamentale care îl compun.

Exercițiu : Să se calculeze transformata Fourier discretă a semnalului $x(n) = a^n$, $a > 0$ definit pe $\{0, 1, \dots, N-1\}$ și prelungit prin continuitate pe Z .

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a^n \cdot \left(\cos \frac{2\pi mn}{N} - i \sin \frac{2\pi mn}{N} \right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (aw^{-m})^n = \frac{1 - a^N w^{-mN}}{1 - aw^{-m}}, \quad \text{pentru}$$

$m \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ și dacă $w^m - a \neq 0$.

Dacă $w^m = a$ atunci se poate arăta că $X(m) = 1$.

$$\text{Pentru } m=0 \text{ se obține } X(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w^0 = 1$$

3.5. Transformata Fourier rapidă

Transformata Fourier rapidă este o variantă a transformării Fourier discrete, caz în care numărul de operații aritmetice efectuat pentru a calcula expresiile din formulele (4) și (5) este minim.

Algoritmul ”Fast Fourier transform” (transformata Fourier rapidă) a fost propus de J. W. Cooley și J. W. Tuckey în 1965. El este acum folosit cu predilecție pentru calculul transformatei Fourier discrete din cauza economiei de timp de calcul.

Formulele (4) și (5) se pot scrie sub formă complexă astfel :

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w^{-mn} \quad (4')$$

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} X(m) w^{mn} \quad (5')$$

unde $w = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ este un număr complex cu modulul egal cu 1.

Formulele (4') și (5') necesită realizarea a N^2 înmulțiri de numere complexe, deoarece m și n iau toate valorile din $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$.

Folosind numere naturale de forma $N = 2^k$ și un procedeu special de calcul se realizează $N \log_2 N = k \cdot 2^k$ înmulțiri în loc de 2^{2k} înmulțiri. Această metodă produce o reducere semnificativă a volumului de calcul. Spre exemplu, pentru $N = 2^5 = 32$, în mod normal ar trebui executate $32^2 = 1024$ înmulțiri, în timp ce transformata Fourier rapidă necesită doar 160 de înmulțiri.

Calculul transformatelor Fourier discrete, chiar în varianta lor rapidă, nu poate fi imaginat fără ajutorul unor mașini performante de calcul.

4. Transformata Z

Transformata Z este analogul discret al transformatei Laplace.

Ea se folosește pentru analiza semnalelor discrete neperiodice.

Principala aplicație a transformatei Z este rezolvarea unor ecuații (algebrice) recurente.

4.1. Transformata Z directă

O funcție $f: Z \rightarrow C$ va fi identificată cu șirul valorilor sale $(f_n)_{n \in Z}$.

Un șir $(f_n)_{n \in Z}$ se numește șir original sau semnal discret dacă îndeplinește următoarele condiții

- $f_n = 0$ pentru $n < 0$

- există $c > 0$ și $a \geq 0$ astfel încât $|f_n| \leq c \cdot a^n$ pentru orice $n > 0$

Mulțimea șirurilor admisibile se notează Q' și $(f_n) \in Q'$ arată că (f_n) este un șir original.

Cu șiruri originale se pot face adunări, înmulțiri cu scalari și produse de convoluție.

Produsul de convoluție a două semnale discrete (f_n) și (g_n) este șirul (h_n) unde

$$h_n = \begin{cases} 0 & , \text{daca } n < 0 \\ \sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} & , \text{daca } n > 0 \end{cases}$$

Există două semnale discrete fundamentale :

- șirul treaptă unitate $\sigma_n = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$

- șirul semnal impuls la momentul k , $\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$

Fie (f_n) un șir admisibil și $E_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > a\}$ (aici a este numărul ce apare în definiția șirului admisibil. Se numește transformata (în) Z a acestui șir funcția

$$Z(f_n): E_a \rightarrow \mathbb{C}, Z(f_n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}.$$

Principalele proprietăți ale transformatei Z sunt prezentate în tabelul următor :

Denumirea	Formula
Teorema întârzierii (translația la dreapta)	$Z(f_{n-k})(z) = z^{-k} Z(f_n)$
Teorema depășirii (translația la stânga)	$Z(f_{n+k}) = z^k \left(Z(f_n)(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f_m z^{-m} \right)$
Teorema amortizării	$Z(f_n e^{-an})(z) = Z(f_n)(za^n)$
Imaginea diferenței	$Z(f_{n+1} - f_n)(z) = (z-1)Z(f_n)(z) - f_0 \cdot z$
Imaginea sumei	$Z\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)(z) = \frac{z}{z-1} Z(f_n)(z)$
Derivarea imaginii	$Z'(f_n)(z) = -\frac{1}{z} Z(nf_n)(z)$
Imaginea produsului de convoluție	$Z(f_n * g_n) = Z(f_n) \cdot Z(g_n)$

Ca și în cazul transformatei Laplace este utilă cunoașterea transformatei Z pentru semnalele discrete uzuale. Cele mai importante valori sunt prezentate mai jos :

Semnalul discret (f_n)	Transformata Z $F(z) = Z(f_n)(z)$	Domeniul de definiție al lui F
δ_k	z^k	\mathbb{C}
$\sigma_n = 1$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
a^{n-1}	$\frac{1}{z-a}$	$ z > a $
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
na^{n-1}	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$(n-1)a^{n-2}$	$\frac{1}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(n-1)!} a^{n-k+1}$	$\frac{1}{(z-a)^k}$	$ z > a $

$\sin an$	$\frac{z \sin a}{z^2 - 2z \cos a + 1}$	$ z > 1$
$\cos an$	$\frac{z(z - \cos a)}{z^2 - 2z \cos a + 1}$	$ z > 1$
$sh(an)$	$\frac{z \cdot sh(a)}{z^2 - 2z \cdot ch(a) + 1}$	$ z > e^a $
$ch(an)$	$\frac{z(z - ch(a))}{z^2 - 2z \cdot ch(a) + 1}$	$ z > e^a $
$\frac{1}{n!}$	$\frac{1}{e^z}$	$z \neq 0$

Exemplu : Să se calculeze transformata Z a șirului $(n^2)_{n \geq 0}$

Se aplică teorema de derivare a imaginii pentru șirul $f_n = n$.

$$Z(n^2)(z) = Z(n \cdot n)(z) = -z \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)' = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

4.2. Transformata Z inversă

Transformata Z inversă a funcției $F : E_a \rightarrow C$ este șirul definit prin

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) z^{n-1} dz$$

unde γ este o curbă închisă ce conține toate punctele singulare ale funcției F .

Deoarece acest calcul poate fi complicat, dacă $F(z)$ este o fracție, ea se descompune în fracții simple și se folosește tabelul anterior.

Exemplu : Să se determine transformata Z inversă a funcției $F(z) = \frac{z(z^2 - 5)}{(z-3)(z-1)^2}$.

Se descompune F în fracții simple $F(z) = z \left(\frac{1}{z-3} + \frac{2}{(z-1)^2} \right)$. Folosind tabelul

transformatei Z rezultă $f_n = 3^n + 2 \cdot n \cdot 2^{n-1} = 3^n + n \cdot 2^n$.

4.3. Rezolvarea ecuațiilor recurente liniare cu ajutorul transformatei Z

Tehnica rezolvării acestor ecuații este similară cu cea aplicată pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale liniare cu ajutorul transformatei Laplace :

- se obține ecuația operațională aplicând transformata Z în ambii membri ai ecuației
- se rezolvă ecuația operațională și se obține imaginea $F(z)$
- se aplică transformata Z inversă și se obține șirul său original, care este soluția ecuației recurente.

Exemplu : Să se determine șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ care satisface relațiile

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 3^n, y_0 = 0, y_1 = 2$$

Ecuția operațională este $Z(y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n)(z) = Z(3^n)(z)$ adică

$$Z(y_{n+2})(z) - 4Z(y_{n+1})(z) + 4Z(y_n)(z) = \frac{z}{z-3} \text{ adică}$$

$$z^2[Y(z) - y_0 - y_1z^{-1}] - 4z[Y(z) - y_0] + 4Y(z) = \frac{z}{z-3}, \text{ din care rezultă } Y(z) = \frac{2z^2 - 5z}{(z-3)(z-2)^2}. \text{ Pentru a}$$

calcula originalul lui $Y(z)$ se descompune acesta în fracții simple.

$$Y(z) = 3\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} + 2\frac{1}{(z-2)^2}. \text{ Folosind tabelul transformatei Z obținem}$$

$$y_n = 3 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1} + 2(n-1)2^{n-2}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Bălan T., Sterbeți C : *Analiză complexă*, Editura MTM, Craiova, 2003
2. Bălan T., Sterbeți C : *Analiză Fourier*, Editura SITECH, Craiova, 2001
3. Bânzaru T., Lăzureanu C. : *Analiză matematică și ecuații diferențiale*, Editura Politehnica, Timișoara, 1997
4. Brânzănescu V., Stănășilă O. : *Matematici Speciale, teorie, exemple, aplicații*. Editura All, București, 1998
5. Constantinescu D. : *Equations differentielles*, Editura Universitaria, Craiova, 2003
6. Corduneanu A. : *Ecuații diferențiale-aplicații în electrotehnică*, Editura Facla, Timisoara, 1981
7. Demidovitch B : *Recueil d'exercices et problemes d'analyse mathematique*, Editura Mir, Moscova, 1972
8. Kessler P. : *Curs de matematici superioare*, Reprografia Univ. Craiova, 1976
9. Năslău P, Negrea R., Cădaru L : *Matematici asistate de calculator*, Editura Politehnica, Timișoara, 2005
10. Predoi M : *Analiză matematică*, Editura Universitaria, Craiova, 1994
11. Teodorescu N., Olariu V. : *Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale*, Editura Tehnică, București, 1979
12. Tudosie C : *Probleme de ecuații diferențiale*, Editura Dacia, 1990
13. Turcitu G., Sterbeti C. : *Analiză complexă și ecuații diferențiale*, Editura Radical, Craiova, 2001

