10. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE PRIMUL TIP

10.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

10.1.1. Pânze şi suprafeţe netede

Definiţia 10.1.1.1. Se numeşte *pânză netedă* orice funcţie de clasă C^1,
$S : D \to \mathbb{R}^3$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este o mulţime deschisă şi conexă (domeniu). Pânza S se numeşte *simplă*, dacă aplicaţia S este injectivă; ea se numeşte *nesingulară*, dacă, în fiecare punct din D, matricea jacobiană a lui S are rangul doi, imaginea directă a mulţimii D prin aplicaţia S, S(D), se numeşte *imaginea pânzei S* şi o vom nota (S).

Definiţia 10.1.1.2. Două pânze S_1: $D_1 \to \mathbb{R}^3$, $S_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3$ se numesc *echivalente* (se scrie $S_1 \sim S_2$) dacă există un difeomorfism $T:D_1 \to D_2$ astfel încât jacobianul lui T să fie strict pozitiv în fiecare punct din D_1 şi $S_1 = S_2 \circ T$. Difeomorfismul T se mai numeşte *schimbare de parametri.*

Observaţia 10.1.1.1. Folosind bijectivitatea lui T, se arată uşor că două pânze echivalente au aceeaşi imagine. De asemenea, este evident că relaţia "~" este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea pânzelor, prin urmare, ea împarte această mulţime în clase de echivalenţă.

Definiţia 10.1.1.3. Se numeşte *suprafaţă netedă* orice clasă de echivalenţă a unei pânze netede nesingulare. Prin *imaginea unei suprafeţe* înţelegem imaginea unei pânze din clasa de echivalenţă respectivă. Deseori, se foloseşte termenul suprafaţă în sensul de imagine a unei suprafeţe. Această accepţiune conduce la următoarele interpretări:

1) Dacă $S:D \to \mathbb{R}^3$ este o pânză netedă, nesingulară, care asociază fiecărui punct $(u, v) \in D$ un punct $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in (S)$ se spune că egalităţile
$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D$$
sunt *ecuaţiile parametrice ale suprafeţei* din care face parte pânza considerată. Evident, o suprafaţă poate avea mai multe reprezentări parametrice.
2) Ecuaţia $z = \varphi(x\ y)$, $(x, y) \in D$ se numeşte *ecuaţia explicită a unei suprafeţe*, şi anume, a suprafeţei reprezentată de pânza $S:D \to \mathbb{R}^3$,
$S(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$.
3) Ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ este *ecuaţia implicită a unei suprafeţe* deoarece, în condiţiile teoremei funcţiilor implicite , se poate determina, local, o explicitare unică $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$, care defineşte, evident, o pânză, $S(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$, $(u, v) \in D$. Imaginea acestei pânze este însă, în general, numai o parte a mulţimii $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$.
4) Sistemul: $F_1(x, y, z, u, v) = 0$, $F_2(x, y, z, u, v) = 0$, $F_3(x, y, z, u, v) = 0$ poate fi considerat o *reprezentare parametrică a unei suprafeţe*, deoarece, în anumite condiţii, el defineşte, local, pe x, y, z ca funcţii de u şi v.

10.1.2. Aria unei suprafeţe

Considerăm o suprafaţă reprezentată de o pânză S netedă şi simplă, definită explicit de ecuaţia $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil. Fie $d = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ o diviziune oarecare a domeniului D; acestei diviziuni îi corespunde o partiţie $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ a imaginii (S) a suprafeţei considerate. Fie $(x, y) \in D_i$, $i = 1, 2, ..., n$ arbitrar şi $M_i \in (S)$ punctul de coordonate x_i , y_i, $f(x_i, y_i)$. Considerăm planul π_i tangent la (S), în punctul M_i. Considerăm apoi cilindrul care are drept curbă directoare frontiera lui D_i şi generatoarele paralele cu Oz. Acest cilindru determină pe planul tangent π_i un domeniu T_i a cărui proiecţie pe planul xOy este D_i.

Aproximăm aria (S_i) prin aria(T_i) şi, prin urmare, aria imaginii (S) a suprafeţei prin $\sum_{i=1}^{n} aria(T_i)$. Evident, aproximarea este cu atât mai bună, cu cât diviziunea d este mai fină. Este natural, deci, să definim aria(S) ca fiind $\lim_{\|d\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} aria(T_i)$ atunci când această limită există, este finită şi nu depinde de alegerea punctelor (x_i, y_i). Acceptând această idee se poate demonstra că:

$$\text{aria(S)} = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

Dacă suprafaţa este dată parametric : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) $\in$ D atunci:

$$\text{aria(S)} = \iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$$

unde A = $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}$, B = $\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$, C = $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$.

Observaţia 10.1.2.1. În cele prezentate mai sus am definit, de fapt, *aria imaginii unei pânze*. Cum imaginea unei suprafeţe este, prin definiţie, imaginea pânzei care determină suprafaţa, putem spune că am definit *aria imaginii unei suprafeţe*, dacă ţinem seama că integrala de mai sus nu depinde de pânza considerată ca reprezentant al suprafeţei date. Cum de obicei, se foloseşte termenul suprafaţă în loc de imagine a suprafeţei, putem spune că aria(S) este *aria suprafeţei* reprezentată de S.

10.1.3. Integrala de suprafaţă de primul tip

Definiţia 12.1.3.1. Fie o suprafaţă netedă reprezentată de pânza S definită parametric prin: x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) $\in$ D, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil şi fie (S) $\subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa. Fie Φ : (S)$\to\mathbb{R}$ o funcţie arbitrară, d = {D_1, D_2, ..., D_n} o diviziune arbitrară a domeniului D, ξ un sistem de "puncte intermediare" (u_i, v_i) $\in D_i$,
i = 1, 2, ..., n. Funcţiei Φ, diviziunii d şi sistemului ξ le asociem suma :

$$\sigma_\Phi(d,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i, y_i, z_i)\cdot aria(S_i)$$

unde (S_i) = {(x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u,v)), (u, v) $\in D_i$},
(x_i, y_i, z_i) $\in$ (S_i), $x_i = x(u_i, v_i)$, $y_i = y(u_i, v_i)$, $z_i = z(u_i, v_i)$, i 0 1, 2, ..., n.

Funcţia Φ se numeşte *integrabilă în raport cu aria* pe suprafaţa dată dacă există I$\in\mathbf{R}$ încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$ astfel încât, oricare ar fi diviziunea d, cu $\|d\| < \eta$ şi oricare ar fi sistemul ξ de puncte intermediare, să avem $|\sigma_\Phi(d,\xi) - I| < \varepsilon$. Numărul real I se numeşte *integrala de suprafaţă în raport cu aria (sau integrala de suprafaţă de primul tip)* a funcţiei Φ şi se notează:

$$I = \iint_S \Phi(x,y,z)ds$$

Observaţia 10.1.3.1. a) Terminologia este justificată de faptul că, deşi numărul real I este asociat funcţiei Φ şi unei pânze S, se poate demonstra că, dacă se consideră o altă reprezentare parametrică a suprafeţei date (adică o pânză echivalentă cu S), numărul I nu se schimbă.

b) Dacă Φ(x, y, z) = 1, atunci evident I=a(S),deci a(S)= $\iint_S ds$.

Teorema 10.1.3.1. Fie o suprafaţă netedă şi simplă reprezentată de pânza S definită parametric prin: x = x(u,v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) $\in$ D unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil. Fie (S) $\subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa, iar Φ : (S)$\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci Φ este integrabilă în raport cu aria pe suprafaţa dată şi are loc egalitatea:

$$\iint_S \Phi(x,y,z)ds = \iint_D \Phi(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\,dudv$$

Observaţia 10.1.3.2. a) Dacă suprafaţa este dată explicit de ecuaţia
z = f(x, y), (x, y) $\in$ D, atunci:

$$\iint_S \Phi(x, y, z)ds =$$

$$\iint_D \Phi(x, y, f(x, y)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

b) Integrala de suprafaţă are proprietăţi analoage integralelor duble: liniaritatea în raport cu funcţia, aditivitatea în raport cu descompunerea imaginii suprafeţei într-un număr finit de părţi fără puncte interioare comune, etc. În consecinţă, dacă suprafaţa este dată implicit, printr-o ecuaţie care nu poate fi explicitată în raport cu nici una dintre variabile, se poate încerca descompunerea imaginii sale într-un număr finit de părţi explicitabile în raport cu câte o variabilă şi apoi se adună integralele obţinute.

10.1.4. Aplicaţii ale integralelor de suprafaţă de primul tip

10.1.4.1.Masa unei suprafeţe materiale

Dacă imaginea (S) $\subset \mathbf{R}^3$ modelează o suprafaţă materială, iar
ρ : (S) $\to$ R este o funcţie continuă care asociază fiecărui punct
(x, y, z) $\in$ (S) densitatea ρ(x, y, z) a suprafeţei materiale în acest punct, atunci masa m, este dată de :

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)ds$$

10.1.4.2. Centrul de greutate al unei suprafeţe materiale

În aceleaşi condiţii, coordonatele centrului de greutate G al suprafeţei materiale modelate de (S) sunt date de:

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x, y, z)ds, \quad y_G = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x, y, z)ds,$$

$$z_G = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x, y, z)ds$$

10.1.4.3. Momentele de inerţie ale unei suprafeţe materiale

Momentele de inerţie ale suprafeţei materiale, modelată de (S), în raport cu axele de coordonate sunt:

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)ds$$

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)ds$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)ds$$

Momentele de inerţie faţă de originea axelor de coordonate şi faţă de planele de coordonate se definesc analog.