6. INTEGRALA SIMPLĂ. INTEGRALA SIMPLĂ CU PARAMETRU

6.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 6.2.1. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$ b) $\int_0^{1/2} e^{-x}\cos \pi x dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$ d) $\int_1^e \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

e) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ f) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}dx$

g) $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ h) $\int_2^3 \frac{\mathrm{dx}}{(1+\mathrm{x})\sqrt{\mathrm{x}^2-1}}$

Soluţii. a) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx =$

$= 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int_0^1 \mathrm{x}\left(\sqrt{4-\mathrm{x}^2}\right)'\mathrm{dx} =$

$= 4\arcsin \left.\frac{x}{2}\right|_0^1 + + \left.x\sqrt{4-x^2}\right|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx =$

$= 4\,\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx.$

Deci $2\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$, adică $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = = \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Aplicăm de două ori formula de integrare prin părţi:

$\int_0^{1/2} e^{-x}\cos \pi x dx = -\int_0^{1/2} (\mathrm{e}^{-\mathrm{x}})'\cos \pi\mathrm{x}\mathrm{dx} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} \bullet \left.\cos \pi x\right|_0^{1/2} + + \int_0^{1/2} e^{-x}\left(-\sin \pi x\right)\cdot \pi dx = 1-$

$\pi\int_0^{1/2} e^{-x}\sin \pi x dx = 1 + \pi\int_0^{1/2} (\mathrm{e}^{-\mathrm{x}})'\sin \pi\mathrm{x}\mathrm{dx} = 1 + \left.\pi e^{-x}\sin \pi x\right|_0^{1/2} - \pi\int_0^{1/2} e^{-x}\cos \pi x\cdot \pi dx =$

$= 1 + \pi e^{-1/2} - \pi^2\int_0^{1/2} e^{-x}\cdot\cos \pi x dx$

Rezultă că $(1+\pi^2)\int_0^{1/2} e^{-x}\cos \pi x dx = 1 + \pi e^{-1/2}$ şi deci

$$\int_0^{1/2} e^{-x}\cos \pi x dx = \frac{1+\pi e^{-1/2}}{1+\pi^2} = \frac{\sqrt{e}+\pi}{\sqrt{e}(1+\pi^2)}.$$

c) Avem $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{(1+\sin^2 x)'}{1+\sin^2 x}\mathrm{dx}$

şi folosind prima formulă a schimbării de variabilă, obţinem:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx = \ln\left(1+\sin^2 x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \ln 2.$$

d) Se observă că $\frac{x}{(1+x^2)^2} = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)'$ şi folosind formula de integrale prin părţi, obţinem:

$$I = \int_1^e \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \int_1^e \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)' \cdot \ln x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln x\Big|_1^e + \int_0^e \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\cdot\int_0^e \frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

Pentru calculul acestei din urmă integrale folosim descompunerea în fracţii simple, şi anume:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

Un calcul simplu ne arată că A = 1, B = -1 şi C = 0.

Deci $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2}$ şi deci integrala cerută devine:

$$I = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_1^e \frac{2x}{1+x^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_1^e \frac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)\Big|_1^e =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(1+e^2) + \frac{1}{4}\ln 2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{e}{\sqrt{1+e^2}} + \frac{1}{4}\ln 2.$$

e) Se foloseşte a doua formulă a schimbării de variabilă. Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{e^x - 1}$ = t, adică x = ln (1 + t^2). Integrala devine:

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx = \int_0^2 \frac{(1+t^2)\cdot t}{1+t^2+3}\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt = \int_0^2 \frac{2t^2}{t^2+4}dt =$$

$$= 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4}dt = 2\int_0^2 \frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt = \int_0^2\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt =$$

$$= 2\left(t\Big|_0^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot arctg\frac{t}{2}\Big|_0^2\right) = 2\left(2-2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(2-\frac{\pi}{2}\right) = 4-\pi$$

f) Se foloseşte schimbarea de variabilă $tg\frac{x}{2}$ = t, de unde x = 2arctg t şi integrala cerută devine:

$$\int_0^1 \frac{2}{6t^2+4t+4}dt = \int_0^1 \frac{1}{3t^2+2t+2}dt = \int_0^1 \frac{1}{\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+2-\frac{1}{3}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{5}{3}}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot arctg\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot arctg\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot arctg\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot arctg\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(s-a ţinut seama de sin x = $\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ şi cos x = $\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$)

g) Folosim schimbarea de variabilă x = 2sin t

Avem : $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\cdot\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt =$

$$= \int_0^{\pi/2} 2^4\cdot\sin^2 t\cdot\cos^2 t dt = 4\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t dt = 4\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt = 2\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin 4t}{4}\Bigg|_0^{\pi/2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi$$

h) Efectuăm schimbarea de variabilă $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ = t, deci x = $\frac{1+t^2}{1-t^2}$. Integrala devine:

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(1-t^2)^2}{4t}\cdot\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Exerciţiul 6.2.2. Să se determine aria domeniului $D\subset\mathbb{R}^2$ mărginit de graficul funcţiei f(x) = e^{-x}sin x, x $\in\mathbb{R}$, axa Ox şi dreptele x = 0 şi x = 2π.

Soluţie. Ţinând seama de 6.1.6.1. avem :

a(D) = $\int_0^{2\pi} e^{-x}|\sin x|dx = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x dx$.

Integrând prin părţi, obţinem

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx = -\int_0^{\pi} e^{-x}(\cos x)' dx = -e^{-x}\cdot\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}(e^{-x})'\cos x dx = e^{-\pi}+1 - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x dx = e^{-\pi}+1 - \int_0^{\pi} e^{-x}(\sin x)' dx =$$

$$= e^{-\pi}+1 - e^{-x}\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx = e^{-\pi}+1 - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx.$$

Rezultă: $\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi}+1\right)$.

Analog,

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x dx = -\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}(\cos x)' dx = e^{-x}\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}(e^{-x})'\cos x dx =$$

$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\cos x dx = -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}(\sin x)' x dx =$$

$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - e^{-x}\sin x\Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}(e^{-x})'\sin x dx =$$

$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x dx.$$

Rezultă: $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}\left(e^{-2\pi}+e^{-\pi}\right)$.

Prin urmare, $a(D) = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi}+1\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-2\pi}+e^{-\pi}\right) = e^{-\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi}$.

Exerciţiul 6.2.3. Să se determine volumul corpului $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

Soluţie. Ţinând seama de 8.1.6.2. , deducem:

$$v(\Omega) = \pi\int_0^{\pi}\cos^2 x dx = \pi\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

Exerciţiul 6.2.4. Să se determine lungimea graficului funcţiei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin e^{-x}$.

Soluţie. Ţinând seama de 6.1.6.3. , obţinem:

$$l(\gamma) = \int_0^1\sqrt{1+f'^2(x)} dx = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx =$$

$$= \int_1^e\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln(t+\sqrt{t^2-1})\Big|_1^e = \ln(e+\sqrt{e^2-1}).$$

Exerciţiul 6.2.5. Să se arate că funţia $F: (1, \infty) \to \mathbb{R}$

$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(x^2 - \sin^2 t)dt$ este continuă pe $(1, \infty)$.

Soluţie. Funcţia $f : (1, \infty) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x, t) = \ln(x^2 - \sin^2 t)$ este continuă pe $(1, \infty) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fiind compunere de funcţii continue (evident, pentru orice $(x, t) \in (1, \infty) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avem $x^2 - \sin^2 t > 0$).

Exerciţiul 6.2.6. Fie $F: (-1, 1) \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln(1 + x\cos t)dt$$

Să se arate că funcţia F este derivabilă pe (-1, 1) şi să se determine derivata ei.

Soluţie. Funcţia $f : (-1, 1) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x, t) = \frac{1}{\cos t} \cdot \ln(1 + x\cos t)$$

este continuă pe $(-1, 1) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fiind compunere de funcţii continue.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{1 + x\cos t} \cdot \cos t = \frac{1}{1 + x\cos t}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ este evident continuă pe $(-1, 1) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Deci F este derivabilă pe (-1, 1), iar $F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + x\cos t}dt$.

Făcând schimbarea de variabilă $tg\frac{t}{2} = u$, obţinem:

$$F'(x) = 2\int_0^1 \frac{1}{u^2(1-x) + (1+x)}du = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot arctgu\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\Bigg|_{u=0}^{u=1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} .$$

Exerciţiul 6.2.7. Folosind posibilitatea de derivare în raport cu parametrul, să se calculeze integrala:

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln\frac{1 + x\cos t}{1 - x\cos t}dt \text{ , unde } x \in (-1, 1).$$

Soluţie. Integrala cerută nu poate fi calculată prin metode elementare. Sunt satisfăcute însă condiţiile teoremei 6.1.7.3. pentru funcţia f : (-1, 1) x $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, f(x, t) = $\frac{1}{\cos t} \cdot \ln \frac{1 + x\cos t}{1 - x\cos t}$. Aşadar funcţia

F : (-1, 1) →R , F(x) = $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln \frac{1 + x\cos t}{1 - x\cos t} dt$ este derivabilă pe

(-1, 1) şi F'(x) = 2 $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 + x\cos t)(1 - x\cos t)} dt$, pentru orice x ∈ (-1,1).

Integrala obţinută se mai poate scrie:

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + x\cos t} dt + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\cos t} dt$$

şi folosind substituţia $tg \frac{t}{2}$ = u, se obţine:

$$F'(x) = 2\int_0^1 \frac{1}{(1 + x) + (1 - x)u^2} du + 2\int_0^1 \frac{1}{(1 - x) + (1 + x)u^2} du ,$$

adică F'(x) = $\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \left[arctg\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + arctg\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \right]$ şi folosind egalitatea trigonometrică *arctg α* + *arctg* $\frac{1}{\alpha}$ = $\frac{\pi}{2}$, obţinem

F'(x) = $\frac{\pi}{\sqrt{1 - x^2}}$, pentru orice x ∈ (-1, 1), de unde deducem că

F(x) = π arcsin x + C, unde C trebuie determinat.

Făcând pe x = 0, obţinem F(0) = C şi, cum din relaţia de definiţie F(0) = 0, rezultă C = 0. Prin urmare, F(x) = π arcsin x , pentru orice
x ∈ (-1, 1) .

Exerciţiul 6.2.8. Folosind posibilitatea inversării ordinii de integrare în integralele depinzând de un parametru, să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$, unde

f : [0, 1] → R este funcţia definită prin :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}, & x \neq 0, x \neq 1, \text{ unde } 0 < \alpha < \beta \\ 0, & x = 0 \\ \beta - \alpha, & x = 1 \end{cases}$$

Soluţie. Observăm că $\frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} = \int_\alpha^\beta x^t dt$, deci $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left[\int_\alpha^\beta x^t dt \right] dx$

Cum teorema 8.1.7.5. este aplicabilă, schimbând ordinea de integrare, obţinem:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_\alpha^\beta \left[\int_0^1 x^t dx \right] dt = \int_\alpha^\beta \frac{1}{t + 1} dt = \ln \frac{\beta + 1}{\alpha + 1}$$