5. FUNCŢII IMPLICITE. EXTREME CONDIŢIONATE.

5.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 5.2.1. Să se determine y' şi y'' dacă $y = y(x)$ este o funcţie definită implicit de ecuaţia $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$.

Soluţie. Fie $F(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Evident F este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 6x(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1)$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 6y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1)$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $y = 0$ sau $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Prin urmare, ecuaţia $F(x, y) = 0$ defineşte pe y ca funcţie de x în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0) din mulţimea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \neq 0, x^2 + y^2 - 1 \neq 0\}$ care verifică ecuaţia dată. Pentru orice x dintr-o vecinătate a punctului x_0 ecuaţia dată are soluţie unică $y(x)$. Obţinem, $y' = -\frac{x}{y}$.

Calculul direct arată că $y'' = -\frac{y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{y + x \cdot \frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$.

Exerciţiul 5.2.2. Să se determine derivatele parţiale de ordinul întâi şi al doilea ale unei funcţii z definită implicit de ecuaţia: $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$

Soluţie. Fie $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y$. Evident, F este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = -4y - z + 1$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 6z - y$. Ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ defineşte pe z ca funcţie de variabilele x, y în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0, z_0) din mulţimea $D = \{(x, y, z): F(x, y, z) = 0, 6z - y \neq 0\}$

Pentru orice (x, y) dintr-o vecinătate a punctului (x_0, y_0) ecuaţia dată are soluţie unică $z(x, y)$. Calculul direct arată că:

$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{2x}{6z - y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{-4y - z + 1}{6z - y}$. Derivând încă o dată, ţinând seama că $z = z(x, y)$ obţinem :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{2(6z - y) - 2x \cdot 6\frac{\partial z}{\partial x}}{(6z - y)^2} = -\frac{2(6z - y) + 2x \cdot 6\frac{2x}{6z - y}}{(6z - y)^2} = -\frac{2(6z - y)^2 + 24x^2}{(6z - y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}(6z - y) - (-4y - z + 1) \cdot 6\frac{\partial z}{\partial x}}{(6z - y)^2} = \frac{2x(25y - 6)}{(6z - y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{\left(-4 - \frac{\partial z}{\partial y}\right)(6z - y) - (-4y - z + 1)\left(6\frac{\partial z}{\partial y} - 1\right)}{(6z - y)^2} =$$

$$= \frac{150z^2 - 50yz + 50y - 100y^2 - 6}{(6z - y)^3}.$$

Printr-un calcul asemănător se arată că $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Această egalitate se poate deduce observând că *F* este de clasă C^2, de unde deducem că *z* este de clasă C^2 şi, prin urmare, derivatele mixte sunt egale.

Exerciţiul 5.2.3. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -2)$ dacă *z* este funcţia definită implicit de ecuaţia $x^2 + 2y^2 + 3z^3 + xy - z - 9 = 0$ şi de condiţia $z(1, -2) = 1$.

Soluţie. Funcţia $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^3 + xy - z - 9$ şi punctul (1, -2, 1) satisfac condiţiile teoremei 5.1.1.2.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))} = -\frac{2x + y}{9z^2 - 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))} = -\frac{4y + z}{9z^2 - 1}$$

pentru orice *(x, y)* dintr-o vecinătate a punctului (1, -2).

Atunci $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{(9z^2 - 1) - (4y + z)\left(18z\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(9z^2 - 1)^2}.$$

Deoarece $z(1, -2) = 1$, $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -2) = 0$ rezultă $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -2) = -\frac{8}{8^2} = -\frac{1}{8}$.

Exerciţiul 5.2.4. Să se determine derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi ale funcţiilor $u = u(x, y)$ şi $v = v(x, y)$ definite implicit de sistemul

$$\begin{cases} u + v - x - y = 0 \\ xu + yv - 1 = 0 \end{cases}$$

Soluţie. Fie $F_1(x, y, u, v) = u + v - x - y$ şi $F_2(x, y, u, v) = xu + yv - 1$

Calcule simple arată că:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -1,\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial F_1}{\partial u} = 1,\ \frac{\partial F_1}{\partial v} = 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = u,\ \frac{\partial F_2}{\partial y} = v,\ \frac{\partial F_2}{\partial u} = x,\ \frac{\partial F_2}{\partial v} = y$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ u & y \end{vmatrix} = -y - u$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ v & y \end{vmatrix} = -y - v$$

Rezultă că $\frac{\partial u}{\partial x}$ = - $\frac{-y-u}{y-x}$ = $\frac{y+u}{y-x}$ şi $\frac{\partial u}{\partial y}$ = $\frac{y+v}{y-x}$ pentru $y - x \neq 0$. Analog $\frac{\partial v}{\partial x}$ = - $\frac{u+x}{y-x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ = - $\frac{v+x}{y-x}$.

Derivatele de ordinul doi se calculează folosind regula de derivare a câtului şi ţinând seama că $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y+u}{y-x}\right) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(y-x)-(y+u)(-1)}{(y-x)^2} = \frac{2(y+u)}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y+v}{y-x}\right) = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(y-x)-(y+v)(-1)}{(y-x)^2} = \frac{-u-x+y+v}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y+v}{y-x}\right) = \frac{\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)(y-x)-(y+v)}{(y-x)^2} = \frac{-2(x+v)}{(y-x)^2}$$

Analog se determină $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

Exerciţiul 5.2.5. Să se determine extremele unei funcţii implicite $y = y(x)$ definită de ecuaţia $x^3 + 8y^3 - 6xy = 0$.

Soluţie. Fie $F(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy$. Avem $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 6y$,

$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 24y^2 - 6x$.

Ecuaţia $F(x, y) = 0$ defineşte pe y ca funcţie implicită de variabila x în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0) din mulţimea

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^3 + 8y^3 - 6xy = 0, 4y^2 - x \neq 0\}$.

Pentru orice x dintr-o vecinătate a punctului x_0 avem:

$$y'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-2y}{4y^2-x}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2y=0 \\ x^3+8y^3-6xy=0 \\ 4y^2-x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt[3]{2} \\ y_0 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \end{cases}$$

$$y''(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-2y'(x))(4y^2-x)-(x^2-2y)(8y\cdot y'(x)-1)}{(4y^2-x)^2}$$

Deoarece $y'(x_0) = 0$, deducem că $y''(x_0) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2x_0}{(4y_0^2-x_0)} = -1 < 0$ şi deci $x_0 = \sqrt[3]{2}$ este punct de maxim pentru funcţia $y = y(x)$ definită implicit de ecuaţia dată în vecinătatea acestui punct; valoarea maximă a lui y este $y(x_0) = y_0 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

Exerciţiul 5.2.6. Să se determine extremele unei funcţii implicite $z = z(x, y)$ definită de ecuaţia

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$$

Soluţie. Fie $F(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72$.

Evident, în orice punct $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, avem: $\frac{\partial F}{\partial x} = 10x - 2y - 2z$,

$\frac{\partial F}{\partial y} = 10y - 2x - 2z$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 10z - 2x - 2y$. Deci F este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$.

Ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ defineşte pe z ca funcţie implicită de variabilele x şi y în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0, z_0) din mulţimea

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 5x^2+5y^2+5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0,\ 10z - 2x - 2y \neq 0\}.$$

Avem $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{y + z - 5x}{5z - x - y}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{x + z - 5y}{5z - x - y}$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z - 5x = 0 \\ x + z - 5y = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0 \\ 5z - x - y \neq 0 \end{cases}$$

adică $\begin{cases} x = y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = y = -1 \\ z = -4 \end{cases}$.

Derivatele parţiale de ordinul doi ale lui z sunt :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x} - 5\right)(5z - x - y) - (y + z - 5x)\left(5\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right)}{(5z - x - y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y} - 5\right)(5z - x - y) - (x + z - 5y)\left(5\frac{\partial z}{\partial y} - 1\right)}{(5z - x - y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right)(5z - x - y) - (x + z - 5y)\left(5\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right)}{(5z - x - y)^2}$$

Ţinând cont de teorema 5.1.1.2. ecuaţia dată defineşte în mod unic pe z ca funcţie de x şi y pe o vecinătate a punctului (1, 1, 4). Punctul (1, 1) este punct critic pentru această funcţie şi $z(1, 1) = 4$. Hessiana lui z în (1, 1) este

$$H_z(1, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -\frac{5}{18} < 0$ şi $\Delta_2 = \frac{24}{18^2} > 0$. Prin urmare, (1, 1) este punct de maxim local pentru funcţia $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia dată în vecinătatea acestui punct, iar valoarea maximă este $z(1, 1) = 4$.

Analog, $(-1, -1)$ este punct critic pentru unica funcţie $z = z(x, y)$ obţinută aplicând teorema 5.1.1.2. ecuaţiei date şi punctului $(-1, -1)$. Hessiana acestei funcţii este

$$H_z(-1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

Deoarece $\Delta_1 = \frac{5}{18} > 0$ şi $\Delta_2 = \frac{24}{18^2} > 0$ rezultă că (-1, -1) este punct de minim pentru această funcţie. Valoarea minimă este $z(-1, -1) = -4$.

Exerciţiul 5.2.7. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y, z) = x + y + z$ condiţionate de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Soluţie. Fie $F(x, y, z) = x + y + z + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right)$ cu $x \neq 0, y \neq 0,$ $z \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Rezolvând sistemul
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 1 - \frac{\lambda}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 1 - \frac{\lambda}{y^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y) = 1 - \frac{\lambda}{z^2} = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0 \end{cases}$$
se obţin soluţiile $\lambda_1 = 9$, $x_1 = y_1 = z_1 = 3$.
$\lambda_2 = 1$, $x_2 = y_2 = 1$, $z_2 = -1$
$\lambda_2 = 1$, $x_3 = z_3 = 1$, $y_3 = -1$
$\lambda_2 = 1$, $y_4 = z_4 = 1$, $x_4 = -1$

Fie $\Phi(x, y) = F(x, y, z(x, y))$ restricţia lui F la mulţimea

$$M = \{(x, y, z): \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1\}$$

Atunci $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$ unde $z = z(x, y)$ este definită implicit de restricţia $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Derivând restricţia în raport cu x (respectiv y) obţinem $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z^2}{x^2}$ (respectiv $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z^2}{y^2}$).

Rezultă că $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - \frac{z^2}{x^2}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 - \frac{z^2}{y^2}$. Calculând derivatele parţiale de ordinul doi obţinem:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{2z^2(z+x)}{x^4}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{2z^3}{x^2 y^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{2z^2(z+y)}{y^4}$$

Obţinem $H_\Phi(3, 3) = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$. Deoarece $\Delta_1 = \frac{4}{3} > 0$, $\Delta_2 = \frac{4}{3} > 0$ rezultă că (3, 3) este punct de minim pentru Φ, deci (3, 3, 3) este punct de minim condiţionat pentru f.

$H_{\Phi}(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $H_{\Phi}(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ şi $H_{\Phi}(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

În aceste cazuri valorile proprii sunt soluţii ale ecuaţiei $\lambda^2 - 4 = 0$ adică $\lambda_{1,2} = \pm 2$, ceea ce arată că punctele staţionare (1, 1, -1), (1, -1, 1) şi
(-1, 1, 1) nu sunt puncte de extrem condiţionat.

Exerciţiul 5.2.8. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y, z) = xyz$ condiţionate de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$şi $x + y + z = 0$.

Soluţie: Fie $F(x, y, z) = xyz + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z)$ cu
$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Adunând primele trei ecuaţii şi ţinând cont de ultima, obţinem
$xy + xz + yz + 3\lambda_2 = 0$, iar din

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

rezultă $xy + xz + yz = -\frac{1}{2}$ deci $\lambda_2 = \frac{1}{6}$.

Scăzând primele două ecuaţii obţinem $(y - x)(z - 2\lambda_1) = 0$. Dacă $y = x$ obţinem punctele $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ şi $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Considerând acum $z = 2\lambda_1$, înmulţind prima ecuaţie cu x, a doua cu y, a treia cu z şi adunând rezultă $\begin{cases} 3xyz + 2\lambda_1 = 0 \\ z = 2\lambda_1 \end{cases}$.

Deci $3xyz + z = 0$ de unde $z = 0$ sau $3xy = -1$.

Se observă că $z = 0$ nu convine, iar din $\begin{cases} 3xy = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ se obţin soluţiile

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

λ_1 se calculează în fiecare caz din relaţia $3xyz + 2\lambda_1 = 0$. Fie acum

$\Phi(x) = f(x, y(x), z(x))$, unde $y = y(x)$, $z = z(x)$ sunt explicitări locale ale sistemului de restricţii $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

Rezultă că $\Phi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(x) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot z'(x)$. Derivând membru cu membru restricţiile rezultă

$$\begin{cases} 2x + 2y \cdot y'(x) + 2z \cdot z'(x) = 0 \\ 1 + y'(x) + z'(x) = 0 \end{cases}$$

de unde $y'(x) = \frac{z - x}{y - z}$ şi $z'(x) = \frac{x - y}{y - z}$.

Cum $\frac{\partial f}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial f}{\partial z} = xy$ obţinem $\Phi'(x) = yz - xy - xz + x^2$ şi $\Phi''(x) = y'z + yz' - y - xy' - z - xz' + 2x = 2(2x - y - z)$. Deoarece $\Phi''\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{6}{\sqrt{6}} > 0$ rezultă că $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ şi $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ sunt puncte de minim condiţionat. Valoarea minimă este $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$. Analog, deoarece $\Phi''\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{6}} < 0$ deducem că punctele $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ şi $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ sunt puncte de maxim condiţionat, iar valoarea maximă este $\frac{1}{3\sqrt{6}}$. Punctele $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ şi $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ trebuie analizate separat deoarece ele nu satisfac condiţia $y \neq z$.

În vecinătatea fiecăruia dintre ele sistemul de restricţii defineşte implicit pe x şi pe y ca funcţie de z.

Derivând în raport cu z sistemul de restricţii obţinem:

$$\begin{cases} 2x \cdot x'(z) + 2y \cdot y'(z) + 2z = 0 \\ x'(z) + y'(z) + 1 = 0 \end{cases}$$

adică $\begin{cases} x'(z) = \frac{y - z}{x - y} \\ y'(z) = \frac{z - x}{x - y} \end{cases}$, $x \neq y$.

Restricţia funcţiei f la mulţimea M poate fi scrisă acum astfel:

$\psi(z) = f(x(z), y(z), z)$.

Deci $\psi'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(z) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(z) + \frac{\partial f}{\partial z} = z^2 - yz - xz + xy$, $x \neq y$.

$\psi''(z) = 2z - y'z - y - x'y - x + x'y + xy' = 2(2z - x - y)$.

Se observă că $\psi''\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{6}{\sqrt{6}} > 0$, deci $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de minim condiţionat, iar valoarea minimă este $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$, în timp ce $\psi''\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{6}} < 0$, deci $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de maxim condiţionat, iar valoarea maximă este $\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

Exerciţiul 5.2.9. Să se determine *inf f(A)* şi *sup f(A)* dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este $f(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$ şi $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Soluţie. Deoarece f este continuă, iar A este mulţime compactă, rezultă că marginile *inf f(A)* şi *sup f(A)* există şi sunt atinse.

Determinăm punctele staţionare ale lui f.

Sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 10x + 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x + 2y = 0 \end{cases}$ are soluţie unică $x = y = 0$.

Deci f are un singur punct staţionar $(0, 0)$ şi acesta se află în interiorul lui A.
Funcţia Lagrange este $F(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.Din sistemul

$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 10x + 3y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3x + 2y + 2\lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ se obţin patru puncte staţionare pe frontiera lui A, anume

$\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ şi $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Calcule elementare arată că $f(0, 0) = 0$, $f\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{11}{2}$, $f\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{11}{2}$,

$f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{2}$ şi

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{2}$.

Rezultă că $\inf f(A) = f(0, 0) = 0$ şi

$$\sup f(A) = f\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = f\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{11}{2}.$$

Exerciţiul 5.2.10. Să se determine punctele curbei $x^2 + xy + y^2 = 1$ care sunt cele mai depărtate de origine.

Soluţie. Trebuie să determinăm punctele de extrem ale funcţiei
$f(x, y) = x^2 + y^2$ (pătratul distanţei de la (x, y) la $(0, 0)$) condiţionate de
$x^2 + xy + y^2 = 1$.

Funcţia Lagrange este $F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \lambda x + 2(1+\lambda)y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Soluţiile sunt: λ_1 = -2 cu două puncte staţionare (1, -1) şi (-1, 1) şi $\lambda_2 = -\dfrac{2}{3}$ cu două puncte staţionare $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Aplicând metoda prezentată în exerciţiul 5.3.9. se arată că (1, -1) şi (-1, 1) sunt puncte de maxim condiţionat.

Punctele $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ şi $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ sunt puncte de minim condiţionat. Punctele cele mai depărtate de origine, situate pe curba dată sunt (1, -1) şi (-1, 1).