P. STAVRE **M.M. STANESCU**

Cercetări Operaționale

Prezentare

Primul autor este profesor universitar emerit, doctor în Matematică, specialitatea Geometrie Diferenţială şi conduce doctorat în Geometrie (specialitatea Fibrate vectoriale cu aplicaţii în Teoria Relativităţii). În paralel a predat şi predă „Matematici Aplicate” la Facultatea de Ştiinţe Economice (încă de la înfiinţare). A predat „Cercetări Operaţionale” la facultăţi tehnice (de exemplu Facultatea de Mecanică, etc.). Având această experienţă de peste 40 de ani, a urmărit modul de abordare sub aspect didactico-metodic al matematicilor aplicate în diverse ţări şi în diverse perioade (fiind şi recenzent la Zentral Blatt, Math. Rew. Germania şi la American Math. Society, timp de peste 30 de ani).

Toate acestea au dus la schimbarea concepţiei proprii de predare şi de elaborare de cărţi pentru studenţi sau pentru cercetători. Vom lua în considerare ca exemplu cartea Matematici Aplicate în Economie (a se vedea [St.] 1982, care la timpul respectiv a fost considerată cea mai bună carte de specialitate, conform părerii specialiştilor. În acest sens mulţumim Acad. Radu Miron care aducându-mi la cunoştinţă aceste aprecieri, m-a încurajat să continui şi această activitate ca didact). Pe parcurs experienţa de predare a dus la separarea materialului din [St.] în părţi componente pe specificul facultăţilor ţinând cont şi de avantajul calculatorului. Totul sub formă algoritmică şi nu sub formă de matematici generale (teoreme, leme,… dispersate). De exemplu, partea cea mai răspândită „Programare Liniară cu aplicaţii” a fost adusă la origine (Dantzig) fiind curăţită de „stuful” suplimentar folosit în general (algebrizare-geometrizare excesivă, care deşi frumoase nu sunt specifice).

În acest fel s-a ajuns la forma actuală accesibilă unei largi categorii de cititori (elevi, studenţi, cercetători care nu sunt matematicieni).

1) S-au putut aborda „unitar” cele două probleme de bază: „Modelele mici” şi „Modelele mari” (relative la „memoria de calcul” a calculatorului de care dispunem), în sens [Las.].

2) S-a pus accentul pe lămurirea problemei **moderne a „conducerii la două nivele în orice sistem de activităţi.** Este posibilă o totală descentralizare şi autonomia subsistemelor conduse ? Dacă nu, care este modelul ?

Această abordare a fost folosită pentru prima dată la noi în țară în cursurile studențeşti.

3) Au fost elaborați noi algoritmi, simpli, moderni, uşor de programat pe calculator; **Algoritmul transpoziției**, care apoi este comparat cu algoritmul Ungar; Algoritmul $\theta(D)$; Algoritmul S(P<); S(P>), care se compară calculatoriu cu algoritmul Gomory, punând în evidență **reducerea** memoriei de calcul necesară.

Al doilea autor, lector universitar, doctor în Ştiințe Fizico-Matematice, specializarea Analiză Matematică (Teoria Operatorilor), ca asistent al primului autor şi-a adus contribuția la acest experiment şi a preluat apoi cursul de „Cercetări Operaționale" la Facultatea de Mecanică, secția de Inginerie Economică în Mecanică.

Din această colaborare s-a născut ideea elaborării actualei forme a cărții (volumul I), care va fi urmată de „Cercetări Operaționale Generale", ce va fi structurată tot pe ideile prezentate anterior: algoritmizare cu reducerea „memoriei" de înregistrare, aplicații pe modele.

Mulțumim pe această cale domnului prof. univ. dr. ing. Marin Bică, Decan al Facultății de Mecanică, pentru aprecierile şi sugestiile făcute, ca reprezentant al uneia dintre facultățile beneficiare.

Aceleaşi mulțumiri le aducem şi domnului prof. univ. dr. ing. Dan Gheorghe Băgnaru, Prodecan al Facultății de Mecanică, care fiind şi matematician, a contribuit la forma actuală a cărții prin sugestiile făcute.

Autorii

Introducere

Un sistem de activităţi organizat (sistem productiv, sistem de învăţământ, sistem de afaceri,...) este un sistem condus piramidal în cadrul unor restricţii pentru atingerea unui scop principal.

Binomul restricţii-scop implică o organizare raţională a sistemelor de activităţi de la bază (a subsistemelor de activităţi) şi până la vârf (agenţie, patronat, stat,...). Vârful va fi numit agenţie în cele ce urmează.

În economia centralizată, agenţia (statul) distribuie cifrele de plan pentru subsisteme şi odată cu acestea alocă resursele (intrările) necesare (resurse materiale, resurse financiare,...) pentru realizarea obiectivelor planificate. În acest fel subsistemele au numai rol de execuţie. Scade iniţiativa lor şi implicit scade posibilitatea lor de a se adapta la unele condiţii noi apărute, specifice, pe piaţă (cererea). Apar fenomene nocive ca de exemplu: penurie la unele bunuri, sau stocuri-producţie pe stoc la alte bunuri. Implicit au loc dereglări bugetaro-financiare. Mecanismul cerere-ofertă este blocat. Statul trebuie să găsească noi metode de reglare, parţială, dar "peticirea sacului nu este un sac nou, durabil". Să ne amintim numai de una din mai cunoscutele asemenea activităţi şi anume apariţia mandatarilor (pentru o perioadă scurtă) în care noul mecanism economico-financiar a fost benefic de moment, dar nociv în perspectiva dinamicii economico-financiare viitoare (se cunosc efectele economice negative, apărute în perioada 1988-1989).

Subsistemele (la nivel micro-economic) sunt la rândul lor cuplate la nivel macro-economic (restricţii rezultate din necesitatea satisfacerii unor cerinţe pentru alte domenii de activitate: armată, învăţământ, sănătate, aparatul administrativ central,...). Lipsa autonomiei subsistemelor nu poate satisface anumite cerinţe ca de exemplu: reglarea preţurilor prin cerere şi ofertă în cadrul unui mod concurenţial-loial. Aceste cerinţe sunt specifice unei economii de piaţă descentralizată.

Contradicţiile sunt evidente.

Prin urmare, apare necesitatea autonomiei subsistemelor şi apariţia concurenţei loiale cu elementele specifice economiei de piaţă. Sectorial se pun aceleaşi probleme, ca de exemplu în sectorul "învăţământ", cu specificul său.

Oricare ar fi sistemul economic, relaţiile de cuplare, centrale, rămân. Ce înseamnă atunci autonomia subsistemelor ? Există o autonomie totală a subsistemelor în ceea ce priveşte organizarea raţională a activităţilor subsistemelor cuplate la sistem şi atunci cum acţionează raţional agenţia (centrul) în organizarea şi funcţionarea viabilă a întregului sistem ? Este clar că în formularea unui răspuns rolul ştiinţei, în general şi al ştiinţelor tehnico-economice, în special, este esenţial.

Problematica anterioară va fi abordată în capitolul 6, pentru cazul unui sitem de activităţi liniar programat unde se va lămuri cum se pune problema autonomiei subsistemelor.

Pentru a ajunge aici va fi necesar să trecem în revistă şi câteva noţiuni praxeologice, de cultură tehnico-economică, iar apoi să elaborăm algoritmi care să rezolve problemele de organizare raţională a activităţilor ca modele liniare. Modelele neliniare vor fi abordate în volumul II.

În orice sistem economic relaţia inginer-economist este esenţială, începând cu proiectarea, lansarea în producţie şi terminând cu controlul calităţii produselor (dirijarea calităţii în procesul de producţie, respectiv controlul la "recepţie").

Orice sistem de activităţi organizat (sistem educaţional, sistem de afaceri, sistem productiv-organizarea raţională a producţiei, ...) se desfăşoară în cadrul unor condiţii (restricţii) şi are un scop (obţinerea unei "utilităţi", obţinerea unui beneficiu,...) Binomul, restricţii - scop, implică o gândire raţională bazată cel puţin pe logica clasică-aristotelică-care are la bază cele trei principii: identitatea, non-contradicţia şi terţul exclus.

În cadrul acestor trei principii orice exprimare, conversaţie, decizie, este logică dacă respectă dualitatea; modus ponens-modus tolens. Orice altă exprimare, în cadrul celor trei principii, duce la absurdul "fiecare are dreptatea lui". Acelaşi absurd se obţine şi dacă unul dintre cele trei principii nu este respectat.

Ne întâlnim adesea cu afirmaţie de forma: "Cu un buget" minim să se obţină un beneficiu maxim (sau utilitate maximă). Evident, o asemenea afirmaţie ”sună” bine, dar nu este o afirmaţie ”raţională”, ca să folosim un termen folosit al cercetătorilor premodernişti. Unul dintre aceşti cercetători este Espinas (1890), care spune că în orice organizare raţională sunt adevărate numai afirmaţiile:

1) La o anumită ”**cheltuială**” dată să se obţină o utilitate maximă.

2) Un nivel fixat U_0 al utilităţii, să se obţină cu o ”**cheltuială**” minimă.

Aceste două afirmaţii, duale, sunt numite **principii raţionale de organizare** a oricărui sistem de activităţi.

Matematica a modelat aceste două principii sub formă de probleme duale de optimizare. S-a creat o nouă ramură de ”cercetări operaţionale” care, în fond, arată cum se modelează cele două principii de mai sus:

1) La un input (intrare) fixat, în cadrul restricţiilor activităţii, să se obţină un output, $\overline{X}$ (ieşire) optim.

2) Un anumit ”output”, $\overline{X}$, să se obţină cu un input total, minim.

Eficienţa outputului, X, se exprimă printr-o valoare a unei funcţii, $f(X) = z$, iar restricţiile de producţie, (activitate) se exprimă prin funcţii g_j $j = 1, ..., m$, în modelul matematic corespunzător. Dacă g_j sunt funcţii liniare, $g_j(X) = \sum A_{jk}x_k - B_j = 0$ atunci A_{jk}= cantitatea de input, B_j, ce se ”consumă pentru a obţine o unitate de output, de tipul k, (notat x_k), după o anumită tehnologie, T_k , de care se dispune. Dacă şi ’scopul” este o funcţie f liniară, $z = f(X) = \sum C_k x_k$ (C_k =eficienţa unitară a inputului x_k) atunci modelul obţinut **se numeşte model liniar. În caz contrar se va numi model neliniar.** Prin urmare şi cartea ce o prezentăm va fi structurată pe două volume: În primul volum se vor da algoritmi de rezolvare pentru modele liniare iar în volumul doi se vor prezenta algoritmi pentru rezolvare a celor mai uzuale modele neliniare.

Chiar şi în cazul liniar apar probleme ca de exemplu: n- este foarte ”mare” relativ la memoria de calcul de care se dispune, mai ales dacă, $d_k \leq x_k \leq s_k$ (d_k = cererea; s_k =capacitatea de producţie, sau o cantitate estimată aşa încât, $(s_k - d_k)$ să fie un stoc de rezervă nu producţie pe stoc). Prin urmare, un algoritm trebuie dat în aşa fel încât să depăşească acest ”hop” dat de n, foarte mare. Dacă m, este foarte ”mare”, în special la nivel ”macro”, practic problema se va descompune în sub-probleme cu număr mic de restricţii.

În cazul liniar algoritmul va duce la o "ieşire" $\overline{X}$ după un număr finit de paşi.

În cazul neliniar pe lângă greutăţile de natură matematică este posibil ca algoritmul să nu ducă la ieşirea optimală după un număr finit de paşi. În acest caz trebuie dată o metodă de 'oprire" a algoritmului în aşa fel încât "ieşirea", $\overline{X}$, la acest pas, să aproximeze ieşirea optimă cu o eroare practic admisă. De exemplu $f\left(\overline{X}\right)$ să aibă o valoare, $\overline{z}$ aşa încât $\left|\overline{Z} - Z_{\text{optim}}\right| < \varepsilon$, ε reprezentând o valoare practic admisă; ($\varepsilon = \frac{1}{1000}$ o pierdere de 1 leu la mia de lei, de exemplu). Formarea deprinderii de a obţine un program $\overline{X}$ pentru care $f\left(\overline{X}\right) = z_0$ să difere de valoarea optimală, necunoscută, $f\left(\widetilde{X}\right) = z_{optim}$ (în modul) cu o valoare ε practic admisă este esenţială ($\overline{X}$ se va numi program optimal-economic, admis). Iată câteva probleme pe care le ridică practica. Deci pe această direcţie este necesar să se studieze matematica aplicată. Sarcina este dificilă şi atunci este necesar să se prezinte materialul aşa încât să fie pe înţelesul, în primul rând, al celor ce aplică matematica (economişti, ingineri...). Din aceste motive se începe chiar cu elementele de bază, din liceu, dar expuse pe direcţia "algoritmică". **În acest fel cartea va fi utilă şi elevilor cât şi profesorilor.**

În primul volum vom începe cu sistemele liniare de ecuaţii tratate algoritmic şi apoi se va trece la algoritmi de rezolvare a probelor de programare.

O clasă mare de probleme concrete se poate modela prin acelaşi model matematic. O problemă mai cunoscută din această clasă va fi luată ca reprezentant. Din aceste motive se va folosi terminologia de "model de tip C".

Un model de programare liniară de forma:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} A_{ik}x_k &= B_k;\ i = \overline{1,m}; \qquad (1) \\ \max_{(\min)} f(X) &= \sum_{k=1}^{n} C_k x_k;\ x_k \geq 0\ \left(k = \overline{1,n}\right) \end{aligned}$$

se va numi model sub formă standard.

Practic înseamnă folosirea integrală a inputurilor B_k $\left(k=\overline{1,m}\right)$. ($\{B_k\}$ pot fi: ore de producţie, sau resurse, în general care trebuie folosite integral)

Un model de forma:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}A_{ik}x_k &\geq B_k;\ i=\overline{1,m}; \\ \min f(X) &= \sum_{k=1}^{n}C_kx_k;\ x_k\geq 0\ \left(k=\overline{1,n}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

se va numi model de tip ”amestec” (dietă, concentrate, medicamente, cifre octanice, aliaje,...).

Un model de forma:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}A_{ik}x_k &\leq B_k;\ i=\overline{1,m}; \\ \max f(X) &= \sum_{k=1}^{n}C_kx_k;\ x_k\geq 0\ \left(k=\overline{1,n}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

se va numi model de tip ”resurse”.

Inegalităţile ”$\leq$” se scriu când se cere şi o eventuală economie la resurse. Cum scopul este optim $f(x)$, algoritmul va arăta care dintre ’$\leq$’ se va transforma în ’$=$’ pentru programul optim, $\overline{X}$, obţinut. Este posibil să nu se obţină atingerea optimă a scopului făcând economie la resurse (intrări), aşa cum se va vedea mai departe.

Exemplul 1. Fie datele

	x_1 T_1	x_2 T_2	x_3 T_3	x_4 T_4	resurse B	
A	2	1	1	1	4	B_1
	1	3	1	2	7	B_2
C	2	3	4	3		

pentru care se cere, $\max f(X)=2x_1+3x_2+4x_3+3x_4$, dar cu economie la resursa, $B_1=4$ (socotită ”deficitară”). Modelul este:

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_4\leq 4, \\ x_1+3x_2+x_3+2x_4=7,\end{cases}\quad x_k\geq 0\ \left(k=\overline{1,4}\right)$$
$$\max f(X)=2x_1+3x_2+4x_3+3x_4$$

şi se va vedea că în aceste condiţii, programul optimal este

$$X^t = \left(x_1 = 0;\, x_2 = \frac{3}{2};\, x_3 = \frac{5}{2};\, x_4 = 0 \right) \text{ (t = transpus)}$$

care verifică cu '=" prima restricţie, adică $B_1 = 4$ se va consuma integral (Nu se poate face economie la această resursă dacă se doreşte un beneficiu total f, maxim). Alte cazuri se vor vedea pe parcurs.

Evident pot exista modele în care unele restricţii sunt efective (=), iar altele sunt inecuaţii. Acestea, cât şi modelele de tipul (2), (3) se pot reduce la forma standard, introducând variabilele $y_i \geq 0$, de compensare (care se mai numesc variabile ecart). Astfel, dacă o restricţie este de forma $\sum\limits_k A_{ik}x_k \leq B_i$, atunci se va scrie $\sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik}x_k + y_i = B_i$ $(y_i \geq 0)$, iar inecuaţia $\sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik}x_k \geq B_k$, se va scrie $\sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik}x_k - y_i = B_i$ $(y_i \geq 0)$.

Restricţiile $x_i \geq 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ sunt necesare fie din punct de vedere matematic (pentru elaborarea algoritmului simplex de rezolvare), fie din necesităţi practice, ca de exemplu, dacă x_i reprezintă cantitatea de produse de tipul "i". Dar tot în practică putem avea unele $x_i \leq 0$ (ca de exemplu dacă x_i reprezintă temperatura de prelucrare la "rece"). În acest caz se va ajunge iarăşi la condiţia ca toate variabilele să fie nenegative.

Dacă, concret, $x_i \geq 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ înseamnă că oricare ar fi valorile $\overline{x}_i \geq 0$ ale programului optimal $\overline{X}$, "**agenţia**" dispune de capacităţile de realizare a acestor cantităţi. **Altfel, $\overline{X}$ nu este un optim economic.** De vină este cel ce a scris modelul, deoarece nu a pus condiţia $a_i \leq x_i \leq b_i$ (a_i, b_i putând fi şi numere negative ca în cazul prelucrării la rece).

Tot în cazul $x_i \geq 0$, modelul poate duce matematic la $f \to -\infty$, sau la $f \to \infty$, ceea ce înseamnă că $x_i \geq 0$ pot creşte oricât de mult (program nemărginit superior). **Aşa că o margine superioară tot este necesară practic.**

4) Modelul cel mai complet va fi de forma (1) sau (2) sau (3), la care se adaugă şi restricţiile $d_i \leq x_i \leq S_i$. Teoretic nu apar probleme noi, deoarece introducem variabilele de compensare. Dacă s-ar proceda în acest fel, s-ar obţine $m+2n$ restricţii cu $3n$ variabile, ceea ce măreşte atât numărul de restricţii cât şi numărul de variabile. Chiar dacă s-ar face substituţia $u_i \equiv x_i - d_i$, s-ar obţine $0 \leq u_i \leq D_i$ $(D_i = S_i - d_i)$.

S-ar obţine prin compensare $m+n$-restricţii şi $2n$ variabile. Pentru (n) mare, problema devine ”mare”. Aceste situaţii vor cere un algoritm special.

Exemplul 2. Cu datele din modelul 1., dar cu restricţiile $d_1 \leq x_1 \leq S_1$; $d_2 \leq x_2 \leq S_2$; $d_3 \leq x_3 \leq S_3$; $d_4 \leq x_4 \leq S_4$, s-ar obţine prin compensare:

$$\begin{array}{llllll}
2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & = B_1 \\
x_1 & +3x_2 & +x_3 & +2x_4 & & = B_2 \\
\hline
x_1 & -y_1 & & & & = d_1 \\
 & x_2 & -y_2 & & & = d_2 \\
 & & x_3 & -y_3 & & = d_3 \\
 & & & x_4 & -y_4 & = d_4 \\
\hline
x_1 & +t_1 & & & & = S_1 \\
 & x_2 & +t_2 & & & = S_2 \\
 & & x_3 & +t_3 & & = S_3 \\
 & & & x_4 & +t_4 & = S_4
\end{array}$$

$x \geq 0$; $y \geq 0$; $t \geq 0$.

S-a mărit numărul de restricţii efective de la $m = 2$ la $m+2n = 10$, iar numărul de variabile s-a mărit de la $n = 4$ la $3n = 12$. Chiar în acest caz mic, rezolvarea sistemului cu condiţiile $x \geq 0$; $y \geq 0$; $t \geq 0$, este o ”problemă”.

Dacă s-ar face mai întâi substituţia $x_i - d_i = u_i$, s-ar obţine $0 \leq u_1 \leq D_1$; $0 \leq u_2 \leq D_2$; $0 \leq u_3 \leq D_3$; $0 \leq u_4 \leq D_4$. Va rezulta:

$$\begin{array}{lllllllll}
2u_1 & +u_2 & +u_3 & +u_4 & & & & & = \overline{B}_1 \\
u_1 & +3u_2 & +u_3 & +2u_4 & & & & & = \overline{B}_2 \\
\hline
u_1 & & & & +y_1 & & & & = D_1 \\
 & u_2 & & & & +y_2 & & & = D_2 \\
 & & u_3 & & & & +y_3 & & = D_3 \\
 & & & u_4 & & & & +y_4 & = D_4 \\
\hline
\end{array}$$

$$\max \varphi(U,Y) = 2u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 3u_4 + 12$$

$$u_i \geq 0;\ y_i \geq 0\ \left(i = \overline{1,4}\right).$$

Avem $m+n = 6$ restricţii efective în loc de $m = 2$ restricţii şi $2n = 8$ variabile în loc de $n = 4$ variabile. Dacă n ar fi ”mare”, este clar că numărul de restricţii devine ”mare” ca să nu mai vorbim de numărul variabilelor.

Chiar în cazul unui sistem "mic" trebuie să observăm că în general pentru un sistem compatibil nedeterminat lipsesc cunoştiinţele necesare pentru obţinerea unor soluţii nenegative $X \geq 0$. Metoda şcolară pune accentul pe scrierea soluţiei generale în care se dau valori variabilelor secundare. Care sunt aceste valori nenegative pentru care variabilele principale (sau bazice) iau tot valori nenegative ?

Apare deci o nouă problemă puţin cunoscută. Aşadar, va trebui reluată problema rezolvării sistemelor de ecuaţii liniare, cu condiţia $X \geq 0$ şi cu atât mai mult cu condiţia $d \leq X \leq S$. Vom face acest lucru în mod gradat aşa încât metoda să fie accesibilă unei mase largi de cititori. Apoi se va trece la elaborarea algoritmilor de rezolvare a unei probleme **de programare liniară în cazul cel mai complet** $d \leq X \leq S$**, respectiv în cazul mai simplu** $X \geq 0$**.**

Se vor considera apoi şi diferite interpretări practice.

Se va atinge şi aşa numita problemă a "conducerii la două nivele", cu decizie la nivel de "agenţie", dar ţinând cont de autonomia subsistemelor (Cap. 6)**.** Se obţine un principiu fundamental: în cazul unui sistem de activităţi condus de "centru" (agenţie, patron, stat,...), care este liniar programat, nu există o descentralizare totală: optimul la nivel centru nu este o simplă sumare a optimelor subsistemelor autonome. Programele optime ale subsistemelor autonome devin "propuneri" pentru agenţie. Pe baza lor agenţia "elaborează preţurile umbră" de care subsistemele trebuie să ţină cont în elaborarea propriilor programe optime. Se trece la o reoptimizare. Ciclul se termină când agenţia reuşeşte să determine nişte "ponderi" optimale pentru programele optimale ale subsistemelor de activităţi (autonome).

O problemă delicată la nivelul cunoştiinţelor liceale, este problema obţinerii unor soluţii în mulţimea numerelor întregi şi cu atât mai mult dacă aceste numere întregi trebuie să fie naturale (nenegative).

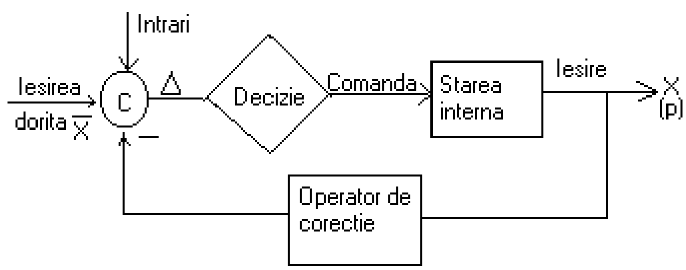
Şi această problemă va fi "algoritmizată". Se vor prezenta algoritmii de bază dar şi noi algoritmi $[St]$ **pe ideea reducerii "memoriei de calcul" (intens cercetată şi în prezent pe plan intern şi internaţional). Apoi se va trece la modele neliniare** (vol.II)**.**

Iată complexitatea de situaţii ce trebuie cercetate cât şi prezentarea gradată ce va trebui făcută, având ca scop principal, **iniţierea în cerc-**

etarea operaţională.

În situaţii concurenţiale a două "agenţii" (numite "jucători") cu scopuri opuse, se va obţine un nou mod de gândire. Modelarea anterioară, în care decidentul îşi urmăreşte atingerea optimală a scopului, se va mai numi şi "gândirea raţională a jucătorului de unul singur" (**fără opozant**).

În fond, putem spune că pentru a obţine o anumită "ieşire" (dorită) din sistemul condus, în cadrul unor "intrări" date, trebuie elaborat un algoritm care la fiecare pas p determină o "ieşire" $\underset{p}{X}$. Aceasta trebuie comparată cu ieşirea dorită. Dacă diferă de ieşirea dorită, apare o eroare $\Delta \neq 0$. Atunci se va relua ciclul până când $\Delta = 0$, sau $|\Delta|$ este mai mic decât o eroare ε practic admisă. Se obţine, formal o schemă numită "inginereşte" sistem condus cu reacţie negativă:



Modul de predare. Programarea liniară, cu problematica sa, poate fi abordată prin două metode.

1) O metodă constă din elaborarea, mai întâi a teoriei spaţiilor liniare (vectoriale), a teoriei mulţimilor convexe din spaţii liniare (teoreme de tip Krein-Milman, teorema lui Minkowski, lema lui Farkaş,...) şi apoi elaborarea teoriei programării liniare. Pentru aceasta este necesar un număr mare de ore alocat programei analitice.

Într-un anumit sens, această metodă se depărtează de scopul propriu zis: atingerea unui scop fixat cu un număr minim de efort şi de timp. În schimb metoda este "mai elaborată", mai specifică pentru Facultatea de Matematică. Primul autor a folosit această metodă o perioadă îndelungată ([St] 1982).

2) O altă metodă constă din a porni de la originea programării liniare (Dantzig) şi anume obţinerea valorilor restricţiei unei funcţii

liniare pe submulţimea programelor de bază ale unui sistem de ecuaţii liniare. **În acest fel scopul este atins mai repede.** Teoria este mai clară şi mai uşor de înţeles fiind eliberată de mulţimea noţiunilor specifice spaţiilor liniare. Este mai "curată". Aceasta nu înseamnă că este mai puţin riguroasă cum ar crede unul obişnuit numai cu prima metodă. Mai mult, în acest fel studentul de la o facultate în care matematica are rol aplicativ (modelare a datelor tehnico-economice+algoritm de rezolvare în cadrul unui număr mic de ore alocate în programa analitică) va înţelege mai bine atât partea teoretică cât şi partea aplicativă. În fond acesta este scopul predării. Algoritmul va fi mai uşor de programat pe calculator. Se poate aloca şi un timp pentru analiza tehnico-economică a rezultatelor.

Primul autor a experimentat şi acest mod de predare atât la secţiile economice cât şi la secţia de Inginerie Economică din cadrul Facultăţii de Mecanică, unde al doilea autor a condus seminariile şi apoi a preluat şi cursul. Experienţa dobândită pe parcursul mai multor ani a arătat că a doua metodă este mai "didactică", mai "formativă". Din acest punct de vedere comun a rezultat colaborarea în vederea elaborării acestui volum.

La sfârşit, ţinând seama că al doilea autor predă la anul I, spaţii liniare, se va face o trecere a elementelor din programarea liniară şi în acest limbaj, în cadrul apendixului.

Autorii

Capitolul 1. Programe de bază

1.1. Problema existenţei programelor.

Aşa cum s-a spus pot exista soluţii ale unui sistem liniar de ecuaţii fără ca sistemul să admită cel puţin un program. Dacă admite un program atunci admite un program de bază şi deci unul mai simplu.

Altfel spus, dacă nu admite un program de bază atunci nu admite un program. Este mai simplu să se obţină programe de bază (dacă există) şi apoi cu ajutorul lor se pot obţine programe mai complete ca un program de bază. Mai mult, în probleme de optimizare este suficient să se obţină un program de bază optimal. Un program optimal, care nu este un program de bază, dacă există, se va obţine dacă există cel puţin două programe de bază optimale. Dacă nu există un program de bază optimal atunci nu există un program optimal.

Cu acest rezultat, relativ la sistemele de ecuaţii liniare, s-a pus în evidenţă importanţa programelor de bază. Deci este necesar să fie cunoscute cele mai simple metode de obţinere a unor programe de bază, atât în cazul problemelor "mici" cât şi al problemelor "mari".

Dacă avem m-restricţii liniare (ecuaţii) **esenţiale** (matematic, independente) şi n-variabile, atunci pot exista cel mult C_n^m -programe de bază şi deci un număr finit de asemenea programe. De exemplu, dacă $m = 2$; $n = 4$ atunci pot exista cel mult $C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$ programe de bază. **Deci problema fiind "mică" o metodă elementară de obţinere a programelor de bază este dată de următorul algoritm:**

a) **Se egalează cu zero,** $n - m$ **variabile.**

b) **Se rezolvă sistemul obţinut.**

c) **Dacă după** C_n^m asemenea "încercări" nu se obţine un program de bază, atunci sistemul nu admite programe.

Exemplul 1.1 Să considerăm sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_i \geq 0; i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Fie $x_1 = 0$; $x_2 = 0$. Rezultă $x_3 = 1$; $x_4 = 3$. S-a obţinut un program de bază $\underset{0}{X} = (0; 0; 1; 3)^t$.

Fie $x_1 = 0$; $x_3 = 0$. Rezultă $x_2 = -1$; $x_4 = 5$. Nu se obţine un program de bază.

Fie $x_1 = 0$; $x_4 = 0$. Rezultă $x_2 = \frac{3}{2}$; $x_3 = \frac{5}{2}$. Se obţine un program de bază $\underset{1}{X} = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)^t$.

Fie $x_2 = 0$; $x_3 = 0$. Rezultă $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_4 = \frac{10}{3}$. Se obţine un program de bază $\underset{2}{X} = \left(\frac{1}{3}; 0; 0; \frac{10}{3}\right)^t$.

Fie $x_2 = 0$; $x_4 = 0$. Rezultă $x_1 = -3$; $x_3 = 10$. Nu se obţine un program de bază.

Fie $x_3 = 0$; $x_4 = 0$. Rezultă $x_1 = 1$; $x_2 = 2$. Se obţine un program de bază $\underset{3}{X} = (1; 2; 0; 0)^t$.

Aşadar s-au obţinut patru programe de bază.

În aplicaţii nu este necesar să se obţină toate programele de bază ci numai anumite programe de bază, aşa încât, trecând de la unul la altul, scopul urmărit să aibă o valoare mai "bună" (mai mare, dacă scopul este dat de funcţia "beneficiu", sau mai mică dacă scopul este dat de funcţia "cost total").

Înainte de a vedea cum se face această "selecţie" a programelor de bază, vom reveni la exemplul anterior.

Exemplul 1.2 În exemplul 1.1 să se facă rezolvarea efectivă printr-o metodă simplă, folosind numai cele patru operaţii: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea.

Pentru rezolvarea sistemului conform cerinţei anterioare, se va folosi un **algoritm general valabil.**

1. **Se alege un coeficient nenul**, $A_{ia} \neq 0$ (numit pivot).

2. **Se împarte ecuaţia** "i" la A_{ia} (pivotul ales). Se obţin noii coeficienţi $\frac{A_{ik}}{A_{ia}}$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$; $\frac{B_i}{A_{ia}}$.

3. **În locul pivotului se pune valoarea** 1 **(unu)**, iar coeficienţii de pe coloana "a" a pivotului se înlocuiesc cu 0 (zero).

4. **Dacă A_{rk} este un coeficient care nu se află pe linia "i" a pivotului (deci $r \neq i$) şi nici pe coloana "a" a pivotului ($k \neq a$), se va pune un nou coeficient calculat după schema:**

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\ldots & \boxed{A_{ia}} & \ldots & A_{ik} & \ldots & B_i & \\
 & \vdots & \nwarrow & \vdots & & \vdots & \\
\ldots & A_{ra} & \ldots & (A_{rk}) & \ldots & (B_r) & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
A_{rk} &\to \frac{A_{rk}\boxed{A_{ia}} - A_{ra}A_{ik}}{\boxed{A_{ia}}}, \\
B_r &\to \frac{B_r\boxed{A_{ia}} - A_{ra}B_i}{\boxed{A_{ia}}}.
\end{aligned}$$

Pentru a nu reţine calculele anterioare ca formule ci 'ideea", să exprimăm în "cuvinte" aceste formule: **ne fixăm asupra unui coeficient** A_{rk} ($r \neq i; k \neq a$) respectiv B_r ($r \neq i$). **Se merge de la el la pivotul $\boxed{A_{ia}}$. Se formează o "diagonală" (plină pe desen) principală. Automat apare un dreptunghi cu diagonala a doua (punctată). Se face produsul coeficienţilor de pe diagonala principală din care apoi se scade produsul coeficienţilor de pe diagonala secundară. Rezultatul se împarte la pivot.**

Cu noul sistem obţinut, se repetă procedeul anterior, atât timp cât există coeficienţi nenuli ai necunoscutelor x, care nu se află nici pe linia şi nici pe coloana coeficienţilor mai înainte aleşi ca pivoţi. În momentul în care nu mai există alţi asemenea pivoţi se obţine forma "canonică" a sistemului.

Discuţie:

a) **Dacă pe fiecare "linie" a existat un pivot,** atunci toate ecuaţiile (restricţiile) sunt esenţiale. Se obţine rezolvarea generală a sistemului. **Dacă termenii liberi sunt nenegativi,** atunci se obţine un program de bază (făcând variabilele secundare egale cu zero). Dacă termenii liberi nu sunt toţi nenegativi, se va relua procedeul "pivotării" expus anterior, pe noul sistem.

b) **Dacă în forma canonică a sistemului au rămas "linii" cu toţi coeficienţii $A_{sl} = 0$, dar $B_s \neq 0$, atunci sistemul este incompatibil. STOP. Dacă toţi $B_s = 0$, atunci sistemul este compatibil şi se elimină aceste linii "s".**

Metoda, în sine, numită şi "eliminarea totală Gauss-Jordan", nu este altceva decât metoda elementară a eliminării, fapt pentru care demonstrarea regulilor anterioare este banală.

Pentru simplificare, necunoscutele nu se mai pun în timpul pivotării. În cazul dat putem scrie

$$\left.\begin{matrix} 2 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 \\ 7 \end{matrix} \backsim \left.\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \boxed{1} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \backsim \left.\begin{matrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix};$$

$$\underset{0}{X} = (0;0;1;3)^t.$$

În acest caz variabilele bazice sunt x_3, x_4. Vom nota cu $I^{(0)} = \{3;4\}$. Variabilele secundare sunt x_1, x_2. Vom nota $K^{(0)} = \{1;2\}$. Forma canonică a sistemului este:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \end{cases} \backsim \begin{cases} x_3 = 1 - 3x_1 + x_2 \\ x_4 = 3 + x_1 - 2x_2 \end{cases} \quad I^{(0)} = \{3;4\}.$$

Făcând variabilele secundare $x_1 = 0$; $x_2 = 0$, rezultă $\underset{0}{X}$. Pentru a obţine şi celelalte programe de bază se poate porni tot de la sistemul dat luând alţi pivoţi, sau chiar de la forma canonică. Astfel, dacă dorim să avem x_3, x_2 ca variabile bazice în această ordine, înseamnă că la prima alegere se va lua ca pivot coeficientul lui x_3 şi apoi coeficientul lui x_2. Rezultă:

$$\left.\begin{matrix} \frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix}; I = \{3;2\}, K = \{1;4\},$$

$$X = \left(0;\frac{3}{2};\frac{5}{2};0\right)^t.$$

Exerciţiul (1) Pornind cu forma canonică anterioară, să se obţină şi celelalte programe de bază.

Exemplul 1.3 Se dă sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10 + \lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

Avem:

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & 1 & \boxed{1} & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 10+\lambda \end{array} \backsim \begin{array}{cccc|l} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2+\lambda \end{array} \backsim$$

$$\backsim \begin{array}{cccc|l} 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+\lambda \end{array} \quad \text{STOP}$$

Pe linia $i = 3$ nu mai avem coeficienţi ai necunoscutelor nenuli. Analizăm termenul liber $B_3 = -1 + \lambda$. Dacă $-1 + \lambda \neq 0$ (adică $\lambda \neq 1$) sistemul este incompatibil. Dacă $\lambda = 1$, atunci sistemul este compatibil, iar ecuaţia a treia nu este esenţială (este o combinaţie liniară a primelor două ecuaţii). O eliminăm şi rămâne sistemul dat în exemplul 1.1.

Exemplul 1.4 Să considerăm sistemul

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 = 5, \\ 0,2x_1 + 0,2x_2 + 0,1x_3 = 4, \\ x_i \geq 0;\ i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Echivalent avem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50, \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 80, \\ x_i \geq 0;\ i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Rezultă

$$\begin{array}{ccc|l} \boxed{1} & 1 & 1 & 50 \\ 4 & 4 & 2 & 80 \end{array} \backsim \begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -120 \end{array} \backsim$$

$$\backsim \begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array} \backsim \begin{cases} x_1 = -10 - x_2 \\ x_3 = 60 \end{cases}$$

Rezultă că deşi sistemul este compatibil, el nu admite nici un program, deoarece pentru $x_2 \geq 0$, x_1 este negativ. Iată şi un caz de sistem care nu admite programe.

1.2. Generarea programelor de bază.

Având un program de bază $\underset{0}{X}$, se pune problema ca pornind cu acesta la paşii următori să alegem pivoţii în mod organizat aşa încât să se obţină noi forme canonice ale sistemului care să "afişeze" pe coloana termenilor liberi numai valori nenegative, adică să corespundă la aceste forme canonice numai programe de bază.

Exemplul 1.5 În paragraful anterior (exemplul 1.2) s-a obţinut programul de bază $\underset{0}{X} = (0; 0; 1; 3)^t$ cu $I^{(0)} = \{3; 4\}$, $K^{(0)} = \{1; 2\}$ ca date iniţiale. Să notăm noii coeficienţi cu $A_{ia}^{(0)}$, $B_i^{(0)}$ (luaţi ca date iniţiale sau ca date la pasul iniţial $p = 0$). În prima fază să admitem că $\underset{0}{X}$ este nedegenerat, adică $B_i^{(0)} > 0$, oricare ar fi "i".

0) **Iniţial dispunem de $\underset{0}{X}$; $A_{ia}^{(0)}$; $B_i^{(0)}$; $I^{(0)}$; $K^{(0)}$.**

1) **Se alege drept coloană "pivot" "a" o coloană pe care există cel puţin un coeficient pozitiv, $A_{ia}^{(0)} > 0$ şi se fac rapoartele $\left\{\frac{B_i^{(0)}}{A_{ia}^{(0)}} > 0\right\}$ $\left(a \in K_1^{(0)}\right)$.**

2) **Dintre aceste rapoarte se alege cel care are valoarea cea mai mică. Numărătorul său se va alege ca pivot. Pivotând cu acesta se obţine un nou program de bază $\underset{1}{X}$ şi noi date $A_{ia}^{(1)}$; $B_i^{(1)}$; $I^{(1)}$; $K^{(1)}$. Cu acest nou program de bază se revine la 1) 2) înlocuind $p = 0$ cu $p = 1$).**

În cazul anterior cum $A_{11}^{(0)} = 3 > 0$ respectiv $A_{22}^{(0)} = 2 > 0$ se poate alege coloana $a = 1$ ca o nouă coloană pivot, sau coloana $a = 2$ ca şi coloană pivot. Putem scrie

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array} ; \left\{\frac{1}{\boxed{3}}\right\} \backsim \begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{\frac{5}{3}} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{10}{3} \end{array}$$

S-a obţinut noul program de bază $\underset{1}{X} = \left(\frac{1}{3}; 0; 0; \frac{10}{3}\right)^t$ cu noile date $A^{(1)}$; $B^{(1)}$; $I^{(1)} = \{1; 4\}$; $K^{(1)} = \{2; 3\}$. Cu acest nou program de bază procedăm la fel. Pe coloana $a = 2$ avem $A_{22}^{(1)} = \frac{5}{3} > 0$. Deci avem un singur raport pozitiv $\left\{\frac{B_2^{(1)}}{A_{22}^{(1)}} = \frac{\frac{10}{3}}{\boxed{\frac{5}{3}}}\right\}$. Pivotul va fi $A_{22}^{(1)} = \boxed{\frac{5}{3}}$. Pivotând se obţin

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \boxed{\frac{2}{5}} & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 2 \end{array} ;\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\frac{2}{5}} \\ \frac{2}{\frac{1}{5}} \end{array} \right\}$$

şi deci $\underset{2}{X} = (1; 2; 0; 0)$; $I^{(2)} = \{1; 2\}$; $K^{(2)} = \{3; 4\}$. Pe coloana $a = 3$ avem $A_{13}^{(2)} = \frac{2}{5}$; $A_{23}^{(2)} = \frac{1}{5}$ şi rapoartele trecute în dreapta. Cel mai mic este $\left\{ \frac{B_1^{(2)}}{A_{13}^{(2)}} = \frac{1}{\boxed{\frac{2}{5}}} \right\}$. Deci noul pivot va fi $\boxed{\frac{2}{5}}$. Rezultă

$$\begin{array}{cccc|c} \frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} ;$$

$\underset{3}{X} = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$; $I^{(3)} = \{3; 2\}$; $K^{(3)} = \{1; 4\}$.

Cazul în care un program de bază este degenerat (adică cel puţin o valoare bazică este nulă) va fi tratat special mai departe.

Exemplul 1.6 Dacă se doreşte ca având un program de bază să se obţină programe care nu sunt programe de bază, este suficient ca în forma canonică corespunzătoare să dăm variabilei secundare, pentru care raportul $\frac{B^{(p)}}{A_{ia}^{(p)}}$ este cel mai mic ($A_{ia}^{(p)} > 0$; $a \in K^{(p)}$), orice valoare $0 < x^{(p)} < \frac{B^{(p)}}{A_{ia}^{(p)}}$. Astfel, în prima formă canonică, prezentată anterior, avem

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 = \frac{1}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right) x_2, \\ x_4 = \frac{10}{3} - \frac{5}{3} x_2. \end{array} \right.$$

Dăm valori lui $0 < x_2 < \frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}} = 2$ şi se obţin o mulţime de programe. De exemplu, pentru $x_2 = 1$ rezultă programul $\left(\frac{2}{3}; 1; 0; \frac{5}{3}\right)^t$.

Exerciţiul 1.3 Din ultima formă canonică, prezentată anterior, să se obţină programe pornind cu

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} x_4, \\ x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x_4, \end{array} \right. \text{ sau cu } \left\{ \begin{array}{r} x_3 = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} x_1, \\ x_2 = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) x_1, \end{array} \right.$$

dând valori $0 < x_4 < \frac{3}{2}$ ($\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$ este cel mai mic dintre $\left\{ \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}; \frac{\frac{3}{2}}{\boxed{\frac{1}{2}}} \right\}$ şi deci $A_{14}^{(3)} = \frac{1}{2}$ va fi noul pivot), respectiv pentru $0 < x_1 < \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1$.

Exemplul 1.7 Fie dat sistemul

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_i \geq 0; i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Avem deja forma canonică cu un program de bază $\underset{0}{X} = (0;0;1;2)^t$. Rezultă, făcând $x_1 = 0$

$$\begin{cases} x_3 = 1 - (-2x_2) = 1 + 2x_2, \\ x_4 = 2 - (-x_2) = 2 + x_2. \end{cases}$$

Pentru orice valoare a lui $x_2 > 0$ se obţin programe cu x_2, x_3, x_4 oricât de mari (nemărginite superior) cu $x_1 = 0$.

Iată un caz în care mulţimea programelor este nemărginită.

Anterior s-a luat un exemplu în care mulţimea programelor era mărginită şi deci orice program este o combinaţie liniară convexă a programelor de bază (vârfurile mulţimii convexe). O teorie matematică mai elaborată se bazează pe teorema lui Minkowski, teorema Krein-Milman şi Lema lui Farkaş ([St]).

Dacă în exemplul care urmează continuăm pentru a obţine toate programele de bază, avem:

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}; \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1} = 1 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{array} \right\}$$

şi deci ca nou pivot se poate lua fie $A_{11}^{(0)} = 1$, fie $A_{21}^{(0)} = 2$ şi deci luând ca pivot $A_{11}^{(0)} = 1$ se vor obţine

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array};$$

$\underset{1}{X} = (1;0;0;0)^t$; $I^{(1)} = \{1;4\}$; $K^{(1)} = \{2;3\}$, adică variabila bazică x_4 ia valoarea $x_4^{(1)} = 0$. Programul de bază $\underset{1}{X}$ este degenerat.

Dacă s-ar lua ca pivot $A_{21}^{(0)} = 2$ se vor obţine

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array};$$

$\underset{2}{X} = (1;0;0;0)^t$; $I^{(2)} = \{3;1\}$; $K^{(2)} = \{2;4\}$.

Aşadar, dacă la un anumit pas apar două sau mai multe rapoarte $\left\{\frac{B_i}{A_{ia}}\right\}$ minime şi pozitive, atunci oricare ar fi pivotul ales $\boxed{A_{ia}}$, programul de bază ce se obţine va fi degenerat (această observaţie se va mai numi şi criteriul de recunoaştere a apariţiei degenerării, a cărui demonstraţia este simplă dacă se ţine cont de formulele anterioare pentru calcularea noilor coeficienţi).

Se constată că avem numai două programe de bază $\underset{0}{X}$; $\underset{1}{X}$, celelalte programe de bază fiind tot $\underset{1}{X}$, dar cu altă ordine a variabilelor bazice. Vom reveni asupra degenerării cu ocazia programării liniare.

O observaţie practică este aceea că în prima fază necesară obţinerii unui program de bază iniţial $\underset{0}{X}$ alegerea pivotului $\boxed{A_{ia}}$ a fost "liberă" (cu singura condiţie $A_{ia} \neq 0$) şi se continuă pivotarea "liberă" până se obţine forma canonică ce "afişează" termenii liberi $B_i \geq 0$, oricare ar fi $i = \overline{1,m}$. Dacă o persoană alege un pivot, iar altă persoană alege alt pivot, în general durata de a ajunge la un program de bază diferă pentru cele două persoane. Una dintre persoane va termina mai repede. Pentru a reduce timpul, respectiv pentru a obţine sigur un program de bază în momentul obţinerii formei canonice, este indicat să se aleagă pivoţii şi în prima fază după un anumit algoritm. Ca şi până acum vom prezenta algoritmul, iar demonstraţia va fi dată la sfârşit, pentru a uşura înţelegerea sa.

Algoritm auxiliar. Ca pentru orice algoritm se vor prezenta în ordine regulile necesare.

(R_1) Se adaugă la fiecare ecuaţie o variabilă auxiliară $y \geq 0$.

(R_2) Sistemul obţinut anterior se completează cu o nouă ecuaţie $\sum y + (-z) = 0$, $y \geq 0$.

(R_3) Din ecuaţia de la (R_2) se scad membru cu membru, toate ecuaţiile de la (R_1). Se obţine în locul ultimei ecuaţii din (R_2) o nouă ecuaţie care conţine variabilele x şi z, dar nu şi y, de forma $\sum\limits_a \overline{C}_a x_a + (-z) = -z_0$.

(R_4) a) Dacă $\overline{C}_a \geq 0$, oricare ar fi "a" şi $z_0 > 0$, atunci STOP: sistemul dat nu admite programe.

b) Dacă există $\overline{C}_a < 0$, atunci se alege cel mai mic $\overline{C}_a$ negativ şi de pe coloana sa se alege pivotul A_{ia} după regulile prezentate anterior de alegere a unui pivot când avem forma canonică a sistemului, până când sau toate variabilele y devin secundare ($y = 0$) şi atunci se obţine forma canonică a sistemului dat (eliminând y) ce dă un program de bază $\underset{0}{X}$, sau până când se ajunge la o situaţie (R_4) a).

Exemplul 1.8 Să pornim cu exemplul 1.1. Avem:

(R_1)(R_2)

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 & = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + y_2 & = 7, \\ \hline y_1 + y_2 + (-z) & = 0 \end{array}\right. \quad x \geq 0; y \geq 0$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 & = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + y_2 & = 7, \\ \hline -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 + (-z) & = -11. \end{array}\right. \qquad (\mathrm{R}_3)$$

Avem coeficienţii $\overline{C} < 0$. Se trece la (R_4)b).

(R_4)b) Se alege $\overline{C}_2 = -4$ cel mai mic coeficient negativ şi de pe coloana $a = 2$ se alege pivotul. Avem

$$\min\left\{\begin{array}{c} \frac{4}{1} \\ \frac{7}{3} \end{array}\right\} = \frac{7}{\boxed{3}}; \text{ pivot } \boxed{3}.$$

Rezultă

$$\begin{array}{cccc|cccl} \boxed{\frac{5}{3}} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & & = \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & & = \frac{7}{3} \\ \hline -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} & +(-z) & = -\frac{5}{3} \end{array}$$

Se revine la (R_4)b) şi avem $\overline{C}_1 = -\frac{5}{3}$. Deci pivotul se va alege de pe coloana lui x_1. Rezultă

$$\min\left\{\begin{array}{c} \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} \\ \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}} \end{array}\right\} = \frac{\frac{5}{3}}{\boxed{\frac{5}{3}}}; \text{ pivot } \boxed{\frac{5}{3}}.$$

Rezultă

$$\begin{array}{cccc|cccl} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & & = 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & & = 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & +(-z) & = 0 \end{array} \quad \text{STOP.}$$

Se elimină coloanele lui y_1, y_2 şi $(-z)$ cât şi ultima relaţie şi se obţine penultima formă canonică de la exemplul 1.1 (1.5) adică

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 2 \\ \hline \end{array};$$

$\underset{0}{X} = (1; 2; 0; 0)^t$; $I^{(0)} = \{1; 2\}$; $K^{(0)} = \{3; 4\}$.

Cu aceasta se procedează după metoda generării a noi programe de bază.

Exemplul 1.9 Să pornim cu sistemul dat în exemplul 1.4. Avem $(\mathrm{R}_1)(\mathrm{R}_2)$

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 + y_1 & = 50, \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + y_2 & = 80, \\ \hline y_1 + y_2 + (-z) & = 0. \end{array}\right. \qquad (\mathrm{R}_3)$$

$$\begin{array}{ccc|cc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 50 \\ \boxed{4} & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 80 \\ \hline -5 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 & -130 \end{array}$$

(R_4)b) **Avem** $\overline{C}_a < 0$ oricare ar fi $a = \overline{1, 3}$. Se poate alege $\overline{C}_1 = -5$ sau $\overline{C}_2 = -5$. Fie că alegem $\overline{C}_1 = -5$. Se alege pivot de pe coloana $a = 1$.

$$\min \left\{ \begin{array}{c} \frac{50}{1} \\ \frac{80}{4} \end{array} \right\} = \frac{80}{\boxed{4}}; \text{ pivot } \boxed{4}.$$

Rezultă

$$\begin{array}{ccc|cc|c|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 30 \\ 0 & 1 & \boxed{\frac{1}{2}} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 20 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{4} & 1 & -120 \end{array}$$

Avem $\overline{C}_3 = -\frac{1}{2}$. Se alege pivot de pe coloana $a = 3$. Avem

$$\min \left\{ \begin{array}{c} \frac{30}{\frac{1}{2}} \\ \frac{20}{\frac{1}{2}} \end{array} \right\} = \frac{0}{\boxed{\frac{1}{2}}}; \text{ pivot } A_{23} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Rezultă

$$\begin{array}{ccc|cc|c|c} 1 & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 40 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -50 \end{array}$$

Suntem în situaţia (R_4)a) STOP. Sistemul dat nu admite programe.

1.3. Obţinerea programelor de bază prin revizuire.

Metodele pentru obţinerea unui program de bază date anterior s-au bazat pe "înregistrarea" în memoria de calcul, a tuturor datelor. Dacă sistemul este mare (n mare, cum apare în majoritatea cazurilor practice), atunci această înregistrare totală nu este posibilă. Să amintim numai celebra problemă a croirii materialelor liniare în care n este de ordinul sutelor de mii sau de milioane. În aceste cazuri coloanele coeficienţilor variabilelor x se fac pe "fişe separate" şi prin urmare algoritmii trebuie aplicaţi prin înregistrări parţiale în memoria de calcul a acestor coloane, eliminând pe rând, o coloană "neeficientă" (conform scopului urmărit) şi înregistrând în locul său o altă coloană mai eficientă.

Mai întâi să vedem cum se procedează prin "revizuire" şi apoi mai departe, cum se selectează o coloană mai "eficientă" **(criteriul de eficienţă)**. Pentru aceasta va trebui să recurgem la câteva noţiuni mai "superioare" dar strict necesare şi anume la calculul matriceal: **inversarea unei matrice pătratice nesingulară.** Inversarea o vom reduce tot la calcule elementare, prin pivotare.

În fond, aducerea la forma canonică a unui sistem înseamnă determinarea variabilelor bazice (numite şi variabile principale) adică determinarea mulţimii $I^{(0)}$. Apoi matricea lor formată din coloanele coeficienţilor lor în ordinea bazică $I^{(0)}$ se inversează. Cu această inversă se înmulţeşte tot sistemul şi se obţine forma canonică (rezultată prin pivotarea care a generat $I^{(0)}$). Greutatea constă în a depista această matrice bazică care să ducă la un program de bază.

a) Se poate alege o matrice pătratică arbitrară a coeficienţilor şi apoi prin generare să obţinem alte inverse.

b) Se poate porni de la problema cu variabile auxiliare, unde deja avem o matrice bazică corespunzătoare (coloanele coeficienţilor variabilelor y, $(-z)$).

Dacă problema este "mică" nu este lipsit de interes să obţinem odată cu inversa matricei bazice şi programul de bază.

Exemplul 1.10 Să considerăm exemplul 1.1 şi să adăugăm în continuare şi matricea unitate. Rezultă

$$\begin{array}{cccc|cc|c} 2 & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{array} \backsim$$

$$\backsim \begin{array}{cccc|cc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 3 \end{array} \backsim$$

$$\backsim \begin{array}{cccc|cc|c} 3 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & \boxed{2} & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}$$

Cum $I^{(0)} = \{3;4\}$ s-a obţinut matricea inversă a matricei bazice $M_{(3;4)}$. Adică

$$M_{(3;4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to M^{-1}_{(3;4)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare $M_{(3;4)} \cdot M^{-1}_{(3;4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$

Dacă înmulţim tot sistemul cu M^{-1} se va obţine forma canonică a sistemului (rezolvarea)-ultima parte din care eliminăm M^{-1}. Cum s-a obţinut şi un program de bază $\underset{0}{X} = (0;0;1;3)^t$, $I^{(0)} = \{3;4\}$, $K^{(0)} = \{1;2\}$, putem continua pivotarea după regulile generării programelor de bază.

Fie noul pivot $A^{(0)}_{22} = \boxed{2}$. Rezultă

$$\begin{array}{cccc|cc|c} \frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}$$

cu programul de bază $\underset{1}{X} = \left(0;\frac{3}{2};\frac{5}{2};0\right)^t$, $I^{(1)} = \{3;2\}$, $K^{(1)} = \{1;4\}$ şi deci avem

$$M_{(3;2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \to M^{-1}_{(3;2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Adică, dacă de la început s-ar alege $I = \{3;2\}$ am avea $M_{(3;2)}$;

$M^{-1}_{(3;2)}$ şi deci

$$
\begin{aligned}
M^{-1}_{(3;2)} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \\
M^{-1}_{(3;2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \\
M^{-1}_{(3;2)} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Practic nu este necesar să procedăm astfel. Având o matrice bazică, de exemplu $M_{(3;4)}$ şi $M^{-1}_{(3;4)}$, generăm la pasul $p = 1$ noua matrice $M^{-1}_{(3;2)}$ prin pivotare:

$$
\begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{2} \end{pmatrix} \cdot \left| \underset{(0)}{M^{-1}_{(3;4)}} \right. \to \underset{(1)}{M^{-1}_{(3;2)}}.
$$

În acest fel se vede cum tot prin operaţii elementare se obţine inversa unei matrice cât şi generarea inversei noi, dacă o coloană a matricei date se modifică. Direct

$$
\underset{\underset{(0)}{M}}{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right. \to
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \underset{\underset{(0)}{M^{-1}}}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \right.
$$

Dacă se modifică $\underset{(0)}{M}$ prin schimbarea datelor, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \underset{(1)}{M}$, nu este necesar să pivotăm de la început ci scriem

$$
\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};
$$

$$
\begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{2} \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right. \to \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \underset{(1)}{M^{-1}}.
$$

Se mai spune că noile date $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ au fost adaptate la baza de

plecare $\underset{(0)}{M}$ şi se transformă în $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Apoi pivotăm. Evident dacă pivotarea este "liberă" puteam alege ca pivot $\boxed{-1}$ (exerciţiu).

Exemplul 1.11 Să considerăm exemplul 1.3. Avem

$$\begin{array}{cccc|ccc|l} 2 & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 10+\lambda \end{array} \backsim$$

$$\backsim \begin{array}{cccc|ccc|l} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2+\lambda \end{array} \backsim$$

$$\backsim \begin{array}{cccc|ccc|l} 3 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1+\lambda \end{array}$$

Pentru $\lambda \neq 1$ sistemul este incompatibil. Pentru $\lambda = 1$ sistemul este compatibil nedeterminat. Eliminăm ultima linie şi ultima coloană şi rămâne forma din exemplul 1.10.

Exemplul 1.12 Să considerăm exemplul 1.10 şi să alegem $M_{(3;1)}$. Rezultă

$$M_{(3;1)} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$M^{-1}_{(3;1)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$M^{-1}_{(3;1)} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$, **care nu este program de bază.**

Să alegem $M_{(3;2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Avem $M^{-1}_{(3;1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} 5 \\ \boxed{-2} \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$\underset{(0)}{M^{-1}_{(3;2)}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \qquad \underset{(0)}{M^{-1}_{(3;2)}} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \underset{B_0}{\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}} \begin{array}{c} x_3 \\ x_2 \end{array};$$

$\underset{0}{X} = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)^t$; $I^{(0)} = \{3; 2\}$; $K^{(0)} = \{1; 4\}$, bazice.

a) **La această** bază adaptăm coloanele coeficienţilor variabilelor secundare x_1, x_4, pe rând (revizuit)

$$\underset{(0)}{M^{-1}} P_4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{(0)}{P_4}.$$

b) **Scriem**

$$\underset{(0)}{P_4} \Big| \underset{(0)}{B} \;; \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}; \;\; \min \left\{ \begin{array}{c} \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} \\ \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \end{array} \right\} = \frac{\frac{3}{2}}{\boxed{\frac{1}{2}}}.$$

Cu pivotul astfel ales generăm noua matrice bazică corespunzătoare la $I^{(1)} = \{3; 4\}$;

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Bigg| \qquad \underset{(1)}{M^{-1}_{(3;2)}} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \boxed{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\underset{(1)}{M^{-1}_{(3;4)}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Noul program de bază va fi

$$\underset{1}{X} = (0; 0; 1; 3)^t\,;$$

$$\underset{(1)}{M^{-1}_{(3;4)}} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \end{array} \;;$$

$$I^{(1)} = \{3; 4\}\,; K^{(1)} = \{1; 2\}\,.$$

Exemplul 1.13 Să se genereze $M^{-1}_{(2;4)}$, $I^{(2)} = \{2; 4\}$; $\underset{2}{X} = (0; x_2; 0; x_4)^t$.

Indicaţie:

$$M^{-1}_{(3;4)} P_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ 2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = M^{-1}_{(2;4)};$$

$$M^{-1}_{(2;4)} B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} x_2 \\ x_4 \end{array}\,.$$

Deci $M_{(2;4)}$ nu generează un program de bază. Explicaţia:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \;;\; \min\left\{\frac{B_i}{A_{ia}} > 0\right\} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

şi deci trebuia ales nu $\boxed{-1}$ ci $\boxed{2}$ ca pivot.

Algoritm revizuit cu bază proprie

a) Se alege o matrice bazică M arbitrară şi se calculează M^{-1}.

b) Se calculează $M^{-1}B$.

b$_1$) **Dacă** $M^{-1}B \geq 0$, atunci se alege M ca $\underset{(0)}{M}$. Avem un program de bază $\underset{0}{X}$ cu $I^{(0)}$, $K^{(0)}$ şi notăm $\underset{(0)}{M}^{-1}B = \underset{(0)}{B}$. Se alege o nouă coloană P_j (coloana coeficienţilor variabilei x_j, $j \in K^{(0)}$) şi se actualizează $\underset{(0)}{M}^{-1}P_j = \underset{(0)}{P_j}$. Se scrie $\begin{array}{c|c} \underset{(0)}{P_j} & \underset{(0)}{B} \end{array}$ şi se calculează $\min\limits_i \left\{ \frac{\underset{(0)}{B_i}}{\underset{(0)}{A_{ij}}} > 0 \right\}$ care ne va da noul pivot. Cu acesta se pivotează $\underset{(0)}{M}^{-1}$ şi se obţine $\underset{(1)}{M}^{-1}$, $I^{(1)}$, $K^{(1)}$. **Se revine la b).**

b$_2$) **Dacă** $M^{-1}B \leq 0$ se alege din fişe o nouă coloană P_j şi se actualizează obţinând $\underset{(0)}{P_j} = M^{-1}P_j$. Se actualizează M^{-1} cu pivotul din $\underset{(0)}{P_j}$ ($\begin{array}{c|c} \underset{(0)}{P_j} & M^{-1} \to M^{-1}_{\text{nou}} \end{array}$). Se revine la b) înlocuind M^{-1} cu M^{-1}_{nou}.

Cazul în care sistemul nu admite program este studiat mai înainte.

Ca şi în cazul pivotării "libere" şi în acest caz este posibil să tot schimbăm matricea până se obţine una $\underset{(0)}{M}$ astfel ca $\underset{(0)}{M}B = \underset{(0)}{B}$ să dea un program de bază. Din aceste motive se va proceda ca mai înainte, dar pornind cu o bază auxiliară $\{y\}$.

Algoritmul revizuit cu bază auxiliară

a) Iniţial dispunem de

$$\begin{aligned} &\underset{0}{M} = E; I^{(0)}, K^{(0)}; \overline{C}_j^{(0)} \left(j \in K^{(0)}; \overline{C}_j^{(0)} = -\sum_{r=1}^{m} A_{rj}^{(0)} \right); \\ &C_r^{(0)} \left(r \in I^{(0)} \right); C_B^{(0)} = \left[C_r^{(0)} \right]; \; -z_0 = \sum_i B_i. \end{aligned}$$

Avem $\overline{C}_B = (0...0;1)$ (coeficienţii variabilelor $\{y;(-z)\}$ din forma canonică)

(P) Dacă la un pas p $(p \geq 0)$ dispunem de $\underset{(p)}{M}$, $I^{(p)}$, $K^{(p)}$; atunci calculăm

$$\begin{aligned}
\overline{\underset{(p)}{M}}^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} \underset{(p)}{M}^{-1} & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline -C_B^{(p)} \cdot \underset{(p)}{M}^{-1} & 1 \end{array}\right); \\
\overline{C}_j^{(p)} &= \left(-C_B^{(p)} \cdot \underset{(p)}{M}^{-1}, 1\right)\left(\frac{P_j}{C_j}\right); \\
P_j^{(p)} &= \underset{(p)}{M}^{-1} \cdot P_j.
\end{aligned}$$

a) Dacă nu există $\overline{C}_j^{(p)} < 0$ $\left(j \in K^{(p)}\right)$ şi $I^{(p)}$ conţine indicii a pentru care $y_a > 0$, atunci STOP; sistemul nu admite programe.

b) Dacă există $\overline{C}_k^{(p)} < 0$, atunci se selectează coloana pivot $P_j^{(p)}$ pentru care $C_j^{(p)} = \min\limits_k \left\{\overline{C}_k^{(p)} < 0\right\}$. De pe coloana pivot se alege pivotul în mod obişnuit (ca şi în cazurile anterioare). Se generează $\overline{\underset{(p+1)}{M}}^{-1}$ prin pivotare:

$$\overline{\underset{(p)}{M}}^{-1} \;\Big|\; \left(\frac{P_j}{C_j}\right) \to \overline{\underset{(p+1)}{M}}^{-1}.$$

Se revine la (p) înlocuind p cu $(p+1)$. Când în bază nu mai există $\{y\}$ (sau $y = 0$) se revine la algoritmul revizuit cu bază proprie.

Exemplul 1.14 Să revenim la exemplul 1.8. Practic nu mai înregistrăm tot sistemul, n fiind mare. Pe fişe separate înregistrăm

$$C_1^{(0)} = -3;\ C_2^{(0)} = -4;\ C_3^{(0)} = -2;\ C_4^{(0)} = -3;\ \dots - z_0 = -11.$$

Scriem

$$\overline{\underset{(0)}{M_{(y;-z)}}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Cum există $C_j^{(0)} < 0$, se alege $\min\limits_j \left\{C_j^{(0)} < 0\right\} = -4 = C_2^{(0)}$.

Actualizăm coloana $\dfrac{P_2}{C_2}$; $\overline{\underset{(0)}{M}^{-1}} \cdot \dfrac{P_2}{C_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \hline -4 \end{pmatrix}$ (rămâne aceeaşi acum, deoarece $\underset{(0)}{M}^{-1}$ este o matrice unitate).

Scriem $\overline{\underset{(0)}{M}^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} B \\ \hline -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ \hline -11 \end{pmatrix}$. Scriem

$$\begin{pmatrix} P_2^{(0)} \\ \hline C_2^{(0)} \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} B \\ \hline -11 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \hline -4 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ \hline -11 \end{pmatrix} ;$$

$\min \left\{ \begin{matrix} \frac{4}{1} \\ \frac{7}{3} \end{matrix} \right\} \quad = \quad \dfrac{7}{3}$; pivot $A_{22}^{(0)} = \boxed{3}$.

Generăm noua matrice bazică

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} P_2^{(0)} \\ \hline C_2^{(0)} \end{pmatrix} & \overline{\underset{(0)}{M}^{-1}} \ ; \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{3} \\ \hline -4 \end{pmatrix} & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \end{array} .$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{pmatrix} & \underset{\underset{(1)}{M^{-1}_{(y_1;x_2;(-z))}}}{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \hline 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{array}\right)} \end{array}$$

Calculăm

$$\overline{\underset{(1)}{M}^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} B \\ \hline -11 \end{pmatrix};$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \hline 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ \hline -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \hline -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{array}{c} y_1 \\ x_2 \\ \hline -z_0 \end{array} .$$

Cum variabila auxiliară $y_1 = \frac{5}{3} \neq 0$, **continuăm.**

Avem noua matrice $\underset{(1)}{M}^{-1}$. Calculăm noii coeficienţi $\overline{C}_j^{(1)}$, cu j nebazic:

$$\begin{aligned}
\overline{C}_j^{(1)} &= \left(0; \frac{4}{3}; 1\right)\left(\frac{P_j}{C_j}\right);\\
\overline{C}_1^{(1)} &= \left(0; \frac{4}{3}; 1\right)\left(\begin{array}{c} 2\\ 1\\ \hline -3\end{array}\right) = -\frac{5}{3};\\
\overline{C}_3^{(1)} &= \left(0; \frac{4}{3}; 1\right)\left(\begin{array}{c} 1\\ 1\\ \hline -2\end{array}\right) = -\frac{2}{3};\\
\overline{C}_4^{(1)} &= \left(0; \frac{4}{3}; 1\right)\left(\begin{array}{c} 1\\ 2\\ \hline -3\end{array}\right) = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Alegem $\overline{C}_1^{(1)} = -\frac{5}{3}$. Coloana pivot va fi $\left(\frac{P_1}{C_1}\right) = \left(\begin{array}{c} 2\\ 1\\ \hline -3\end{array}\right)$ şi o actualizăm

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ \hline 0 & \frac{4}{3} & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 2\\ 1\\ \hline -3\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \frac{5}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \hline -\frac{5}{3}\end{array}\right) = \left(\frac{P_1^{(1)}}{C_1^{(1)}}\right).$$

Scriem

$$\left(\begin{array}{c} \frac{5}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \hline -\frac{5}{3}\end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{c} \boxed{\frac{5}{3}}\\ \frac{7}{3}\\ \hline -\frac{5}{3}\end{array}\right);$$

$$\min\left\{\begin{array}{c}\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}\\ \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}}\end{array}\right\} = \frac{\frac{5}{3}}{\boxed{\frac{5}{3}}};\ \text{pivot } A_{11}^{(1)} = \boxed{\frac{5}{3}}.$$

Generăm $\underset{(2)}{\overline{M^{-1}}}$;

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \hline 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{array}\right) \left| \left(\begin{array}{c} \boxed{\frac{5}{3}} \\ \frac{7}{3} \\ \hline -\frac{5}{3} \end{array}\right) \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{\underset{(2)}{M^{-1}_{(x_1;x_2;(-z))}}} \left| \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right) \right. .$$

Cu noua matrice reluăm algoritmul, dar revenim la sistemul iniţial pentru care $\underset{(2)}{\overline{M}}$ se va lua ca matrice bazică fără ultima linie, respectiv coloană

$$\underset{(0)}{M^{-1}_{(x_1;x_2)}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}; \; I^{(0)} = \{1;2\}\,; \; K^{(0)} = \{3;4\}\,.$$

Calculăm $\underset{(0)}{M^{-1}} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}$; $\underset{0}{X} = (1;2;0;0)^t$, care este program de bază. **Acum putem continua după regulile algoritmului revizuit cu bază proprie.**

De exemplu, să alegem x_3 $\left(3 \in K^{(0)}\right)$. Avem

$$\underset{(0)}{M^{-1}} \cdot P_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{2}{5}} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right. \rightarrow \min \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{\frac{2}{5}} \\ \frac{2}{\frac{1}{5}} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\boxed{\frac{2}{5}}};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left| \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\underset{(1)}{M^{-1}_{(x_3;x_2)}}} \right. .$$

Mai departe se procedează ca în exemplul precedent (**algoritmul revizuit cu bază proprie**).

1.4. Aspecte teoretice.

Teoretic putem scrie

$$
\begin{array}{lllllllll}
A_{11}x_1+ & ... & +A_{1k}x_k+ & ... & +A_{1r}x_r+ & ... & +A_{1n}x_n & = B_1 \\
. & & . & & . & & . & . \\
. & & . & & . & & . & . \\
. & & . & & . & & . & . \\
A_{i1}x_1+ & ... & +\boxed{A_{ik}}x_k+ & ... & +A_{ir}x_r+ & ... & +A_{in}x_n & = B_i \\
. & & . & & . & & . & . \\
. & & . & & . & & . & . \\
. & & . & & . & & . & . \\
A_{s1}x_1+ & ... & +A_{sk}x_k+ & ... & +A_{sr}x_r+ & ... & +A_{sn}x_n & = B_s \\
. & & . & & . & & . & . \\
. & & . & & . & & . & . \\
. & & . & & . & & . & . \\
A_{\overline{m}1}x_1+ & ... & +A_{\overline{m}k}x_k+ & ... & +A_{\overline{m}r}x_r+ & ... & +A_{\overline{m}n}x_n & = B_{\overline{m}}
\end{array}
\tag{1.4.1}
$$

Dacă se alege $A_{ik} \neq 0$ ca pivot, atunci pentru a elimina x_k, din restul ecuaţiilor, se vor împărţi toţi coeficienţii de pe linia "i" la $\boxed{A_{ik}}$. Adică noii coeficienţi vor fi $\frac{A_{ir}}{\boxed{A_{ik}}}$; $\frac{B_i}{A_{ik}}$. Eliminând x_k din restul ecuaţiilor $(s \neq i)$ în noul sistem coeficienţii de pe coloana $P_k = [A_{ik}]$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ vor deveni zero. Reducând termenii asemenea pe coloanele $P_r = [A_{sr}]$; $s \neq i$; $r \neq k$ şi de pe coloana B a termenilor liberi, se obţin noii coeficienţi

$$
\left.
\begin{array}{l}
A_{sr} - \frac{A_{ir}A_{sk}}{\boxed{A_{ik}}} = \frac{A_{sr}\boxed{A_{ik}} - A_{ir}A_{sk}}{\boxed{A_{ik}}}; \\
\frac{B_s\boxed{A_{ik}} - B_iA_{sk}}{\boxed{A_{ik}}} = B_s - \frac{B_i}{A_{ik}}A_{sk}
\end{array}
\right. \quad s \neq i;\ r \neq k
\tag{1.4.2}
$$

Se obţin în acest fel regulile de pivotare din metoda eliminării totale. Fiecare alegere de pivot se va numi "pas" Gauss-Jordan. (Se poate proceda şi altfel prin paşi Jordan- modificaţi $[St]$)

Continuând "pivotarea" cu pivoţi de pe altă linie şi de pe altă coloană, se va ajunge la una din situaţiile mai înainte specificate. Adică se obţine o formă canonică, care va arăta dacă sistemul este compatibil sau nu, cât şi rangul matricei $A = [A_{sr}]_{s=\overline{1,m};r=\overline{1,n}}$.

Dacă sistemul este compatibil se vor reţine numai cele m ecuaţii ($m \leq \overline{m}$) liniar independente ($m = rangA$). Dacă la acest moment, termenii liberi sunt nenegativi, s-a obţinut un program de bază $\underset{0}{X}$ (cu variabilele secundare făcute zero; $x_j = 0$; $j \in K$). În caz contrar se continuă pivotarea până se ajunge la un program de bază (dacă există). Este suficient ca pe o linie "i" să avem $A_{ir} \geq 0$ $\left(r = \overline{1,n}\right)$; $B_i < 0$, pentru ca sistemul să **nu admită un program de bază şi deci să nu admită programe,** deşi sistemul este compatibil nedeterminat (pe mulţimea numerelor reale). **Dacă în forma canonică** notăm coeficienţii cu $A^{(0)}; B^{(0)}$ şi pe o coloană $P_j^{(0)} = \left[A_{ij}^{(0)}\right]$; $i = \overline{1,m}$; $j \in K^{(0)}$ avem $A_{ij}^{(0)} \leq 0$ (cel puţin un $A_{ij}^{(0)} < 0$), atunci trecând $A_{ij}^{(0)}$ $\left(j = \overline{1,m}\right)$în dreapta rezultă $x_r^{(0)} = B_r^{(0)} - A_{rj}^{(0)} x_j > 0$, oricare ar fi $x_j > 0$ $\left(r = \overline{1,m}\right)$. Adică se obţin programe cu $\{x_r; x_j\}$ oricât de mari (mulţimea programelor este nemărginită superior). În caz contrar dacă există $A_{ij}^{(0)} > 0$ $\left(j \in K^{(0)}\right)$, atunci avem cel puţin un raport $\frac{B_i^{(0)}}{A_{ij}^{(0)}}$ pozitiv. Dintre acestea alegem pe cel mai mic (pozitiv). Fie acesta $B_i^{(1)} = \frac{B_i^{(0)}}{A_{ij}^{(0)}} < \left\{\frac{B_s^{(0)}}{A_{sj}^{(0)}} > 0\right\}$; $(\forall)\, s = \overline{1,m}$. **Rezultă** $B_i^{(1)} > 0$. Vom mai scrie $\frac{B_i^{(0)}}{A_{ij}^{(0)}} = \min\limits_{A_{sj}^{(0)} > 0} \left\{\frac{B_s}{A_{sj}^{(0)}}\right\}$, j fixat, $j \in K^{(0)}$. Putem scrie:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\dots & \boxed{A_{ij}^{(0)}} & \dots & A_{ir}^{(0)} & \dots & B_i^{(0)} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\dots & A_{sj}^{(0)} & \dots & A_{sr}^{(0)} & \dots & B_s^{(0)} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\dots & A_{lj}^{(0)} & \dots & A_{lr}^{(0)} & \dots & B_l^{(0)} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
\tag{1.4.3}
$$

$$
\frac{B_i^{(0)}}{A_{ij}^{(0)}} < \frac{B_s^{(0)}}{A_{sj}^{(0)}} \Rightarrow \frac{B_s^{(0)} A_{ij}^{(0)} - B_i^{(0)} A_{sj}^{(0)}}{A_{ij}^{(0)}} = B_s^{(1)} > 0
$$

Să admitem că $A_{lj}^{(0)} < 0 \ \big(j \in K^{(0)}\big)$. Avem

$$
\frac{B_l^{(0)} A_{ij}^{(0)} - A_{lj}^{(0)} B_i^{(0)}}{A_{ij}^{(0)}} = B_l^{(1)} \geq 0 \tag{1.4.4}
$$

Aşadar, alegând pivotul după regula anterioară, la pasul următor se va obţine tot un program de bază $\underset{1}{X}$ $\left(\underset{0}{X} \to \underset{1}{X}\right)$. Cum numărul lor este finit ($p \leq C_n^m$), după un număr finit de paşi se vor obţine toate programele de bază.

Cazul degenerării s-a văzut cum se recunoaşte înainte de calcul. Dacă două sau mai multe rapoarte minime egale $\frac{B_i^{(0)}}{A_{ij}^{(0)}} = \frac{B_s^{(0)}}{A_{sj}^{(0)}} = \min\limits_{r} \left\{ \frac{B_r^{(0)}}{A_{rj}^{(0)}} > 0 \right\}$, rezultă $B_s^{(1)} = 0$ dacă alegem ca pivot $\boxed{A_{ij}^{(0)}}$ sau $B_i^{(1)} = 0$, dacă alegem ca pivot $\boxed{A_{sj}^{(0)}}$.

Pentru a evita prima fază de pivotare liberă până se obţine un program de bază se poate recurge la extinderea problemei adăugând o variabilă $y_i \geq 0$, la fiecare ecuaţie "i". Apoi adăugăm o ecuaţie la sistemul obţinut, care să conţină numai suma variabilelor auxiliare $\sum_{i=1}^{m} y_i = z$. Avem problema extinsă (după ce facem termenii liberi pozitivi);

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} x_k + y_i = B_i;\ i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} y_i + (-z) = 0 \end{cases} \tag{1.4.5}$$

$$x \geq 0;\ y \geq 0.$$

În loc ca în prima fază să pivotăm pas cu pas cu coeficienţi ai variabilelor y, până se obţine forma canonică, ceea ce ar însemna p paşi ($p \leq m$), este suficient să scădem toate ecuaţiile în x, y din ultima şi se obţine direct o formă canonică în variabile bazice $y_1 ... y_m$; $(-z) \overset{def}{=} y_{m+1}$;

$$\begin{array}{cccccccc} . & & . & & . & & & . \\ . & & . & & . & & & . \\ . & & . & & . & & & . \\ A_{i1}x_1 + & ... & +A_{ik}x_k + & ... & +A_{in}x_n & +y_i & & = B_i \\ . & & . & & . & & & . \\ . & & . & & . & & & . \\ . & & . & & . & & & . \\ \hline \overline{C}_1 x_1 + & ... & +\overline{C}_k x_k + & ... & +\overline{C}_n x_n & & +y_{m+1} & = \overline{B} \end{array} \tag{1.4.6}$$

unde $\overline{C}_k = -\sum_{i=1}^{m} A_{ik}$. În această formă canonică avem

$$(y_1 = B_1 ... y_m = B_m);\ -z = -z_0 \overset{def}{=} \overline{B} = -\sum_{i=1}^{m} B_i$$

(sau $z_0 = \sum_{i=1}^{m} B_i$) şi $x_k = 0$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$. Aşadar, programul de bază iniţial are variabilele x nule. Mai departe se obţine un nou program de bază în mod obişnuit. **Noile programe de bază vor conţine ca variabile bazice şi variabilele** (x)**,** iar variabilele y corespunzătoare vor deveni secundare şi se iau la valoarea $y = 0$.

Dacă în (1.4.6) avem $\overline{C}_k \geq 0$ $(\forall)$ k (sau $\overline{B} > 0$ la un pas oarecare), ar rezulta $z = z_0 > 0$. Oricare x_k aleasă să devină bazică duce la $z = z_0 + \overline{C}_k x_k > z_0 > 0$. **Funcţia liniară** z **este crescătoare şi nu poate lua valoarea** $z = 0$**.** Ori $\min z$, pentru $y \geq 0$ se realizează dacă $z = 0$ $(y = 0)$. Contradicţie. Adică nu există programe (x). **STOP.**

Observaţia 1.4.1 Alegerea unui $\overline{C}_k$ cel mai mic dintre cei negativi nu este obligatorie. Se alege aşa pentru a micşora numărul de paşi în care z ajunge la valoarea minimă $z_{(p)} = 0$ (z descreşte la fiecare pas în acest fel). Plecând de la faptul că forma canonică a unui sistem cu $I^{(0)}$; $K^{(0)}$ obţinuţi, se poate obţine şi astfel, considerăm matricea $\underset{0}{M}$ a coeficienţilor variabilelor bazice $\{x_r\}$, $r \in I^{(0)}$ şi înmulţim la stânga tot sistemul cu $\underset{0}{M}^{-1}$ (inversa lui $\underset{0}{M}$). Rezultă că atunci când n este "mare" (dar m nu este mare; $rang\underset{0}{M} = m$) este convenabil să procedăm ca în cele ce urmează, dar prin înmulţirea lui P_j $(j \in K)$, pe rând cu $\underset{0}{M}^{-1}$. Se obţine $P_j^{(0)} = \left[A_{ij}^{(0)}\right] = \underset{0}{M}^{-1} P_j$ $\left(P_j = [A_{ij}]\,;\ i = \overline{1,m}\right)$. Se "şterge" din memoria de calcul P_j şi se repetă procedeul cu altă coloană P_k $\left(k \in K^{(0)}\right)$ etc. Dacă $B^{(0)} = \left[B_i^{(0)}\right] = \underset{0}{M}^{-1} B$ $\left(B = [B_i]\,;\ i = \overline{1,m}\right)$ nu conţine valori negative, se obţine un program de bază $\underset{0}{X}$. **Dacă dorim** să obţinem un alt program de bază nu este nevoie să repetăm procedeul cu altă matrice bazică ci este suficient să pornim cu $\underset{0}{X}$. Având $\underset{0}{M}^{-1}$; $P_j^{(0)}$; $P_j^{(0)} = \left[A_{ij}^{(0)}\right]$; $B^{(0)} = \left[B_i^{(0)}\right]$ se alege pivotul $\boxed{A_{ij}^{0}}$, după regula demonstrată în (1.4.3). Prin pivotare $\underset{0}{M} \;\Big|\; P_j^{(0)}$ cu pivot $\boxed{A_{ij}^{0}}$, se obţine o nouă inversă $\underset{1}{M}^{-1}$ a matricei bazice $\underset{1}{M}$ (care provine din $\underset{0}{M}$ înlocuind coloana variabilei bazice x_i $\left(i \in I^{(0)}\right)$ cu coloana variabilei secundare x_j; $j \in K^{(0)}$). Vom obţine $B^{(1)} = \underset{1}{M}^{-1} B \geq 0$.

Dar în prima fază alegerea lui M **fiind "liberă" este posibil** ca $M^{-1}B$ să aibă şi valori negative. Atunci, ca şi în situaţia anterioară, trebuie obţinut un pivot $\boxed{A_{ij}}$ dar liber acum şi apoi să generăm $\underset{1}{M}^{-1}$ etc, până când la un pas rezultă $M^{-1}B \geq 0$. În acest moment notăm $M = \underset{0}{M}$ şi alegem în continuare după regula "pivotului" (1.4.3).

Pentru a diminua această fază "liberă" ca şi în cazul pivotării pe întregul sistem (n mic) se pleacă de la problema extinsă (1.4.5), care dacă n este "mare" nu trebuie înregistrată în total (nu poate fi înregistrată). Procedăm prin "revizuire" ca şi anterior, dar cu o ecuaţie în plus, ultima din (1.4.5) şi cu $(m+1)$ coloane în plus (coloanele variabilelor $\{y_1; ...; y_m; (-z) = y_{m+1}\}$ care formează o matrice de forma

$$\overline{M} = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ & . \\ \underset{0}{M} & . \\ & . \\ & 0 \\ \hline C_b & 1 \end{array}\right); \underset{0}{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.4.7)$$

$$C_b^{(0)} = (1...1) \text{ (coeficienţii lui } \{y\} \text{ din ultima ecuaţie)}$$

Inversa sa este

$$\overline{M}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ & . \\ \underset{0}{M}^{-1} & . \\ & . \\ & 0 \\ \hline -C_b\underset{0}{M}^{-1} & 1 \end{array}\right) \text{ deoarece} \qquad (1.4.8)$$

$$\overline{M}^{-1}\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & ... & 0 & 0 \\ . & & . & . \\ . & ... & . & . \\ . & & . & . \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ \hline 0 & ... & 0 & 1 \end{array}\right)$$

În fond $\overline{M}$, $\overline{M}^{-1}$ sunt cele anterior scrise pentru sistemul extins. Se va proceda ca şi anterior, cu $\overline{M}^{-1}$, $\overline{P}_j = \left(\frac{P_j}{C_j}\right)$, alegând pivoţi de pe coloanele lui $\{y\}$ în ordine. Adică luând $\{y\}$ ca bazice se va obţine forma canonică (1.4.6). De aici încolo pivoţii se aleg după regula pivotului precizată anterior.

Observaţia 1.4.2 Pentru a evita cei "n" paşi de pivotare şi de trecere de la (1.4.5) la forma canonică (1.4.6) este mai simplu să scriem direct (1.4.6), unde $\overline{C}_k = -\sum_{i=1}^{m} A_{ik}$. **Considerăm** ca problemă iniţială (1.4.6) şi apoi aplicăm procedeul de "revizuire" prezentat anterior. Acum avem avantajul că $C_b = (0...0)$ (coeficienţii variabilelor bazice $y_1, ..., y_n$ din forma (1.4.6) luată ca iniţială) şi deci $-C_b^{(0)} M^{-1} = (0...0)$.

S-au justificat în acest fel metodele folosite la exemplele din paragrafele anterioare.

În fond, metoda folosită nu este altceva decât algoritmul simplex aplicat pentru o problemă de $\min z$ mai simplă de forma (1.4.5), aşa cum se va vedea mai departe când se va trata problema sub o formă mai generală.

Un rezultat mai puţin cunoscut din teoria sistemelor de ecuaţii liniare, care permite să căutăm programe de bază (şi deci mai simplu de obţinut) este dat de teoremele care urmează.

Teorema 1.4.1. *Dacă sistemul admite un program atunci admite un program de bază.*

Echivalentă teoremei 1.4.1. este

Teorema 1.4.2. *Dacă sistemul nu admite un program de bază atunci nu admite un program.*

Dacă sistemul este compatibil determinat atunci soluţia unică $\underset{0}{X}$ sau are componente $\underset{0}{x_i} < 0$ şi deci nu este un program, sau nu are valori $\underset{0}{x_i} < 0$ şi atunci este un program cu $I^{(0)} = \left\{i \mid i = \overline{1,n}\right\}$; $K^{(0)} = \Phi$; $\underset{0}{x_i} = B_i^{(0)} \geq 0$; $i = \overline{1,n}$, care este unic.

Dacă sistemul admite un program de bază atunci se obţine o formă canonică

$$\underset{0}{x_{\overline{r}}} + \sum_{j \in K^{(0)}} A_{rj}^{(0)} x_j = B_r^{(0)};\ \overline{r} \in I^{(0)};\ r = \overline{1,m};\ B_r^{(0)} \geq 0. \tag{1.4.9}$$

(S-a notat $x_{\overline{r}}$ deoarece indicele variabilei bazice poate să nu coincidă cu indicele ecuaţiei în care se află. Coincide $\overline{r} = r$ dacă se aleg pivoţi diagonali). Dacă pe coloana $j \in K^{(0)}$ avem $A_{rj}^{(0)} \leq 0$ $\left(r = \overline{1,m}\right)$ (cel puţin un $A_{rj}^{(0)} < 0$), atunci din

$$\underset{0}{x_{\overline{r}}} = B_r^{(0)} - A_{rj}^{(0)} x_j;\ (\underset{0}{x_k} = 0;\ k \neq j;\ k \in K^{(0)}) \tag{1.4.10}$$

rezultă $\underset{1}{x_{\overline{r}}} > 0$ pentru $\underset{1}{x_j} > 0$. Mai mult $\underset{1}{x_{\overline{r}}}$ pot fi **oricât de mari dacă** $x_j = \underset{1}{x_j} \to \infty$**. Se mai spune că prin programul de bază** $\underset{0}{X}$ **trece o rază vectoare (extremală), sau că** $\underset{0}{X}$ **generează programe** X **nemărginite superior** (putem avea aşa ceva la un pas $p \geq 0$).

În rezumat, dacă sistemul admite programe de bază, atunci:

(P_1). **Mulţimea programelor de bază este finită şi mărginită.**

(P_2). **Dacă printr-un program de bază trece o rază vectoare, atunci mulţimea programelor nu este mărginită.**

(P_3). Fie $\underset{0}{X}, \underset{1}{X}, ..., \underset{p}{X}$ $(p \leq C_n^m)$ toate programele de bază admise. **Dacă oricare dintre ele nu generează o rază vectoare, atunci mulţimea programelor este mărginită. Orice alt program este o combinaţie liniară convexă de programe de bază;** $X = \sum\limits_{r=0}^{p} a_r \underset{(r)}{X}$; $a_r \geq 0$; $(\forall)\, r = \overline{1,p}$; $\sum\limits_{r=1}^{p} a_r = 1$.

Criteriul de recunoaştere pentru nemărginirea mulţimii programelor este dat de (P_2).

Mulţimea programelor este o mulţime convexă pe când submulţimea programelor de bază nu este convexă (admitem că există cel puţin două). O combinaţie liniară convexă a două programe de bază este un program, dar nu program de bază.

Deşi în cele ce urmează (programarea liniară) ne interesează numai (P_1), (P_2), (P_3), admitem totuşi că şi în cazul nemărginirii mulţimii programelor, orice program se poate scrie (exprima) ca o combinaţie liniară convexă de programe de bază, plus o combinaţie liniară cu coeficienţi nenegativi de vectori ce definesc razele vectoare. A se vedea [*St*]. Dacă există un singur program de bază $\underset{0}{X}$ şi o rază vectoare, atunci orice program este dat de (1.4.10) pentru orice $x_j > 0$.

Dacă există un program de bază, atunci există o formă canonică (1.4.9.) cu $B_r^{(0)} \geq 0$ (cel puţin un $B_r^{(0)} > 0$); $r \in I^{(0)}$, $x_j^0 = 0$; $j \in K^{(0)}$. Scriem (1.4.10.). Dacă $\left\{A_{rj}^{(0)} < 0\right\}$, $r \in I^{(0)}$, atunci luând pentru x_j valoarea $x_j^{(1)} < \min \left\{\frac{B_i^{(0)}}{A_{ij}^{(0)}}\right\}$ se obţin programe care nu sunt neapărat programe de bază. Aceste programe se mai numesc şi programe generate de programul de bază $\underset{0}{X}$. Cum numărul p al programelor de bază este finit ($p \leq C_n^m$) şi fiecare generează programe, evident se pune, teoretic, problema lagăturii între aceste programe de bază şi mulţimea tuturor programelor.

Un program de bază $\underset{0}{X}$ este mărginit (există un număr real $\underset{0}{N} > 0$, astfel încât $0 \leq \underset{0}{x_s} \leq \underset{0}{N}$). Mulţimea lor este o mulţime finită şi mărginită.

S-a văzut că dacă $\underset{0}{X}$ este un program de bază, atunci putem scrie (1.4.10.) cu $\underset{0}{x_{\overline{r}}} = B_r^{(0)}$; $r \in I^{(0)}$; $\underset{0}{x_j} = 0$; $j \in K^{(0)}$; $B_r^{(0)} \geq 0$ (cel puţin un $B_r^{(0)} > 0$). Să observăm că s-a scris $\underset{0}{x_{\overline{r}}}$, deoarece $\overline{r} = r$ numai dacă se aleg pivoţi diagonali (variabila bazică x_r este aleasă din ecuaţia "r"). Rezultă uşor următoarea teoremă.

Teorema 1.4.3. *Mulţimea programelor unui sistem de ecuaţii liniare este o mulţime convexă.*

Dacă există "p" programe de bază $\underset{1}{X}, ..., \underset{p}{X}$ $(1 < p \leq C_n^m)$, atunci o combinaţie liniară convexă $\overline{X} = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i \underset{i}{X}$ $\left(a_i \geq 0; \sum\limits_{i=1}^{p} a_i = 1\right)$ este un program care în general nu mai este program de bază şi deci submulţimea programelor de bază nu este o mulţime convexă.

Într-un exemplu anterior s-a văzut că un program generat de un program de bază poate fi nemărginit. Criteriul de recunoaştere pentru nemărginire, teoretic, este dat de (1.4.10.) când există $\left\{A_{rj}^{(0)} \leq 0\right\}$, $(\forall)\, r \in I^{(0)}$ şi cel puţin un $A_{rj}^{(0)} < 0$ (evident, dacă $\underset{0}{x_{\overline{r}}} = B_r^{(0)} \geq 0; r \in I^{(0)}$). Aşadar mulţimea programelor poate fi nemărginită.

Dacă oricare ar fi un program de bază $\underset{p}{X}$ nu avem o situaţie ca cea anterioară (nu avem $A_{sk}^{(p)} \leq 0$, $(\forall)\, s \in I^{(p)}$), atunci mulţimea programelor este o mulţime mărginită şi orice program este o combinaţie liniară convexă de programe de bază.

Capitolul 2. Sisteme de ecuaţii liniare speciale. Programare liniară.

2.1. Sisteme de forma

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}x_j = B_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} C_j x_j = z}; i=\overline{1,m}, rang A = m; x_j \geq 0\, (\forall)\, j=\overline{1,n}, \quad (2.1.1)$$

unde termenul liber ia valori: z_0 pentru un program $\underset{(0)}{X}$ sau z_1 pentru un program $\underset{(1)}{X}$ etc.

Dacă sistemul este "mic" atunci trecând z în membrul stâng şi considerând $(-z)$ ca o nouă variabilă se obţine sistemul:

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}x_j = B_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} C_j x_j + (-z) = 0} \quad (2.1.2)$$

a) Se aleg pivoţi numai coeficienţii A_{ij} şi se pivotează până se obţine forma canonică

$$\frac{x_{\overline{r}} + \sum\limits_{k} A_{rk}^{(0)} x_k = B_r^{(0)}}{\sum\limits_{k} \overline{C}_k^{(0)} x_k + (-z) = -z_0}; k \in K^{(0)}; \overline{r} \in I^{(0)}; r=\overline{1,m}, \quad (2.1.3)$$

care să dea un program de bază $\underset{(0)}{X}$.

Evident, pentru $k \in K^{(0)}$ avem $\underset{0}{x_k} = 0$ şi deci $z = z_0$ este valoarea lui z pentru acest program de bază.

Exemplul 2.1.1 Să considerăm sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ \hline 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = z \end{array}\right. ;\ x_i \geq 0;\ i = \overline{1,4}.$$

Pentru sistemul dat dacă nu mai scriem ultima relaţie, s-au obţinut toate programele de bază

$$\underset{(0)}{X^t} = (1;2;0;0)\,;\ \underset{(1)}{X^t} = \left(0;\frac{3}{2};\frac{5}{2};0\right);\ \underset{(2)}{X^t} = (0;0;1;3)\,;\ \underset{(3)}{X^t} = \left(\frac{1}{3};0;0;\frac{10}{3}\right).$$

Orice alt program va fi o combinaţie liniară convexă a acestor programe de bază;

$$\begin{aligned} X^t &= a_0\underset{(0)}{X} + a_1\underset{(1)}{X} + a_2\underset{(2)}{X} + a_3\underset{(3)}{X} = \\ &= \left(a_0 + \frac{1}{3}a_3; 2a_0 + \frac{3}{2}a_1; \frac{5}{2}a_1 + a_2; 3a_2 + \frac{10}{3}a_3\right) \\ a_i &\geq 0\ \left(i = \overline{0,3}\right);\ \sum_{i=0}^{3} a_i = 1. \end{aligned}$$

La fiecare program de bază $\underset{(p)}{X}$ va corespunde o valoare z_p a funcţiei liniare z. Valoarea generală a sa se află înlocuind $X^t : z = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \underset{(p)}{x_k}$.

Dacă sistemul se aduce la forma canonică (2.1.3) atunci odată cu obţinerea unui program de bază se obţine şi valoarea funcţiei z pentru acest program de bază (termenul liber luat cu semn opus, adică z_0). Dacă dorim să obţinem programul de bază $(1;2;0;0)$ atunci avem

$$\begin{array}{cccc|c|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{array} \backsim$$

$$\backsim \begin{array}{cccc|c|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{\frac{5}{2}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 5 \\ \hline 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & -4 \end{array} \backsim \underset{0}{x_1} = 1; \underset{0}{x_2} = 2; z_0 = 8.$$

$$\backsim \begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & \frac{13}{5} & \frac{4}{5} & 1 & -8 \end{array};$$

Exerciţiul 2.1.1 Să se arate că $z_1 = \frac{29}{2}$; $z_2 = 13$; $z_3 = \frac{32}{3}$ folosind aducerea la forma canonică

Exerciţiul 2.1.2 Să se arate că $z_1 = \frac{29}{2}$ este cea mai mare valoare: $\frac{29}{2} > z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4$ oricare ar fi $x_i \geq 0$; $i = \overline{1,4}$ soluţii ale sistemului dat, diferite de $\underset{0}{X}$.

Dacă sistemul este "mare" (n- mare), atunci cum s-a văzut se recurge la matricea bazică $\overline{M}$ şi la $\overline{M}^{-1}$ calculul făcându-se prin înregistrare parţială. Avem:

$$\underset{0}{M}_{(1;2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \underset{0}{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix};$$

$$\overline{M}^{-1}_{(1;2)} = \left(\begin{array}{c|c} \underset{0}{M}^{-1} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline -C_b \underset{0}{M}^{-1} & 1 \end{array}\right);$$

$$-C_b \underset{0}{M}^{-1} = -(2;3) \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right);$$

$$\underset{(0)}{\overline{M}^{-1}_{(1;2)}} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \hline -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{array}\right); I^{(0)} = \{1; 2\}; K^{(0)} = \{3; 4\}.$$

Dacă dorim ca x_3 să devină bazică, $3 \in I^{(1)}$, atunci calculăm:

$$\underset{(0)}{\overline{M}^{-1}_{(1;2)}} \left(\frac{P_3}{C_3}\right) = \underset{(0)}{\overline{M}^{-1}} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \boxed{\frac{2}{5}} \\ \frac{1}{5} \\ \hline \frac{13}{5} \end{array}\right);$$

$$\underset{(0)}{\overline{M}^{-1}} \left(\frac{B}{0}\right) = \overline{M}^{-1} \left(\begin{array}{c} 4 \\ 7 \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hline -8 \end{array}\right)$$

$$\underset{0}{X} \begin{cases} \underset{0}{x_1} = 1; \\ \underset{0}{x_2} = 2; \\ z_0 = 8. \end{cases}$$

Facem rapoartele $\left(\frac{1}{2/5}; \frac{2}{1/5}\right\}$ şi alegem pe cel mai mic, adică $\frac{1}{2/5}$.

Pivotul va fi $\boxed{\frac{2}{5}} = A_{13}^{(0)}$. Actualizăm $M_{(1;2)}$ în $M_{(3;2)}$ şi inversa sa

$$\overline{M}_{(1;2)}^{-1} \left| \left(\frac{P_3^{(1)}}{\overline{C}_3^{(1)}} \right) \right. ;$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \hline -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{array} \right) \left| \left(\begin{array}{c} \boxed{\frac{2}{5}} \\ \frac{1}{5} \\ \hline \frac{13}{5} \end{array} \right) \right. \Rightarrow \quad \underset{1}{X} \begin{cases} \underset{(1)}{x_1} = \frac{5}{2}; \\ \underset{(1)}{x_2} = \frac{3}{2}; \\ z_1 = \frac{29}{2}. \end{cases}$$

$$\underset{(1)}{\overline{M}_{(3;2)}^{-1}} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right);$$

$$\underset{(1)}{\overline{M}_{(3;2)}^{-1}} \left(\frac{B}{0} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \hline -\frac{29}{2} \end{array} \right)$$

Exerciţiul 2.1.3 Pornind cu $\underset{1}{X}$ să se obţină $\underset{2}{X}$, apoi $\underset{3}{X}$.

Exemplul 2.1.2 Dacă în exemplul 2.1.1 s-ar alege ca variabile bazice (x_1, x_3), atunci s-ar obţine o formă canonică care nu dă un program de bază în prima fază. Trebuie continuată pivotarea liberă. Avem:

$$\begin{array}{cccc|c|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{3}{2} & 0 & 5 \\ \hline 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & -4 \end{array} \backsim$$

$$\backsim \begin{array}{cccc|c|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{5} & 1 & 3 & 0 & 10 \\ \hline 0 & -13 & 0 & -7 & 1 & -34 \end{array} ; \text{ continuăm}$$

$$\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & \frac{13}{5} & \frac{4}{5} & 1 & -8 \end{array}$$

Exerciţiul 2.1.4 În loc de $\boxed{5}$ să se aleagă pivotul $\boxed{-1}$.

Evident şi în cazul rezolvării matriceale se va obţime acelaşi rezultat

$$M_{(1;3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; M^{-1}_{(1;3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\overline{M}_{(1;3)} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 4 & 1 \end{array}\right); -C_b M^{-1} = -\left(2;4\right) M^{-1} = \left(2;-6\right);$$

$$\overline{M}^{-1}_{(1;3)} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & -6 & 1 \end{array}\right);$$

$$\overline{M}^{-1}\left(\frac{B}{0}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & -6 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{c} 4 \\ 7 \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} -3 \\ 10 \\ \hline -34 \end{array}\right);$$

$$\text{Avem} \begin{cases} x_1 = -3; \\ x_3 = 10; \\ z = 34. \end{cases}$$

Trebuie schimbat pivotul. Să alegem ca variabile bazice (x_1, x_2). Rezultă

$$\overline{M}^{-1}_{(1;3)} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ \hline 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} -2 \\ \boxed{5} \\ \hline -13 \end{array}\right);$$

$$\overline{M}^{-1}_{(1;3)} \Bigg| \left(\begin{array}{c} -2 \\ \boxed{5} \\ \hline -13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \hline -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{array}\right) = \overline{M}^{-1}_{(1;2)}; \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \\ z = 8. \end{cases}$$

$$\overline{M}^{-1}_{(1;2)} \left(\frac{B}{0}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hline -8 \end{array}\right)$$

Avem program de bază. Se continuă ca mai înainte pentru a genera noi programe de bază (alegerea pivotului nu va mai fi liberă ci după regula raportului minim).

Pentru a evita prima fază a alegerii libere a unui pivot până se ajunge la un program de bază se poate proceda ca în cazul obişnuit, formând problema auxiliară fără a mai considera ultima relaţie în z sau considerând şi această relaţie.

Să procedăm în ambele cazuri.

În primul caz rezolvarea este dată în primul capitol. Se obţine unul din programele de bază anterioare. De exemplu $I^{(0)} = \{3; 2\}$, $K^{(0)} = \{1; 4\}$

$$
\begin{array}{l}
M_{(3;2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \\
-C_b M^{-1} = -(4; 3) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(-\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right) \\
\overline{M}^{-1}_{(3;2)} \begin{pmatrix} B \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \hline -\frac{29}{2} \end{pmatrix}
\end{array}
\quad
\begin{cases} x_3 = \frac{5}{2}; \\ x_2 = \frac{3}{2}; \\ z = \frac{29}{2}. \end{cases}
$$

În al doilea caz datele anterioare s-ar obţine direct dar matricea bazică s-ar mări cu o linie şi o coloană. Este instructiv să procedăm şi în acest mod.

Scriem

$$
\begin{array}{cccc|cccc}
2x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & y_1 & & & = 4 \\
x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4+ & & y_2 & & = 7 \\
\hline
2x_1+ & 3x_2+ & 4x_3+ & 3x_4+ & & & (-z) & = 0 \\
\hline
 & & & & y_1+ & y_2+ & (-U) & = 0
\end{array}
; \begin{cases} x \geq 0; \\ y \geq 0; \\ \min U. \end{cases}
\tag{2.1.4}
$$

Aducem problema la forma canonică şi aplicăm algoritmul extins:

$$
\begin{array}{l}
\begin{array}{cccc|cc|cc|c}
2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
1 & \boxed{3} & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\
\hline
2 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
-3 & (-4) & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -11
\end{array} \backsim \\
-4 = \min\{-3 - 4 - 2 - 3\}; \\
\frac{7}{\boxed{3}} = \min \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{4} \\ \frac{7}{3} \end{matrix} \right\}; \text{ pivot } \boxed{3} \\
\backsim \begin{array}{cccc|cc|cc|c}
\boxed{\frac{5}{3}} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\
\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\
\hline
1 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -7 \\
\hline
\left(-\frac{5}{3}\right) & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 1 & -\frac{5}{3}
\end{array} \\
-\frac{5}{3} = \min\left\{-\frac{5}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right\} \\
\frac{\frac{5}{3}}{\boxed{\frac{5}{3}}} = \min \left\{ \begin{matrix} \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} \\ \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}} \end{matrix} \right\}; \text{ pivot } \boxed{\frac{5}{3}}.
\end{array}
\tag{2.1.5}
$$

Rezultă

$$\begin{array}{cccc|cc|cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & \frac{13}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 & 0 & -8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \text{ STOP;} \qquad (2.1.6)$$

$\min U = 0$; $y_1 = 0$; $y_2 = 0$. Se elimină ultima linie şi penultima coloană.

Rezultă

$$\begin{array}{cccc|cc|c|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & \frac{13}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 & -8 \\ \hline \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{c} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \\ z = 8. \end{array} \right. \qquad (2.1.7)$$

$$I = \{1;2\};\ K = \{3;4\};$$

$$M_{(1;2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\ M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}; \qquad (2.1.8)$$

$$-C_b M^{-1} = \left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right);\ \overline{M}^{-1}_{(1;2)} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \hline -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{array}\right)$$

S-au obţinut toate datele inclusiv $\overline{M}^{-1}_{(1;2)}$. **Dacă s-ar fi plecat cu (2.1.4)** ar fi trebuit mai întâi făcute două pivotări ca să obţinem forma canonică (2.1.5). **Direct** se face suma coeficienţilor variabilelor (x_i) din sistemul cu termenii liberi B şi se trece cu minus pe ultima linie, iar y_1, y_2 nu se mai pun. Avem (2.1.5).

Dacă sistemul este mare se înregistrează pe "fişe" coloanele anterioare. **Se alege ca matrice bazică** matricea ultimă; coloanele lui y_1;

y_2; $(-z)$; $(-U)$, dacă se pleacă de la (2.1.4). Adică avem:

$$\overline{M} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$$\overline{M}^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$$\overline{M}^{-1}\left(\begin{array}{c} 4 \\ 7 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 7 \\ \hline 0 \\ \hline -11 \end{array}\right); \quad \left\{\begin{array}{c} y_1 = 4 \\ y_2 = 7 \\ \hline z = 0 \\ \hline U = 11 \end{array}\right.$$

şi se continuă obişnuit. Calculăm separat $\overline{M}^{-1}\left(\begin{array}{c} P_j \\ \hline C_j \\ \hline 0 \end{array}\right)$; $j = \overline{1,n}$ (coloanele coeficienţilor variabilelor x_j).

Se obţin $(-3; -4; -2; -3)$. Ultima linie din (2.1.5) etc. Prin urmare este indicat să se scrie $(-3 - 4 - 2 - 3)$ direct şi să se pornească cu (2.1.5) (**înregistrată pe "fişe"**). Adică scriem direct

$$\underset{0}{\overline{M}} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right); \underset{0}{\overline{M}}^{-1} = \underset{0}{\overline{M}};\ \underset{0}{\overline{M}}^{-1}\left(\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \\ \hline -11 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 7 \\ \hline 0 \\ \hline -11 \end{array}\right);$$

$$\underset{0}{\overline{M}}^{-1}\left(\begin{array}{c} P_j \\ \hline C_j \\ \hline -\overline{C}_j^{(0)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} P_j \\ \hline C_j \\ \hline -\overline{C}_j^{(0)} \end{array}\right)$$

(practic nu se mai scriu aceste calcule). Se alege coloana pivot, coloana $j = 2$ deoarece $-4 = \min\{-3; -4; -2; -3\}$ şi raportul minim

$\frac{7}{3} = \min\limits_{(+)} \left\{ \begin{matrix} \frac{4}{1} \\ \frac{7}{3} \end{matrix} \right\}$. Pivot $\boxed{3}$. Actualizăm $\underset{0}{\overline{M}}$ cu pivot $\boxed{3}$;

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \boxed{3} \\ \hline -3 \\ \hline -4 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \frac{4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) = \underset{(1)}{\overline{M}^{-1}_{(y_1;x_2;(-z);(-U))}};$$

$$\overline{M}^{-1} \left(\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \\ \hline -11 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \hline -7 \\ \hline -\frac{5}{3} \end{array}\right).$$

Calculăm $\overline{C}_j^{(1)}$ actualizaţi pentru x_1, x_3, x_2, y_2

$$\left(0; \frac{4}{3}; 0; 1\right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hline 2 \\ \hline -3 \end{array}\right) = -\frac{5}{3}.$$

Se menţine în memoria de calcul $(0; \frac{4}{3}; 0; 1)$, se şterge coloana lui x_1 şi se pune coloana lui x_3 etc. (din forma (2.1.5)). Se obţin: $\overline{C}_3^{(1)} = -\frac{2}{3}$; $\overline{C}_4^{(1)} = -\frac{1}{3}$; $\overline{C}_{y_2}^{(1)} = \frac{4}{3}$. Se alege $\min\limits_{(-)} \left\{\frac{-5}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right\} = -\frac{5}{3}$. Coloana lui x_1 devine coloană pivot $p_1^{(1)}$.

Actualizăm această coloană cât şi termenii liberi.

Rezultă:

$$\underset{(1)}{\overline{M}^{-1}} \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hline 2 \\ \hline -3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \boxed{\frac{5}{3}} \\ \frac{7}{3} \\ \hline -7 \\ \hline -\frac{5}{3} \end{array}\right); \left\{ \begin{array}{l} B_1^{(1)} = y_1; \\ B_2^{(1)} = x_2. \end{array}\right.$$

Calculăm $\min\limits_{(+)} \left\{ \frac{B^{(1)}}{A_{r1}^{(1)}} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} \\ \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}} \end{matrix} \right\} = \frac{\frac{5}{3}}{\boxed{\frac{5}{3}}}$; pivot $A_{11}^{(1)} = \boxed{\frac{5}{3}}$

Deci x_1 devine bazică în locul lui y_1 şi se obţine un nou program de bază.

Actualizăm

$$\underset{(1)}{\overline{M}^{-1}}\ \left|\ \begin{pmatrix} \boxed{\frac{5}{3}} \\ \frac{1}{3} \\ \hline -\frac{5}{3} \\ \hline -\frac{5}{3} \end{pmatrix}\right. \to \underset{(2)}{\overline{M}^{-1}} =$$

$$= \overline{M}^{-1}_{(x_1;x_2;(-z);(-U))} = \left(\begin{array}{cc|c|c} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Variabilele auxiliare y_1, y_2 au devenit secundare, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Deci $\min U = 0$. Se elimină ultima linie şi ultima coloană din $\overline{M}^{-1}$ şi rămâne $\overline{M}^{-1}_{(x_1;x_2;(-z))}$ adică (2.1.8).

S-a obţinut un program de bază $\underset{0}{X}^t = (1;2;0;0)$, $I^{(0)} = \{1;2\}$, $K^{(0)} = \{3;4\}$.

Cu aceste date se revine la sistemul iniţial (neextins). Avem:

$$\underset{(0)}{\overline{M}^{-1}_{(1;2)}} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \hline -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{array}\right); \quad \begin{cases} \underset{0}{x_1} = 1; \\ \underset{0}{x_2} = 2; \\ z_0 = 8. \end{cases}$$

$$\overline{M}^{-1}\left(\frac{B}{0}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \hline -8 \end{pmatrix}$$

Fie x_3 ca variabilă bazică nouă. Actualizăm

$$\underset{(0)}{\overline{M}^{-1}}\left(\frac{P_3}{C_3}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \hline -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \hline 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{2}{5}} \\ \frac{1}{5} \\ \hline \frac{13}{5} \end{pmatrix}$$

$$B_1^{(0)} = 1; B_2^{(0)} = 2; z_0 = 8.$$

Calculăm $\min\limits_{(+)}\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{\frac{2}{5}} \\ \frac{2}{\frac{1}{5}} \end{array}\right\} = \frac{1}{\boxed{\frac{2}{5}}}$. Pivot $\boxed{\frac{2}{5}}$. Avem $I^{(1)} = \{3;2\}$. Actualizăm

$\underset{(0)}{\overline{M}}^{-1}$

$$\underset{(0)}{\overline{M}}^{-1} \left| \begin{pmatrix} \boxed{\frac{2}{5}} \\ \frac{1}{5} \\ \hline \frac{13}{5} \end{pmatrix} \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \underset{(1)}{\overline{M}}^{-1}_{(3;2)} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right).$$

Avem

$$\underset{(1)}{\overline{M}}^{-1} \begin{pmatrix} B \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \hline -\frac{29}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \underset{1}{x_3} = \frac{5}{2}; \\ \underset{1}{x_2} = \frac{3}{2}; \\ z_1 = \frac{29}{2}. \end{cases}$$

Exerciţiul 2.1.5 Pornind cu $\underset{1}{X} = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$; $z_1 = \frac{29}{2}$ să se genereze $\overline{M}^{-1}_{(3;4)}$. Se obţine un nou program de bază $\underset{2}{X}$ cu $I^{(2)} = \{3; 4\}$; $K^{(2)} = \{1; 2\}$.

Cele prezentate până aici sunt suficiente pentru a aborda prima clasă de probleme de programare liniară (cu $X \geq 0$).

A doua clasă de probleme de programare liniară cu $d \leq X \leq S$ ($d_i \leq x_i \leq S_i$, cel puţin pentru un x_i) necesită noi cunoştiinţe de rezolvare a sistemelor liniare.

2.2. Programare liniară cu variabile $X \geq 0$, continue.

S-a văzut în ce constă o problemă de programare liniară sub diferite forme. Vom începe cu o problemă de programare liniară cu restricţii asupra outputului X de forma $X \geq 0$, sub formă standard (restricţiile sunt ecuaţii liniare, se mai spune că restricţiile sunt efective). În prima fază se obţine un program de bază $\underset{0}{X}$ la care corespunde o valoare z_0 a funcţiei scop $z = CX$. În faza a doua se aplică unul din procedeele de generare a unui nou program de bază $\underset{1}{X}$ mai "bun" ca $\underset{0}{X}$, adică în aşa fel încât , $z_0 < z_1$ dacă scopul este maximizarea funcţiei scop, sau $z_0 > z_1$ dacă scopul este minimizarea funcţiei scop z. Se testează la fiecare pas p $(p \geq 0)$ dacă programul de bază $\underset{p}{X}$ este optimal sau nu.

Dacă nu este optimal se generează un program de bază nou, mai "bun' ca cele generate până aici. Aşadar, în mare, algoritmul se poate formula astfel.

(0) **(Iniţial).** Dispunem de un program de bază $\underset{0}{X}$ şi de z_0;

(1) **Testăm** dacă $\underset{0}{X}$ este optimal. Dacă da, atunci STOP;

Dacă nu, atunci generăm un nou program de bază $\underset{1}{X}$ $\left(\underset{0}{X} \to \underset{1}{X}\right)$ aşa încât, z_1 să fie mai bun (strict) ca z_0. Cu $\underset{1}{X}$ se revine la (1) $(0 := 1$, sau în general, $p := p + 1)$.

Să admitem că în prima fază s-a obţinut un program de bază $\underset{0}{X}$, adică o formă canonică.

$$\begin{array}{llll} x_{\overline{r}}+ & \sum\limits_j A_{rj}^{(0)} x_j & = B_r^{(0)} & \\ \sum\limits_j \overline{C}_j^{(0)} x_j + & (-z) & = -z_0 & \end{array} ; \overline{r} \in I^{(0)};\ r = \overline{1,m};\ j \in K^{(0)}. \tag{2.2.1}$$

Să admitem că problema este de **maxim.** $(\max; z = CX)$

Criteriul de optimalitate: Dacă $\overline{C}_j^{(0)} \leq 0$ $(\forall)\, j \in K^{(0)}$, atunci STOP: $\underset{0}{X}$ este program de bază optimal, dacă prin $\underset{0}{X}$ nu există o rază extremală. Dacă există o rază extremală atunci optimul este nemărginit.

Criteriul de continuare. Dacă există $\overline{C}_k^{(0)} > 0 \left(k \in K^{(0)}\right)$, atunci pivotul se alege de pe coloana lui $x_j \left(j \in K^{(0)}\right)$, pentru care avem

$$\overline{C}_j^{(0)} = \max_{k \in K^{(0)}} \left\{ \overline{C}_k^{(0)} > 0 \right\} \tag{2.2.2}$$

Observaţie 2.2.1 Pentru o problemă de minimizare **STOP**, dacă $\overline{C}_j^{(0)} \geq 0 \; \forall j \in K^{(0)}$ sau dacă prin $\underset{0}{X}$ există o rază extremală.

Dacă există $\overline{C}_k^{(0)} < 0 \left(k \in K^{(0)}\right)$se continuă alegând coloana pivot, $P_j^{(0)}$, dacă

$$\overline{C}_j^{(0)} = \min_k \left\{ \overline{C}_k^{(0)} < 0 \right\} \tag{2.2.3}$$

Demonstraţie. Din (2.2.1) rezultă:

$$z = z_0 + \sum_j \overline{C}_j^{(0)} x_j, \;\; j \in K^{(0)}. \tag{2.2.4}$$

Dacă $\overline{C}_j^{(0)} \leq 0 \; (\forall)\, j$, rezultă $z \leq z_0$, dacă s-ar continua algoritmul, pentru problema de maxim, deoarece $\underset{0}{x_j} \to \underset{1}{x_j} > 0$, $\underset{0}{x_k} = 0 \to \underset{1}{x_k} = 0$; $k \neq j$ (sau $z \geq z_0$ dacă $\overline{C}_j^{(0)} \geq 0$ şi s-ar continua algoritmul). Cum $z = CX$ este liniară şi continuă în condiţiile anterioare rezultă că optimul s-a atins pentru $\underset{0}{X}$ (sau pentru $\underset{p}{X}$; $p \geq 0$ dacă $s := p$).

Condiţia de continuare (2.2.2) este aleasă astfel pentru a genera cele mai eficiente programe de bază la fiecare pas (în acest fel se va ”parcurge” în general numai o parte din programele de bază). Cum avem cel mult C_n^m-programe de bază, algoritmul este finit. S-a văzut că dacă prin $\underset{0}{X}$ (sau $\underset{p}{X}$; $p \geq 0$) trece o rază vectoare, adică $A_{rj} \leq 0$ $(\forall)\, r = \overline{1,m}$, atunci $\underset{0}{x_j} = 0 \to \underset{1}{x_j} > 0$, $\underset{1}{x_j}$ oricât de mare şi dintre $\left\{ \underset{1}{x_{\overline{r}}} \geq 0 \right\}$ cel puţin un $\underset{1}{x_{\overline{r}}} > 0$ va fi oricât de mare. Adică $z \to \infty$ STOP; optim nemărginit (sau $z \to -\infty$ pentru problema de minimizare).

Criteriul de unicitate optimală. Dacă criteriul de optimalitate este îndeplinit, atunci:

a) **Dacă** $\overline{C}_k^{(0)} < 0\ (\forall)\, k \in K^{(0)}$ (sau $\overline{C}_k^{(0)} > 0\ (\forall)\, k \in K^{(0)}$ pentru minimizare), atunci programul de bază optimal este unic.

b) **Dacă există** $\overline{C}_j^{(0)} = 0\ \left(j \in K^{(0)}\right)$**, atunci mai există un program de bază optimal** $\underset{1}{X}$**,** corespunzător formei canonice obţinută prin pivotare cu pivot de pe coloana $P_j^{(0)}$.

În acest caz (b), având două programe de bază optimale $\underset{0}{X}$**,** $\underset{1}{X}$ o combinaţie liniară convexă a lor

$$\left\{\overline{X} = a_0 \underset{0}{X} + a_1 \underset{1}{X}\right\} \quad (a_0 \geq 0; a_1 \geq 0; a_0 + a_1 = 1)$$

generează o mulţime de programe optimale.

Că $\overline{X}$ este un program se ştie. Avem

$$\overline{z} = C\overline{X} = a_0 C\underset{0}{X} + a_1 C\underset{1}{X} = a_0 z_0 + a_1 z_0 = (a_0 + a_1)\, z_0 = z_0,$$

deoarece

$$z_1 = C\underset{1}{X} = C\underset{0}{X} = z_0$$

($\underset{0}{X}$, $\underset{1}{X}$ sunt optimale). Deci $\left\{\overline{X}\right\}$ sunt programe optimale.

Interpretarea economică.

Dacă o problemă admite un program optimal unic, acesta fiind program de bază, rezultă că trebuie "fabricate" numai produsele (outputurile) care apar în programul de bază, în cantităţile date de valorile bazice pozitive. **Celelalte tipuri de produse nu sunt "eficiente".** A fabrica unul dintre ele înseamnă a scădea eficienţa (creşte costul total z de producţie sau scade "beneficiul" z). **Din punctul de vedere autonom**, al agenţiei, patronului,... se justifică acest mod de acţiune. **Global** (interes naţional, protecţie socială în sensul că un anumit tip de produs x_j care apare în programul de bază optimal la valoarea $\underset{(p)}{x_j} = 0$, $j \in K^{(p)}$ este necesar pentru consumatori) **situaţia trebuie analizată.**

Dacă există posibilitatea obţinerii a mai multor programe de bază optimale, **atunci acestea trebuie obţinute iarăşi printr-o combinaţie liniară convexă a lor din care se vor obţine programe optimale. Adică se obţine ceea ce se numeşte o "diversificare"**

a producţiei optimale. În acest fel mai multe "tipuri" de produse necesare se pot fabrica la acelaşi scop optimal ($z_{\max}$ sau $z_{\min}$).

O asemenea analiză este necesară în orice problemă de cerere-ofertă. Cererea este diversificată şi prin urmare oferta trebuie diversificată.

Un contract furnizor-beneficiar se va încheia după analiza posibilităţilor de diversificare a producţiei aşa încât să satisfacă cererile contractuale. Dacă este necesar se vor face modificări de date (tehnologii P_j; modificări C; sau chiar introducerea în "fabricaţie" a unor noi tipuri de produse x_a; $a = n+1, ..., n+s$). În acest caz se va aplica un procedeu de reoptimizare (în noile condiţii nu se va relua problema de la început aşa cum se va vedea în cele ce urmează).

Exemplul 2.2.1. Având tehnologiile $P_j = (A_{ij})$ pentru a produce patru tipuri de repere $j = \overline{1,4}$; cantităţile de resurse B_i $(i = 1, 2)$ cât şi beneficiile unitare estimate $\left\{C_j \mid j = \overline{1,4}\right\}$ date după cum urmează (consumurile tehnologice sunt date la suta de repere):

	P_1	P_2	P_3	P_4	B
	2	1	1	1	4
	1	3	1	2	7
C (\$)	2000	3000	4000	3000	

să se obţină outputurile $\left\{x_j \mid j = \overline{1,4}\right\}$ aşa încât beneficiul total să fie "maxim", dar resursele (imputurile) să fie folosite integral. Mai mult, se dispune de capacităţile de producţie necesare.

Modelul matematic este:

$$\begin{array}{lllll} 2x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4 & = 4 \\ x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4 & = 7 \\ \hline 2x_1+ & 3x_2+ & 4x_3+ & 3x_4 & = z \text{ (max)} \end{array} ; \; x_i \geq 0$$

(s-a luat unitatea beneficiu 1000\$, pentru simplificare).

Anterior, prima fază de obţinere a unui program de bază $\underset{0}{X}^t = (1; 2; 0; 0)$ a fost parcursă considerând problema "mică" (înregistrare totală în "memorie") cât şi considerând-o "mare" (revizuire). S-au obţinut datele iniţiale

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \boxed{\frac{2}{5}} & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 2 \\ \hline 0 & 0 & \left(\frac{13}{5}\right) & \frac{4}{5} & -8 \end{array}$$

$$\begin{aligned} I^{(0)} &= \{1;2\}\,;\ K^{(0)} = \{3;4\}\,; \\ \underset{0}{\overline{M}}^{-1} &= \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \hline -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{array}\right). \end{aligned}$$

Cantităţile $C_b M^{-1} = \pi = (\pi_1, \pi_2) = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ se mai numesc şi multiplicatori simplex sau "preţuri umbră" **care au un rol deosebit în analiza economică.**

Cum se cere $z_{\max}$, având $\left\{\overline{C}_j^{(0)} > 0\right\} = \left\{\overline{C}_3^{(0)} = \frac{13}{5}; \overline{C}_4^{(0)} = \frac{4}{5}\right\}$; $j \in K^{(0)}$ rezultă că $\underset{0}{X}$ **nu este optimal.** Se continuă conform (2.2.2). Avem $\overline{C}_3^{(0)} = \frac{13}{5} = \max\left\{\overline{C}_j^{(0)} > 0\right\}$; $j \in K^{(0)}$ şi deci pivotul se va alege de pe coloana $P_3^{(0)}$, după regula "pivotului":

$$\min\left\{\begin{array}{c} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} \\ \frac{2}{\frac{1}{5}} \end{array}\right\} = \frac{1}{\boxed{\frac{2}{5}}};\ A_{23}^{(0)} = \boxed{\frac{2}{5}} \text{ pivot nou.}$$

$$\begin{array}{cccc|c} \frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline -\frac{13}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{29}{2} \end{array};$$

$I^{(1)} = \{3;2\}\,; K^{(1)} = \{1;4\}\,; \underset{1}{X}^t = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right); z_1 = \frac{29}{2}$;

$\overline{C}_1^{(1)} = -\frac{13}{2} < 0; \overline{C}_4^{(1)} = -\frac{1}{2} < 0$; STOP, $\underset{1}{X}$ optimal.

Analiza.

Deoarece $\overline{C}_j^{(1)} < 0$, $(\forall)\, j \in K^{(1)}$, programul de bază optimal $\underset{1}{X}$ este unic. Se vor produce numai repere de tipul $r = 2$; $r = 3$, în cantităţile $x_2 = \frac{3}{2}$; $x_3 = \frac{5}{2}$ şi se obţine un beneficiu maxim $z_1 = \frac{29}{2} \cdot 1000\$ = 14500\$$. Cum consumurile tehnologice sunt date la suta de repere, avem $x_2 = \frac{3}{2} \cdot 100 = 150$; $x_3 = \frac{5}{2} \cdot 100 = 250$. Nu avem o diversificare a producţiei. Orice alte cantităţi fabricate vor scădea beneficiul total. (Exerciţiu)

Rezolvarea prin revizuire (Algoritmul simplex revizuit).

1). **Dispunem de**

$$I^{(0)}=\{1;2\}\,;K^{(0)}=\{3;4\}\,;\underset{0}{\overline{M}^{-1}_{(1;2)}};\underset{0}{X^t}=(1;2;0;0)\,;$$

2). **Calculăm** $\overline{C}_j^{(0)}=\left(-C_b\underset{0}{M^{-1}};1\right)\left(\dfrac{P_j}{C_j}\right)$. Avem

$$\begin{aligned}\overline{C}_3^{(0)}&=\left(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\ 1\right)\begin{pmatrix}1\\1\\\hline 4\end{pmatrix}=\frac{13}{5};\\ \overline{C}_4^{(0)}&=\left(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\ 1\right)\begin{pmatrix}1\\2\\\hline 3\end{pmatrix}=\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

3). **Alegem** $\overline{C}_3^{(0)}=\max\limits_{j\in K^{(0)}}\left\{\overline{C}_j^{(0)}\right\}=\frac{13}{5}$.

4). Coloana pivot va fi $P_3^{(0)}$, care trebuie generată;

$$P_3^{(0)}=\underset{0}{M^{-1}}P_3=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{matrix}A_{13}^{(0)}\\A_{23}^{(0)}\end{matrix}.$$

5). **Avem**

$$\begin{aligned}P_3^{(0)}&=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix};B_3^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};\\ \min_{(+)}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{\frac{2}{5}}\\\frac{2}{\frac{1}{5}}\end{matrix}\right\}&=\frac{1}{\boxed{\frac{2}{5}}};\text{ pivot }A_{13}^{(0)}=\boxed{\tfrac{2}{5}}.\end{aligned}$$

Deci x_3 devine bazică în locul lui x_1.

6). Generăm $\overline{M}^{-1}_{(3;2)}$;

$$\left(\begin{array}{cc|c}\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&0\\-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&0\\\hline-\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}&1\end{array}\right)\left|\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}\\\hline\frac{13}{5}\end{pmatrix}\right.\rightarrow$$

$$\rightarrow\underset{\underset{(1)}{\overline{M}^{-1}_{(3;2)}}}{\left(\begin{array}{cc|c}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\hline-\frac{9}{2}&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)}\left|\begin{pmatrix}1\\0\\\hline 0\end{pmatrix}\right..$$

7). Generăm noul program de bază $\underset{1}{X}$.

$$\underset{(1)}{\overline{M}^{-1}_{(3;2)}} \begin{pmatrix} B \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \hline -\frac{29}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \underset{1}{x_3} \\ \underset{1}{x_2} \\ z_1 = \frac{29}{2} \end{array}$$

$$I^{(1)} = \{3;2\}\,;K^{(1)} = \{1;4\}\,.$$

8). Generăm $\left\{\overline{C}_j^{(1)}\right\}$ $j \in K^{(1)}$.

Avem:

$$\left(-\tfrac{9}{2}\,\tfrac{1}{2}\,1\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \hline 2 \end{pmatrix} = -\tfrac{13}{2} = \overline{C}_1^{(1)} < 0;$$

$$\left(-\tfrac{9}{2}\,\tfrac{1}{2}\,1\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \hline 3 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{2} = \overline{C}_4^{(1)} < 0. \text{ STOP.}$$

$\underset{1}{X}$ este program de bază optimal unic.

Pentru exemple mici, algoritmul simplex este nu de puţine ori organizat tabelar (are deci caracter didactic) în special de cei ce nu sunt matematicieni. Să prezentăm şi această variantă, numită şi **”variantă tabelară cu bază proprie”.** Se numeşte cu ”bază proprie” deoarece în prima fază se obţine un program de bază fără a introduce variabile auxiliare.

1). Fie $\underset{0}{X}^t = (1;2;0;0)$ un program de bază.

2). Se formează tabelul (T_0) până la primele linii duble, după care urmează tabelul (T_1) până la STOP.

			2	3	4	3	C
C_b^t	Baza	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	$(*)$
$\leftarrow 2$	P_1	1	1	0	$\boxed{\frac{2}{5}}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{\frac{2}{5}}(**)$
3	P_2	2	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{\frac{1}{5}}(**)$
	z	$z_0 = 8$	$z_1 = 2$	$z_2 = 3$	$z_3 = \frac{7}{5}$	$z_4 = \frac{11}{5}$	
$\overline{C}^{(0)}$	$C - z$		0	0	$\left(\frac{13}{5}\right)$	$\frac{4}{5}$	$\to (***)$
4	P_3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	
3	P_2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	
	z	$\frac{29}{2}$	$\frac{17}{2}$	3	4	$\frac{7}{2}$	
$\overline{C}^{(1)}$	$C - z$		$-\frac{13}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	STOP

Legendă:

$(*)$ Rapoartele $\frac{B_i}{A_{is}}$

$(**)$ reprezintă următorul raţionament $\Rightarrow \frac{1}{\boxed{\frac{2}{5}}} = \min\limits_{+} \left\{ \frac{B_i^{(0)}}{A_{ij}^{(0)}} \right\} \Rightarrow$pivot $\boxed{\frac{2}{5}} = A_{13}^{(0)}$.

$(***)$continuăm după regula de alegere a pivotului. Iese din bază P_1 şi intră P_3.

Observaţie 2.2.2 Pentru probleme de minimizare se procedează analog, dar după criteriile corespunzătoare. Pentru a nu schimba regulile, se poate scrie $z - C$ şi se operează ca şi la (max)**.**

Exemplul 2.2.2 În datele de la exemplul 2.2.1. practic se poate cere optimizarea cu o condiţie suplimentară: **"dacă este posibil să se obţină un beneficiu maxim cu economie la resursa $B_1 = 4$".** Modelul matematic este:

$$\begin{array}{lllll} 2x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4 & \le 4 \\ x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4 & = 7 \\ \hline 2x_1+ & 3x_2+ & 4x_3+ & 3x_4 & = z\ (\max) \end{array} ; x_i \ge 0;\ i = \overline{1,4}.$$

În prima relaţie s-a scris "$\le$" ci nu "$<$" (strict), **deoarece o afirmaţie "să se obţină o utilitate maximă cu o cheltuială minimă de mijloace"** nu are sens (nu este un principiu praxeologic. Se pune

"$\leq$" şi se aplică algoritmul de optimizare. Abia la pasul de optimizare se poate constata dacă "economia" de resurse este posibilă sau nu.

Rezolvare. Se introduce o variabilă "ecart" $y \geq 0$ (sau variabilă de compensare). Avem:

$$\begin{array}{lllll} 2x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+y_1 & =4 \\ x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4 & =7 \\ \hline 2x_1+ & 3x_2+ & 4x_3+ & 3x_4+0y_1 & =z \text{ (max)} \end{array}; \; x_i \geq 0;\; i=\overline{1,4},\; y \geq 0.$$

Se aplică algoritmul sub oricare variantă, dar se începe pivotarea cu coeficienţii ai variabilelor (x). Avem

$$\begin{array}{cccc|c|c|c} \frac{5}{3} & 0 & \boxed{\frac{2}{3}} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ \hline 1 & 0 & (3) & 1 & 0 & 1 & -7 \end{array} \backsim$$

$$\backsim \begin{array}{cccc|c|c|c} \frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \hline -\frac{13}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & 1 & -\frac{29}{2} \end{array} \quad \text{STOP.}$$

Deci y_1 este secundară la pasul de optim; $y_1 = 0$. Nu se poate face "economie" la prima resursă $B_1 = 4$, dacă se doreşte un beneficiu maxim.

Exemplul 2.2.3. Să se trateze problema dacă s-ar cere economie la a doua resursă $B_2 = 7$. Avem:

$$\begin{array}{lllll} 2x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4 & =4 \\ x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4+y_2 & \leq 7 \\ \hline 2x_1+ & 3x_2+ & 4x_3+ & 3x_4+0y_2 & =z \text{ (max)} \end{array};$$

$$\begin{cases} x_i \geq 0;\; i=\overline{1,4},\; y \geq 0, \\ \text{adică } x_1+3x_2+x_3+2x_4 \leq 7. \end{cases}$$

Avem:

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ \hline -6 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -16 \end{array} \; \text{STOP} \; \begin{cases} x_3 = 4; \\ x_1 = 0; \\ x_2 = 0; \\ x_4 = 0; \\ y_2 = 3; \\ z = 16. \end{cases}$$

Prin urmare, în acest caz se poate obţine un beneficiu maxim $z = 16$ şi cu economie $y_2 = 3$ la a doua resursă (se va consuma $7-3 = 4$ unităţi şi din a doua resursă). Aceasta nu înseamnă neapărat un avantaj, deoarece se cere numai fabricarea reperului de tipul $i = 3$ în cantitatea $x_3 = 4$ unităţi, ceea ce s-ar putea să nu convină practic. O analiză economică multiplă este necesară.

Rezolvarea prin revizuire. Avem, notând $y_2 = x_5$:

$$M_{(3;5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$-C_b M^{-1} = -(4;0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-4;0);$$

$$\overline{M}^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline -4 & 0 & 1 \end{array}\right); \overline{M}^{-1}\left(\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline -4 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 4 \\ 7 \\ \hline 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ \hline -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} x_3 = 4 \\ x_5 = 3 \\ z = 16 \end{array}; I^{(0)} = \{3;5\}; K^{(0)} = \{1;2;4\};$$

$$\overline{C}_1^{(0)} = (-4\ 0\ 1)\left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hline 2 \end{array}\right) = -6 < 0;$$

$$\overline{C}_4^{(0)} = (-4\ 0\ 1)\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hline 3 \end{array}\right) = -1 < 0.\ \text{STOP.}$$

Exemplul 2.2.4. Cu datele anterioare să se spună dacă este posibilă economia la ambele resurse.

Rezolvare. Vom scrie "$\leq$" pentru ambele resurse B_1, B_2 şi deci introducând variabilele de compensare x_5, x_6 putem scrie:

$$\left.\begin{array}{lllll} 2x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4 + x_5 & \leq 4 \\ x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4 + x_6 & \leq 7 \\ \hline 2x_1+ & 3x_2+ & 4x_3+ & 3x_4 & = z\ (\max) \end{array}\right.; x \geq 0.$$

Este evident că x_4, x_5 reprezintă economiile din resursele $B_1 = 4$, $B_2 = 7$. Dacă $x_4 > 0$, $x_5 > 0$, rezultă că optimal x_i $\left(i = \overline{1,4}\right)$ vor fi secundare ($x_i = 0$, $i = \overline{1,4}$). **Adică nu are sens "producţia".** Dacă se dispune de B_1; B_2 mai bine se vând resursele dacă suma obţinută este cel puţin

14,5 unităţi băneşti (14.500\$) **şi s-ar cere ca în fabricaţie să fie folosite cel puţin două linii tehnologice,** sau cel puţin 16 unităţi (16000\$) **dacă poate fi acceptată economic folosirea numai a unei linii tehnologice** (fabricarea numai a reperului $x_3 = 4$ unităţi).

Într-adevăr, avem:

$$M_{\underset{0}{(5;6)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \overline{M}_0^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$$I^{(0)} = \{5;6\}; K^{(0)} = \{1,2,3,4\};$$

$$\overline{C}_1^{(0)} = (0\ 0\ 1) \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hline 2 \end{array}\right) = 2; \overline{C}_2^{(0)} = 3; \overline{C}_3^{(0)} = 4; \overline{C}_4^{(0)} = 3;$$

$$\max_k \left\{\overline{C}_k^{(0)} > 0\right\} = 4 = \overline{C}_3^{(0)}.$$

Pivotul se alege de pe coloana P_4. Avem:

$$P_4^{(0)} = \overline{M}_0^{-1} P_4 = P_4 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \end{pmatrix}; \overline{M}_0^{-1} \left(\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 7 \\ \hline 0 \end{array}\right);$$

$$\min_{+} \left\{ \begin{array}{c} \frac{4}{1} \\ \frac{7}{1} \end{array} \right\} = \frac{4}{\boxed{1}}; A_{13}^{(0)} = \boxed{1};$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \\ 1 \\ \hline 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{M}_{\underset{(1)}{(3;5)}}^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline -4 & 0 & 1 \end{array}\right); \overline{M}_{\underset{(1)}{(3;5)}}^{-1} \left(\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ \hline -16 \end{array}\right) \begin{array}{c} x_3 \\ x_6 \end{array};$$

$$\overline{C}_1^{(1)} = (-4\ 0\ 1) \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hline 2 \end{array}\right) = -6 < 0; \overline{C}_2^{(1)} = -1 < 0; \overline{C}_4^{(1)} = -1 < 0;$$

$$\overline{C}_5^{(1)} = (-4\ 0\ 1) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right) = 0 \text{ STOP.}$$

$$\begin{cases} \underset{1}{x_1} = 0; \underset{1}{x_2} = 0; \underset{1}{x_3} = 4; \underset{1}{x_4} = 0; \underset{1}{x_5} = 0; \underset{1}{x_6} = 3; \\ z_{\max} = 16. \end{cases}$$

Nu se poate face economie la ambele resurse.

Exemplul 2.2.5 Problema (2.2.1) să se studieze ca problemă de minimizare.

Rezolvare. Pentru $\underset{0}{M} = M_{(1;2)}$ avem

$$I^{(0)} = \{1;2\}\,; K^0 = \{3;4\}\ \underset{0}{X}^t = (1;2;0;0)\,;$$
$$\overline{C}_3^{(0)} = \tfrac{13}{5} > 0; \overline{C}_4^{(0)} > 0. \text{ STOP;}$$
$$\underset{0}{X}^t \text{este program de bază optimal; } Z_{\min} = 8.$$

$\overline{C}_3^{(0)} = \frac{13}{5} > 0; \overline{C}_4^{(0)} > 0$. STOP; $\underset{0}{X}^t$este program de bază optimal; $Z_{\min} = 8$.

Analiză economică. În acest caz $C_1 = 2$; $C_2 = 3$; $C_3 = 4$; $C_4 = 3$ sunt costuri unitare de producţie ci nu cheltuieli unitare. Se minimizează costul total $z = \sum C_i X_i$ de producţie în care un coeficient C_i este format din **costuri constante** (numite din punct de vedere contabil, dar în realitate acestea sunt costuri fixate) **costuri variabile proporţional, costuri regresive şi costuri degresive.**

Prin urmare oţinerea lui $\{C_i\}$ este foarte dificilă şi cere un studiu deosebit, uneori, greu de realizat din cauza părţilor degresive şi regresive. Mai mult nu se optimizează funcţia "cheltuieli totale" $g(X) = CX + K$ (K cheltuieli totale constante care sunt estimate). Se minimizează $z = CX$, costul total de producţie şi se obţine $z_{\min}$. Apoi $\min g = z_{\min} + K$.

Astfel dacă $g(X) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_2 + 2$ (2000\$, cheltuieli fixe, estimate cel puţin pe perioada contractată), atunci se obţine $z_{\min} = 8$ şi cheltuiala totală minimă, $g = 8 + 2 = 10$.

Să considerăm o problemă care să pună în evidenţă un fapt important, uneori greu de acceptat **"contabiliceşte"; nu întotdeauna un produs x_i care aduce cel mai mare beneficiu unitar $C_i = \max\limits_r \{C_r\}$ este cel mai eficient şi deci ar trebui "fabricat'. Mai mult**, este posibil ca un produs x_k să aducă "pierderi' unitare (beneficiu unitar C_k negativ) şi totuşi el să fie eficient pe total, pe când cel cu beneficiu unitar maxim C_i, să nu fie eficient (produsul "deficitar" x_k să "intre" în programul optimal, pe când x_i să nu intre în acest program optimal). **Secţia "k" care produce "pierderi unitare C_k s-ar părea că nu este rentabilă" ci trebuie închisă.** Vom vedea că "nerentabilitatea" nu se poate întotdeauna, aprecia 'contabiliceşte" (prin aducerea de "pierderi" unitare).

Problema importului "nociv". Problema anterioară se poate pune pentru relaţia **"import- producţie"**.

Dacă substanţa S_i de import ce intră în componenţa unui aliaj sau a unui medicament aduce o pierdere unitară C_i, atunci se consideră că importul este nociv şi trebuie eliminat, după o gândire practică legată prea puternic de valoare, ceea ce nu corespunde totdeauna realităţii.

Exemplul 2.2.6 Pentru a fabrica un medicament care să fie concurenţial pe piaţă cu altul de acelaşi tip, trebuie ca el să conţină $B_1 = 5$ (U.I. unităţi internaţionale conţinut medicamentos de un anumit tip) şi $B_2 = 4$ (U.I. de alt tip). Fabrica are patru secţii S_1, S_2, S_3, S_4 care dispune fiecare de tehnologia sa, P_1, P_2, P_3, P_4 de obţinere a unui coeficient (A_{ik}) $(i = 1, 2)$ de U.I. de tipul B_1 respectiv B_2 dintr-o unitate de substanţă S_k prelucrată. Fie

	P_1	P_2	P_3	P_4	B
	$0,1$	$0,1$	$0,1$	$0,1$	5
	$0,2$	$0,05$	$0,2$	$0,1$	4
Beneficiul unitar \$	200	-200	1300	600	

$$\begin{aligned} 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 + 0,1x_4 &= 5 \\ 0,2x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 &= 4 \qquad ; x \geq 0 \\ 200x_1 - 200x_2 + 1300x_3 + 600x_4 &= z_{\max} \end{aligned}$$

Să admitem că S_2 este sustanţă de import care în laboratorul S_2 aduce o pierdere de $-200\$$ pe unitatea de substanţă prelucrată.

Să admitem că S_2 nu este rentabilă şi o eliminăm. Din problema anterioară, făcând $x_2 = 0$, sistemul care rămâne este compatibil matematic, dar nu admite program de bază, cum s-a văzut în capitolul din urmă. Adică nu admite program $X \geq 0$.

Deci eliminând S_2, producţia nu se poate realiza. Suntem deci obligaţi să facem importul S_2. În mod sigur x_2 va intra în programul optim (căci $x_2 = 0$ nu se poate). Adică importul nu este nociv.

A doua problemă de analiză ar consta în a spune că la prima vedere S_3 este cea mai **rentabilă şi deci trebuie importată în primul rând.** A ne orienta după " valoarea" C_3 ar fi o greşeală. **S-ar importa**

S_3 **şi aşa cum vom vedea, cheltuiala cu importul lui** S_3 **nu poate fi justificată. Ar aduce pierderi.**

Un practician fără o pregătire matematică aşa ar proceda; S_3 este cea mai rentabilă; S_2 este nocivă şi trebuie eliminat importul lui S_2.

Alegând unitatea bănească $u = 100\$$, putem scrie:

$$\begin{array}{cccc|c|c} 1 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 50 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 0 & 80 \\ \hline 2 & -2 & 13 & 6 & 1 & 0 \end{array} \backsim$$

$$\backsim \begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 50 \\ 3 & 0 & \boxed{3} & 1 & 0 & 30 \\ \hline 4 & 0 & 15 & 8 & 1 & 100 \end{array} \backsim$$

$$\backsim \begin{array}{cccc|c|c} 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 40 \\ 1 & 0 & 1 & \boxed{\frac{1}{3}} & 0 & 10 \\ \hline -11 & 0 & 0 & 3 & 1 & -50 \end{array} ; \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 40 \\ x_3 = 10 \\ z = 50 \end{array} \right. .$$

$\underset{0}{X}^t = (0, 40, 10, 0); I^{(0)} = \{2, 3\}; K^{(0)} = \{1, 4\}; Z_0 = 50;$

Cum există $\overline{C}_4^{(0)} = 3 > 0$, $\underset{0}{X}$ nu este optimal. (de max). Se continuă cu pivot de pe coloana $P_3^{(0)}$. Avem $\min\{\frac{40}{\frac{2}{3}}; \frac{10}{\frac{1}{3}}\} = \frac{10}{\frac{1}{3}}$; pivot, $A_{24}^{(0)} = \boxed{\frac{1}{3}}$. Rezultă

$$\begin{array}{cccc|c|c} -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 20 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 30 \\ \hline -40 & 0 & -9 & 0 & 1 & -140 \end{array} ; \text{ STOP}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{(1)}{x}{}_2 = 20 \\ \underset{(1)}{x}{}_3 = 30 \\ Z_1 = 140 \end{array} \right. ; I^{(1)} = \{2, 4\}; K^{(1)} = \{1, 3\}.$$

Aşadar în programul de bază optimal (care este unic deoarece $\overline{C}_1^{(1)} < 0; \overline{C}_4^{(1)} = -9 < 0$) nu intră x_3, adică S_3 **nu este rentabilă,** cum părea la prima vedere. **Importul său ar fi o greşeală. Iată că pregătirea matematică a corectat greşeala practicianului.**

Se cunoaşte un alt exemplu dintr-o fabrică de frigidere care a importat un lichid S_3 care prin amestec cu altele să fie un lichid de răcire necesar, dar cu beneficiu maxim. După import s-a constatat că nu era necesar pentru a înlocui unul S_2 ce părea cel mai puţin rentabil.

Asemenea probleme de tip "amestec" (concentrate, medicamente, diete, cifre octanice etc) necesită o analiză atentă a datelor şi a prelucrării matematice a lor în obţinerea modelului matematic corect.

Exerciţiul 2.2.1 Să se rezolve problema anterioară prin algoritmul simplex revizuit.

Să considerăm şi un caz în care cele mai "rentabile" să fie produsele cu beneficii **unitare** mai mari.

În exemplul 2.2.1 cele mai rentabile sunt x_2 cu $C_2 = 3$; x_4 cu $C_4 = 4$. Dar mai există şi x_4 cu $C_4 = C_2 = 3$ şi totuşi x_4 nu este rentabil deoarece (x_3, x_4) dau $z = 13 < z_{\max} = 14,5$. Rezultă că x_4 va fi rentabil dacă mărim C_4 în aşa fel încât $z_{(3;4)} \geq z_{(2;3)} = 14,5$. Pentru aceasta trebuie ca $\overline{C}_4^{(p)} \geq 0$, la pasul "$p$" la care pentru $C_4 = 3$ s-a obţinut optimul, $z_{\max} = 14,5$.

Cum la pasul p avem:

$$\begin{aligned} \overline{C}_k^{(p)} &= (-C_b^{(p)} \underset{(p)}{M}^{-1}, 1)(\tfrac{P_k}{C_k}) = \\ &= C_k - C_b^{(p)} \underset{(p)}{M}^{-1} P_k = C_k - C_b^{(p)} P_k^{(p)} = C_k - z_k^{(p)}, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

rezultă că modificând $C_k \to \widetilde{C_k}$, **nu trebuie să luăm problema de la început, ci este suficient să scriem la pasul** p**:**

$$\widetilde{\overline{C}_k^{(p)}} = \widetilde{C_k} - z_k^{(p)} \geq 0; \text{ dacă } k \in K^{(p)}, \tag{2.2.5}$$

sau

$$\widetilde{\overline{C}_k^{(p)}} = \widetilde{C_k} - \widetilde{z}_k \geq 0; \widetilde{z}_k = \widetilde{C}_b^{(p)} P_k^{(p)} \tag{2.2.6}$$

dacă $k \in I^{(p)}$. Adică este suficient să analizăm situaţia la pasul p, de optim.

a) **Dacă** $\widetilde{\overline{C}_k^{(p)}} = 0$ şi $k \in K^{(p)}$, atunci noul program de bază optim $\underset{(p+1)}{X}$, obţinut luând pivot de pe coloana k va avea $z_{p+1} = z_{(\max)}$.

b) **Dacă** $\widetilde{\overline{C}_k^{(p)}} > 0$, noul program de bază va fi "mai bun" ca $\underset{p}{X}$ şi se continuă optimizarea.

Se mai spune că s-a făcut o **reoptimizare** în noile condiţii, $C_k \to \widetilde{C_k}$.

c) Dacă $\widetilde{C_k}$ nu este fixat (bine determinat) ci poate avea loc după o anumită estimare (în urma unor studii de prognoză), depinzând de anumiţi parametrii, atunci situaţiile (2.2.5) şi (2.2.6) **trebuie discutate.** Se mai spune că s-a făcut o reoptimizare parametrică.

În cazul dat avem:

$$\widetilde{\widetilde{C}}_4 = \widetilde{C}_4 - \frac{7}{2}; (z_4 = \frac{7}{2}).$$

Dacă dorim ca $C_4 = 3 \to \widetilde{C}_4$ aşa încât programul optim nou să aibă $\widetilde{z} = z_{\max} = \frac{29}{2}$, vom cere ca $\widetilde{\widetilde{C}}_4 = 0$ (**adică problema să admită programe de bază optimale multiple la acelaşi nivel de optim total,** $z_{\max} = \frac{29}{2}$). **Rezultă** $\widetilde{C}_4 = \frac{7}{2}$.

Dacă se operează "tabelar", atunci în tabelul de optim (T_1) se scrie $\frac{7}{2} = \widetilde{C}_4$ şi $\widetilde{\widetilde{C}}_4 = \widetilde{C}_4 - z_4 = 0$ şi se continuă optimizarea luând ca pivot $\min\{\frac{5/2}{1/2}; \frac{3/2}{1/2}\} = \frac{3/2}{1/2}$; pivot $A_{24}^{(1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$. **Rezultă noul program de bază optimal** $\underset{2}{X} = (0; 0; 1; 3)$ **cu** $z_2 = \frac{14}{5} = z_1$.

Dacă s-ar modifica $C_2 \to \widetilde{C_2}$ sau (şi) $C_3 \to \widetilde{C_3}$, atunci în (T_1) s-ar recalcula noile valori $\widetilde{z}_k$ şi $\widetilde{z}_0$. Apoi calculând $\widetilde{\widetilde{C_k}}$, se va constata dacă se continuă optimizarea sau nu.

În cazul dat, având $\underset{1}{X}^t = (0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0)$; $z_1 = \frac{29}{2}$ şi $\underset{2}{X} = (0; 0; 1; 3)$; $z_1 = \frac{29}{2}$, se poate face o diversificare a producţiei optimale (la nivel de utilitate, $z = \frac{29}{2}$), considerând programele optimale date de o combinaţie liniară convexă a lui $\underset{1}{X}$ şi a lui $\underset{2}{X}$:

$$\{\overline{X}^t_{optimal} = a_1 \underset{1}{X}^t + a_2 \underset{2}{X}^t = (0; \frac{3}{2}a_1; \frac{5}{2}a_1 + a_2; 3a_2)\};$$

$a_1 \geq 0$; $a_2 \geq 0$; $a_1 + a_2 = 1$ (şi deci $a_2 = 1 - a_1$, cu $a_1 \in [0, 1]$). Pentru $a_1 \neq 0, 1; a_2 = 1 - a_1$ se obţin programe optimale cu trei tipuri de produse în fabricaţie ("diversificarea producţiei"). **Rămâne real nerentabil numai** x_1.

Exerciţiul 2.2.2 Care este schimbarea necesară $C_1 \to \widetilde{C_1}$ astfel ca x_1 să devină "rentabil" la acelaşi nivel de utilitate $z = \frac{29}{2}$?

Exerciţiul 2.2.3 Dacă $C_4 = 3 \to \widetilde{C}_4 > \frac{7}{2}$, se va obţine un program de bază nou, mai bun ca cele optimale $\underset{1}{X}$, $\underset{2}{X}$,corespunzătoare la $\widetilde{C}_4 = \frac{7}{2}$?

Exerciţiul 2.2.4 Dacă $C_4 = 3 \to \widetilde{C}_4 = 3 + \lambda$; $(\lambda \in R)$, să se discute reoptimizarea.

Rezolvare: **Rezultă** $\widetilde{\widetilde{C}}_4 = 3 + \lambda - \frac{7}{2} = \lambda - \frac{1}{2}$. Discuţie:

Dacă $\widetilde{\widetilde{C}}_4 = 0$,adică $\lambda = \frac{1}{2}$, adică $\widetilde{C}_4 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, se obţin programele optimale de mai înainte.

Dacă $\widetilde{\widetilde{C}}_4 > 0$, adică $\lambda > \frac{1}{2}$, adică $\widetilde{C}_4 > \frac{7}{2}$, atunci se continuă optimizarea la nivel superior lui $z = \frac{29}{2}$.

Alte exemple se pot vedea în ([St]).

S-a început cu reoptimizarea $C \to \widetilde{C}$ deoarece acestea sunt cele mai fluctuante, chiar pe perioade scurte, în economia liberă. Accentul trebuie pus pe analiza situaţiei existente în momentul schimbării. **Programul optimal $\underset{p}{X}$ cu care s-a operat până acum, mai rămâne optimal ? Dacă da, atunci există o diversificare a producţiei ? Dacă $\underset{p}{X}$ nu mai rămâne optimal, atunci rămâne numai program de bază şi deci se continuă optimizarea pornind cu $\underset{p}{X}$** şi nu reluând problema de la început, care ar duce la "cheltuială" de timp şi de bani suplimentară. **Uneori** în economia de piaţă timpul costă cel mai mult (rapiditatea ieşirii pe piaţa concurenţială este esenţială).

Schimbări de tehnologii $P_k \to \widetilde{P}_k$ nu se fac în general, pe perioade scurte.

Schimbări ale cantităţilor importurilor $B \to \widetilde{B}$ au loc pe perioade medii sau mari.

Introducerea în "fabricaţie" a unor noi tipuri de produse $\{x_a\}$ $(a = n+1, ..., n+s)$, necesită noi tehnologii P_{n+l} $(l = \overline{1, s})$ şi estimarea noilor coeficienţi C_{n+l} $(l = \overline{1, s})$.

Aceste schimbări vor fi tratate mai departe.

Capitolul 3. Dualitate

3.1. Problema dualităţii în programarea liniară.

Noţiunea de dualitate este o noţiune praxeologică fundamentală. Ea stă la baza oricăror afirmaţii corecte din orice domeniu. Prin urmare şi în domeniul modelării matematice, ea trebuie să fie corect precizată.

Definiţia 2.1.1 Fie dată problema de programare liniară sub forma:

$$\begin{array}{ll} AX \leq B & ;\ X \geq 0;\ X^t = (x_1 ... x_n);\ A_{(m,n)};\ B_{(m,1)} \\ CX = z_{(\max)} & \quad C = (C_1, ..., C_n) \end{array} \tag{3.1.1}$$

Să formăm problema:

$$\begin{array}{ll} A^t U \geq C^t & ;\ U \geq 0;\ U^t = (u_1 ... u_m) \\ B^t U = V_{(\min)} & \end{array} \tag{3.1.2}$$

Problemele (3.1.1) şi (3.1.2) se numesc duale simetrice.

Problema dată se va numi primală, iar cea formată ca mai sus se va numi duala celei date.

În clasa problemelor de tip "amestec" se dă (3.1.2) (sub forma cunoscută) şi se formează duala sa (3.1.1), care aşa cum s-a văzut se rezolvă mai rapid, având deja o matrice bazică $\underset{0}{M} = E$ (matricea unitate formată cu coeficienţii variabilelor de compensare y). Dar rezolvând (3.1.1) se pune problema dacă odată cu această rezolvare avem şi rezolvarea problemei date ?

Răspunsul este afirmativ.

Dar şi având (2.1.1) este necesar să formăm (3.1.2) pentru a avea o interpretare economică a "preţurilor umbră", fapt foarte important în analiza neoeconomică. **Un studiu special al lor le permite**

economiştilor să rezolve dilema: este mai convenabil să folosim resursele B pentru producţie sau să fie vândute ca materie primă ?

Pentru a reţine mai uşor trecerea de la (3.1.1) la (3.1.2) şi invers, nu ca formule, ci ca idee de simetrizare, să considerăm o problemă concretă.

Exemplul 3.1.1 Un aliaj se poate obţine prin prelucrarea a două materii S_1, S_2. El trebuie să conţină trei tipuri de unităţi de rezistenţă a aliajului în cel puţin cantităţile 3; 2; 1, pentru a fi eficient. După tehnologiile existente, P_1, P_2 din S_1, S_2 se pot obţine pe unitatea de material, cantităţile de unităţi de cele trei tipuri date în tabelul care urmează. Costurile prelucrării unei unităţi din S_1, S_2 sunt date tot în acest tabel . Se pune problema fabricării acestui aliaj cu cost total minim. Se obţine modelul matematic (S) (se va lua unitatea bănească egală cu 10$).

	u_1 S_1	u_2 S_2	$\geq$
x_1	2	1	3
x_2	1	1	2
x_3	1	2	1
Cost unitar $	30	20	$\leq$

$$(S) \quad \begin{array}{c} 2u_1 + u_2 \geq 3 \\ u_1 + u_2 \geq 2 \\ u_1 + 2u_2 \geq 1 \\ 3u_1 + 2u_2 = V_{(\min)} \end{array} ;$$

$$\begin{array}{l} u_1,\, u_2 \geq 0 \\ (m = 3;\, n = 2) \end{array} .$$

Pentru a forma duala simetrică, este suficient să asociem pe fiecare linie din tabel o variabilă x şi să scriem:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = z_{(\max)} \end{cases} ; x \geq 0.$$

Pentru uşurinţă să rezolvăm problema în x, sub formă tabelară:

			3	2	1	0	0	
C_b^t	Baza	P_0	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$(*)$
0	y_1	3	$\boxed{2}$	1	1	1	0	$\frac{3}{2}$ $(**)$
0	y_2	2	1	1	2	0	1	$\frac{2}{1}$ $(**)$
	z	0	0	0	0	0	0	
$\overline{C}^{(0)}$	$C-z$		3	2	1	0	0	$\rightarrow$
3	x_1	$3/2$	1	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$ $(***)$
0	y_2	$1/2$	0	$\boxed{1/2}$	$3/2$	$-1/2$	1	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$ $(***)$
	z	$9/2$	3	$3/2$	$3/2$	$3/2$	0	
$\overline{C}^{(1)}$	$C-z$		0	$(1/2)$	$-1/2$	$-3/2$	0	$\rightarrow$
3	x_1	1	1	0	-1	1	-1	
2	x_2	1	0	1	3	-1	2	
	z	$\boxed{5}$	3	2	3	1	1	$\rightarrow z_{(\max)} = 5$
$\overline{C}^{(2)}$	$C-z$		0	0	2	-1	-1	STOP

Legendă:

$(*)$-variabile de compensare;

$(**)$- $\min\limits_{+}\left\{\frac{3}{2}; \frac{2}{1}\right\} = \frac{3}{\boxed{2}}$;

$(***)$- $\min\{\frac{3/2}{1/2}; \frac{1/2}{1/2}\} = \frac{\frac{1}{2}}{\boxed{\frac{1}{2}}}$;

La intersecţia coloanelor variabilelor de compensare y_1, y_2 cu linia z, se află ($z_{y_1} = 1$; $z_{y_2} = 1$). Se alege **programul problemei date:** $u_1 = z_{y_1} = 1$; $u_2 = z_{y_2} = 1$.

Pentru $\underset{0}{U}^t = (1;1)$ **avem** $\underset{0}{V} = 5 = z_{\max}$.

Dacă s-ar rezolva problema în U, ar trebui mai întâi să introducem variabilele de compensare:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2u_1 & + & u_2 & - & t_1 & & & & & = & 3 \\ u_1 & + & u_2 & & & - & t_2 & & & = & 2 \\ u_1 & + & 2u_2 & & & & & - & t_3 & = & 1 \\ \hline 3u_1 & + & 2u_2 & & & & & & & = & V_{(\min)} \end{array}\right. ; u \geq 0; t \geq 0.$$

Prima fază de obţinere a unui program de bază trebuie efectuată.

Apoi se trece la aplicarea algoritmului simplex pentru o problemă de minimizare. Se va obţine $U^t = (1,1)$; $V_{\min} = 5$.

Prin urmare, rezolvarea optimală a problemei date se citeşte pe linia z **din tabelul optimal al dualei (în** x**) ;** $z_{\max} = z_0 = 5 = V_{\min}$**;** $u_1 = z_{y_1} = 1$**;** $u_2 = z_{y_2} = 1$**.**

Dacă problema în x se va rezolva prin algoritmul simplex revizuit, va rezulta:

$$\underset{(2)}{\overline{M}}{}^{-1}_{(1;2)} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 \end{array}\right); \overline{M}^{-1}_{(1;2)} \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline -5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ z_{(\max)} = 5 \end{array};$$

$\overline{C}_3^{(2)} = -2$; $\overline{C}_{y_1}^{(2)} = -1$; $\overline{C}_{y_2}^{(2)} = -1$ STOP.

$z_{y_1} = C_b^{(2)} \underset{(2)}{M}{}^{-1} P_{y_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$; $z_{y_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$.

Se aleg: $u_1 = z_{y_1} = 1$; $u_2 = z_{y_2} = 1$; $V_{\min} = z_{\max} = 5$.

Dar

$$z_{y_1} = \pi P_{y_1}; z_{y_2} = \pi P_{y_2}; V_{\min} = z_{\max} = (-\pi; 1)\left(\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array}\right) = (-C_b^{(2)} \underset{(2)}{M}{}^{-1}, 1)\left(\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array}\right).$$

Prin urmare, U^t optim este dat de multiplicatorii simplex $\pi = (\pi_1 = 1; \pi_2 = 1)$ **corespunzători pasului de optim al problemei duale de (max).**

Avem în acest fel , modul de obţinere a rezolvării optimale a problemei date, prin rezolvarea problemei duale, fie că aceasta este **rezolvată "tabelar" sau prin algoritmul simplex revizuit.** Avem în acelaşi timp **o interpretare a multiplicatorilor simplex** π **la pasul de optim, ca valori ale programului optim pentru problema dată** $\pi_i = u_i$. Cum $V_{\min} = b_1 u_1 + b_2 u_2 = b_1 \pi_1 + b_2 \pi_2 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$, dacă interpretăm termeni liberi B din (3.1.1) ca "resurse", atunci $u_1 = \pi_1$**;** $u_2 = \pi_2$ **pot fi interpretate ca "preţuri" unitare ale resurselor** B_1**,** B_2**, dacă "produsele"** x **se fabrică.**

Din aceste motive π se mai numesc şi **"preţuri umbră"** (ele nu sunt preţuri reale pe piaţă ale resurselor).

Evident, cele anterior precizate vor fi adevărate dacă se vor demonstra teoretic şi nu pe un exemplu.

S-a procedat ca mai înainte (pe un exemplu), deoarece se doreşte practic, să se reţină uşor modul de rezolvare şi nu formulele ce apar în demonstraţia teoretică generală.

Proprietăţi generale. Să pornim de la (3.1.1)-(3.1.2).

Propoziţia 3.1.1. *Dacă* $(\overline{X}, \overline{U})$ *este o pereche de programe pentru (3.1.1)-(3.1.2), atunci* $\overline{Z} = C\overline{X} \leq \overline{V} = B^t\overline{U}$.

Demonstraţie: Putem scrie:

$\overline{U}^t A\overline{X} \leq \overline{U}^t B = B^t\overline{U} = \overline{V}$

$\overline{X}^t A^t\overline{U} \geq \overline{X}^t C^t = C\overline{X} = \overline{Z}$

Dar $\overline{U}^t A\overline{X} = (\overline{U}^t A\overline{X})^t = \overline{X}^t A\overline{U}$ şi deci $\overline{Z} \leq \overline{V}$.

Să notăm $y_a = x_{n+a}$ (variabilele de compensare din (3.1.1) ($a = \overline{1,m}$)). Fie $\underset{p}{X}$ un program de bază optimal ($\underset{p}{X}$ poate conţine şi x_{n+a} bazice). Avem:

$$\overline{C}_k^{(p)} \leq 0 \Leftrightarrow C_k - C_b^{(p)}\underset{(p)}{M}^{-1}P_k \leq 0;$$
$$k \leq n;\ 0 - C_b^{(p)}\underset{(p)}{M}^{-1} \leq 0, \text{ dacă } k > n.$$

Să notăm $\underset{(p)}{U}^t = C_b^{(p)}\underset{(p)}{M}^{-1}$. Rezultă $\underset{(p)}{U} \geq 0$, $(A^t\underset{(p)}{U})^t = C_b^{(p)}\underset{(p)}{M}^{-1}A = \{C_b^{(p)}M^{-1}P_k\}$. Dar $C_b^{(p)}M^{-1}P_k \geq C_k$ şi deci $A^t\underset{p}{U} \geq C^t$. Adică $\underset{(p)}{U}$ este un program pentru duala (2.1.2).

Dar

$$\underset{(p)}{V} = B^t\underset{(p)}{U} = \underset{(p)}{U}^t B = C_b^{(p)}\underset{(p)}{M}^{-1}B = z_{(p)} = z_{\max}.$$

De aici şi din propoziţia (3.1.1), cum z, V **sunt funcţii liniare continue, rezultă că** $V_{\min} = z_{\max}$**, iar** $\underset{(p)}{U}^t$ **fiind**

$$C_b^{(p)}M^{-1} = [z_k]\ (k > n),$$

se citeşte conform regulilor mai înainte precizate, în rezolvarea lui (3.1.1) şi este program optimal al problemei (3.1.2). Rezultă:

Propoziţia 3.1.2. *Dacă (3.1.1) are un program de bază optimal, atunci (3.1.2) are un program optimal ale cărui componente sunt multiplicatorii simplex corespunzători pasului de optim pentru (3.1.1).*

Deşi practic ne interesează cazul în care (3.1.1) are optim finit, totuşi, matematic, să considerăm şi cazul în care $z \to \infty$. În acest caz rezultă că (3.1.2) nu are program Schimbând rolurile (datorită simetriei) se poate spune că dacă $V \to -\infty$, atunci (3.1.1) nu are programe.

Observaţie. În cazul dualelor simetrice "preţurile umbră" ale problemei (3.1.1) fiind componente ale programului dual (3.2.2) sunt nenegative.

Problema dualităţii se poate pune şi în cazul că "m" este mare şi n nu este mare. Atunci, prin dualitate m devine număr de variabile, iar n număr de restricţii în duală. S-a ajuns la cazul aplicării algoritmului simplex revizuit pentru duală. Din aceleaşi motive (număr m de restricţii mare, este indicat să se scrie spre rezolvare duala problemei date, chiar dacă aceasta este sub formă standard-restricţii efective). Este clar că trebuie în acest caz să vedem ce se înţelege prin duala sa.

Fie dar

$$\frac{\begin{array}{ll}\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}x_j & = B_i\end{array}}{\begin{array}{ll}\sum\limits_{j=1}^{n} C_j x_j & = z\,(\max)\end{array}}; i = \overline{1,m};\ rangA = m;\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1,n}. \quad (\mathrm{a}_1)$$

Pentru fiecare "i" $\left(i = \overline{1,m}\right)$ putem scrie:

$$\frac{\begin{array}{c}t_i \\ u_j\end{array}\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \leq B_i \\ -\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij} \leq -B_i\end{array}\right.}{\sum\limits_{j=1}^{n} C_j x_j = z\,(\max)} \quad (\mathrm{a}_2)$$

Se formează duala simetrică, asociind fiecărui "i" o variabilă $t_i \geq 0$; $v_i \geq 0$ şi se obţine:

$$\frac{\begin{array}{ll}\sum\limits_{i=1}^{m} A_{ij}\left(t_i - v_i\right) & \geq C_j\end{array}}{\begin{array}{ll}\sum\limits_{i=1}^{m} B_i\left(t_i - v_i\right) & = V\,(\min)\end{array}}; j = \overline{1,n};\ t_i \geq 0;\ v_i \geq 0;\ i = \overline{1,m}. \quad (\mathrm{b}_1)$$

Notând $(t_i - v_i) = u_i$, rezultă:

$$\frac{\begin{array}{ll}\sum\limits_{i=1}^{m} A_{ij}u_i & \geq C_j\end{array}}{\begin{array}{ll}\sum\limits_{i=1}^{m} B_i u_i & = V\,(\min)\end{array}}; j = \overline{1,n}, \text{ sau} \qquad (\mathrm{b}_2)$$

$$\frac{A^tU \quad \geq C^t}{B^tU \quad = V\,(\min)}.$$

Dar $t_i - v_i = u_i$ nu mai are restricţie de semn. Aşadar duala problemei (a) se scrie prin (b) ca şi în cazul simetric dar fără restricţie de semn asupra lui u. Adică u, poate avea şi componente negative. Ca şi mai înainte se arată că dacă, $\overline{X}$, $\overline{Z}$ sunt date de optim ($\overline{Z}$ finită) pentru (a), atunci din condiţia de optim, $C_k - \pi P_k \leq 0$ ($\pi = C_b M^{-1}$, la pasul de optim rezultă că $\overline{U}^t = \pi$ satisface, $A^t\overline{U} \geq C^t$ şi $B^t\overline{U} = \overline{V} = \overline{Z}$, dar $U^t = \pi = (\pi_1, ..., \pi_m)$ poate avea valori $\pi_i < 0$ respectiv, $\pi_k > 0$ sau (şi) $\pi_k = 0$. Aşadar în cazul unei probleme de forma (a), "preţurile umbră" pot fi şi negative.

Dacă în (a), unele restricţii sunt cu $\leq$, atunci variabilele duale corespunzătoare vor avea condiţia de nenegativitate. (Exerciţiu).

S-a ales (a) tocmai pentru a pune în evidenţă faptul că dacă se cere 'consumarea integrală" a resurselor B, atunci "preţurile umbră pot fi şi negative". În analiza neoeconomică **pe baza acestor situaţii se poate face un studiu mai complet al resurselor** (folosirea lor în "fabricaţie" proprie sau vânzarea lor sau a unei părţi din ele, dacă sunt substituibile).

Exerciţiul 1. Dacă se dă (b_2), notând $u_i = t_i - v_i$; $t_i \geq 0$; $v_i \geq 0$, se obţine (b_1). Formând duala simetrică să se arate că se obţine (a_1).

Exemplul 3.1.2. Avem:

$$\begin{array}{c|l} x_1 & 2u_1 + u_2 \geq 2 \\ x_2 & u_1 + 3u_2 \geq 3 \\ x_3 & u_1 + u_2 \geq 4 \\ x_4 & u_1 + 2u_2 \geq 3 \\ \hline & 4u_1 + 7u_2 = V\,(\min) \end{array};$$

şi duala

$$\begin{array}{c|l} u_1 & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ u_2 & x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ \hline & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = z\,(\max) \end{array}; i = \overline{1,4}.$$

Problema duală a fost rezolvată optimal cu datele $\overline{X}^t = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$; $I = \{3, 2\}$; $K = \{1, 4\}$; $z_{\max} = \frac{29}{2}$; $\overline{M}^{-1}_{(3;2)} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$ şi deci

$\pi_1 = \frac{9}{2}$; $\pi_2 = -\frac{1}{2}$; $\pi = \left(\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Rezultă rezolvarea optimală $\overline{u}_1 = \frac{9}{2}$; $\overline{u}_2 = -\frac{1}{2}$; $V_{\min} = z_{\max} = \frac{29}{2}$.

Dacă s-ar rezolva direct problema dată ar trebui să scriem $u_i = t_i - v_i$, $(i = 1, 2)$, $t_i \geq 0$; $v_i \geq 0$ apoi să introducem variabile de compensare y_1, y_2 $(y \geq 0)$şi apoi să aplicăm algoritmul simplex. Iniţial am avea patru restricţii efective şi şase variabile $(t_1 t_2;\ v_1 v_2;\ y_1 y_2)$. Memoria de calcul s-ar mări.

Exerciţiul 2. Dacă problema anterioară ar avea o restricţie $u_1 \geq 0$, cine este duala şi cine sunt π_1; π_2 ? Dar dacă $u_2 \geq 0$? Dar dacă $u_1 \geq 0$; $u_2 \geq 0$?

Exerciţiul 3. Dacă în a doua problemă (în x), anterioară am avea prima restricţie cu $(\leq)$ atunci să se scrie duala sa şi rezolvarea optimală. Analog dacă a doua restricţie ar fi $(\leq)$. Discuţie.

Exerciţiul 4. Dacă în a doua problemă, dată anterior, avem x_1, fără restricţie de semn, să se rezolve problema prin algoritmul simplex. Apoi să se scrie duala sa.

Exerciţiul 5. Dacă în problema dată am avea $u_1 + 3u_2 = 3$, să se scrie duala sa şi rezolvarea. Analog dacă $2u_1 + u_2 = 2$ sau dacă $u_1 + 2u_2 = 3$. **Analiză.**

Exerciţiul 6. Dacă avem problema dată sub forma:

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \quad \geq B_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \quad = z\,(\min)}; \; i = \overline{1, m};\; x_j \geq 0;\; j = \overline{1, n},$$

atunci să se scrie duala sa. Concluzii directe.

Exemplul 3.1.3. Problema

$$\begin{array}{r|l} u_1 & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ u_2 & x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ \hline & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = z\,(\min) \end{array}; \; x_j \geq 0 \; \left(j = \overline{1, 4}\right)$$

are duala

$$\begin{array}{r|l} x_1 & 2u_1 + u_2 \leq 2 \\ x_2 & u_1 + 3u_2 \leq 3 \\ x_3 & u_1 + u_2 \leq 4 \\ x_4 & u_1 + 2u_2 \leq 3 \\ \hline & 4u_1 + 7u_2 = U\,(\max) \end{array}$$

şi reciproc.

Programul optimal pentru problema dată: $\overline{X}^t = (1;2;0;0)$; $I = \{1,2\}$; $K = \{3,4\}$; $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$; $C_b M^{-1} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \pi$. Duala are programul optimal: $\overline{u}_1 = \pi_1 = \frac{3}{5}$; $\overline{u}_2 = \pi_2 = \frac{4}{5}$, care verifică primele două condiţii, efectiv (ca egalităţi).

Exemplul 3.1.4. În exemplul anterior, avem

$$\begin{cases} \frac{3}{5}(2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 - 4) = 0, \\ \frac{4}{5}(1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 - 7) = 0, \end{cases} \overline{U}^t \left(A\overline{X} - B\right) = 0,$$

$$\begin{cases} 1\left(2\cdot\frac{3}{5} + 1\cdot\frac{4}{5} - 2\right) = 0, \\ 2\left(1\cdot\frac{3}{5} + 3\cdot\frac{4}{5} - 3\right) = 0, \\ 0\left(1\cdot\frac{3}{5} + 1\cdot\frac{4}{5} - 4\right) = 0, \\ 0\left(1\cdot\frac{5}{3} + 2\cdot\frac{4}{5} - 3\right) = 0, \end{cases} \overline{X}^t \left(A^t\overline{U} - C^t\right) = 0.$$

Exemplul 3.1.5. În exemplul 3.1.1. avem

$$\begin{cases} 0\left(2\cdot\frac{9}{2} + 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\right) = 0, \\ \frac{3}{2}\left(1\cdot\frac{9}{2} + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 3\right) = 0, \\ \frac{5}{2}\left(1\cdot\frac{9}{2} + 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\right) = 0, \\ 0\left(1\cdot\frac{9}{2} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 3\right) = 0, \end{cases} \overline{X}^t \left(A^t\overline{U} - C^t\right) = 0,$$

$$\begin{cases} \frac{9}{2}\left(2\cdot 0 + 1\cdot\frac{3}{2} + 1\cdot\frac{5}{2} - 4\right) = 0, \\ -\frac{1}{2}\left(1\cdot 0 + 3\cdot\frac{3}{2} + 1\cdot\frac{5}{2} - 7\right) = 0, \end{cases} \overline{U}^t \left(A\overline{X} - B\right) = 0.$$

Exemplul 3.1.6. În exemplul (3.1.1.), cu duale simetrice avem:

$$\begin{cases} 1.\,(2.1 + 1 - 3) = 0, \\ 1.\,(1 + 1 - 2) = 0, \\ 0.\,(1 + 2.1 - 1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1.\,(2.1 + 1 + 0 - 3) = 0, \\ 1.\,(1 + 1 + 2.0 - 2) = 0. \end{cases}$$

Din aceste exemple rezultă: **orice valoare optimală** $\overline{x}_j$ înmulţită cu restricţia dualei calculată în $\overline{u}$ **optimal** $\overline{x_j}\left(\sum\limits_i A_{ji}\overline{u}_i - C_i\right)$ **este egală cu** 0 **şi reciproc:** $\overline{u}_i\left(\sum\limits_j A_{ij}\overline{x}_j - B_i\right) = 0$. **Matriceal aceste proprietăţi se se scriu:**

(0) $\overline{X}^t.\left(A^t\overline{U}-\overline{C}^t\right)=0;\overline{U}^t.\left(A\overline{X}-B\right)=0.$

Consecinţă Dacă o valoare optimală a uneia dintre probleme este diferită de zero, atunci restricţia corespunzătoare din duală, calculată în soluţia optimă a sa, trebuie să fie nulă.

Exemplul 3.1.7. În exemplul 3.1.3, avem $\overline{x}_1=1$; $\overline{x}_2=2$; $\overline{x}_3=0$; $\overline{x}_4=0$. Deci primele două restricţii din duală trebuie să fie egalităţi;

$2\overline{u}_1+\overline{u}_2=2$; $\overline{u}_1+3\overline{u}_2=3$. Se obţine $\overline{u}_1=\frac{3}{5}$; $\overline{u}_2=\frac{4}{5}$ care formează soluţia optimă a dualei.

Exemplul 3.1.8. Fie dată prima problemă din exemplul 3.1.3. şi $\overline{X}^t=(0;0;1;3)$ un program al său. Formând duala să se vadă dacă $\overline{X}$ este optimal.

Rezolvare. Trebuie să avem: $u_1+u_2=4$; $u_1+2u_2=3$ şi dacă $u_1=5$; $u_2=-1$, care nu verifică restul restricţiilor (prima restricţie $2u_1+u_2=10-1=9$). Prin urmare $\overline{x}$ nu este optimal.

Exemplul 3.1.9. În exemplul 3.1.1. pentru $\overline{x}=(0;0;1;3)$ avem: $\overline{u}_1=5$; $\overline{u}_2=-1$, care nu verifică restul restricţiilor $\overline{u}_1+3\overline{u}_2=5-3=2$ care nu este ≥ 3.

Există şi această posibilitate de a verifica dacă un program cunoscut al problemei date; $AX=B$; $X\geq 0$ $\max(\min)\,z$, este optimal sau nu (în special dacă m este ”mic”).

Deoarece concluziile anterioare au fost obţinute din exemple trebuie demonstrate în general. **Adică avem** (0)**, care se mai numeşte şi ’teorema ecarturilor complementare’.**

Teorema ecarturilor complementare.

Fie $\overline{X}$, $\overline{U}$ soluţiile optimale ale celor două probleme duale. Atunci au loc relaţiile (0) **şi reciproc.**

Demonstraţie. Se va face demonstraţia pentru cazul a două probleme duale simetrice, deoarece oricare ar fi două probleme duale, acestea se pot scrie ca duale simetrice, eventual prin mărirea numărului de variabile, cum s-a văzut. Fie dar în condiţiile anterioare:

$$\begin{array}{ll} AX & \leq B;\ X\geq 0 \\ \hline CX & =Z\,(\max) \\ A^tU & \geq C^t \\ \hline B^tU & =V\,(\min) \end{array} \qquad (**)$$

şi $\overline{X}$, $\overline{U}$ două programe duale, optimale. Avem

$$\begin{aligned}
B^t\overline{U} &= C\overline{X}; \\
\overline{U}^t A\overline{X} &\le \overline{U}^t B = B^t\overline{U} = V_{\min}; \overline{X}^t A^t\overline{U} \ge \overline{X}^t C^t = C\overline{X} = Z_{\max} \\
\overline{U}^t\left(A\overline{X} - B\right) &\le 0; \overline{X}^t A^t\overline{U} \ge \overline{U}^t B; \overline{U}^t A\overline{X} \ge \overline{U}^t B; \overline{U}^t\left(A\overline{X} - B\right) \ge 0.
\end{aligned}$$

Rezultă $\overline{U}^t\left(A\overline{X} - B\right) = 0$. Analog rezultă $\overline{X}^t\left(A^tU - C^t\right) = 0$.

Reciproc. Să admitem că $\overline{X}$, este un program al primei probleme şi $\overline{U}$ un program al dualei pentru care $U^t\left(A\overline{X} - B\right) = 0; \overline{X}^t\left(A^t\overline{U} - C^t\right) = 0$.

Cum $U^tA\overline{X} = \overline{X}^t A^t\overline{U}$ rezultă $\overline{U}^t B = C\overline{X}$ şi deci $\overline{X}$, $\overline{U}$ sunt programe optimale.

Analiză economică. Fie C_j beneficiul unitar al unei unităţi din ”ieşirea” (output) x_j şi A_{ij}, consumul unitar din resursa B_i pentru a obţine un output unitar x_j. Dacă $\overline{u}_i \in \overline{U}$, optimal pentru duală, cum $\overline{u}_i\left(\sum A_{ij}\overline{x}_j - B_i = 0\right)$, dacă $\overline{u}_i > 0$ atunci $\sum\limits_j A_{ij}\overline{x}_j = B_i$. Dacă $\overline{u}_i = 0$, atunci $\sum\limits_j A_{ij}\overline{x}_j < B_i$ şi reciproc. Deci dacă resursa B_i este excedentară, atunci ”preţul umbră” u_i asociat acestei resurse este nul ($\overline{u}_i = 0$). Se mai spune că această resursă nu are ”valoare”, fiind excedentară. Este posibilă scăderea intrării (outputului) B_i cu cel mult $\left(\sum A_{ij}\overline{x}_j - B_i\right)$, fără ca optimul $\overline{Z}_{\max}$ să se schimbe (cum $\overline{Z} = C\overline{X} = B^t\overline{U}$ rezultă $\frac{\partial Z}{\partial B_i} = \overline{u}_i$ şi deci dacă $\overline{u}_i = 0$ rezultă $\frac{\partial Z}{\partial B_i} = 0$, adică o ”creştere marginală” sau o variaţie suficient de mică a resursei ”B_i” nu modifică optimul Z). Din duala în U (λx), rezultă $\sum\limits_i A_{ij}u_i \ge C_i$, adică ”cheltuiala umbră” $\sum\limits_i A_{ij}u_i$ la nivelul u_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$, al ”preţurilor” umbră asociate resurselor, nu poate fi mai mică decât beneficiul unitar C_j al ieşirii x_j şi deci trebuie minimizată valoarea ”umbră” totală V a resurselor. O altă interpretare mai pe larg se poate vedea în capitolul 3, paragraful 5.

3.2. Algoritmul simplex dual.

Având teoria dualităţii se poate da un algoritm care să organizeze şi prima fază de "căutare" a unui program de bază $\underset{0}{X}$, dacă se obţine o formă canonică în care $\overline{C}_k^{(0)} \geq 0$ $(\forall)\, k \in K_1^{(0)}$, dar $\underset{0}{X} = \underset{0}{M}^{-1}B$, nu este nenegativ, adică există cel puţin un $\underset{0}{x_{\overline{r}}} < 0$ $\left(\overline{r} \in I^{(0)}\right)$. În acest caz ar trebui continuată pivotarea liberă (sau schimbarea matricei bazice $\underset{0}{M}$) până se obţine un program de bază $\underset{0}{\overline{X}}$ (dacă există), pentru a putea trece la faza a doua (optimizare).

Să admitem că avem situaţia anterioară pentru o problemă de minimizare. În loc să pivotăm liber, se va proceda astfel **(Algoritmul simplex dual).**

1) Se alege un $\underset{0}{x_{\overline{r}}} < 0$ $\left(\overline{r} \in I^{(0)}\right)$, cel mai mic.

Pivotul se va alege de pe linia lui $x_{\overline{r}}$, adică dintre $A_{rk}^{(0)}$ $\left(k \in K_1^{(0)}\right)$.

2) Se împart $\overline{C}_k^{(0)}$ la $A_{rk}^{(0)}$ $\left(k \in K_1^{(0)}\right)$ şi se alege

$$\max_{\substack{k \in K_1^{(0)} \\ A_{rk}^{(0)} < 0}} \left\{ \frac{\overline{C}_k^{(0)}}{A_{rk}^{(0)}} \right\} = \frac{\overline{C}_j^{(0)}}{A_{rj}^{(0)}}. \tag{3.2.1}$$

3) **Se alege ca pivot $\boxed{A_{rj}^{(0)}}$.**

Evident $\underset{1}{x_{\overline{r}}} = \frac{\underset{0}{x_{\overline{r}}}}{A_{rj}^{(0)}} > 0$, $\overline{C}_j^{(1)} = 0$; $\underset{k \neq j}{\overline{C}_k^{(1)}} = \overline{C}_k^{(0)} - \frac{A_{rk}^{(0)}}{A_{rj}^{(0)}} \overline{C}_j^{(0)} \geq 0$ $\left(k \in K_1^{(0)}\right)$.

Dacă $A_{rk}^{(0)} \geq 0$, atunci $\overline{C}_k^{(1)} \geq \overline{C}_k^{(0)} \geq 0$. Adică $\overline{C}_k^{(1)} \geq 0$; $(\forall)\, k$ (condiţiile de nenegativitate se păstrează).

Se continuă algoritmul revenind la (1) cu $\left\{\underset{1}{x_{\overline{r}}}\right\}$; $A^{(1)}$; $K_1^{(1)}$; $\overline{C}^{(1)}$.

Dacă la un pas $(p \geq 0)$ pe linia lui $\underset{p}{x_{\overline{r}}} < 0$ $\left(\overline{r} \in I^{(p)}\right)$ selectat avem $A_{rj}^{(p)} > 0$ $(\forall)\, j$ atunci STOP; **nu există programe**, căci

$$\underset{p+1}{x_{\overline{r}}} = \underset{p}{x_{\overline{r}}} - A_{rj}^{(p)} x_j < 0$$

pentru orice $x_j > 0$.

Exerciţiul 3.2.1. În cazul unei probleme de maximizare, dacă la forma canonică din prima fază avem $\overline{C}_k^{(0)} \leq 0$; $(\forall)\, k$ şi există $\underset{0}{x_{\overline{r}}} < 0$ $\left(\overline{r} \in I^{(0)}\right)$, atunci să se reformuleze algoritmul anterior.

Să se arate că aplicând algoritmul simplex problemei duale, se obţine algoritmul simplex dual.

Uneori $\underset{0}{X}$ pentru care există $\underset{0}{x_{\overline{r}}} < 0$, $\overline{r} \in I^{(0)}$ şi $\overline{C}_k^{(0)} \geq 0$; $(\forall)\, k$ (respectiv $\overline{C}_k^{(0)} \leq 0$; $(\forall)\, k$ în cazul maximizării) se mai numeşte şi soluţia dual admisibilă.

Exemplul 3.2.1. Fie problema

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ \hline 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = z\,(\max) \end{array} ;\ x_i \geq 0; i = \overline{1,4}.$$

Faza 1. Pivotăm cu $A_{11} = 2$ şi apoi cu A_{23}, obţinem

$$\begin{array}{cccc|c|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{array} \backsim$$

$$\backsim \begin{array}{cccc|c|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{3}{2} & 0 & 5 \\ \hline 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & -4 \end{array} \backsim$$

$$\backsim \begin{array}{cccc|c|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 0 & 10 \\ \hline 0 & -13 & 0 & -7 & 1 & -34 \end{array}.$$

Avem: $\underset{0}{x_1} = -3 < 0$; $\underset{0}{x_3} = 10$; $\underset{0}{x_2} = 0$; $\underset{0}{x_4} = 0$; $I^{(0)} = \{1, 3\}$; $K^{(0)} = \{2, 4\}$, $\overline{C}_k^{(0)} \leq 0$; $(\forall)\, k$. Deci $\underset{0}{X}$ este soluţie dual admisibilă.

În loc să alegem un nou pivot la întâmplare, aplicăm algoritmul simplex dual. Cum avem o singură valoare negativă $\underset{0}{x_1} = -3$, pivotul se va alege de pe linia sa dintre $A_{1k}^{(0)} < 0$. Se fac rapoartele $\left\{\frac{-13}{-2}; \frac{-7}{-1}\right\}$ şi se alege cel mai mic, adică $\frac{-13}{-2}$. Pivotul va fi $A_{12}^{(0)} = -2$.

Continuăm pivotarea şi rezultă $\left(0; \underset{1}{x_2} = \frac{3}{2}; \underset{1}{x_3} = \frac{5}{2}; 0\right)$ care este un program de bază. Se alege ca $\underset{0}{X}$ (iniţial) şi se aplică algoritmul simplex. Avem $\overline{C}_1 = -\frac{13}{2} < 0$, $\overline{C}_4 = -\frac{1}{2} < 0$. STOP: s-a obţinut optimul (de max).

Dacă s-ar proceda matricial avem:

$$M^{-1}_{(1;3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\overline{M}^{-1}_{(1;3)} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & -6 & 1 \end{array}\right);$$

$$\overline{M}^{-1}_{(1;3)} \left(\frac{B}{0}\right) = \left(\begin{array}{c} -3 \\ 10 \\ \hline -34 \end{array}\right) \begin{array}{l} x_1 < 0 \\ x_3 \end{array};$$

$$\overline{C}_1 = (2 \ -6 \ 1) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ \hline 3 \end{array}\right) = -13 < 0;$$

$$\overline{C}_1 = (2 \ -6 \ 1) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hline 3 \end{array}\right) = -7 < 0.$$

Calculăm

$$P_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$P_4^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pe linia lui $x_1 = -3 < 0$, există $A^{(0)}_{1k} < 0$.

Continuăm. Alegem $\min\left\{\frac{-13}{-2}; \frac{-7}{-1}\right\} = \frac{-13}{-2}$. Pivot $A^{(0)}_{12} = -2$. Actualizăm $\overline{M}^{-1}_{(1;3)} \to \overline{M}^{-1}_{(2;3)}$.

Rezultă

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & -6 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{c} \boxed{-2} \\ 5 \\ \hline -13 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)}_{\overline{M}^{-1}_{(2;3)}} \Bigg| \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right).$$

Reluăm algoritmul.

$$\overline{M}^{-1}_{(2;3)} \left(\frac{B}{0}\right) = \left(\begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \hline -\frac{29}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} x_2 > 0 \\ x_3 > 0 \\ -z_0 \end{array};$$

$$X^t = \left(0; \underset{1}{x_2} = \frac{3}{2}; \underset{1}{x_3} = \frac{5}{2}; 0\right); K_1 = \{1, 4\},$$

$$\overline{C}_1 = -\frac{13}{2} < 0, \overline{C}_4 = -\frac{1}{2} < 0.$$

Deci X^t este optimal (de max) şi $z_{\max} = \frac{29}{2}$.

Acest algoritm este necesar în mod special atunci când se face o analiză dacă programul optimal curent mai rămâne optimal sau nu, în urma schimbării intrărilor $B \to \widetilde{B}$ (modificări ce apar adesea în cazul resurselor) aşa cum se va vedea în continuare.

3.3. Reoptimizări.

3.3.1. Modificarea "resurselor" $B \to \widetilde{B}$. Să considerăm datele optimale $\overline{X}$; $\overline{I}$; $\overline{K}_1$; M^{-1}; $\overline{z}_{\max}$ curente. Aşa cum se ştie problema resurselor este o problemă prioritară a lumii contemporane. Pe perioade mari, cantităţile de resurse B se modifică în $\widetilde{B}$, fie concret ($\widetilde{B}_i$; $i = \overline{1,m}$, cunoscute), fie că poate fi prognozată o legitate $B \to \widetilde{B}(\lambda)$ ($\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_s)$ parametri de "tendinţă"). În asemenea cazuri se pune întrebarea: mai rămâne programul curent $\overline{X}$ optimal în noile condiţii ?, dacă nu, atunci trebuie făcută o reoptimizare. Deci este posibil ca problema să fie reluată de la început, înlocuind B cu $\widetilde{B}$, practic, acest mod de lucru nu este acceptat deoarece s-ar introduce "cheltuieli suplimentare". Una din aceste "cheltuieli" este "cheltuiala de timp" care în economia de piaţă în special, este cea mai importantă (rapiditatea deciziilor este necesară).

Să facem următoarea analiză: schimbarea $B \to \widetilde{B}$ nu afectează M^{-1}; $\overline{M}^{-1}$; $\overline{C}$ şi deci nu afectează condiţiile $\overline{C}_k \leq 0$; $(\forall)\, k \in K_1$ (în cazul maximizării), sau $\overline{C}_k \geq 0$; $(\forall)\, k \in K_1$ (în cazul minimizării). Cum valorile bazice din $\overline{X}$ şi $\overline{z}$ sunt date de $\overline{M}^{-1}\begin{pmatrix} B \\ \hline 0 \end{pmatrix}$, este clar că va fi suficient să calculăm $M^{-1}\widetilde{B} = \{\overline{x}_{noi}\}$. Dacă $M^{-1}\widetilde{B} \geq 0$, atunci se obţine un nou program de bază $\overline{X}_{nou}$, pentru care condiţiile de optimalitate $\overline{C}_k \leq 0$ (sau $\overline{C}_k \geq 0$) nu se modifică. **Deci $\overline{X}_{nou}$ este un nou program de bază** optimal cu $\overline{z}_{nou} = C_b M^{-1}\widetilde{B}$, de maxim (respectiv de minim). Dacă $\overline{X}_{nou}$ conţine valori $\overline{x}_{\overline{r}} < 0$, atunci $\overline{X}_{nou}$ este o soluţie dual admisibilă şi **se continuă optimizarea de aici începând,** aplicând algoritmul simplex dual.

În oricare din aceste situaţii s-a redus timpul de lucru (s-au redus inclusiv "alte cheltuieli").

Exemplul 3.3.1.1. În problema 3.2.1. să admitem că $B_2 = 7$ este cantitatea de aliaj de tipul "$i = 2$" şi că pentru ciclul următor de producţie nu se va mai dispune decât de o cantitate $\widetilde{B}_2 = 6$, sau că această cantitate de aliaj $B = 7$ poate fi admisă cu o toleranţă $\varepsilon = -1$, pentru ca la recepţie (la beneficiar) reperele să fie considerate corespunzătoare (s-a găsit o piaţă de desfacere care admite acest fapt fără alte condiţii). **Cum se va proceda optimal ?**

Rezolvare. Dacă nu se admite o toleranţă şi trebuie consumată integral cantitatea de aliaj $B_2 = 7$, atunci datele optimale sunt: $\overline{X}^t = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$; $\overline{z}_{\max} = 14,5$; $I^{(0)} = \{2,3\}$; $\overline{M}_{(2;3)}$; $\overline{C}_1 = -\frac{13}{2} < 0$; $\overline{C}_4 = -\frac{1}{2} < 0$; $\overline{K}_1 = \{1,4\}$. În loc să punem $\widetilde{B}_2 = 6$ în loc de $B = 7$ şi să reluăm problema de la început, procedă cum s-a precizat.

Calculăm

$$M_{(2;3)}^{-1}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} .$$

Cum $\overline{X}_{nou}^t = (0,1,3,0)$ este tot program de bază şi $\overline{C}_1 < 0$; $\overline{C}_4 < 0$ STOP; $\overline{X}_{nou}^t$ este program de bază optimal în noile condiţii. Avem $\overline{z}_{\max} = \left(\frac{9}{2} \ \ -\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 15$.

Exemplul 3.3.1.2. Să se scrie duala acestei probleme şi să se compare cu duala cazului $B = 7$. Preţurile umbră rămân aceleaşi la cele două probleme ? Cine este preţul umbră π_2 al resursei B_2 şi ce legătură are cu noul beneficiu $\overline{z}_{\max} = 15$, relativ la vechiul $\overline{z}_{\max} = \frac{29}{2}$?

Interpretare. Avem $\overline{z}_{\max} = z_{\max} + \pi_2 \left(\widetilde{B}_2 - B_2\right)$?

Exemplul 3.3.1.3. Să se facă reoptimizările $B_1 = 4 \to \widetilde{B}_1 = 3$, apoi $B_1 = 4 \to \widetilde{B}_1 = 3$; $B_2 = 7 \to \widetilde{B}_2 = 6$. Să se facă de fiecare dată legătura între $z_{\max}$; $z_{\max - nou}$ şi preţurile umbră π_1, π_2.

Indicaţie: preţurile umbră $(\pi_1, \pi_2) = (C_b M^{-1})$ rămân aceleaşi la oricare modificare $B \to \widetilde{B}$. Dacă $M^{-1}\widetilde{B} > 0$, se obţine un nou program de bază optimal, la aceleaşi preţuri umbră (care sunt o soluţie optimală pentru duală). Putem scrie

$$\overline{z}_{nou} = C_b M^{-1} \widetilde{B} = C_b M^{-1} (B + \Delta B) = z + \pi \Delta B, \tag{3.3.1}$$

unde $\Delta B = \widetilde{B} - B$.

Dacă $\widetilde{B}_1 = B_1$; $\widetilde{B}_2 < B_2$ avem

$$z_{nou} = z + \pi_2 \left(\widetilde{B}_2 - B_2\right), \text{ cu } \left(\widetilde{B}_2 - B_2 < 0\right) \tag{3.3.2}$$

şi deci micşorarea resursei B_2 duce la o creştere a beneficiului de la o valoare curentă z la z_{nou}, dacă preţul umbră (unitar) al său $\pi_2 < 0$ (s-a admis că $M^{-1}\widetilde{B} > 0$, adică $\overline{X}_{nou}$ este program de bază şi deci optimal). **Iată o altă interpretare posibilă a preţurilor umbră.**

Exemplul 3.3.1.4. Dacă în problema 3.2.1. se modifică $B_1 = 4 \to \widetilde{B}_1 = 8$, rezultă $M^{-1}_{(2;3)}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{17}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \end{array}$, $\widetilde{B}_1 - B_1 = 8 - 4 = 4$. Cum $x_2 = -\frac{1}{2} < 0$, rezultă că $\overline{X}^t = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{17}{2}, 0\right)$ este o soluţie dual admisibilă. Pe linia $i = 1$ se va afla pivotul. Calculăm

$$P_1^{(0)} = M^{-1}_{(2;3)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_{11}^{(0)} \\ A_{12}^{(0)} \end{array} ;$$

$$P_4^{(0)} = M^{-1}_{(2;3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_{14}^{(0)} \\ A_{24}^{(0)} \end{array} .$$

Există $A_{1k}^{(0)} < 0$ $(k \in K_1 = \{1, 4\})$ care este $A_{11}^{(0)} = -\frac{1}{2}$. Cum altul negativ nu mai există, nu mai facem rapoartele $\left\{ \frac{\overline{C}_k^{(0)}}{A_{1k}^{(0)}} \right\}$, cu $A_{1k}^{(0)} < 0$ $(k \in K_1^0)$. Pivotul este $A_{11}^{(0)} = -\frac{1}{2}$ (x_1 intră în bază în locul lui x_2). Avem $\overline{M}^{-1}_{(2;3)}$ actualizată

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{c} \boxed{-\frac{1}{2}} \\ \frac{5}{2} \\ \hline -\frac{13}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & -6 & 1 \end{array}\right)}_{\overline{M}^{-1}_{(1;3)}} \Bigg| \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right) ;$$

$I^{(1)} = \{1, 3\}$, $K^{(1)} = \{2, 4\}$, iar

$$\overline{M}^{-1}_{(1;3)} \left(\begin{array}{c} \widetilde{B} \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & -6 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 8 \\ 7 \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 6 \\ \hline -26 \end{array}\right) \begin{array}{c} x_1 \\ x_3 \\ -z \end{array} ;$$

unde $X^t = (1; 0; 6; 0)$ este program de bază **optimal, căci** $\overline{C}_2^{(1)} < 0$; $\overline{C}_4^{(1)} < 0$ (verificare $(2\ -6\ 1) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ \hline 3 \end{array}\right) = -13 < 0$; $(2\ -6\ 1) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hline 3 \end{array}\right) = -1 < 0$).

Avem $z_{\max(actual)} = 26$.

Exemplul 3.3.1.5. În problema 3.2.1. în urma unui studiu al 'pieţei" pe termen lung, se estimează o variaţie $B_2 = 7 \to \widetilde{B}_2 = 7 + \lambda$ ($\lambda \in [-4, 0)$). Să se întocmească un plan de acţiune optim, pornind de la situaţia optimală curentă în care cel puţin două produse să fie fabricate.

Rezolvare. Avem

$$\overline{M}^{-1}_{(2;3)} \left(\frac{\widetilde{B}}{0} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 4 \\ 7+\lambda \\ \hline 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{3}{2} + \frac{\lambda}{2} \\ \frac{5}{2} - \frac{\lambda}{2} \\ \hline -\frac{29}{2} + \frac{\lambda}{2} \end{array} \right) \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ -z \end{array}.$$

Evident $\overline{C}_1 = -\frac{13}{2} < 0$; $\overline{C}_4 = -\frac{1}{2} < 0$.

Discuţie. a) Dacă

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{(1)}{x_2} = \underset{(0)}{x_2} + \frac{\lambda}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\lambda}{2} > 0; \\ \underset{(1)}{x_3} = \underset{(0)}{x_3} - \frac{\lambda}{2} = \frac{5}{2} - \frac{\lambda}{2} > 0, \end{array} \right. \quad \lambda \in [-4, 0],$$

atunci avem o situaţie optimală cu $\underset{(1)}{z_{\max}} = z_0 - \frac{\lambda}{2}$, adică pentru $\lambda \in (-3, 0)$.

Evident $\underset{(1)}{z_{\max}} \in \left(z_0 = \frac{29}{2}; \frac{32}{2}\right)$. De exemplu pentru $\lambda = -1$ dăm peste (3.3.1.1).

b) Dacă $\underset{(1)}{x_2} < 0$; $\underset{(1)}{x_3} > 0$, adică $\lambda \in [-4, -3)$, atunci se obţin soluţii dual admisibile. Se continuă optimizarea folosind algoritmul simplex dual. Cum $K_1^{(0)} = \{1; 4\}$ avem:

$$M^{-1}_{(2;3)} P_1 = \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{array} \right) \begin{array}{c} A_{11}^{(0)} \\ A_{21}^{(0)} \end{array}; \; M^{-1}_{(2;3)} P_4 = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right) \begin{array}{c} A_{14}^{(0)} \\ A_{24}^{(0)} \end{array};$$

$$\overline{C}_1^{(0)} = -\frac{9}{2} < 0; \overline{C}_4^{(0)} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Cum pentru $\lambda \in [-4, -3)$, avem $\underset{(1)}{x_2} < 0$; $\underset{(1)}{x_3} > 0$, se alege ca pivot $A_{11}^{(0)} = \boxed{-\frac{1}{2}}$. Rezultă $\overline{M}^{-1}_{(1;3)}$, dat de exemplul (3.3.1.4). Calculăm

$$\overline{M}^{-1}_{(1;3)} \left(\frac{\widetilde{B}}{0} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & -6 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 4 \\ 7+\lambda \\ \hline 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -3-\lambda \\ 10+2\lambda \\ \hline -34-6\lambda \end{array} \right) \begin{array}{c} x_1 \\ x_3 \\ -z \end{array};$$

$\lambda \in [-4, -3)$.

Deci $(-3-\lambda; 0; 10+2\lambda; 0)$, pentru $\lambda \in [-4, -3)$, sunt programe de bază optimale (căci $x_1 > 0$, $x_3 > 0$, $\underset{(1)}{\overline{C}_2} < 0$, $\underset{(1)}{\overline{C}_4} < 0$) cu $z_{\max} = 34 + 6\lambda$ $(\lambda \in [-4, -3))$.

c) Nu putem avea $x_2 > 0$, $x_3 < 0$, deoarece $\lambda \in [-4, 0)$.

d) Nu putem avea $x_2 < 0$, $x_3 < 0$, deoarece $\lambda \in [-4, 0)$.

Rămân numai situaţiile a) şi b). Cu acest plan de perspectivă, la momentul în care se vor cunoaşte concret $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$ şi deci concret λ, vom vedea unde se încadrează λ (evident $\lambda \in [-4, 0)$), în cazul a) sau în cazul b) şi avem concret $\underset{1}{X}$ optimal la momentul respectiv.

3.3.2. Schimbări $C \to \widetilde{C}$. Asemenea schimbări ai coeficienţilor funcţiei scop $z = f(X) = CX$ pot fi privite ca un exerciţiu pur matematic, dar şi ca realităţi în anumite situaţii tehnice sau (şi) economice. Determinarea concretă a acestor coeficienţi cere o paletă largă de cunoştiinţe tehnico-economice. Să ne amintim că în cazul în care C_i este simplul cost unitar pe produsul de tipul "i" ce trebuie "fabricat" într-o cantitate x_i, pentru obţinerea sa trebuie să se ţină cont de diferite tipuri de costuri, costuri constante, costuri variabileproporţional, costuri regresive, costuri degresive,... Cel puţin unul din ultimele două, nu întotdeauna se poate "prelucra" măcar prin legităţi statistico-matematice mai cunoscute (repartiţii normale, repartiţii T, repartiţii x^2, repartiţii exponenţiale negative,...). Dar chiar şi în aceste cazuri problema capătă caracter de programare stochastică. Concluziile vor implica riscuri (de genul unu, de genul doi). Puterea testului care permite tragerea unei concluzii (decizie) este un element important. Din aceste motive se preferă programarea liniară deterministă în locul programării liniare stochastice. Asupra acestui caz determinist ne vom opri.

Să admitem că avem datele de optim: $\overline{X}$; $\overline{I}$, $\overline{K}_1$; $\overline{z}$; $\overline{M}^{-1}$; $\overline{C}$ curente. La o schimbare $C \to \widetilde{C}$ se pot ivi două cazuri: A) $C_j \to \widetilde{C}_j$; $j \in \overline{K}_1$; B) $\{C_i\} \to \left\{\widetilde{C}_i\right\}$; $i \in \overline{I}$; C) $C_j \to \widetilde{C}_j$; $j \in \overline{K}_1$; $\{C_i\} \to \left\{\widetilde{C}_i\right\}$; $i \in \overline{I}$.

Mai direct: A) C_j care se modifică sunt coeficienţi ai variabilelor secundare la pasul de optim.

B) C_i care se modifică sunt coeficienţi ai variabilelor bazice de optim.

C) Unii coeficienţi sunt nebazici, alţii sunt bazici.

A) $C_j \to \widetilde{C}_j$; $j \in \overline{K}_1$. În acest caz se vor modifica $\overline{C}_j$ în $\overline{\overline{\widetilde{C}_j}}$; $\overline{\overline{\widetilde{C}_j}} = (-C_b M^{-1}; 1)\begin{pmatrix} P_j \\ \overline{\widetilde{C}_j} \end{pmatrix}$. Dacă $\overline{\overline{\widetilde{C}_j}} < 0$, atunci $\overline{X}$ rămâne optimal. Dacă $\overline{\overline{\widetilde{C}_j}} = 0$, $\overline{X}$ rămâne optimal cu $z_{\max}$, dar nu este unic. Se continuă optimizarea introducând în bază x_j şi se obţine un nou program de bază optimal $\overline{\overline{X}}$ de valoare pentru $z = z_{\max}$ (cu acelaşi maxim).

Exemplul 3.3.2.1. Pentru problema 3.2.1. să considerăm că se cere o diversificare a producţiei în aşa fel încât cel puţin trei produse să fie fabricate, dar cu acelaşi beneficiu $z_{\max} = \frac{29}{2}$.

Rezolvare. A se obţine o diversificare cu cel puţin trei tipuri de produse este echivalent cu a se obţine cel puţin un program optimal cu $z_{\max} = \frac{29}{2}$ mai complet ca programul de bază optimal $\underset{0}{X}^t = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$; $z_{\max} = \frac{29}{2}$; $I^{(0)} = \{2, 3\}$; $K_1^{(0)} = \{1, 4\}$; $\underset{0}{M}^{-1} = M^{-1}_{(2,3)}$. Pentru aceasta trebuie ca pe lângă $\underset{0}{X}$ optimal să se mai obţină un program $\underset{1}{X}$ optimal (tot program de bază). Pentru aceasta trebuie ca problema să admită programe optimale multiple, adică cel puţin un $\overline{C}_k^{(0)} < 0$ $\left(k \in K_1^{(0)}\right)$ să devină $\overline{\widetilde{C}_k^{(0)}} = 0$. Avem:

$$\begin{cases} \overline{\overline{\widetilde{C}_k}} = (-C_b M^{-1}; 1)\begin{pmatrix} P_k \\ \overline{\widetilde{C}_k} \end{pmatrix} = \widetilde{C}_k - C_b M^{-1} P_k = \\ \\ = C_k - C_b M^{-1} P_k + \left(\widetilde{C}_k - C_k\right), \\ \\ \overline{\widetilde{C}_k^{(0)}} = \overline{C}_k^{(0)} + \left(\widetilde{C}_k - C_k\right). \end{cases} \tag{3.3.2.1}$$

Dar $\overline{\widetilde{C}_k^{(0)}} = 0 \Leftrightarrow \widetilde{C}_k = C_k - \overline{C}_k^{(0)}$. Aşa se calculează schimbarea $C_k \to \widetilde{C}_k$.

În exemplul anterior avem $\overline{C}_1^{(0)} = -\frac{13}{2}$; $\overline{C}_4^{(0)} = -\frac{1}{2}$ şi deci $\widetilde{C}_1 = 2 - \left(-\frac{13}{2}\right) = \frac{17}{2}$; $\widetilde{C}_4 = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$. Cum $\widetilde{C}_1 - C_1 = \frac{17}{2} - 2 = \frac{13}{2}$; $\widetilde{C}_4 - C_4 = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$ se pot face schimbările $C_1 = 2 \to \widetilde{C}_1 = \frac{17}{2}$; $C_4 = 3 \to \widetilde{C}_4 = \frac{7}{2} = 3,5$. Tentant ar fi să se facă schimbarea $C_1 \to \widetilde{C}_1$ (o creştere mare a beneficiului unitar). Ţinând cont de modul cum se calculează beneficiul din preţul p_1 de vânzare (pe lângă alte elemente), o schimbare a lui $C_1 = 2 \to \widetilde{C}_1 = \frac{17}{2} = 8,5$ ar implica o creştere mare a lui p_1. Mai realistă este ideea de a schimba $C_4 = 3 \to \widetilde{C}_4 = \frac{7}{2} = 3,5$. Este mai plauzibil că se va găsi o mai mare ”desfacere” a producţiei cu o creştere mică a preţului p_4. Prin urmare se va lua $C_4 = 3 \to \widetilde{C}_4 = \frac{7}{2} = 3,5$ şi deci $\widetilde{\overline{C_4^{(0)}}} = 0$. Se continuă şi se obţine un nou program de bază optimal $\underset{1}{X}^t = (0;0;1;3)$; $z_{\max} = \frac{29}{2}$.

Făcând o combinaţie liniară convexă $X = a\underset{0}{X} + (1-a)\underset{1}{X}$ $(a \in [0,1])$, se va obţine o ”plajă” de programe optimale cu $z_{\max} = \frac{29}{2}$.

Dacă s-ar fi cerut schimbarea $C_4 = 3 \to \widetilde{C}_4 = \frac{7}{2} = 3,5$, atunci s-ar fi calculat direct $\overline{\widetilde{C_4}} = (-C_b M^{-1}; 1)\begin{pmatrix} P_4 \\ \hline \widetilde{C}_4 \end{pmatrix} = 0$. Se continuă şi se obţine $\underset{1}{X}$.

Exemplul 3.3.2.2. În aceeaşi problemă făcând schimbarea $C_4 = 3 \to \overline{C}_4 = 4$, rezultă $\overline{\widetilde{C_4}} = \left(-\frac{9}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \hline 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} > 0$. Deci $\underset{(0)}{X}^t = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$ rămâne numai program de bază. Se poate deci continua algoritmul cu introducerea lui x_4 în bază:

$$P_4^{(0)} = M_{(2;3)}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} A_{14}^{(0)} \\ A_{24}^{(0)} \end{matrix},$$

$$\min\left\{ \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} \right\} = \frac{\frac{3}{2}}{\boxed{\frac{1}{2}}}. \text{ Pivot } A_{14}^{(0)} = \frac{1}{2}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \Bigg| \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -4 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\overline{M}_{(4;3)}^{-1}} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{pmatrix};$$

$$\overline{M}_{(4;2)}^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \hline -16 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_4 \\ x_3 \\ -z_{\max} \end{matrix};$$

$$I^{(1)} = \{4,3\};\ K^{(1)} = \{1,2\}.$$

$\overline{C}_1^{(1)} = (-4\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \hline 2 \end{pmatrix} = -6 < 0$; $\overline{C}_2^{(1)} = (-4\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \hline 3 \end{pmatrix} = -1 < 0$, STOP, $\underset{(1)}{X}^t = (0;0;3;1)$ program de bază optimal cu $z_{\max} = 16$.

Exerciţiul 3.3.2.1. Se prognozează schimbarea $C_4 = 3 \to \widetilde{C}_4 = 3 + 2\lambda$; $\lambda \in [-1, 1]$. Să se discute.

B) Dacă se face schimbarea $C_i \to \widetilde{C}_i$; $i \in I^{(0)}$, atunci se recalculează $\widetilde{C}_b M^{-1}$; $\overline{M}_{nou}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} M^{-1} & 0 \\ \hline -\widetilde{C}_b M^{-1} & 1 \end{array}\right)$; $\left\{\overline{C}_k\right\}_{noi}$ $\left(k \in K_1^{(0)}\right)$ şi se verifică dacă $\underset{(0)}{X}$ optim mai rămâne optim $\left(\overline{C}_k^{(0)} noi \le 0,\ (\forall)\, k \in K_1\right)$ sau nu. Dacă nu, atunci se continuă optimizarea.

C) Dacă în schimbarea $C \to \widetilde{C}$ există $C_i \to \widetilde{C}_i$ $\left(i \in I^{(0)}\right)$; $C_k \to \widetilde{C}_k$ $\left(k \in K_1^{(0)}\right)$, atunci se calculează $\widetilde{C}_b M^{-1}$; $\overline{M}_{nou}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} M^{-1} & 0 \\ \hline -\widetilde{C}_b M^{-1} & 1 \end{array}\right)$; $\overline{\widetilde{C}_k^{(0)}} = \left(-\widetilde{C}_b M^{-1}; 1\right)\begin{pmatrix} P_k \\ \hline \widetilde{C}_k \end{pmatrix}$ şi se constată dacă $\underset{0}{X}$ mai rămâne optimal sau nu.

Dacă nu, se continuă cu $\underset{0}{X}$ ca program de bază.

Exemplul 3.3.2.3. În exemplul 3.2.1. să considerăm modificările: a) $C_2 = 3 \to \widetilde{C}_2 = 4$; b) $C_2 = 3 \to \widetilde{C}_2 = 4$; $C_4 = 3 \to \overline{C}_4 = 3{,}5$. În ambele cazuri trebuie recalculată $\widetilde{C}_b M_{(2;3)}^{-1}$.

a) Avem

$$(4\ 4)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (4\ 0);$$

$$\overline{M}_{(2;3)nou}^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline -4 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$$\underset{0}{X}^t = \left(0; \tfrac{3}{2}; \tfrac{5}{2}; 0\right) \text{ nu se modifică.}$$

$\overline{\widetilde{C}_1^{(0)}} = (-4; 0; 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \hline 2 \end{pmatrix} = -6 < 0$; $\overline{\widetilde{C}_4^{(0)}} = (-4; 0; 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \hline 3 \end{pmatrix} = -1 <$

0; $K_1^{(0)} = \{1, 4\}$ şi deci condiţiile de optim nu se modifică. STOP; $\underset{0}{X}$ rămâne optimal, dar $z_{\max(nou)} = (-4; 0; 1)\left(\begin{array}{c} 4 \\ 7 \\ \hline 0 \end{array}\right) = 16$.

b) Trebuie să recalculăm $\overline{\widetilde{C_4^{(0)}}} = (-4; 0; 1)\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hline 4 \end{array}\right) = 0$. Deci $\underset{0}{X}$ rămâne optimal, dar există programe optime multiple. Avem:

$$\widetilde{P_4^{(0)}} = M_{(2;3)}^{-1}\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hline 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} A_{14}^{(0)} \\ A_{24}^{(0)} \end{array};$$

$$\min \left\{ \begin{array}{c} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \\ \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} \end{array} \right\} = \frac{\frac{3}{2}}{\boxed{\frac{1}{2}}}, \text{ pivot } A_{14}^{(0)} = \frac{1}{2}.$$

Se procedează ca în exemplul 3.3.2.2.

Exerciţiul 3.3.2.2. Să se discute schimbările $C_2 = 3 \to \widetilde{C_2} = 8,5 + \lambda$, $\lambda \in \left[-\frac{11}{2}, 1\right]$; $C_4 = 3 \to \widetilde{C_4} = 9 + \lambda$.

3.3.3. Posibilitatea introducerii în "fabricaţie" a noi produse, fără a modifica datele iniţiale: $A; B; C$

Uneori este posibilă o diversificare a ofertei $\{X\}$ fără modificări tehnologice P_k, unde $k = \overline{1, 4}$, fără modificări de resurse B, sau de beneficii C_i $\left(i = \overline{1, 4}\right)$ (respectiv costuri unitare de producţie). Fie aşadar încercarea de a introduce noi "produse" de tipul $(n + s)$ $\left(s = \overline{1, p}\right)$ pentru care se dispune de tehnologiile $P_{n+s} = [A_{m,n+s}]$ şi de C_{n+s}. Problema devine:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}x_j + \sum\limits_{s=1}^{p} A_{in+s}x_{n+s} = B, \\ \hline \sum\limits_{j=1}^{n} C_j x_j + \sum\limits_{s=1}^{p} C_{n+s}x_{n+s} = z, \end{array}\right. x_i \geq 0;\ x_{n+s} \geq 0;\ i = \overline{1, n};\ s = \overline{1, p}. \tag{3.3.3.1}$$

Dispunem de datele optimale curente $\underset{0}{X}$; $I^{(0)}$; $K_1^{(0)}$; $\underset{0}{\overline{M}}^{-1}$; $\overline{C}_k^{(0)}$; $z_0 = z_{\max(cunoscut)}$.

Actualizăm P_{n+s}, adică calculăm:

$$\frac{P_{n+s}^{(0)}}{\overline{C}_{n+s}^{(0)}} = \overline{M}^{-1}\left(\frac{P_{n+s}}{C_{n+s}}\right).$$

Dacă $\overline{C}_{n+s}^{(0)} < 0$ $\left(s = \overline{1,p}\right)$, atunci datele curente optimale rămân optimale. Nici un produs nou nu poate fi "fabricat" optimal.

Dacă există "s" astfel încât $\overline{C}_{n+s}^{(0)} = 0$, atunci pe lângă $\underset{0}{X}$ optimal, se mai obţin şi alte programe $\underset{(s)}{X}$ de bază optimale, care includ produse de tipul "s". O combinaţie liniară convexă a lor va da o "diversificare" de programe optimale cu $z_{\max} = z_{0(\max)}$.

Dacă există "s" astfel încât $\overline{C}_{n+s}^{(0)} > 0$, atunci $\underset{0}{X}$ rămâne program de bază şi deci se continuă optimizarea de aici (nu trebuie reluată problema de la început (3.3.3.1)).

Exemplul 3.3.3.1. Pentru problema 3.2.1. să considerăm noile posibilităţi: $P_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C_5 = \frac{17}{2}$; $P_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $C_6 = \frac{7}{2}$; $P_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C_7 = 3$. Avem $\overline{C}_5^{(0)} = \left(-\frac{9}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \hline \frac{17}{2} \end{pmatrix} = 0$; $\overline{C}_6^{(0)} = 0$; $\overline{C}_7^{(0)} = -1$. Deci $\underset{0}{X}$ rămâne optimal, dar se mai pot obţine şi altele. Putem scrie $\underset{0}{X} = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0; 0; 0\right)$;

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \boxed{\frac{5}{2}} \\ \hline 0 \end{pmatrix} \right. \to \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \hline -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)}_{\overline{M}_{(2;5)}^{-1}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{pmatrix} \right. ;$$

$\overline{M}_{(2;5)}^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \hline -\frac{29}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} x_2 \\ x_5 \end{array}$; $\underset{1}{X}^t = (0; 2; 0; 0; 1; 0; 0)$;

$I^{(1)} = \{2, 5\}$; $K_1^{(1)} = \{1, 3, 4, 6, 7\}$;

$\overline{C}_1^{(1)} = \left(-\frac{9}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \hline 2 \end{pmatrix} = -\frac{13}{2}$; $\overline{C}_3^{(1)} = 0$; $\overline{C}_4^{(1)} = -\frac{1}{2}$;

$\overline{C}_6^{(1)} = 0$; $\overline{C}_7^{(1)} = -1 < 0$.

Având $\overline{C}_6^{(1)} = 0$; $\overline{C}_k^{(1)} < 0$; $k \in K_1^{(1)}$ $(k \neq 6)$ se mai poate obţine un program de bază optimal. Avem

$$P_6^{(1)} = M_{(2;5)}^{-1} P_6 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\frac{3}{5}} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{array}{l} A_{16}^{(1)} \\ A_{26}^{(1)} \end{array};$$

$$\min \left\{ \begin{array}{c} \frac{2}{\frac{3}{5}} \\ \frac{1}{\frac{3}{5}} \end{array} \right\} = \frac{2}{\boxed{\frac{3}{5}}};$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \hline -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \Bigg| \left(\begin{array}{c} \boxed{\frac{3}{5}} \\ \frac{1}{5} \\ \hline 0 \end{array} \right) \rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \hline -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)}_{\overline{M}_{(6;5)}^{-1}} \Bigg| \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \right)$$

$$\overline{M}_{(6;5)}^{-1} \left(\begin{array}{c} 4 \\ 7 \\ \hline 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \hline -\frac{29}{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} x_6 \\ x_5 \end{array}; \underset{2}{X}^t = \left(0; 0; 0; 0; \tfrac{1}{3}; \tfrac{10}{3}\right);$$

$\overline{C}_1^{(2)} = -\frac{13}{2}$; $\overline{C}_2^{(2)} = 0$; $\overline{C}_3^{(2)} = 0$; $\overline{C}_4^{(2)} = -\frac{1}{2}$, STOP.

Mulţimea programelor optimale este dată de

$$\begin{array}{l} \{\overline{X}^t = a_0 \underset{0}{X} + a_1 \underset{1}{X} + a_2 \underset{2}{X} = \\ = \left(0; \frac{3}{2}a_0 + 2a_1; \frac{5}{2}a_0; 0; \frac{1}{3}a_1; \frac{10}{3}a_2\right)\}, \\ \text{unde } a_0, a_1, a_2 \geq 0;\ a_0 + a_1 + a_2 = 1;\ z_{\max} = \frac{29}{2}. \end{array}$$

Exemplul 3.3.3.2. Dacă în problema 3.2.1. se doreşte introducerea în fabricaţie a unui produs x_5 pentru care tehnologia $P_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dar $C_5 = 8$, rezultă $\overline{C}_5^{(0)} = \left(-\frac{9}{2}; \frac{1}{2}; 1\right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hline 8 \end{array} \right) = -\frac{1}{2}$ STOP; singurul program optimal este $\underset{0}{X}^t = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0; 0\right)$ adică x_5 nu este convenabil a fi fabricat.

Acest exemplu atrage atenţia asupra faptului că atunci când pentru a introduce în fabricaţie un nou tip de produs x_5 şi nu dispunem de tehnologia respectivă, adică trebuie cumpărată, va trebui mai întâi să se analizeze $\overline{C}_5^{(0)}$.

Dacă $\overline{C}_5^{(0)} < 0$ rezultă că achiziţionarea tehnologiei P_5 este inutilă (ar fi o cheltuială zadarnică). Dacă $\overline{C}_5^{(0)} = 0$ atunci se va obţine un nou program de bază optimal $\underset{1}{X}$ la acelaşi beneficiu total $z_1 = z_{0(\max)}$. În acest caz făcând o combinaţie liniară convexă

$$\left\{\overline{X} = a_0 \underset{0}{X} + a_1 \underset{1}{X}; a_0, a_1 \geq 0; a_0 + a_1 = 1\right\}$$

(şi deci $a_1 = 1 - a_0; a_0 \in [0,1]$) se obţine o diversificare a produselor, dar la acelaşi nivel optim al beneficiului $\overline{z} = z_0 = z_1$ de maxim. În cazul că se dispune de tehnologia P_5 şi nu induce cheltuieli în plus, această diversificare este necesară pentru ocuparea forţei de muncă (reducerea şomajului), cât şi pentru diversificarea "relaţiilor de piaţă". Altfel trebuie recuperată "cheltuiala" cu P_5 într-un mod economic bine gândit. În cazul umei intreprinderi private chiar dacă x_5 **este socialmente necesar**, statul nu poate impune fabricarea acestui produs, dar poate subvenţiona această cheltuială. Iată că în anumite cazuri (interes naţional, învăţământ de stat, armată,...) subvenţionarea pe termen scurt, **este necesară.** Există şi altă posibilitate (scutirea de TVA, sau reducerea impozitului pe profit ca în cazul sponzorizărilor,...).

Dacă $\overline{C}_5^{(0)} > 0$, atunci se va obţine un nou program de bază optim, cu $z_{1(\max)} > z_0$. Şi în acest caz trebuie făcută o analiză: $(z_1 - z_0)$ acoperă cheltuiala suplimentară cu achiziţionarea lui P_5 ?

A introduce în C_5 cheltuiala pe unitatea de produs rezultată din achiziţionarea lui P_5, nu se poate deoarece nu se ştie iniţial care va fi valoarea x_5 ce va apare în programul optimal.

Exemplul 3.3.3.3. În problema 3.2.1. fie $P_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $C_5 = 9$. Rezultă $\overline{C}_5^{(0)} = 1 > 0$. Deci $\underset{0}{X}^t = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0;\right)$ optimal cu $z_0 = \frac{29}{2}$, rămâne numai program de bază. Se continuă optimizarea pornind cu $\underset{0}{X}$ ca program de bază curent. Avem:

$$P_5^{(0)} = M_{(2;3)}^{-1} P_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \boxed{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} \begin{array}{l} A_{15}^{(0)} \\ A_{25}^{(0)} \end{array} ; \text{pivot } A_{25}^{(0)} = \frac{5}{2}$$

(x_5 devine bazică în locul lui x_3, căci $\underset{1}{x_3} = \frac{5}{2} - \boxed{\frac{5}{2}}\underset{1}{x_5}$). Rezultă

$$M^{-1}_{(2;5)} = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \hline -\frac{24}{5} & \frac{13}{5} & 1 \end{array}\right); \overline{M}^{-1}_{(2;5)} \left(\begin{array}{c} 4 \\ 7 \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hline -15 \end{array}\right) \begin{array}{c} x_2 \\ x_5 \\ -z_1 \end{array};$$

$\underset{1}{X} = (0; 2; 0; 0; 1)\,; z_1 = 15;$

$$K_1^{(1)} = \{1; 3; 4\}\,; \overline{C}_1^{(1)} = \left(-\tfrac{24}{5}; \tfrac{3}{5}; 1\right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hline 2 \end{array}\right) = -7 < 0;$$

$\overline{C}_1^{(1)} = -\frac{1}{5}; \overline{C}_1^{(1)} = -\frac{6}{5}$, STOP.

Programul de bază optimal este $\underset{1}{X}$. Produsul x_5 se introduce în locul lui x_3, deşi x_3 avea un beneficiu unitar $C_3 = 4 > C_2 = 3$. Iată un alt caz în care "contabiliceşte" (aprecierea rentabilităţii pe baza beneficiului unitar) nu este **realistă.** Diferenţa $z_1 = 15 - z_0 = 15 - 14,5 = 0,5$ (adică 50\$) este mică, deoarece o tehnologie P_5 în general "costă". Şi în acest caz, dacă cheltuiala cu achiziţionarea lui P_5 este S atunci $(S - 50)$ trebuie acoperită într-unul din modurile anterior menţionate (dacă fabricarea lui x_5 este mai "necesară" ca fabricarea lui x_3).

3.3.4. Modernizarea tehnologiilor existente.

Pe perioade scurte tehnologiile P rămân aceleaşi dar pe perioade mai lungi cel puţin un P_j trebuie schimbat: $P_j = [A_{ij}]_{i=\overline{1,m}} \to \widetilde{P}_j = \left[\widetilde{A}_{ij}\right]_{i=\overline{1,m}}$, pentru a face faţă concurenţei. În general tendinţa este ca prin modernizare $P_j \to \widetilde{P}_j$ să se mărească şi preţul astfel încât beneficiul nou $\widetilde{C}_j$ să fie mai mare. Dacă $\widetilde{C}_j$ este dat de "piaţă" (cerere), atunci avem schimbarea $P_j \to \widetilde{P}_j$; $C_j \to \widetilde{C}_j$. În caz contrar trebuie făcută schimbarea $P_j \to \widetilde{P}_j$; $\widetilde{C}_j = C_j$.

În oricare dintre aceste situaţii este posibil ca $j \in I^{(0)}$ (de optim) sau $j \in K_1^{(0)}$.

A$_1$) $P_j \to \widetilde{P}_j$; $\widetilde{C}_j = C_j$; $j \in K_1^{(0)}$. În acest caz avem: $\underset{0}{X}$; $\underset{0}{\overline{M}}^{-1}$; $K_1^{(0)}$; $z_0 = z_{\max}$; $\overline{C}_j^{(0)} \le 0$ $(\forall)\, j$ şi deci actualizăm $\widetilde{P}_j$; $\widetilde{P}_j^{(0)} = \underset{0}{M}^{-1} P_j$ şi $\overline{C}^{(0)}_{jnou} = \left(-C_b \underset{0}{M}^{-1}; 1\right) \left(\begin{array}{c} \widetilde{P}_j \\ \hline C_j \end{array}\right)$.

Dacă $\overline{C}_{jnou}^{(0)} < 0$, atunci $\underset{0}{X}$ rămâne optimal cu $z_0 = z_{\max}$, atunci noua tehnologie nu aduce un beneficiu mare.

Dacă $\overline{C}_{j(nou)}^{(0)} = 0$ **se obţine un nou program de bază optim** $\underset{1}{X}$ cu $z_1 = z_0(\max)$. Dacă facem o combinaţie liniară convexă $\overline{X} = t\underset{0}{X} + (1-t)\underset{1}{X},\ t \in [0,1]$ **se obţine o diversificare a producţiei la acelaşi nivel** $\overline{z} = z_1 = z_0(\max)$**.** Ca şi anterior trebuie analizată "amortizarea" cheltuielilor cu noua tehnologie.

Dacă $\overline{C}_{j(nou)}^{(0)} > 0$, atunci se continuă optimizarea şi se obţine un alt program de bază optimal $\underset{1}{X}$ cu $z_1 \neq z_0$.

A_2) $P_j \to \widetilde{P}_j$; $C_j \to \widetilde{C}_j$; $j \in K_1^{(0)}$. Se procedează ca anterior numai că

$$\overline{C}_{j(nou)}^{(0)} = \left(-C_b \underset{0}{M}^{-1}; 1\right) \begin{pmatrix} \widetilde{P}_j \\ \hline \widetilde{C}_j \end{pmatrix}.$$

Exemplul 3.3.4.1. Dacă în problema 3.2.1. se face modificările

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \widetilde{P}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{C}_4 = C_4 = 4,$$

atunci

$$\widetilde{P}_4^{(0)} = M_{(2;3)}^{-1} \widetilde{P}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \widetilde{A}_{14}^{(0)} \\ \widetilde{A}_{24}^{(0)} \end{matrix};$$

$$\overline{C}_{4(nou)}^{(0)} = \left(-\tfrac{9}{2}; \tfrac{1}{2}; 1\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \hline 3 \end{pmatrix} = -\tfrac{11}{2} < 0. \text{ STOP}$$

Aceste modificări $A_{i4} \to \widetilde{A}_{i4}$, nu aduc noutăţi. Se va opera în continuare tot cu datele optimale curente $\underset{0}{X}$; $z_0 = \frac{29}{2}$.

Exemplul 3.3.4.2. În problema 3.2.1. se fac modificările:

$$\begin{aligned}
P_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \widetilde{P}_4 = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 2-2\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\
\widetilde{C}_4 &= 3+2\lambda; \\
\widetilde{P}_4^{(0)} &= M^{-1}_{(2;3)} \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 2-2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda \end{pmatrix}; \\
\overline{C}^{(0)}_{4(nou)} &= \left(-\frac{9}{2}; \frac{1}{2}; 1\right) \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 2-2\lambda \\ \hline 3+2\lambda \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} + \frac{11}{2}\lambda.
\end{aligned}$$

Pentru $\lambda = 0$ se obţin datele din (3.2.1.). Deci $\underset{0}{X} = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$, $z_0 = \frac{29}{2}$.

Pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ se obţin: $\widetilde{P}_4^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; $\overline{C}^{(0)}_{4(nou)} = \frac{9}{2} > 0$. Se continuă algoritmul.

Mai general: **dacă** $\overline{C}^{(0)}_{nou} < 0$, adică $0 < \lambda < \frac{1}{11}$, atunci STOP.

Datele optimale rămân $\underset{0}{X} = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$, $z_0 = \frac{29}{2}$.

Dacă $\overline{C}^{(0)}_{nou} = 0$, adică $\lambda = \frac{1}{11}$, atunci se va obţine un nou program de bază optimal cu $z_1 = z_0 = \frac{29}{2}$ (Exerciţiu).

Dacă $\overline{C}^{(0)}_{nou} > 0$, adică $\frac{1}{11} < \lambda \leq \frac{1}{2}$, atunci se continuă algoritmul şi se obţine un nou program de bază optimal $\underset{1}{X}$.

De exemplu pentru $\lambda = \frac{1}{4}$ avem:

$$\overline{C}^{(0)}_{4(nou)} = \frac{7}{8} > 0;$$

$$\widetilde{P}_4^{(0)} = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{3}{8}} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix};$$

$$\min\left\{ \frac{\frac{3}{2}}{\boxed{\frac{3}{8}}}; \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{8}} \right\} = \frac{\frac{3}{2}}{\boxed{\frac{3}{8}}}.$$

Pivot $\boxed{\frac{3}{8}}$. Deci x_4 devine bazică în locul lui x_2. Avem:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{c} \boxed{\frac{3}{8}} \\ \frac{3}{8} \\ \hline \frac{7}{8} \end{array}\right) \quad \to \quad \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)}_{\overline{M}^{-1}_{(4;3)}} \Bigg| \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right);$$

$$\overline{M}^{-1}_{(4;3)} \left(\begin{array}{c} 4 \\ 7 \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ \hline -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} x_4 \\ x_3 \\ -z_1 \end{array};$$

$$\underset{1}{X}^t = (0;0;1;4)\,;\ z_1 = 18;$$

$$I^{(1)} = \{4;3\}\,,\ K_1^{(1)} = \{1;2\}\,;$$

$$\overline{C}_1^{(1)} = \left(-\tfrac{10}{3}; -\tfrac{2}{3}; 1\right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hline 2 \end{array}\right) = -\tfrac{16}{3} < 0;$$

$$\overline{C}_1^{(1)} = \left(-\tfrac{10}{3}; -\tfrac{2}{3}; 1\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ \hline 3 \end{array}\right) = -\tfrac{7}{3} < 0 \text{ STOP.}$$

$\underset{1}{X}$ este noul program de bază optimal cu $z_{\max} = z_1 = 18$.

B. Să admitem că se schimbă $P_i = [A_{ij}] \to \widetilde{P}_i = \left[\widetilde{A}_{ij}\right]$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ şi $j \in I^{(0)}$ (bazic). Ar trebui ca în matricea bazică $\underset{0}{M}$ înlocuind coloana P_j cu $\widetilde{P}_j$ să vedem dacă matricea rezultată $\underset{0}{\widetilde{M}}$ mai este nesingulară (există $\underset{0}{\widetilde{M}}^{-1}$) sau nu. Cu $\underset{0}{\widetilde{M}}^{-1}$ scriem $\overline{\underset{0}{\widetilde{M}}^{-1}}$ şi trecem la optimizare. Dar în acest caz trebuie să actualizăm toate datele; $\overline{C}^{(0)}_{j(noi)}$; $j \in K_1^{(0)}$; $\underset{0}{\widetilde{M}}^{-1}B$; $C_b\underset{0}{\widetilde{M}}^{-1} = \widetilde{z}_0$ (nouă).

Pentru a evita prima fază relativ la $\widetilde{MC}$ constatarea dacă este nesingulară (inclusiv calcularea lui $\widetilde{M}^{-1}$) se poate considera P_j $\left(j \in I^{(0)}\right)$ ca şi cum ar fi o nouă coloană în sistem, care trebuie să devină bazică în locul lui P_j. Adică se actualizează $\widetilde{P}_j^{(0)} = \underset{0}{M}^{-1}\widetilde{P}_j = \left[\widetilde{A}_{ij}^{(0)}\right]_{i=\overline{1,m}}$ şi trebuie ales ca pivot $\widetilde{A}_{ij}^{(0)}$ care corespunde variabilei bazice x_i $(i = j)$ de coeficient A_{ij}. Prin urmare trebuie ca $\widetilde{A}_{ij}^{(0)} \neq 0$. Se obţine $\underset{0}{\widetilde{M}}^{-1}_{nou\breve{a}}$ (*actualizată*). Apoi se calculează elementele anterioare.

Exemplul 3.3.4.3. În problema 3.2.1. să facem schimbarea $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \widetilde{P}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Cum avem $\underset{0}{M}{}^{-1}_{(2;3)}$ trebuie să actualizăm

$$\widetilde{P}_2^{(0)} = \underset{0}{M}{}^{-1}_{(2;3)} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \widetilde{P}_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \widetilde{A}_{12}^{(0)} \\ \widetilde{A}_{22}^{(0)} \end{matrix}.$$

Cum x_2 este în bază pe primul loc, adică pe linia $i = 1$ (căci am scris $M_{(2;3)}$; $M^{-1}_{(2;3)}$), rezultă că $\widetilde{A}_{12}^{(0)}$ trebuie să fie diferită de zero. În cazul dat $\widetilde{A}_{12}^{(0)} = 0$. Adică prin schimbarea $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \widetilde{P}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, matricea nouă $\widetilde{M}_{(2;3)}$ este singulară. Verificare: $\underset{0}{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\underset{0}{\widetilde{M}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\det \underset{0}{\widetilde{M}} = 2 - 2 = 0$. Deci $\underset{0}{\widetilde{M}}$ **este singulară.**

Exemplul 3.3.4.4. Fie schimbarea $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \widetilde{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Actualizăm $\widetilde{P}_2$. Avem $\widetilde{P}_2^{(0)} = \underset{0}{M}{}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \widetilde{A}_{12}^{(0)} \\ \widetilde{A}_{22}^{(0)} \end{matrix}$. Cum $\widetilde{A}_{12}^{(0)} = \frac{1}{2} \neq 0$, calculăm direct $\underset{0}{\widetilde{M}}{}^{-1}$ prin pivotare cu pivot $\widetilde{A}_{12}^{(0)} = \boxed{\frac{1}{2}}$;

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{\underset{0}{\widetilde{M}}{}^{-1}_{(2;3)}} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verificare directă.

$$\underset{0}{\widetilde{M}}_{(2;3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \underset{0}{\widetilde{M}} \underset{0}{\widetilde{M}}{}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$-C_b \underset{0}{\widetilde{M}}{}^{-1} = -(3\ 4) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (-5\ 1);$$

$$\overline{\underset{0}{\widetilde{M}}{}^{-1}} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -5 & 1 & 1 \end{array} \right);$$

$$\overline{\widetilde{M}}{}_0^{-1}\left(\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ \hline -13 \end{array}\right) \begin{array}{l} x_{2(nou)} \\ x_{3(nou)} \\ z_{0(nou)} = 13 \end{array} ;$$

$$\underset{0}{X}{}_{nou} = (0;3;1;0)\,; I^{(0)} = \{2,3\}\,; K_1^{(0)} = \{1,4\}\,;$$

$$\overline{C}{}_{1(nou)}^{(0)} = (-5\ 1\ 1)\left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hline 2 \end{array}\right) = -7 < 0;$$

$$\overline{C}{}_{4(nou)}^{(0)} = (-5\ 1\ 1)\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hline 3 \end{array}\right) = 0; STOP;$$

$\underset{0}{X}{}_{nou}$ este program de bază optimal de valoare $z_{\max} = 13$.

Există programe optimale multiple, căci $\overline{C}{}_{4(nou)}^{(0)} = 0$ şi $4 \in K_1^{(0)}$.

Continuăm: $P_4^{(0)} = \underset{0}{\widetilde{M}}{}^{-1} P_4 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \widetilde{A}_{14}^{(0)} \\ \widetilde{A}_{24}^{(0)} \end{array}$ pivot $\widetilde{A}_{14}^{(0)} = \boxed{1}$, x_4 devine bazică în locul lui x_2. Rezultă

$$M_{(4;3)}^{-1} = \left(\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right); \overline{M}{}_{(4;3)}^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -5 & 1 & 1 \end{array}\right);$$

$$K_1 = \{1,2\}\,,$$

($\overline{M}{}_{(4;3)}^{-1}$ coincide întâmplător cu $\widetilde{M}_{(2;3)}^{-1}$ deoarece pivotul $\widetilde{A}_{14}^{(0)} = 1$ şi $\widetilde{A}_{24}^{(0)} = 0$).

$$\overline{M}{}_{(4;3)}^{-1}\left(\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ \hline -13 \end{array}\right) \begin{array}{l} x_4 \\ x_3 \end{array} ; z_1 = 13;$$

$$\underset{1}{X} = (0;0;1;3)\,;$$

$$\overline{C}{}_1^{(1)} = (-5\ 1\ 1)\left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hline 2 \end{array}\right) = -7 < 0; \overline{C}{}_2^{(1)} = (-5\ 1\ 1)\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hline 3 \end{array}\right) = 0; \text{STOP};$$

Avem mulţimea programelor optimale

$$\overline{X} = t\underset{0}{X}{}_{noi} + (1-t)\underset{1}{X} = (0;3a;1;3\,(1-a))\,; a \in [0,1]\,, \overline{z} = 13.$$

Capitolul 4. Sisteme de ecuații liniare cu variabile mărginite inferior şi superior.

4.1. Program complet. Program complet, filtrat.

Aşa cum s-a spus în aplicație, pentru variabilele $\{x_i\}$ se pot pune condiții de forma $d_i \le x_i \le S_i$. Prin urmare forma standard a unei probleme de programare liniară este:

$$\frac{AX = \mathrm{B}}{CX = f(X)}; \quad \begin{matrix} d \le X \le S \\ \max \\ (\min) \end{matrix} \tag{4.1.1}$$

$$\left.\begin{matrix} A = [A_{ij}]_{i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n}}; & d^t = [d_1 .....d_n] \\ S^t = [S_1 .... S_n]; & B^t = [B_1 ......B_m] \end{matrix}\right. ; \text{ rang A=m<n.}$$

Pentru a putea rezolva o asemenea problemă trebuie, mai întâi, adusă la forma standard redusă:

$$\frac{AU = B}{CU = \varphi(U)};_{\substack{\max \\ \min}} \quad 0 \le U \le D \quad D = [D_1 .....D_a ......D_m] \tag{4.1.2}$$

prin transformarea, $x_i - d_i = u_i; i = \overline{1,n}$. În prima fază trebuie obținut un program, $\underset{0}{U} \mid A\underset{0}{U} = B$; $0 \le \underset{0}{U} \le D$ pentru care $C\underset{0}{U} = \varphi(\underset{0}{U}) \overset{def}{=} z_0$. Apoi în a doua fază trebuie să generăm un nou program $\underset{1}{U}$, mai bun ca $\underset{0}{U}$, dacă $\underset{0}{U}$ nu este optimal ($z_1 = \varphi(U_1) > z_0 = \varphi(U_0)$ dacă problema este de maxim, sau $z_1 < z_0$, dacă problema este de minim).

A transforma inecuațiile $0 \le U \le D$ în ecuații, ar mări atât numărul m+n de restricții cât şi numărul n+n=2n de variabile, aşa cum am văzut. A nu proceda aşa înseamnă a studia sistemul, AU=B; $0 \le U \le D$ pe altă cale.

Definiția 4.1.1. Un program $\underset{0}{U}$, al sistemului AU=B, care satisface $0 \le U \le D$, se va numi program complet.

Definiția 4.1.2. Fie $\underset{0}{U} = [\underset{0}{u_1} .... \underset{0}{u_n}]$ un program complet pentru care (n-m) componente au valorile zero (la marginea inferioară) sau valori la marginea superioară D sau o parte dintre acestea sunt la marginea inferioară şi restul dintre ele sunt la marginea superioară, se va numi program complet filtrat.

Să notăm prin $K_1^{(0)}$ mulțimea indicilor variabilelor U_j care au valoarea $u_j = 0$ şi prin $K_2^{(0)}$ mulțimea variabilelor U_a pentru care $\underset{0}{u_a} = D_a$, dar în aşa fel încât, $\underset{0}{u_j} = 0$; $\underset{0}{u_a} = D_a$ să aparțină mulțimii celor (n-m) variabile anterior selectate. Restul de n-(n-m)=m valori , $\underset{0}{u_r}$ pot fi unele la valoarea zero, altele la valoarea superioară şi altele între zero şi marginea superioară a lor. După ce s-au selectat cele (n - m) valori ale căror indici aparțin la $K_1^{(0)}$; $K_2^{(0)}$, mulțimea indicilor valorilor rămase se va nota prin $I^{(0)}$.

Exemplul 4.1.1. Dacă sistemul AU=B ; U≥ 0 $rangA = m$ admite **un program de bază** $\underset{0}{X}$, atunci (n-m) variabile (secundare) au valorile, $\underset{0}{x_j} = 0$. Deci $j \in K_1^{(0)}$. Dacă valorile bazice, $\{x_{\bar{r}}\}$, $\bar{r} \in I^{(0)}$ satisfac, $0 \le \underset{0}{x_{\bar{r}}} \le D_{\bar{r}}$, atunci programul de bază este un program complet filtrat şi $K_2^{(0)} = \Phi$.

Exemplul 4.1.2. Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = \frac{9}{2} \end{cases} \quad 1 \le x_1 \le \frac{5}{2};\ 1 \le x_2 \le 3 \ ;\ 1 \le x_3 \le 2$$

Notând $x_1 - 1 = u_1$; $x_2 - 1 = u_2$; $x_3 - 1 = u_3$ rezultă:

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 2 \\ u_2 + u_3 = \frac{5}{2} \end{cases} ;\ 0 \le u_1 \le \frac{3}{2} \ ;\ \ 0 \le u_2 \le 2 \ ;\ 0 \le u_3 \le 1$$

care admite programul de bază, $\underset{0}{u_1} = 2$; $\underset{0}{u_2} = \frac{5}{2}$; $\underset{0}{u_3} = 0$, care însă nu este program complet, deoarece $\underset{0}{u_2} = \frac{5}{2} > D_2 = 2$, respectiv $\underset{0}{u_1} = 2 > D_1 = \frac{3}{2}$.

Alt program de bază este ($\underset{1}{u_1} = 0$; $\underset{1}{u_2} = \frac{1}{2}$; $\underset{1}{u_3} = 2$), care însă nu este program complet căci $\underset{1}{u_3} = 2 > D_3 = 1$. Un alt program de bază nu mai există. Deci nici un program de bază al sistemului, AU=B; U$\ge$0, nu este program complet. Totuşi sistemul dat admite un program complet : ($u_1 = \frac{3}{2}; u_2 = 2; u_3 = \frac{1}{2}$).Cum, $u_3 = \frac{1}{2}$, 0<u_3<D_3=1, u_3 nu poate fi secundar. Deci 3$\in$I . Secundară poate fi $u_2 = 2$ şi atunci : $I = \{1,3\}$; $K_1 = \Phi$; $K_2 = \{2\}$. Programul complet este deci filtrat.

Dar şi $I = \{2,3\}$; $K_1 = \Phi$; $K_2 = \{1\}$ (căci $u_1 = \frac{3}{2} = D_1$) dă o filtrare, cu u_2, u_3 bazice.

Concluzie 4.1.1. Este posibil ca oricare ar fi un program de bază al sistemului, relaxat

$$AU=B; \quad U \geq 0 \tag{4.1.3}$$

acesta să nu fie un program complet filtrat al sistemului

$$AU=B; \; 0 \leq U \leq D \tag{4.1.4}$$

chiar dacă (4.1.4) admite un program complet, filtrat.

Evident, apare întrebarea: ce rost are testarea existenței unui program de bază pentru (4.1.3) ? Se ştie că dacă (4.1.3) nu admite un program de bază atunci nu admite un program şi deci (4.1.4) nu admite program complet (şi cu atât mai mult nu admite un program complet filtrat), deoarece orice program complet pentru (4.1.4) este program pentru (4.1.3). Testarea este deci necesară, dacă (4.1.3) nu admite programe de bază; atunci (4.1.4) nu are programe complete.

Exemplul 4.1.3. Fie dat sistemul

$$\begin{cases} 0{,}1u_1 + 0{,}1u_2 + 0{,}1u_3 = 5 \\ 0{,}2u_1 + 0{,}2u_2 + 0{,}1u_3 = 4 \end{cases} \qquad 0 \leq u_1 \leq D_1; 0 \leq u_2 \leq D_2; 0 \leq u_3 \leq D_3$$

nu admite programe complete deoarece sistemul

$$\begin{cases} 0{,}1u_1 + 0{,}1u_2 + 0{,}1u_3 = 5 \\ 0{,}2u_1 + 0{,}2u_2 + 0{,}1u_3 = 4 \end{cases} \qquad u_i \geq 0; \quad i = \overline{1,3}$$

nu admite programe de bază. Aşadar încercarea de a rezolva sistemul dat nu are rost, oricare ar fi mărginirea $\{D\}$.

Avem până acum o informație certă relativ la incompatibilitatea sistemului (4.1.4).

Exemplul 4.1.4. Fie dat sistemul

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 2 \\ u_2 + u_3 = \dfrac{5}{2} \end{cases} \qquad 0 \leq u_1 \leq 2; 0 \leq u_2 \leq 3; 0 \leq u_3 \leq 1$$

Un program de bază este ($u_1 = 2; u_2 = \frac{5}{2}; u_3 = 0$) care este şi program complet filtrat în două moduri:

$I^{(0)} = \{1,2\}$; $K_1^{(0)} = \{3\}$; $K_2^{(0)} = \Phi$ sau $I^{(0)} = \{3,2\}$; $K_1^{(0)} = \Phi$; $K_2^{(0)} = \{1\}$.

Exemplul 4.1.5. Pentru exemplul 4.1.4. există un program complet ($u_1 = \frac{3}{2}; u_2 = 2; u_3 = \frac{1}{2}$), care nu este filtrat deoarece nici o valoare nu este la marginea inferioară (zero) sau la marginea superioară D.

În mod curent, practic, se operează cu un program complet $\overline{U}$ şi se pune problema de a constata dacă $\overline{U}$ este optimal. Dacă nu este optimal atunci plecând cu $\overline{U}$ (sau cu altul) să se optimizeze problema.

În acest caz (4.1.2), optimizarea se obține pornind cu un program complet, filtrat (care joacă rolul unui program de bază, de pornire în algoritmul simplex, clasic, expus anterior). Prin urmare vor fi două faze:

În prima fază trebuie obținut un program complet, filtrat U_0. Aceasta implică cunoştințe suplimentare de rezolvare a sistemelor de forma (4.1.2).

În a doua fază, pornind cu U_0, să se obțină pas cu pas un nou program complet, filtrat "mai bun" ca cele generate până la el, până se ajunge la cel mai bun (optim). STOP.

În prima fază, curent se dispune de un program complet, cu care se operează. Dacă este complet filtrat se trece la o a doua fază. Dacă nu, atunci mai înainte trebuie dat un procedeu de "filtrare". Prin urmare, practic, dacă restricțiile sunt corecte, **sistemul admite programe complete.** Rămâne de arătat, teoretic, că dacă există programe complete atunci există programe complete filtrate. Demonstrația se face, transformând restricțiile, $0 \le U \le D$ în ecuații, ca în cazul treceri de la program la program de bază, căci sistemul va fi de forma $\widetilde{A}\widetilde{U} = \widetilde{B}; \widetilde{U} \ge 0$. În cele ce urmează vom demonstra acest fapt odată cu elaborarea unui algoritm de filtrare conceput de autori.

4.2. Generarea programelor complete filtrate, pornind de la un program complet filtrat $\underset{0}{U}$, prin schimbări,

$$\underset{0}{U}_j = 0 \to \underset{1}{U}_j;\ j \in K_1^{(0)}$$

Fie $\underset{0}{U}$ un program complet, filtrat pentru sistemul (4.1.2). Vom scrie

$$\underset{0}{U}\left|\begin{array}{l}\dfrac{\underset{0}{U}_{\bar{r}}}{z_0};\end{array}\right. \quad \bar{r} \in I^{(0)} \qquad \left|\begin{array}{l}\underset{0}{U}_k = 0\\ k \in K_1^{(0)}\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l}\underset{0}{U}_b = D_b\\ b \in K_2^{(0)}\end{array}\right. \quad ;\ M_0^{-1};\ \overline{M_0}^{-1};$$

$$\left|\begin{array}{l}\overline{C}_k^{(0)};k \in K_1^{(0)}\\ \overline{C}_b^{(0)};b \in K_2^{(0)}\end{array}\right.$$

(evident, $0 \le \underset{0}{u}_{\bar{r}} \le D_{\bar{r}}$).

Dacă se doreşte a se obține un alt program complet filtrat $\underset{1}{U}$, generat de $\underset{0}{U}$, căutând să schimbăm o valoare $\underset{0}{u}_j = 0$ ($j \in K_1^{(0)}$) într-o valoare nouă $\underset{1}{u}_j$ (evident pentru $0 \le \underset{1}{u}_j \le D_j$) se va proceda ca în situația anterioară, dar se vor pune şi condițiile $0 \le \underset{1}{u}_{\bar{r}} \le D_{\bar{r}}$; $\underset{1}{u}_j \le D_j$ în relațiile:

$$\underset{1}{u}_{\bar{r}} = \underset{0}{u}_{\bar{r}} - A_{rj}^{(0)}\underset{1}{u}_j \ ;\ \overline{M}_0^{-1}\left(\frac{P_j}{C_j}\right) = \left(\frac{P^0{}_j}{C_j^{(0)}}\right);\ P_j^{(0)} = \left(A_{rj}^{(0)}\right)_{r=\overline{1,m}} \qquad (4.2.1)$$

$$z_1 = z_2 + C_j^{(0)}\underset{1}{u}_j \qquad (4.2.2)$$

Observația 4.2.1. Dacă se dorește numai aflarea lui $\underset{1}{U}$, atunci (4.2.2) nu se mai scrie iar, $j \in K_1^{(0)}$ se alege arbitrar. Dacă se urmărește și obținerea z=f(U), simultan atunci, ca și anterior se stabilește, $j \in K_1^{(0)}$ prin regula

$$j \left| C_j^{(0)} = \max_{j \in K_1^{(0)}} \left\{ C_k^{(0)} > 0 \right\} \right. \tag{4.2.3}$$

dacă se dorește ca $z_1 > z_0$, sau prin regula

$$j \left| C_j^{(0)} = \min_{j \in K_1^{(0)}} \left\{ C_k^{(0)} < 0 \right\} \right. \tag{4.2.3'}$$

daca se dorește ca $z_1 < z_0$.

Din (4.2.1) punând condițiile, $u_{\bar{r}} \geq 0$, $\forall \bar{r} \in I^{(0)}$ se obține:

$$\underset{1}{u_j} \leq \frac{\underset{0}{u_{\bar{r}}}}{A_{rj}^{(0)}} \qquad \forall \bar{r} \in I^{(0)} \left| A_{rj}^{(0)} > 0 \right. \tag{4.2.4}$$

Fie

$$r_{\bar{i}j}^{(0)} \underset{=\!=}{def} \min_{A_{ij}^{(0)} > 0} \left\{ \frac{\underset{0}{u_{\bar{r}}}}{A_{rj}^{(0)}} \right\} = \frac{\underset{0}{u_{\bar{i}}}}{A_{ij}^{(0)}} \tag{4.2.5}$$

Din (4.2.1), punând condițiile, $u_{\bar{r}} \leq D_{\bar{r}}, \bar{r} \in I^{(0)}$ pentru care $A_{rj}^{(0)}$<0, rezultă:

$$\underset{1}{u_j} \leq \frac{\underset{0}{u_{\bar{r}} - D_{\bar{r}}}}{A_{rj}^{(0)}} \tag{4.2.4'}$$

Fie

$$R_{\bar{s}j}^{(0)} \underset{=\!=}{def} \min_{A_{ij}^{(0)} < 0} \left\{ \frac{\underset{0}{u_{\bar{r}} - D_{\bar{r}}}}{A_{rj}^{(0)}} \right\} = \frac{\underset{0}{u_{\bar{s}} - D_{\bar{s}}}}{A_{sj}^{(0)}} \tag{4.2.6}$$

și

$$a_j \underset{=\!=}{def} \min \left\{ D_j ; r_{\bar{i}j}^{(0)} ; R_{\bar{s}j}^{(0)} \right\} \tag{4.2.7}$$

a) Dacă se alege, $0<u_{\underset{1}{j}} < a_j$ atunci din (4.2.1) se obține un program complet care în general nu este filtrat.

b) Dacă se alege, $u_{\underset{1}{j}} = a_j$ atunci din (4.2.1) se obține un nou program complet filtrat astfel:

b1) Dacă $a_j = D_j$ se lasă $u_{\underset{1}{j}} = D_j$ tot secundară şi din (4.2.1) şi (4.2.2) se obțin noile date:

$$\underset{1}{U}\left|\begin{array}{l} u_{\underset{1}{\bar r}} \\ z_1 \end{array}\right. \quad \bar r \in I^{(1)} = I^{(0)} \qquad \left|\begin{array}{l} u_{\underset{1}{k}} = 0 \\ k \in K_1^{(1)} = K_1^{(0)} \setminus \{j\} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} u_{\underset{1}{b}} = D_b \\ b \in K_2^{(1)} = K_2^{(0)} \cup \{j\} \end{array}\right.$$

$$C_k^{(1)} = C_k^{(0)} \qquad C_b^{(1)} = C_b^{(0)};\ \underset{1}{M} = \underset{0}{M}$$

adică se obține un nou program complet filtrat **fără schimbare de bază.**

b2) Dacă $a_j = r_{\bar i j}^{(0)}$, atunci alegând $u_{\underset{1}{j}} = r_{\bar i j}^{(0)}$, ca nouă valoare bazică în locul lui $u_{\bar i}(\bar i \in I^{(0)})$ care devine secundară la valoarea $u_{\underset{1}{\bar i}} = 0$ se obține un nou program complet filtrat:

$$\underset{1}{U}\left|\begin{array}{l} u_{\underset{1}{\bar r}} \\ z_1 \end{array}\right. \qquad \bar r \in I^{(1)} = \{j\} \cup I^{(0)} \setminus \{\bar i\} \qquad \left|\begin{array}{l} u_{\underset{1}{k}} = 0 \\ k \in K_1^{(1)} = K_1^{(0)} \setminus \{j\} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} u_{\underset{1}{b}} = D_b \\ b \in K_2^{(1)} = K_2^{(0)} \end{array}\right.$$

relativ la noua bază, de matrice $\overline{\underset{1}{M}}^{-1}$ ce se obține, cum s-a văzut din $\overline{\underset{0}{M}}^{-1}$ prin pivotare, pe $\overline{\underset{0}{M}}^{-1}$ cu pivot$\left[A_{\bar i j}^{(0)}\right]$ (numitorul lui $r_{\bar i j}^{(0)}$). Se obține apoi $\left\{C^{(1)}\right\}$.

b3) Dacă $a_j = R_{\bar{s}j}^{(0)}$, alegând, $\underset{1}{u_j} = R_{\bar{s}j}^{(0)}$ ca nouă valoare bazică în locul lui, $\underset{0}{u_{\bar{s}}}(\bar{s} \in I^{(0)})$ care devine secundară la noua valoare $\underset{1}{u_{\bar{s}}} = D_{\bar{s}}$ (cum rezultă din (4.2.1)), se obține un nou program complet filtrat :

$$\underset{1}{U}\left|\begin{array}{l} \underset{1}{u_{\bar{r}}} \\ -- \\ z_1 \end{array}\right. \qquad \bar{r} \in I^{(1)} = \{j\} \cup I^{(0)} \setminus \{\bar{s}\} \qquad \left|\begin{array}{l} \underset{1}{u_k} = 0 \\ k \in K_1^{(1)} = K_1^{(0)} \setminus \{j\} \end{array}\right.$$

.

$$\left|\begin{array}{l} \underset{1}{u_b} = D_b \\ b \in K_2^{(1)} = K_2^{(0)} \cup \{\bar{s}\} \end{array}\right.$$

relativ la o nouă bază de matrice, $\underset{1}{M}$ pentru care, $\underset{1}{M}^{-1}$; $\underset{1}{\overline{M}}^{-1}$ se calculează din $\underset{0}{\overline{M}}^{-1}$ prin pivotare cu pivot, $\left[A_{\bar{s}j}^{(0)}\right]$ ca mai înainte. Se obține apoi, $\{C^{(1)}\}$.

Cu noile date se va relua algoritmul (0 : = 1, 1 : = 2). Să îl scriem organizat.

ALGORITMUL (I_{K_1})

(0) **Inițial.** Dispunem de un program complet filtrat $\underset{0}{U}$.

(1) **Calculăm** : $\underset{0}{M}^{-1}$; $\underset{0}{\overline{M}}^{-1}$; $C^{(0)}$;

(2) **Alegem** $j \in K_1^{(0)}$ şi scriem (4.2.1) şi (4.2.2);

(3) **Calculăm** (4.2.5) şi (4.2.6) ;

(4) **Calculăm** (4.2.7) ;

(5) Se procedează ca la b) (b1) sau b2) sau b3)) şi se obține un nou program complet filtrat, cu care se va relua algoritmul.

Evident schimbările de această formă se vor termina după un număr finit de paşi căci $K_1^{(0)}$, este o mulțime finită (dacă $K_1^{(0)} \neq \Phi$).

Exemplul 4.2.1. Să considerăm modelul liniar,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 14 \\ \hline \max \varphi(X) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 12 \end{cases}$$

$1 \le x_1 \le 2; 1 \le x_2 \le 2; 1 \le x_3 \le 3; 1 \le x_4 \le 4$

Făcând transformările $u_i = x_i - 1$ (cu $i = \overline{1,4}$), rezultă :

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4 \\ u_1 + 3u_2 + u_3 + 2u_4 = 7 \\ \hline \max f(U) = 2u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 3u_4 \end{cases}$$

$0 \le u_1 \le 1; 0 \le u_2 \le 1; 0 \le u_3 \le 2; 0 \le u_4 \le 3$

Un program complet filtrate este $\underset{0}{U}$

$$\underset{0}{U}\left|\begin{array}{l} \underset{0}{u_3} = 1 \\ \underset{0}{u_4} = 3 \\ ---- \\ z_0 = 13 \end{array}\right. \qquad I^{(0)} = \{3;4\} \qquad \left|\begin{array}{l} \underset{0}{u_1} = 0 \\ \underset{0}{u_2} = 0 \\ K_1^{(0)} = \{1;2\}; K_2^{(0)} = \Phi \end{array}\right.$$

$$\underset{0}{\overline{M}}^{-1}_{(3;4)} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline -5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$C_1^{(0)} = (-5\,1\,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -7 < 0;$$

$$C_2^{(0)} = (-5\,1\,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Pentru a obține un nou program complet filtrat nu avem decât posibilitatea de a face schimbări $j \in K^{(0)}{}_1$ (căci $K_2^{(0)} = \Phi$). Se poate alege j=1 sau j=2. Dacă se ţine cont şi de z=f(U), se va alege “j” după regula (4.2.3). Rezultă j=2 (căci $C_2^{(0)} = 1$).

Calculăm

$$P_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} A_{12}^{(0)} \\ A_{22}^{(0)} \end{matrix}$$

Scriem $\begin{cases} \underset{1}{u_3} = 1 - (-1)\underset{1}{u_2} \\ \underset{1}{u_4} = 3 - 2\underset{1}{u_2} \\ z_1 = 13 + 1 \cdot \underset{1}{u_2} \end{cases}$

Calculăm:

$$r_{\bar{i}2}^{(0)} = \frac{3}{2} \ (\ \bar{i} = 4\ ) \ ; \ R_{\bar{s}2}^{(0)} = \frac{1-2}{-1} \ \text{(căci } D_3 = 2,\ \bar{s} = 3\text{)},$$

$$a_2 = \min\left\{ D_2 = 1; \frac{3}{2}; \frac{1-2}{-1} = 1 \right\} = 1.$$

Cum $a_2 = D_2 = R_{32}^{(0)} = 1$ se va alege $\underset{1}{u_2} = D_2 = 1$ pentru a nu schimba baza. Rezultă:

$$\underset{1}{U}\left| \begin{matrix} \underset{1}{u_3} = 2 \\ \underset{1}{u_4} = 1 \\ ---- \\ z_1 = 14 \end{matrix} \right. \qquad I^{(1)} = I^{(0)} \qquad \left| \begin{matrix} \underset{1}{u_1} = 0 \\ K_1^{(1)} = \{1\} \end{matrix} \right. \qquad \left| \begin{matrix} \underset{1}{u_2} = 1 = D_2 \\ K_2^{(1)} = \{2\} \end{matrix} \right. \qquad \underset{1}{\overline{M}}^{-1} = \underset{0}{\overline{M}}^{-1}$$

$C^{(1)} = C^{(0)}$.

Dacă alegem $\underset{1}{u_2} = 1 = R_{32}^{(0)}$, se introduce u_2 în bază la valoarea $\underset{1}{u_2} = 1$. Se obţine :

$$\underset{1}{U}\left|\begin{array}{l} \underset{1}{u_2} = 1 \\ \underset{1}{u_4} = 1 \\ ---- \\ z_1 = 14 \end{array}\right. \qquad I^{(1)} = \{2; 4\} \qquad \left|\begin{array}{l} \underset{1}{u_1} = 0 \\ K_1^{(1)} = \{1\} \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \underset{1}{u_3} = 2 = D_3 \\ K_2^{(1)} = \{3\} \end{array}\right.$$

$$\underset{1}{M} = M_{(2;4)}$$

(altă ordine a valorilor, față de U anterior) relativ la baza $\underset{1}{M} = M_{(2;3)}$. Rezultă:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right. \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{\underset{1}{M_{(2;4)}}}^{-1};$$

$$\left|\begin{array}{l} C_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 \\ C_3^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 > 0 \end{array}\right.$$

Se poate continua cu j=$1 \in K_1^{(1)}$ şi se va obține un nou program complet filtrat, dar creşterea lui z va fi mai înceată. (Exercițiu)

4.3. Generarea programelor complete, filtrate, pornind da la un program complet filtrat prin schimbări, $\underset{0}{u_a} = D_a \rightarrow \underset{1}{u_a}$ $(a \in K_2^{(0)})$

.

(0). **Inițial.** Se dispune de un program complet filtrat $\underset{0}{U}$ cu $K_2^{(0)} \neq \Phi$.

(1). **Se alege** $a \in K_2^{(0)}$ arbitrar, sau dacă se urmăreşte un scop, max z (sau min z) atunci se alege, $a \in K_2^{(0)}$ după regula:

.

$$C_a^{(0)} = \max_{b \in K_2^{(0)}} \left\{ -C_b^{(0)} > 0 \right\} \qquad (4.3.1)$$

dacă se urmăreşte max z respectiv după regula

$$C_a^{(0)} = \min_{b \in K_2^{(0)}} \left\{ -C_b^{(0)} < 0 \right\} \qquad (4.3.1)'$$

dacă se urmăreşte (min z).

(2). **Calculăm**

$$P_b^{(0)} = \underset{0}{M}^{-1} P_b = (A_{rb}^{(0)}); \qquad r = \overline{1, m}.$$

(3). **Scriem:**

$$\underset{1}{u_{\bar{r}}} = \underset{0}{u_{\bar{r}}} + A_{ra}^{(0)} (D_a - \underset{1}{u_a}) \qquad \bar{r} \in I^{(0)}; r = \overline{1, m} \qquad (4.3.2)$$

$$z_1 = z_2 + C_a^{(0)} (\underset{1}{u_a} - D_a) \qquad (4.3.3)$$

(4). **Calculăm:**

$$s_{\bar{i}a}^{(0)} \underset{A_{ra}^{(0)} > 0}{\overset{def}{=\!=}} \max \left\{ \frac{\underset{0}{u_{\bar{r}}} - D_{\bar{r}}}{A_{ra}^{(0)}} + D_a \right\} = \frac{\underset{0}{u_{\bar{i}}} - D_{\bar{i}}}{A_{ia}^{(0)}} + D_a \qquad (4.3.4)$$

$$S_{\bar{l}a}^{(0)} \underset{A_{raj}^{(0)} < 0}{\overset{def}{=\!=}} \max \left\{ \frac{\underset{0}{u_{\bar{r}}}}{A_{ra}^{(0)}} + D_a \right\} = \frac{\underset{0}{u_{\bar{l}}}}{A_{la}^{(0)}} + D_a \qquad (4.3.5)$$

(5). **Se calculează:**

$$\beta_a = \max\{0; s_{\bar{i}a}; S_{\bar{l}a}\} \qquad (4.3.6)$$

(6). **Se alege**, $\underset{1}{u_a} = \beta_a$ în (4.3.2) şi (4.3.3).

(6.a) **Dacă** $\beta_a = 0$, atunci $\underset{1}{u_a} = 0$ se păstrează tot ca valoare secundară pentru a nu schimba baza . Se obține un nou program complet filtrat:

$$\underset{1}{U}\left|\begin{array}{l} \underset{1}{u_{\bar r}} \\ -- \\ z_1 \end{array}\right. \qquad \bar r \in I^{(1)} = I^{(0)} \qquad \left|\begin{array}{l} \underset{1}{u_k} = 0 \\ k \in K_1^{(1)} = K_1^{(0)} \cup \{a\} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \underset{1}{u_b} = D_b \\ b \in K_2^{(1)} = K_2^{(0)} \setminus \{a\} \end{array}\right. \; ; \; \underset{1}{M} = \underset{0}{M} \; ; \quad \overline{\underset{1}{M}}^{-1} = \overline{\underset{0}{M}}^{-1} \quad ; \quad C^{(1)} = C^{(0)}.$$

(6.b) **Dacă** $\beta_a = s_{\bar i a}$ atunci se alege $\underset{1}{u_a} = s_{\bar i a}$ ca nouă valoare bazică în locul lui $u_{\bar i}$ care devine secundară la valoarea $D_{\bar l}$. Se obține un nou program complet filtrat $\underset{1}{U}$ relativ la noua bază $\underset{1}{M}$ pentru care $\overline{\underset{1}{M}}^{-1}$ se obține din $\overline{\underset{0}{M}}^{-1}$ prin pivotare cu pivot $A_{ia}^{(0)}$ .Se calculează $C^{(1)}$ şi cu $\underset{1}{U}$ se va relua algoritmul (0:=1 ; 1:=2).

(6.c) **Dacă** $\beta_a = S_{\bar l a}$, atunci se alege $\underset{1}{u_a} = S_{\bar l a}$ ca nouă valoare bazică în locul lui $u_{\bar l}$ care devine, $\underset{1}{u_{\bar l}} = 0$ secundară. Se obține un nou program complet filtrat $\underset{1}{U}$ relativ la o nouă bază $\underset{1}{M}$ pentru care $\overline{\underset{1}{M}}^{-1}$ se obține din $\overline{\underset{0}{M}}^{-1}$ prin pivotare cu pivot $A_{la}^{(0)}$.

Cu noile date se va relua algoritmul.

Relațiile (4.3.2) sunt stabilite mai departe. Relația (4.3.3) rezultă din aceeaşi motivație: pentru a modifica valoarea z_0 prin schimbarea, $\underset{0}{u_a} = D_a \rightarrow \underset{1}{u_a} < D_a$, trebuie să scădem $C_a^{(0)} D_a$ şi să adăugăm $C_a^{(0)} \underset{1}{u_a}$.

Relațiile (4.3.4) și (4.3.5) rezultă din condițiile: $u_{\bar{r}_1} \le D_{\bar{r}}$ pentru $A_{ra}^{(0)} > 0$ și $u_{\bar{r}_1} \ge 0$ pentru $A_{ra}^{(0)} < 0$.

Pentru $u_{a_1} > \beta_a$ **și** $u_{a_1} < D_a$ **se vor obține un număr infinit de programe complete, care în general nu sunt filtrate.**

Exemplul 4.3.1 Să admitem că în problema (1.a) din paragraful 1, resursele (imputurile) sunt $B_1 = 9; B_2 = 14$, iar pe perioada de producție contractată, cererile sunt: $d_1 = 1;\quad d_2 = 1;\quad d_3 = 1;\quad d_4 = 1$, iar capacitățile de producție sunt: $S_1 = 2;\quad S_2 = \frac{5}{2};\quad S_3 = 3;\quad S_4 = 3$. Se mai cunosc și cheltuielile fixe pe această perioadă, estimate la 12.000. **Mai mult, un program de producție curent este dat,**

$$\overline{X}^t = (x_1 = \frac{7}{6};\quad x_2 = \frac{5}{2};\quad x_3 = 3;\quad x_4 = \frac{7}{6}).$$

Se pun problemele:

a) Acest program curent este cel mai bun, sau nu, din punct de vedere al scopului urmărit (maximizarea beneficiului total) ?

b) Dacă nu, să se obțină un program mai bun, modificând acest program curent.

Rezolvare:

Modelul este cel din exemplul (4.2.1) numai că $S_4 = 3;\quad S_2 = \frac{5}{2}$ și s-a luat mia de dolari ca unitate. Avem și $\varphi(\overline{X}) = \frac{40}{3}$. Rezultă:

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4 \\ u_1 + 3u_2 + u_3 + 2u_4 = 7 \\ \hline \max z = f(X) = 2u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 3u_4 \end{cases}$$

$$0 \le u_1 \le 1;\ 0 \le u_2 \le \frac{3}{2};\ 0 \le u_3 \le 2;\ 0 \le u_4 \le 2$$

Cum $\overline{X}^t$ se transformă în $\underset{0}{U} = \left(\frac{1}{6}; \frac{3}{2}; 2; \frac{1}{6}\right)$ și $z_0 = \frac{40}{3}$, se observă că $\underset{0}{U}$, este un program complet. Cum $u_{2_0} = \frac{3}{2} = D_2$; $u_{3_0} = 2 = D_3$;

$0 < \underset{0}{u_1} = \frac{1}{6} < D_1 = 1$; $0 < \underset{0}{u_4} < D_4 = 2$, acest program complet este filtrat şi putem alege,

$$\underset{0}{U}\left|\begin{array}{l} \underset{0}{u_1} = \frac{1}{6} \\ \underset{0}{u_4} = \frac{1}{6} \\ ---- \\ z_0 = \frac{40}{3} \end{array}\right. \qquad I^{(0)} = \{1; 4\} \qquad \left|\begin{array}{l} \underset{0}{u_2} = \frac{3}{2} = D_2 \\ \underset{0}{u_3} = 2 = D_3 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} K_2^{(0)} = \{2; 3\}; \\ K_1^{(0)} = \Phi \end{array}\right.$$

$$\overline{\underset{0}{M}_{(1;4)}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{(0)}{}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3} < 0$$

$$C^{(0)}{}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{7}{3} > 0$$

Cum există $C_a^{(0)} < 0$, din (4.2.4) rezultă că există un alt program complet filtrat, $\underset{1}{U}$ de valoare $z_1 > z_0 = \frac{40}{3}$. Deci $\underset{0}{U}$ nu este “cel mai bun”, adică programul de producție $\overline{X}$ nu este optimal.

ALGORITMUL (I_{K_2})

(0). **Inițial** dispunem de $\underset{0}{U}$.

(1). **Scriem** (4.3.1):

$$\max_{b \in K_2^{(0)}} \left\{ -C_b^{(0)} > 0 \right\} = -C^{(0)}{}_2 \quad ; \text{a=2} \; ; C_2^{(0)} = -\frac{4}{3}$$

(2). **Calculăm**

$$P_2^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} A_{12}^{(0)} \\ A_{22}^{(0)} \end{matrix}$$

(3). **Scriem:**

$$\begin{cases} \underset{1}{u_1} = \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{3} \right) \left(\frac{3}{2} - \underset{1}{u_2} \right) \\ \underset{1}{u_4} = \frac{1}{6} + \frac{5}{3} \left(\frac{3}{2} - \underset{1}{u_2} \right) \\ z_1 = \frac{40}{3} + \left(-\frac{4}{3} \right) \left(\underset{1}{u_2} - \frac{3}{2} \right) \end{cases} \quad ; \qquad \text{căci } D_2 = \frac{3}{2} .$$

(4). **Calculăm:**

$$s_{\bar{i}2}^{(0)} \underset{\overline{\overline{}}}{def} \max_{A_{i2}^{(0)} > 0} \left\{ \frac{\frac{1}{6} - 2}{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2} \right\} = \frac{2}{5} ; \text{ (i=4)}$$

$$S_{\bar{l}2}^{(0)} \underset{\overline{\overline{}}}{def} \max_{A_{r2}^{(0)} < 0} \left\{ \frac{\frac{1}{6}}{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2} \right\} = 1 ; \text{ (} \bar{l} \text{=1).}$$

(5). **Calculăm:**

$$\beta_2 = \max \left\{ 0; \frac{2}{5}; 1 \right\} = 1 = S_{1;2}$$

(6). Se alege $\underset{1}{u_2} = S_{4;2} = 1$ ca nouă valoare bazică în locul lui u_1 care devine secundară $\underset{1}{u_1} = 0$. Rezultă un nou program complet filtrat:

$$\underset{1}{U}\left|\begin{array}{l} \underset{1}{u_2} = 1 \\ \underset{1}{u_4} = 1 \\ ---- \\ z_1 = 14 \end{array}\right. \qquad I^{(1)} = \{2;\,4\} \qquad \left|\begin{array}{l} \underset{1}{u_1} = 0 \\ K_1^{(1)} = \{1\} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \underset{1}{u_3} = 2 = D_2 \\ K_2^{(1)} = \{3\} \end{array}\right. \qquad \overline{M_{(2;4)}}^{-1}$$

Se pivotează pe $\overline{M_{(1;4)}}^{-1}$ cu pivot $A_{12}^{(0)} = -\dfrac{1}{3}$;

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right)\left\|\left(\begin{array}{c} \left[-\frac{1}{3}\right] \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{array}\right)\right. \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{M_{(2;4)}}^{-1}$$

Calculăm:

$$C_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 < 0 \qquad \left(1 \in K_1^{(1)}\right)$$

$$C_3^{(0)} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 > 0 \qquad \left(3 \in K_2^{(1)}\right)$$

Cu noile date se poate relua algoritmul dacă dorim şi alte posibile programe complete filtrate.

Cum dacă se ţine cont şi de scop ar trebui să continuăm fie cu $\max\limits_{j \in K_1^{(1)}}\left\{C_j^{(1)} > 0\right\}$, fie cu, $\max\limits_{b \in K^{(1)}{}_2}\left\{-C^{(1)}{}_b > 0\right\}$.

Rezultă că dacă $K_1^{(p)} \neq \Phi; K_2^{(p)} \neq \Phi;$ la un pas p ($p \geq 0$) pentru schimbare se va alege $j \in K_1$ sau $a \in K_2$ după cum:

(8). $\max_{k\in K_1^{(p)};b\in K_2^{(p)}}\left\{C_k^{(p)}>0;-C_b^{(p)}>0\right\}$

este un $C_j^{(p)}$ sau un $-C_a^{(p)}$.

În cazul dat deşi $K_1^{(1)}\neq\Phi;K_2^{(1)}\neq\Phi$; avem $C_1^{(1)}<0$ $(1\in K_1^{(1)})$; $C_3^{(1)}>0$ $(3\in K_2^{(1)})$. **STOP.**

La $\underset{1}{U}$ corespunde $\underset{1}{X}=(0+1=1;1+1=2;\,2+1=3;1+1=2\;)$ şi $\varphi(\underset{1}{X})$=14 (14.000) (s-au obținut date de maxim).

Dacă s-ar dori şi programe complete în general, atunci la (3). s-ar da lui $\underset{1}{u_2}$ orice valoare între 0 şi $D_2=\frac{3}{2}$.

În practică este posibil ca programul curent $\overline{X}$ să ducă la un program $\overline{U}$ complet, care să nu fie filtrat şi atunci trebuie mai întâi filtrat. Astfel să admitem că în exemplul (4.3.2) anterior, $\overline{X}^t=\begin{pmatrix}\frac{7}{5} & \frac{11}{5} & 2 & 2\end{pmatrix}$ este un program curent. Atunci $\overline{U}^t=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 1 & 1\end{pmatrix}$ este un program complet dar nu este filtrat.

Aspecte teoretice. Dacă avem un program complet $\underset{0}{U};I^0;K_1^{(0)};K_2^{(0)}\neq\Phi$ de matrice bazică $\underset{0}{M}$. Cum $K_2^{(0)}\neq\Phi$ rezultă că în forma canonică

$$\overline{u_{\bar{r}}}=B_{\bar{r}}-\sum_k A_{rk}^{(0)}u_k\qquad B_{\bar{r}}=\underset{0}{M}^{-1}B\qquad P_j^{\,0}=\left[A_{rj}^{\,0}\right]=\underset{0}{M}^{-1}P_j\qquad(1)$$

variabilele secundare u_j au fost fixate unele la valoarea zero $\left(\underset{0}{u_k}=0;\,k\in K^{(0)}{}_1\right)$ şi altele la valoarea D$(\underset{0}{u_a}=D_a\quad a\in K_2^{(0)}$) şi s-a obținut $\underset{0}{U}$: ($\underset{0}{u_{\bar{r}}}$; $\bar{r}\in I^{(0)}$; $\underset{0}{u_j}=0$; $j\in K_1^{(0)}$; $\underset{0}{u_a}=D_a$).

Fie $\underset{0}{u_a};D_a;a\in K_2$. Adunăm la membrul drept $A_{ra}^{\,0}D_a$ şi în acest fel $\underset{0}{u_a}=D_a$ nu mai apare în valorile $\underset{0}{u_{\bar{r}}}$. Lăsăm u_a arbitrar. Rezultă:

$$u_{\bar{r}}=\underset{0}{u_{\bar{r}}}+A_{ra}^{\,0}D_a-A_{ra}^{\,0}u_a=\underset{0}{u_{\bar{r}}}+A_{ra}^{\,0}(D_a-u_a)\qquad(2)$$

adică relația (4.3.2), care modifică valorile $u_{\bar{r}}$ la pasul următor, dacă modificăm u_a.

Considerând sistemul extins cu $\sum_{i=1}^{n} C_i u_i + (-z) = 0$ în această ultimă relație vom avea:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k U_k + (-z) = -\overline{z_0} \qquad (1)‘$$

unde,

$$\overline{C_k}^{(0)} = \left(-C_b^{(0)} \underset{0}{M}^{-1}, 1\right)\left(\begin{array}{c} \dfrac{P_k}{C_k} \end{array}\right); \qquad \left(-C_b^{(0)} \underset{0}{M}^{-1}; 1\right)\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} = -\overline{z_0}. \qquad (2)’$$

Corespunzător la $\underset{0}{U}$; $\underset{0}{u_j} = 0$; $j \in K_1^{(0)}$; $\underset{0}{u_a} = D_a$; $a \in K_2^{(0)}$ se obține:

$$z = \overline{z_0} + \sum_{a \in K_2} \overline{C}_a^{(0)} D_a \overset{def}{=} z_0 \qquad (1)“$$

Dacă din z_0 scădem contribuția lui $\underset{0}{u_a} = D_a$ și lăsăm liber u_a, rezultă:

$$z_{nou} = \overline{z_0} - \overline{C}_a^{(0)} D_a + \overline{C}_a^{(0)} u_a = z_0 + \overline{C}_a^{(0)} (u_a - D_a) \qquad (3)$$

adică s-a obținut relația (4.3.3) de modificare a lui z la o modificare $u_0 = D_a \quad \to \underset{1}{u_a}$ (nou). În rest totul rezultă chiar din condițiile puse.

4.4 FILTRARE

Algoritmul F1. Aşa cum s-a văzut, în practică, se operează cu un anumit program, $\overline{X}_0$. În acest caz, $\overline{U}_0$, corespunzător este un program complet, dar în general nu este şi filtrat. **Va trebui filtrat.** Să dăm un algoritm prin "**micşorare**".

Se aleg (m) valori, $\overline{u}_r$, $r \in I$ la care să corespundă o matrice bazică, $\tilde{M}$, nesingulară (fapt posibil întotdeauna căci rang A =m). Celelalte valori satisfac şi ele condiţiile $0 \leq \overline{u}_{s \atop 0} \leq D_s$ şi cel puţin o valoare satisface $0 < \overline{u_a} < D_a$.

Fie $\overline{K_1^{(0)}} = \{K \mid \overline{u}_{k \atop o} = 0\}$; $\overline{K_2^{(0)}} = \{\overline{u}_{b \atop 0} = D_b\}$;

$\overline{K_{2 \atop <}}^{(0)} = \{0 < \overline{u}_{c \atop 0} = \overline{D_c} < D_C\}$.

Evident $K_{2 \atop <}^{(0)} \neq \emptyset$; $\overline{K_1} \cup \overline{K_2} \cup \overline{K_{2 \atop <}} = \overline{K}$ (mulţimea indicilor variabilelor secundare).

1. Calculăm: $\tilde{M}_0^{-1} P_a = P_a^{(0)}$; $a \in \overline{K_{2 \atop <}}$ (pentru un „a" ales arbitrar, $a \in \overline{K_{2 \atop <}}$; $X_0 < \overline{u}_{a \atop 0} = \overline{D_a} < D_a$).

2. Scriem:

$$\overline{u}_{\bar{r} \atop 1} = \overline{u}_{\bar{r} \atop 0} + A_{ra}^{(0)} (\overline{D}_a - u_{a \atop 1}); \ \forall \, \overline{r} \in \overline{I}^{(0)} \ ; \ r = \overline{1,m} \qquad (4.4.1)$$

3. Calculăm:

$$\overline{s_{\bar{i}_a}^{(0)}} \overset{def}{=} \max_{A_{ra}^{(0)}>0} \left\{ \frac{\overline{u_{\bar{r}}} - D_{\bar{r}}}{A_{ra}^{(0)}} + \overline{D_a} \right\} = \frac{\overline{u_{\bar{i}}} - D_{\bar{i}}}{A_{ia}^{(0)}} + \overline{D_a} \tag{4.4.2}$$

$$\overline{S_{\bar{i}a}^{(0)}} \overset{def}{=} \max_{A_{ra}^{(0)}<0} \left\{ \frac{\overline{u_{\bar{r}}}}{A_{ra}^{(0)}} + \overline{D_a} \right\} = \frac{\overline{u_{\bar{l}}}}{A_{la}^{(0)}} + \overline{D_a} \tag{4.4.3}$$

4. <u>Calculăm:</u> $\overline{\beta_a} = \max\{0; \overline{s_{\bar{i}a}}; \overline{S_{\bar{l}a}}\}$

4.a. Dacă, $\overline{\beta_a}=0$, atunci se alege, $\overline{u_{a_1}} = 0$ tot ca secundară pentru a nu schimba baza, $\tilde{M}_1 = \tilde{M}_0$. Se obține un nou program U_1 complet. Dacă ,$\overline{K_{\substack{2\\<}}^{(1)}} = \varnothing$ atunci STOP: U_1 este program complet filtrat. Dacă $\overline{K_{\substack{2\\<}}^{(1)}} \neq \Phi$ cu noile date U_1, $\overline{I^{(1)}} = \overline{I^{(0)}}$; $\overline{K_1^{(1)}} = \overline{K_1^{(0)}}$; $\overline{K_2^{(1)}} = \overline{K_2^{(0)}}$; $\overline{K_{\substack{2\\<}}^{(1)}}$; $\tilde{M}_1 = \tilde{M}_0$ se va relua algoritmul.

4.b. Dacă $\overline{\beta_a} = \overline{s_{\bar{i}a}}$ atunci se alege, $\overline{u_{a_1}} = \overline{s_{\bar{i}a}}$ ca nouă valoare bazică în locul lui $\overline{u_{\bar{i}}}$ care devine secundară la valoarea $\overline{u_{\bar{i}_1}} = D_{\bar{i}}$. Din (4.4.1) se obțin noile valori care duc la un nou program U_1 complet, de matrice bazică $\tilde{M}_1^{-1}$ care se obține din

$\tilde{M}_0^{-1}$ prin pivotare cu pivot $A_{ia}^{(0)}$. Dacă $\overline{K}_{\underset{<}{2}}^{(1)} = \overline{K}_{\underset{<}{2}} \setminus \{a\}$ este vidă atunci STOP : U_1 este program complet filtrat. În caz contrar cu U_1 se va relua algoritmul.

4.c. Dacă $\overline{\beta_a} = \overline{S_{\bar{l}a}}$ atunci se alege , $u_{1}^{a} = \overline{S_{\bar{l}a}}$ bazică în locul lui $u_{\bar{l}}$ care devine secundară la valoarea $u_{1}^{\bar{l}} = 0$ ($\bar{l} \in K_1^{(1)}$) . Se obține un nou program U_1 complet. Se procedează ca şi anterior dacă U_1 nu este şi filtrat, dar cu matricea $\tilde{M}_1^{-1}$ ce se obține din $\tilde{M}_0^{-1}$, prin pivotare cu pivot, $A_{la}^{(0)}$.

Demonstrație: S-au selectat (n-m) valori secundare care au generat K_1, K_2,
$K_{\underset{<}{2}}$. Valorile bazice, $\overline{u_{\bar{r}}}$; $\bar{r} \in I^{(0)}$ satisfac 0< $\overline{u_{\bar{r}}}$< $D_{\bar{r}}$, căci dacă nu $\overline{x_{\bar{r}}}$=0 sau $\overline{x_{\bar{r}}}$= $D_{\bar{r}}$ va trece în $\overline{K_1}$respectiv în $\overline{K_2}$ în locul uneia $\overline{u_c}$; c $\in \overline{K}_{\underset{<}{2}}$ ($k_{\underset{<}{2}} \neq \emptyset$). Cum dorim ca u_{1}^{a} < $\overline{D_a}$ ($\overline{D_a}$ - u_{1}^{a}>0) din (4.4.1) punând condițiile $\overline{u_{\bar{r}}}$ $\leq D_{\bar{r}}$ dacă A_{ra}>0, respectiv $\overline{u_{\bar{r}}}$ $\geq$0 dacă A_{ra}<0 rezultă (4.4.2); (4.4.3). Evident; $\bar{s}$< $\overline{D_a}$; $\overline{S}$<$\overline{D_a}$; 0< $\overline{D_a}$.

Algoritmul F.2. Dacă se doreşte mărirea lui $\overline{u_{a_1}} = \overline{D_a}$ la marginea superioară D_a, atunci se pune condiția ($\overline{D_a}$ - u_{a_1})<0 sau $\overline{D_a} < u_{a_1}$.

Din (4.4.1) rezultă că de la **3.** începe modificarea :

3'. Calculăm

$$\overline{r_{\bar{i}a}} \overset{def}{=} \min_{A^{(0)}_{ra}>0} \left\{ \frac{\overline{u_{\bar{r}_0}}}{A^{(0)}_{ra}} + \overline{D_a} \right\} = \frac{u_{\bar{i}_0}}{A^{(0)}_{ia}} + \overline{D_a} \tag{4.4.4}$$

$$\overline{R_{\bar{l}a}} \overset{def}{=} \min_{A^{(0)}_{ra}<0} \left\{ \frac{\overline{u_{\bar{r}_0}} - D_{\bar{r}}}{A^{(0)}_{ra}} + \overline{D_a} \right\} = \frac{\overline{u_{\bar{l}_0}} - D_{\bar{l}}}{A^{(0)}_{la}} + \overline{D_a} \tag{4.4.5}$$

4'. Calculăm $\overline{\alpha_a}$=min { D_a;$\overline{r_{\bar{i}a}}$;$\overline{R_{\bar{l}a}}$ }

(4'.a) Dacă $\overline{\alpha_a} = D_a$ atunci se alege $u_{a_1} = D_a$ tot ca secundară şi nu se schimbă baza. Dacă $\overline{K^{(1)}_{\underset{<}{2}}} = \overline{K_{\underset{<}{2}}} \setminus \{a\} = \emptyset$ atunci STOP: noul program U_1 este complet şi filtrat. În caz contrar cu noile date se va relua algoritmul.

(4'.b) Dacă $\overline{\alpha_a} = \overline{r_{\bar{i}a}}$ sau, $\overline{\alpha_a} = \overline{R_{\bar{l}a}}$ atunci se alege $\underset{1}{u_a} = \overline{r_{\bar{i}a}}$ bazică în locul lui $\underset{0}{u_{\bar{i}}}$, care devine secundară, $\underset{1}{u_{\bar{l}}}$ =0 (cu pivot $A_{ia}^{(0)}$), respectiv $\underset{1}{u_a} = \overline{R_{\bar{l}a}}$ bazică în locul lui $u_{\bar{l}}$, care devine secundară la valoarea $D_{\bar{l}}$ (cu pivot A_{la}^{0}).

Exemplul 4.4.1. În exemplul 4.3.1. se cunoaşte un program curent, $\overline{X^t}$ =(7/5 11/5 2 2).

Rezultă că $\underset{0}{\bar{u}}$ =(2/5,6/5,1,1) este program complet, în u.

0). Alegem

$$\underset{0}{\overline{U}}\left|\begin{array}{l}\underset{0}{\overline{u_2}} = 6/5 \\ \\ \underset{0}{\overline{u_4}} = 1\end{array}\right. ;\quad \overline{I^{(0)}} = \{2;4\} \qquad \left|\begin{array}{l}\underset{0}{\overline{u_3}} = 1 = \overline{D_3} \\ \\ \underset{0}{\overline{u_1}} = 2/5 = \overline{D_1}\end{array}\right. \quad \overline{K_1^{(0)}} = \varnothing;$$

$\overline{K_2^{(0)}} = \varnothing; \underset{<}{\overline{K_2}} = \{1;3\}$

1). Calculăm $\underset{0}{\widetilde{M}} = \widetilde{M}_{(2;4)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,

$$P_1^{(0)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(Se putea alege a=3. Exerciţiu).

2). Scriem: $\underset{1}{\overline{u_2}} = \frac{6}{5} + (-3)(\frac{2}{5} - \underset{1}{\overline{u_1}})$; $\underset{1}{\overline{u_4}} = 1 + 5(\frac{2}{5} - \underset{1}{\overline{u_1}})$;

3). Calculăm: $\overline{s_{4;1}} = \frac{1-2}{\boxed{5}} + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$; $\overline{S_{2;4}} = \frac{6/5}{-3} + \frac{2}{5} = 0$.

4). Calculăm $\overline{\beta_1} = \max\{0; \overline{s}; \overline{S}\} = \overline{s_{4;1}} = \frac{1}{5}$

Se alege $\overline{u_1}_1 = \overline{s_{4;1}} = \frac{1}{5}$ bazică în locul lui $\overline{u_4}$, care devine secundară la valoarea $\overline{u_4}_1 = 2 = D_4$

$$\overline{U}_1 \left| \begin{array}{l} \overline{u_2}_1 = 3/5 \\ \overline{u_1}_1 = 1/5 \end{array} \right. \qquad \overline{I^{(1)}} = \{2;1\} \qquad \left| \begin{array}{l} \overline{u_3}_1 = 1 = \overline{D_3} < D_3 = 2 \\ \overline{u_4}_1 = 2 = D_2 \end{array} \right. ; \ \overline{K_1^{(1)}} = \varnothing;$$

$$\overline{K_2^{(1)}} = \{4\}; \overline{K_{\underset{<}{2}}^{(1)}} = \{3\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ \boxed{5} \end{pmatrix} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \tilde{M}_1^{-1} = \tilde{M}_{(2;1)_1}$$

Evident $\overline{U}_1$ este program complet dar nu este filtrat căci $\overline{K_{\underset{<}{2}}^{(1)}} \neq \varnothing$. Se alege, a=3$\in$ $\overline{K_{\underset{<}{2}}^{(1)}}$ şi se obţine:

$$P_3^{(1)} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} A_{13}^{(1)} \\ A_{23}^{(1)} \end{array}$$

$$\overline{u_2}_2 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}(1 - \overline{u_3}_2); \ \overline{u_1}_2 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\left(1 - \overline{u_3}\right)$$

$$\overline{s_{\bar{l}3}} = \max\left\{ \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{2}}{1/5} + 1; \ \frac{\frac{1}{5} - 1}{2/5} + 1 \right\}$$

$\overline{S_{\bar{l}3}}$ nu se scrie, căci nu există, $A_{r3}^{(1)} < 0$.

$$\overline{\beta_3} = \max\{0; \ \overline{s_{1;3}}\} = 0$$

Se alege $\overline{u_{3}}_{2}=0$ tot ca secundară. Rezultă:

$$U_2\left|\begin{array}{l} u_{2_2}=4/5 \\ u_{1_2}=3/5 \end{array}\right. \qquad \overline{I^2}=\{2;1\} \qquad \left|\begin{array}{l} \overline{u_3}_2=0 \\ K_1^{(2)}=\{3\} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \overline{u_4}_2=2=D_2 \\ \overline{K_2^{(2)}}=\{4\} \end{array}\right. .$$

S-a obținut un program complet filtrat relativ la aceeaşi bază $\widetilde{M}_2=\widetilde{M}_1=\widetilde{M}_0$. Acesta se poate lua ca U_0 şi din el se pot genera noi programe complete filtrate şi simultan se pot obține valorile pentru Z:

$$U_0\left|\begin{array}{l} u_{2_0}=4/5 \\ u_{1_0}=3/5 \\ \hline z_0=\dfrac{48}{5} \end{array}\right. \qquad \overline{I^0}=\{2;1\} \qquad \left|\begin{array}{l} \overline{u_3}_0=0 \\ K_1^{(0)}=\{3\} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \overline{u_4}_0=2 \\ K_2^{(0)}=\{4\} \end{array}\right.$$

$$\overline{M_0^{-1}}=\begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 & 0 \\ 3/5 & -1/5 & 0 \\ -3/5 & -4/5 & 1 \end{pmatrix}=\overline{M_{(2;1)}^{-1}} \;;$$

$$C_3^{(0)}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \hline 4 \end{pmatrix}=\frac{13}{5}; \qquad \overline{C_4^{(0)}}=\frac{4}{5}$$

$$3\in K_1^{(0)} \qquad\qquad 4\in K_2^{(0)}$$

$$\max\left\{C_k^{(0)}>0;\ -C_a^{(0)}>0\right\}=\frac{13}{5}=C_3^{(0)};\ \Rightarrow j=3\in K_1^{(0)}$$

Se fac schimbări j$\in K_1^{(0)}$; $\underset{0}{u_3} = 0 \rightarrow \underset{1}{u_3}$

$$\mathbf{P_3^{(0)}} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ \boxed{2/5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{A_{13}^{(0)}} \\ \mathbf{A_{23}^{(0)}} \end{matrix}$$

$\underset{1}{u_2} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}\underset{1}{u_3}$; $\underset{1}{u_1}$ 1$= \frac{3}{5} - \frac{2}{5}\underset{1}{u_3}$; $z_1 = \frac{48}{5} + \frac{13}{5}\underset{1}{u_3}$

$$r_{\bar{i}3}^{(0)} = \min\left\{ \frac{4/5}{1/5} = 4; \frac{3/5}{2/5} = 1{,}5 \right\} = \frac{\mathbf{3/5}}{\mathbf{2/5}} \Rightarrow \bar{\mathbf{i}} = \mathbf{1}$$

$R_{\bar{i}3}^{(0)}$ nu se scrie căci nu există $A_{r3}^{(0)} < 0$.

$$\alpha_3 = \min\left\{ D_3 = 2; r_{13}^{(0)} = \frac{\frac{3}{5}}{\boxed{\frac{2}{5}}} \right\} = r_{13}^{(0)} = 1{,}5.$$

Se alege $\underset{1}{u_3} = \frac{3}{2}$ bazică în locul lui u_1 care devine secundară la valoarea $\underset{1}{u_1} = 0$. Rezultă

$$\underset{1}{\mathbf{U}} \left| \begin{array}{l} \underset{1}{U_2} = 1/2 \\ \underset{1}{U_3} = 3/2 \\ \hline z_1 = 27/2 \end{array} \right. \qquad \mathbf{I^{(1)}} \left| = \{\mathbf{2;3}\} \right. \qquad \left| \begin{array}{ll} \underset{1}{u_1} = 0 & \underset{1}{u_4} = 2 \\ \underset{1}{K}^{(1)} = \{1\} & \underset{2}{K}^{(1)} = \{4\} \end{array} \right.$$

$$\underset{1}{\overline{M}}{}^{-1}_{(2;3)} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ -9/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_1^{(1)}=\begin{pmatrix}\frac{-9}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=-\frac{13}{2};\,1\in K_1^{(1)}$$

$$C_4^{(1)}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2};\,4\in K_2^{(1)}$$

Cu noul program complet filtrat $\underset{1}{\mathbf{U}}$ se va relua algoritmul.

$$\max\left\{C_k^{(1)}>0\,;-C_a^{(1)}>0\right\}=-\frac{1}{2}=C_4^{(1)};\,a=4\in K_2^{(1)}$$

$$P_4^{(1)}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}A_{14}^{(1)}\\ A_{24}^{(1)}\end{matrix}$$

$$\underset{2}{u_2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(2-\underset{2}{u_4}\right);\,\underset{2}{u_3}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(2-\underset{2}{u_4}\right);\,z_2=\frac{27}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)(u_4-2)$$

$$s_{\bar{i}4}=\max\left\{\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}+2=0;\,\frac{\frac{3}{2}-2}{\boxed{\frac{1}{2}}}+2=1\right\}=1\Rightarrow\bar{i}=3$$

$$\beta_4=\max\left\{0;s_{3;4}=1\right\}=1$$

Se alege $\underset{2}{u_4}=1$ bazică în locul lui u_3 care devine secundară la valoarea $\underset{2}{u_3}=2=D_3$. Rezultă

$$\underset{2}{\mathbf{U}}\left|\begin{array}{l}u_2=1\\ u_4=1\end{array}\right.\quad I^{(2)}=\{2;4\}\qquad\left|\begin{array}{l}u_3=2=D_3\\ K_2^{(2)}=\{3\}\end{array}\right.\qquad\left|\begin{array}{l}u_1=0\\ K_1^{(2)}=\{1\}\end{array}\right.$$

$$z_2=14$$

$$\overline{\mathbf{M}}_{(2;4)}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$C_3^{(2)}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}=1>0;\,3\in K_2^{(2)}$$

$$C_1^{(2)}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=-4<0;\,1\in K_1^{(2)}$$

Nu mai existã $C_k > 0\,(k \in K_1); C_a < 0\,(a \in K_2)$. STOP

Aşadar practic se cunoaşte un program $\overline{\mathbf{X}}$ al modelului numit şi program curent. Atunci $\overline{\mathbf{U}}$ în care se transformă este sigur un program complet. Dacă $\overline{\mathbf{U}}$ este şi filtrat, atunci se alege ca $\underset{\mathbf{0}}{\mathbf{U}}$ inițial şi din el se generează alte programe complete filtrate.

Dacă $\overline{\mathbf{U}}$ nu este filtrat atunci mai întâi se filtrează şi apoi se alege ca inițial în algoritmul care generează alte programe filtrate.

Aşadar, dacă există un program complet, atunci există un program complet filtrat. Orice program complet filtrat este un caz particular de program complet şi deci este un program al problemei standard AU=B; U ≥ 0. Adică pornind de la el se obține un program de bază care s-ar putea să nu mai fie program complet filtrat (cu $K_2 = \phi$). De aici apare ideea de a obține un program de baza $\underset{0}{U}$ pentru sistemul AU=B; U ≥ 0, prin una din metodele expuse în primele capitole ($K_2 = \phi$). Dacă $\underset{0}{U}$ este complet $0 < \underset{0}{U} < D$, atunci este şi filtrat. Dacă $\underset{0}{U}$ nu este complet, adică există $\underset{0}{u_{\bar{r}}}$ ($r \in I^0$) cu $\underset{0}{u_{\bar{r}}} > D_{\bar{r}}$, atunci pornind de la forma canonică, care a generat $\underset{0}{U}$ şi punând condiții de mărginire $\underset{0}{u_{\bar{r}}} \to \underset{1}{u_{\bar{r}}}; 0 \le \underset{1}{u_{\bar{r}}} \le D_{\bar{r}}$ se obține un algoritm de filtrare ([St]).

Acest procedeu are avantajul că dacă sistemul AU=B; U ≥ 0 nu are programe de bază atunci nu are programe şi deci AU=B; 0 ≤U≤ D nu admite program complet sau program complet filtrat, căci acesta este program pentru AU=B; U≥0.

Exercițiul (4.4.1). Dacă nici o variabilă, $u_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ nu are restricție superioară, adică singurele restricții sunt de nenegativitate, atunci din algoritmul (F.I) să se obțină algoritmul de transformare al unui program $\overline{U}$ al sistemului AU=B; U≥0 într-un program de bază.

Indicație. Avem

$$\overline{I}=\left\{\overline{r}\,\middle|\,\overline{u_{\bar{r}}}>0\right\};\ \overline{K_1}=\left\{j\,\middle|\,\overline{u_j}=0\right\};\ \overline{\underset{<}{K_2}}=\left\{\overline{u_a}=\overline{D_a}>0\right\};\ \overline{K_1}\cup\overline{\underset{<}{K_2}}=\overline{K}$$

(mulțimea indicilor celor (n-m) variabile secundare din forma canonică care a dat programul $\overline{U}$). Se scriu (4.4.1) şi se pun condițiile $0\le u_{\underset{1}{a}}<\overline{D_a};\overline{u_{\bar{r}}}\ge 0$ pentru $A_{ra}^{0}<0$.

Exercițiul (4.4.2). Să se scrie (F.I) (F.II) dacă unele variabile nu au decât condiții de nenegativitate. Dacă toate au condiții numai de nenegativitate, atunci care algoritm dintre (F.I) sau (F.II) se poate aplica şi care este programul complet filtrat $\underset{0}{U}$ de la care se pleacă.

4.5 REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE (4.4.1)

Inițial se aduce sistemul la forma standard redusă (4.1.2). Fie că mai luăm în considerare şi funcția φ(u) = z şi scriem sistemul sub forma:

$$\frac{AU = B}{CU + (-z) = 0};\ 0 \le U \le D \qquad (4.5.1)$$

fie că scriem numai sistemul dat:

$$AU=B;\ 0 \le U \le D \qquad (4.5.2)$$

procedeul va fi acelaşi; operăm numai pe sistem. Dacă scriem (4.5.1) atunci operăm pe sistem dar forma canonică (respectiv pivotarea se face pe total (4.5.1)). Pentru a nu mai încărca memoria de ''calcul'' cu CU+(-z) = 0 şi cu o coloană $P_{n+1}^{\pm}$ = (0…0 ;1) (coloana coeficienților lui u_{n+1}=(-z) se va opera cu (4.5.2)).

Algoritm bazic.

Inițial (0). Se obține un program de baza $\underset{0}{u}$ prin una din metodele expuse anterior (dupa cum m, n sunt ''mici'' sau m ''mic'' si n ''mare'' …). Fie $\underset{0}{M}$ matricea bazică si $I^{(0)}$; $K_1^{(0)}$.

a) **Dacă** pentru $\bar{r} \in I^{(0)}$, avem satisfăcute condițiile $0 \le \underset{0}{u}_{\bar{r}} \le D_{\bar{r}}$ atunci, STOP; $\underset{0}{u}$ este un program complet filtrat; cu $I^{(0)}$; $K_1^{(0)}$; $K_2^{(0)} = \Phi$.

b) Dacă există $\bar{r} \in I^{(0)}$ cu $\underset{0}{u}_{\bar{r}} > D_{\bar{r}}$ atunci programul de bază nu este complet. Atunci se trece la elaborarea unui algoritm de transformare, pas cu pas a lui $\underset{0}{u}$ într-un program complet, dacă există şi apoi se filtrează, sau elaborarea unui algoritm care să transforme $\underset{0}{u}$ pas cu pas, într-un program complet filtrat. Al doilea algoritm ca scriere sub formă de “formule” va fi mai complicat. Se va reține ca idei care duc la aceste formule. Formulele vor fi necesare în programarea algoritmului pe calculator.

Dacă există $\underset{0}{u_{\bar{r}}}, \bar{r} \in I^{(0)}$ cu $\underset{0}{u_{\bar{r}}} > D_{\bar{r}}$ atunci se notează $I^{(0)}_{>} = \left\{ \bar{r} \in I^{(0)} \mid \underset{0}{u_{\bar{r}}} > D_{\bar{r}} \right\}$.

Fie forma canonică :

$$\underset{1}{u_{\bar{r}}} = \underset{0}{u_{\bar{r}}} - A_{rj}^{(0)} \underset{1}{u_j};\ j \in K_1^{(0)};\ \bar{r} \in I^{(0)};\ r = \overline{1,m} \qquad (4.5.3)$$

de matrice bazică $\underset{0}{M}$. Evident că ținem cont şi de (-z) avem $\overline{C_j^{(0)}} u_j + (-z) = -z_0$, unde :

$$\overline{C_j^{(0)}} = \left(-C_b^{(0)} \underset{0}{M}^{-1};1 \right) \left(\begin{array}{c} P_j \\ C_j \end{array} \right) = \left(C_j - C_b^{(0)} P_j^{(0)} \right);\ P_j^{(0)} = \underset{0}{M}^{-1} P_j . \qquad (4.5.4)$$

(1) . Pentru $A_{rj}^{(0)} > 0; \forall \bar{r} \in I^{(0)}$ punem condiția $\underset{1}{u_{\bar{r}}} \geq 0$.

Rezultă:

$$\underset{1}{u_j} \leq r_{\bar{i}j}^{(0)} \overset{def}{=} \frac{\underset{0}{u_{\bar{i}}}}{A_{ij}^{(0)}} = \min_{+} \left\{ \frac{\underset{0}{u_{\bar{r}}}}{A_{rj}^{(0)}} \right\} \qquad (4.5.5)$$

Tot pentru $A_{rj}^{(0)} > 0$ punem condiția $\underset{1}{u_{\bar{r}}} \leq D_{\bar{r}}$ dacă $\bar{r} \in I_{>}^{(0)}$.

Rezultă:

$$\underset{1}{u_j} \geq \underset{>}{\overline{R_{\bar{s}j}^{(0)}}} \overset{def}{=} \max \left\{ \frac{\underset{0}{u_{\bar{r}}} - D_{\bar{r}}}{A_{rj}^{(0)}} \right\} = \frac{\underset{0}{u_{\bar{s}}} - D_{\bar{s}}}{A_{sj}^{(0)}} . \qquad (4.5.6)$$

Pentru $A_{\bar{r}j}^{(0)} < 0$ şi $\bar{r} \in I^{(0)} \setminus I_{>}^{(0)} = \left\{ \bar{r} \in I^{(0)} \mid \underset{0}{u_{\bar{r}}} \le D_{\bar{r}} \right\}$, punem condiţia $\underset{1}{u_{\bar{r}}} \le D_{\bar{r}}$ şi rezultă:

$$\underset{1}{u_j} \le \overline{R_{\bar{k}j}^{(0)}} \overset{def}{=} \min \left\{ \frac{\underset{0}{u_{\bar{r}}} - D_{\bar{r}}}{A_{\bar{r}j}^{(0)}} \right\} = \frac{\underset{0}{u_{\bar{k}}} - D_{\bar{k}}}{A_{\bar{k}j}^{(0)}} \tag{4.5.7}$$

2. Calculăm

$$\overline{\alpha_j} = \min \left\{ D_j ; r_{\bar{i}j}^{(0)} ; \overline{R_{\bar{k}j}^{(0)}} \right\} \tag{4.5.8}$$

a) Dacă $\overline{R_{\underset{>}{\bar{s}}j}^{(0)}} \le \overline{\alpha_j}$, se poate alege $\underset{1}{u_j} = \overline{\alpha_j}$ sau $\underset{1}{u_j} = R_{\underset{>}{\bar{s}}j}$ şi din (4.5.3) rezultă un $\underset{1}{U}$.

a₁) Se preferă $\underset{1}{u_j} = \overline{\alpha_j}$, dacă $\overline{\alpha_j} = D_j$ căci $\underset{1}{u_j} = D_j$ se lasă secundară pentru a nu schimba baza. Avem $\underset{1}{M} = \underset{0}{M}$.

Din (4.5.3) se obţine în general un program. Dacă $\underset{1}{u_j} = \overline{\alpha_j}$ şi $\overline{\alpha_j} = r_{\bar{i}j}^{(0)}$, atunci $\underset{1}{u_{\bar{i}}} = 0$ devine secundară. Se pivotează cu pivot $\boxed{A_{\bar{i}j}^{(0)}}$ şi se obţine $\underset{1}{M}^{-1}$ cât şi noile date; $I^{(1)}; K_1^{(1)} = K_1^{(0)} \cup \left\{ \bar{i} \right\}$.

Dacă $\overline{\alpha_j} = \overline{R_{\bar{k}j}^{(0)}}$ atunci $\underset{1}{u_{\bar{k}}} = D_{\bar{k}}$ devine bazică. Se generează $K_2^{(1)} = \left\{ \bar{k} \right\}$.

Se obţine $\underset{1}{M}^{-1}$ prin pivotare pe $\underset{0}{M}^{-1}$ cu pivot $\boxed{A_{\bar{k}j}^{(0)}}$.

a₂) Dacă se alege $\underset{1}{u_j} = \overline{R_{\underset{>}{\bar{s}}j}}$ şi $\overline{R_{\underset{>}{\bar{s}}j}} \ne D_j$, se obţine $\underset{1}{u_{\bar{s}}} = D_{\bar{s}}$, secundară. Se pivotează cu pivot $\boxed{A_{\bar{s}j}^{(0)}}$ şi se obţine $\underset{1}{M}^{-1}$.

b) Dacă $\overline{R_{\bar{s}j}} > \overline{\alpha_j}$ atunci se preferă alegerea $\underset{1}{u_j} = \overline{\alpha_j}$, pentru a nu se introduce valori negative şi se procedează ca la a$_1$), sau se schimbă $j \in K_1^{(0)}$.

Observația (4.5.1) Dacă $A_{rj}^{(0)} < 0; r = \overline{1,m}$ şi $I^{(0)} = I_{>}^{(0)}$ atunci se alege alt $j \in K_1^{(0)}$. Dacă pentru orice $j \in K_1^{(0)}$ rezultă $A_{rj}^{(0)} < 0; r = \overline{1,m}$ când $I^{(0)} = I_{>}^{(0)}$ atunci se schimbă programul de bază $\underset{0}{U}$. Dacă situația se repetă pentru orice program de bază, atunci STOP. Nu se pot genera programe complet filtrate.

Dacă la un pas p, avem datele $\underset{(p)}{U}; I^{(p)}; K_1^{(p)} = \Phi; K_2^{(p)} \neq \Phi$ şi există $I_{>}^{(p)} \neq \Phi$, altfel spus, dacă se porneşte cu un program în care toate variabilele secundare au valorile la marginea superioară (dacă există), atunci algoritmul va porni cu acest program luat ca program inițial $\underset{0}{u}$, pentru a nu complica scrierea formulelor (p:= p+1). Avem:

$$\underset{1}{u_{\bar{r}}} = \underset{0}{u_{\bar{r}}} + A_{\bar{r}a}^{(0)}\left(D_a - \underset{1}{u_a}\right); a \in K_2; \bar{r} \in I^{(0)} \tag{4.5.9}$$

Dacă $I_{>}^{(0)} = \Phi$; STOP. $\underset{0}{U}$ (= $\underset{(p)}{U}$) este program complet filtrat, cu K$_1$= ϕ, K$_2$ = ϕ.

Dacă $I_{>}^{(0)} \neq \Phi$, considerăm şi $I^{(0)} \setminus I_{>}^{(0)}$. Cum dorim să determinăm $0 \leq \underset{1}{u_a} \leq D_a$ rezultă că şi în (4.5.9) trebuie să distingem situațiile $A_{\bar{r}a}^{(0)} > 0; A_{\bar{r}a}^{(0)} < 0$.

Dacă $A_{\bar{r}a}^{(0)} > 0$ şi $\bar{r} \in I^{(0)} \setminus I_{>}^{(0)}$ (adică $\underset{0}{u_{\bar{r}}} \leq D_{\bar{r}}$) atunci se pune condiția $\underset{1}{u_{\bar{r}}} \leq D_{\bar{r}}$ rezultă:

$$\underset{1}{u_a} \geq s_{\bar{i}a}^{(0)} \stackrel{def}{=} \max_{r}\left\{\frac{\underset{0}{u_{\bar{r}}} - D_{\bar{r}}}{A_{\bar{r}a}^{(0)}} + D_a\right\} = \frac{\underset{0}{u_{\bar{i}}} - D_{\bar{i}}}{A_{\bar{i}a}^{(0)}} \tag{4.5.10}$$

Dacă $A_{\bar{r}a}^{(0)} < 0$, atunci se pun condițiile $\underset{1}{u_{\bar{r}}} \geq 0$ pentru orice $\bar{r} \in I^{(0)}$, respectiv $\underset{1}{u_{\bar{r}}} \leq D_{\bar{r}}$ pentru $\bar{r} \in I_{>}^{(0)}$.

Rezultă :

$$\underset{1}{u_a} \geq S_{\bar{k}a}^{(0)} \overset{def}{=} \max_{r}\left\{ \frac{\underset{0}{u_{\bar{r}}}}{A_{\bar{r}a}^{(0)}} + D_a \right\} = \frac{\underset{0}{u_{\bar{k}}}}{A_{\bar{k}a}^{(0)}} + D_a \tag{4.5.11}$$

respectiv :

$$\underset{1}{u_a} \geq \overline{R}_{\bar{s}a}^{(0)} \overset{def}{=} \min\left\{ \frac{\underset{0}{u_{\bar{r}} - D_{\bar{r}}}}{A_{\bar{s}a}^{(0)}} + D_a \right\} = \frac{\underset{0}{u_{\bar{s}} - D_{\bar{s}}}}{A_{\bar{s}a}^{(0)}} + D_a \tag{4.5.12}$$

Evident $\overline{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{s}}\mathbf{a}}^{(\mathbf{0})} < \mathbf{D_a}$. Așadar $\min\left\{\overline{R}_{\bar{s}a};\ D_a\right\} = \overline{R}_{\bar{s}a}$. Cum $\underset{1}{u_a} \geq 0$ și avem (4.5.11) (4.5.12), se va calcula

$$\beta_a^{(0)} = \max\left\{0;\ s_{\bar{i}a}^{(0)};\ S_{\bar{k}a}^{(0)}\right\} \tag{4.5.13}$$

a) Dacă $\beta_a^{(0)} \leq \overline{R}_{\bar{s}a}$ atunci se poate alege $\underset{1}{u_a} = \beta_a^{(0)}$ sau $\underset{1}{u_a} = \overline{R}_{\bar{s}a}$. Dacă $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{a}}^{(\mathbf{0})} = \mathbf{0} \leq \overline{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{s}}\mathbf{a}}$ este de preferat să se ia $\underset{1}{u_a} = \beta_a^{(0)} = 0$ tot ca secundară pentru a nu schimba baza $\left(\underset{1}{\mathbf{M}} = \underset{0}{\mathbf{M}}\right)$. Dacă $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{a}}^{(\mathbf{0})} = \mathbf{s}_{\bar{\mathbf{i}}\mathbf{a}}^{(\mathbf{0})}$ sau $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{a}}^{(\mathbf{0})} = \mathbf{S}_{\bar{\mathbf{k}}\mathbf{a}}^{(\mathbf{0})}$ alegând $\underset{1}{u_a} = \beta_a^{(0)}$, baza trebuie schimbată.

b) Dacă $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{a}}^{(\mathbf{0})} > \overline{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{s}}\mathbf{a}}$ se preferă $\underset{1}{u_a} = \beta_a^{(0)}$ pentru a nu introduce eventuale valori negative u. Se obțin noi date cu schimbare de bază (sau nu, dacă $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{a}}^{(\mathbf{0})} = \mathbf{0}$), sau se schimbă $a \in K_2^{(0)}$.

Observația 4.5.2. Dacă problema este mică, atunci ($\mathbf{n}-\mathbf{m}$) este mic și deci aducând sistemul, $\mathbf{AU} = \mathbf{B}$; $\mathbf{U} \geq \mathbf{0}$ la o forma conică oarecare (de preferat bazică) se vor da celor $(\mathbf{n}-\mathbf{m})$ valori secundare valori la marginea inferioară, zero, respectiv la marginea superioară $\mathbf{D}$, pe rând și apoi combinat până se obține un program complet, filtrat (dacă există).

Exemplul 4.5.1. Fie problema:

$$\begin{array}{l} 2u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4 \\ u_1 + 3u_2 + u_3 + 2u_4 = 7 \\ \hline 2u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 3u_4 = z_{(\max)} \end{array} \qquad \mathbf{0 \le u_1 \le 1}; \mathbf{0 \le u_2 \le \frac{3}{2}}; \mathbf{0 \le u_3 \le 3}; \mathbf{0 \le u_4 \le 2}$$

S-a văzut că $\underset{\mathbf{0}}{\mathbf{u}}^{\mathbf{t}} = (\mathbf{1;2;0;0})$ este un program de bază pentru $AU = B; U \ge 0$. Putem scrie:

$$\underset{0}{U} \left| \begin{array}{l} \underset{0}{u_1} = 1 \\ \underset{0}{u_2} = 2 \\ \hline z_0 = 8 \end{array} \right. \quad \mathbf{I^{(0)} = \{1;2\}} \quad \left| \begin{array}{l} \underset{\mathbf{0}}{\mathbf{u}_3} = \mathbf{0} \\ \underset{\mathbf{0}}{\mathbf{u}_4} = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad \mathbf{K_1^{(0)} = \{3;4\}} \quad \mathbf{K_2^{(0)}} = \Phi$$

$$\underset{\mathbf{0}}{\mathbf{M}}^{\mathbf{-1}} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} \overline{C}^{(0)}{}_3 = \dfrac{13}{5} \\ \overline{C}^{(0)}{}_4 = \dfrac{4}{5} \end{array}$$

Cum $\underset{\mathbf{0}}{\mathbf{u}_2} = \mathbf{2} > \mathbf{D_2} = \mathbf{\frac{3}{2}}$ avem $\mathbf{I_>^{(0)} = \{2\}}$. Adică $\underset{0}{U}$ nu este program complet şi deci nici filtrat. Se alege $\mathbf{j \in K_1^{(0)}}$ (de preferat $\mathbf{j = 3}$ care corespunde la $\overline{C}_2^{(0)} = \frac{13}{5} = \max_k \left\{ \overline{C}_k^{(0)} > 0 \right\}$ dacă se ține cont şi de z cu $z_{\max}$). Să alegem $j = 4$ (dacă nu ținem cont de $z_{(\max)}$).

Calculăm: $\mathbf{P_4^{(0)}} = \underset{\mathbf{0}}{\mathbf{M}}^{\mathbf{-1}} \mathbf{P_4} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathbf{A_{14}^0} \\ \mathbf{A_{24}^0} \end{array}$

Scriem: $\left|\begin{array}{l} \mathbf{u}_{\underset{1}{1}} = \mathbf{1} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\mathbf{u}_{\underset{1}{4}} \\ \mathbf{u}_{\underset{1}{2}} = \mathbf{2} - \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\mathbf{u}_{\underset{1}{4}} \end{array}\right.$; $\quad \mathbf{u}_{\underset{1}{\bar{r}}} = \mathbf{u}_{\underset{0}{\bar{r}}} - \mathbf{A}^{(0)}_{\mathbf{rj}}\,\mathbf{u}_{\underset{1}{\mathbf{j}}}$

Nu avem $\mathbf{A}^{(0)}_{\mathbf{rj}} < \mathbf{0}$ (nu avem $\overline{\mathbf{R}}^{(0)}$). Pentru orice $\bar{\mathbf{r}} \in \mathbf{I}^{(0)} = \{\mathbf{1;2}\}$ punem condiția, $\mathbf{u}_{\underset{1}{\bar{r}}} \geq \mathbf{0}$. Adică scriem:

$$r_{ij}^{(0)} = \min\left\{\frac{1}{1/5}; \frac{2}{3/5}\right\} = \frac{2}{3/5} = \frac{u_{\underset{0}{2}}}{A_{24}^{(0)}} = r_{24}^{(0)}$$

Avem $u_{\underset{0}{\bar{r}}} = 2; \bar{r} \in I_{>}^{(0)} = \{2\}$. Punem condiția: $\mathbf{u}_{\underset{1}{\bar{r}}} \leq \mathbf{D}_{\bar{r}}$ adică calculăm

$$\max\left\{\frac{1-1}{1/5}; \frac{2-3/2}{3/5}\right\} = \frac{2-3/2}{3/5} = \overline{R}_{>\,(2;4)} \,(= 5/6);\ \overline{R}_{>} < \overline{\alpha}$$

Calculãm

$$\overline{\alpha}_4 = \min\left\{D_4 = 2; r_{24}^{(0)}; \overline{R}_{(2;4)}^{(0)}\right\} = \min\left\{D_4 = 2; r_{24}^{(0)} = \frac{10}{3}\right\} = D_4 = 2\,.$$

Se alege $u_{\underset{1}{4}} = \overline{\alpha_4} = D_4 = 2$ tot ca secundară pentru a nu schimba baza. Rezultă:

$$\underset{1}{U}\left|\begin{array}{l}\underset{(1)}{u_1} = 3/5 \\ \underset{(1)}{u_2} = 4/5 \\ \hline z_1 = 48/5\end{array}\right. ; \quad I^{(1)} = \{1;2\}; \quad \underset{1}{\mathbf{M}} = \underset{0}{\mathbf{M}}; \quad \left|\begin{array}{ll}\underset{(1)}{u_3} = 0 & \mathbf{K_1^{(1)}} = \{3\} \\ \underset{(1)}{u_4} = 2 = D_4 & \mathbf{K_2^{(1)}} = \{4\}\end{array}\right.$$

$$\mathbf{C_3^{(1)} = C_3^{(0)} = \frac{13}{5} > 0}$$

$$\mathbf{C_4^{(1)} = C_4^{(0)} = \frac{4}{5} > 0}$$

Cum $\mathbf{I_{>}^{(0)}} = \Phi$ STOP; $\underset{1}{U}$ este program complet filtrat. Anterior, cum $\overline{\underset{>}{R_{(2;4)}}} < \overline{\alpha}_4$ să alegem $\underset{(1)}{u_4} = \underset{>}{\overline{R}_{(2;4)}} = \frac{2 - 3/2}{\boxed{3/5}} = \frac{5}{6}$. Pivot $\mathbf{A_{24}^{(0)} = \frac{3}{5}}$. Avem:

$$\underset{1}{\overline{U}}\left|\begin{array}{l}\underset{1}{\overline{u}_1} = 5/6 \\ \underset{1}{\overline{u}_4} = 5/6 \\ \hline \overline{\overline{z}}_1 = 52/6\end{array}\right. \quad \mathbf{I^{(1)} = \{1;4\}} \quad \left|\begin{array}{l}\underset{1}{\overline{u}_3} = 0; K_1^{(1)} = \{3\} \\ \underset{1}{\overline{u}_2} = \frac{3}{2} = D_2; K_2^{(1)} = \{2\}\end{array}\right.$$

Avem $\mathbf{I_{>}^{(1)}} = \Phi$. STOP. $\underset{1}{\overline{U}}$ este un nou program complet filtrat. Noua matrice bazică $\underset{(1)}{\mathbf{M}}^{-1}$ se obține prin pivotare cu pivot $A_{24}^{(0)} = \frac{3}{5}$ pe $\underset{0}{M}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1/5 \\ \boxed{3/5} \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}}_{M^{-1}_{1}(1;4)} \right| \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Dacă s-ar alege inițial $\mathbf{j = 3}$ (căci $\mathbf{3 \in K_1^{(0}}$ şi $C_3^{(0)} = \frac{13}{5} = \max_k \{C_k > 0\}; k \in K_1^{(0)}$) atunci avem

$$\mathbf{P_3^{(0)} = M_0^{-1}\, P_3 = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_{13}^{(0)} \\ A_{23}^{(0)} \end{matrix}};$$

$$\left| \begin{array}{l} \underset{(1)}{u_1} = 1 - \frac{2}{5} \underset{(1)}{u_3} \\ \underset{(1)}{u_2} = 2 - \frac{1}{5} \underset{(1)}{u_3} \\ \overline{z_1 = 8} \end{array} \right.$$

$$r_{13}^{(0)} = \min \left\{ \frac{1}{2/5}; \frac{2}{1/5} \right\} = \frac{1}{2/5} = \frac{\underset{0}{u_1}}{A_{13}^{(0)}}; \alpha_3 = r_{13}^{(0)}$$

$$\underset{>}{R_{23}} = \max \left\{ \frac{1-1}{2/5}; \frac{2 - 3/2}{1/5} \right\} = \frac{2 - 3/2}{1/5} = \frac{\underset{0}{u_2} - \underset{0}{D_2}}{A_{23}^{(0)}}; \alpha_{13}^{(0)} = \underset{>}{\overline{R}}_{(2.3)}$$

Se alege $\underset{1}{u_3} = r_{13}^{(0)} = \frac{5}{2}$ dacă se doreşte ca u_3 să devină bazică în locul lui u_1 (care devine $\underset{1}{u_1} = 0$) sau se alege $\underset{1}{u_3} = R^{(0)}_{\underset{>}{(2;3)}}$, dacă se doreşte ca u_3 să devină bazică în locul lui u_2 (care devine secundară la valoarea $\underset{1}{u_2} = \frac{3}{2} = D_2$, adică s-a generat $K_2^{(1)} = \{2\}$).

Rezultă :

$$\underset{1}{\mathbf{U}}\left|\begin{array}{l} \underset{(1)}{u_3} = 5/2 \\ \underset{(1)}{u_2} = 3/2 \\ \hline z_1 = 29/2 \end{array}\right. ;\ I^{(1)} = \{3;2\};\left|\begin{array}{l} \underset{(1)}{u_1} = 0 \\ \underset{(1)}{u_4} = 0 \end{array}\right. \quad K_1^{(1)} = \{1;4\}$$

Cum $I^{(1)}_{>} = \Phi$, STOP; s-a obţinut un program complet, filtrat. Avem $\underset{(1)}{M^{-1}}$ obţinută din $\underset{(0)}{M^{-1}}$ prin pivotare cu pivot $A_{13}^{(0)} = \frac{5}{2}$;

$$\begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}\right. \Rightarrow \underset{M_1^{-1}}{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right.$$

Dacă s-ar alege $\underset{1}{u_3} = R_{\underset{>}{(2;3)}} = \dfrac{2 - \frac{3}{2}}{\boxed{\frac{1}{5}}} = \frac{5}{2}$ se alege pivot $A_{23}^{(0)} = \frac{1}{5}$ şi deci u_3 devine bazică în locul lui u_2. Rezultă:

$$\underset{1}{\overline{U}}\left|\begin{array}{l}\underset{(1)}{\overline{u}_1}=0\\ \underset{(1)}{\overline{u}_3}=5/2\\ \hline z_1=29/2\end{array}\right. ;\ \overline{I}^{(1)}=\{1;3\};\left|\begin{array}{l}\underset{(1)}{u_4}=0\\ \underset{(1)}{u_2}=\frac{3}{2}=D_2\end{array}\right. ;\ \begin{array}{l}K_1^{(1)}=\{4\}\\ K_2^{(1)}=\{2\}\end{array}$$

Cum $I_{>}^{(1)}=\Phi$, STOP. Se generează $\underset{1}{M}^{-1}$ prin pivotare pe $\underset{0}{M}$, cu pivot $\boxed{\frac{1}{5}}=A_{23}^{(0)}$ (exercițiu).

Exemplul 4.5.2. În exemplul (4.5.1.) să se aleagă $D_3 = 2$. Se vor obține aceleaşi rezultate ca cele anterioare dacă se alege $j=4\in K_1^{(0)}$.

Dacă însă se alege $j=3\in K_1^{(0)}$ se vor obține aceleaşi valori $r_{13}^{(0)}=\frac{5}{2};\ \underset{>}{R_{(2;3)}}=\frac{5}{2}$ dar $\overline{\alpha}_3=\min\left\{D_3=2;\ r_{13}=\frac{5}{2}\right\}=2=D_3$;

$\underset{>}{R_{(2;3)}}=\frac{5}{2}>\overline{\alpha_3}=2$. Se preferă $\underset{1}{u_3}=2=D_3$ pentru a nu schimba baza.

Rezultă:

$$\underset{(1)}{U}\left|\begin{array}{l}\underset{(1)}{u_1}=1-\frac{2}{5}.2=\frac{1}{5}\\ \underset{(1)}{u_2}=2-\frac{1}{5}.2=\frac{8}{5}\\ \hline z_1=67/5\end{array}\right. ;\ \begin{array}{l}I^{(1)}=\{1;2\}\\ I_{>}^{(1)}=\{2\}\end{array};\left|\begin{array}{l}\underset{1}{u_3}=2\\ \underset{1}{u_4}=0\end{array}\right. ;\ \begin{array}{l}K_2^{(1)}=\{3\}\\ K_1^{(1)}=\{4\}\end{array};\ \underset{1}{M}=\underset{0}{M}$$

care $\underset{(1)}{U}$, nu este program complet, căci $\underset{(1)}{u_2}=\frac{8}{5}>D_2=\frac{3}{2}$.

Continuăm cu $j\in K_1^{(1)}$. Cum $\underset{1}{M}^{-1}=\underset{0}{M}^{-1}$, rezultă:

$$P_4^{(1)}=\underset{1}{M}^{-1}P_4=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{array}{l}A_{14}^{(1)}\\ A_{24}^{(1)}\end{array};\ \begin{cases}\underset{(2)}{u_1}=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\underset{(2)}{u_4}\\ \underset{(2)}{u_2}=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\underset{(2)}{u_4}\end{cases}$$

$$r_{14}^{(1)} = \min\left\{ \frac{\frac{1}{5}}{\boxed{\frac{1}{5}}} ; \frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}} \right\} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = 1; \alpha_4^1 = \min\left\{ D_4 = 2; r_{14}^{(1)} = 1 \right\} = 1;$$

$$\underset{>}{R_{24}^{(1)}} = \max\left\{ \frac{\frac{1}{5} - 1}{\frac{1}{5}} ; \frac{\frac{8}{5} - 2}{\frac{3}{5}} \right\} = -\frac{2}{3} < \alpha_4^{(1)} = \frac{\frac{1}{5}}{\boxed{\frac{1}{5}}} = 1$$

Se alege $\underset{(2)}{u_4} = \alpha_4^{(1)} = 1$ bazică în locul lui u_1 care devine secundară.

Rezultă:

$$\underset{(2)}{U} \left| \begin{array}{l} \underset{(2)}{u_4} = 1 \\ \underset{(2)}{u_2} = 1 \\ \hline z_2 = 14 \end{array} \right. ; \; I^{(1)} = \{4; 2\}; \; \left| \begin{array}{l} \underset{(2)}{u_3} = \underset{(1)}{u_3} = D_3 = 2 \\ \underset{(2)}{u_1} = 0 \end{array} \right. ; \; \begin{array}{l} K_2^{(2)} = \{3\} \\ K_1^{(2)} = \{1\} \end{array}$$

$$\underset{M_1 = M_0}{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}} \left| \overset{P_4^{(1)}}{\begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{5}} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}} \right. \Rightarrow \underset{\underset{(2)}{M^{-1}_{(4;2)}}}{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$-C_b^{(2)} \underset{(2)}{M^{-1}} = -\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}; \; \underset{(2)}{M^{-1}_{(4;2)}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{C_1^{(2)}} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ \frac{}{2}\end{pmatrix} = -1; 1 \in K_1^{(2)};$$

$$\overline{C_3^{(2)}} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \frac{}{4}\end{pmatrix} = 2 > 0; 3 \in K_2^{(2)}$$

Cum $I_{>}^{(2)} = \Phi$ STOP: $\underset{(2)}{U}$ program complet filtrat.

Exemplul 4.5.3. În exemplul 4.5.2. să se pornească cu programul de bază $\underset{0}{U}^t = \left\{0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right\}$ al problemei AU=B; $U \geq 0$.

Rezolvare. Avem de exemplu: $I^{(0)} = \{3;2\}$ (sau $I^{(0)} = \{2;3\}$)

$$\underset{0}{U}\left|\begin{array}{l} \underset{0}{u_3} = \frac{5}{2} \\ \underset{0}{u_2} = \frac{3}{2} \\ \hline z_0 = \frac{29}{2} \end{array}\right. ; \quad \begin{array}{l} I^{(0)} = \{3;2\} \\ I_{>}^{(0)} = \{3\} \end{array} ; \quad \left|\begin{array}{l} \underset{0}{u_1} = 0 \\ \underset{0}{u_4} = 0 \end{array}\right. ; \quad \begin{array}{l} K_1^{(0)} = \{1;4\} \\ K_2^{(0)} = \Phi \end{array} ; M_{(3;2)}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Deoarece $\underset{0}{u_3} = \frac{5}{2} > D_3 = 2$ rezultă $I_{>}^{(0)} \neq \Phi$. Deci $\underset{0}{U}$ nu este complet. Să alegem $j = 4 \in K_1^{(0)}$. Avem: $\underset{1}{U}_3 = 5/2 - 1/2 \underset{1}{U}_4$

$$P_4^{(0)} = \underset{0}{M}^{-1} P_4 = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} A_{14}^{(0)} \\ A_{24}^{(0)} \end{array} ; \left\{ \begin{array}{l} \underset{1}{u_3} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \underset{(1)}{u_4} \\ \underset{1}{u_2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \underset{(1)}{u_4} \end{array} \right. ; \quad \begin{array}{l} \min\left\{\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}; \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = r_{34}^{(0)} \\ \max\left\{\frac{\frac{5}{2}-2}{\frac{1}{2}}; \frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\frac{5}{2}-2}{\frac{1}{2}} = \underset{>}{R_{34}^{(0)}} \end{array}$$

$$\min\left\{D_4 = 2; r_{34}^{(0)}\right\} = D_4 = 2 = \alpha_4^{(0)}; \underset{>}{R_{34}^{(0)}} = 1 < \alpha_4^{(0)}.$$

Se va alege $\underset{1}{u_4} = \alpha_4 = 2 = D_4$

(deci fără schimbare de bază) (Exercițiu).

Se poate alege $\underset{1}{u_4} = \underset{>}{R_{(3;4)}} = 1 = \dfrac{\frac{5}{2} - 2}{\boxed{\frac{1}{2}}}$. Pivot $A_{14}^{(0)} = \boxed{\frac{1}{2}}$. Avem:

$$\underset{2}{U}\left|\begin{array}{l} \underset{(1)}{u_4} = 1 \\ \underset{(1)}{u_2} = 1 \end{array}\right. ;\ I^{(1)} = \{4;2\};\ \left|\begin{array}{l} \underset{(1)}{u_1} = 0 \\ \underset{(1)}{u_3} = 2 \end{array}\right. ;\ \begin{array}{l} K_1^{(1)} = \{1\} \\ K_2^{(1)} = 3 \end{array};\ I_{>}^{(1)} = \Phi\ .\ \textbf{STOP}$$

Se obțin datele anterioare.

Exemplul 4.5.4. Să se rezolve sistemul :

$u_1 + u_2 + u_3 = 50$

$4u_1 + 4u_2 + 2u_3 = 80$; $0 \le u_1 \le 10$; $0 \le u_2 \le 40$; $0 \le u_3 \le 30$

Rezolvare . Se alege o matrice bazică $M_{(1;3)}$. Avem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \underset{(0)}{M_{(1;3)}^{-1}};\ I^{(0)} = \{1;3\}$$

$$M^{-1}P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P_2^{(0)};\ M^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 60 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \underset{0}{u_1} \\ \underset{0}{u_3} \end{array};\quad \begin{cases} \underset{(1)}{u_1} = -10 - 1\underset{(1)}{u_2} \\ \underset{(1)}{u_3} = 60 + 0\underset{(1)}{u_2} \end{cases}$$

(forma canonică)

Sistemul nu admite programe și deci nici programe de bază (care sunt programe particulare). Prin urmare nu vor exista nici programe complete filtrate și nici programe complete.

Exemplul 4.5.5. Fie dat sistemul:

$2u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4$

$u_1 + 3u_2 + u_3 + 2u_4 = 7$; $u_1 \ge 0$; $0 \le u_2 \le 3/2$; $0 \le u_3 \le 2$; $0 \le u_4 \le 2$, adică u_1 are numai restricție de nenegativitate. Să se pornească cu ($u_3; u_4$) ca bazice.

Avem : $I^{(0)} = \{3;4\}$;

$$\underset{0}{U} \begin{matrix} \underset{(0)}{u_3} = 1 \\ \underset{(0)}{u_4} = 3 \end{matrix} ; \begin{matrix} \underset{(0)}{u_1} = 0 \\ \underset{(0)}{u_2} = 0 \end{matrix} ; \begin{matrix} K_1^{(0)} = \{1;2\} \\ K_2^{(0)} = \Phi \end{matrix} ; \underset{0}{M}^{-1}_{(3;4)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cum $\underset{(0)}{u_4} = 3 > D_4 = 2$ avem $I_{>}^{(0)} = \{4\}$, adică extra programul de bază $\underset{0}{U}$ nu este complet. Să alegem $j = 1 \in K_1^{(0)}$. Rezultă:

$$P_1^{(0)} = \underset{0}{M}^{-1} P_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_{11}^{(0)} \\ A_{21}^{(0)} \end{matrix} ; \begin{cases} \underset{(0)}{u_3} = 1 - 3\underset{(1)}{u_1} \\ \underset{(0)}{u_4} = 3 - (-1)\underset{(1)}{u_1} \end{cases} ;$$

Cum avem $A_{\bar{r}1}^{(0)} > 0$, punem condițiile: $u_{\bar{r}} \geq 0, \bar{r} \in I^{(0)}$. Adică, calculăm:

$$\min \{ \min_{A^0 > 0} \left\{ \frac{\underset{0}{u_{\bar{r}}}}{A_{\bar{r}1}^{(0)}} \right\} = \frac{1}{3} = r_{31}^{(0)} = \frac{\underset{0}{u_3}}{A_{11}^{(0)}} .$$

Deoarece pentru $\bar{r} \in I_{>}^{(0)} = \{4\}$, nu avem $A_{\bar{r}1}^{(0)} > 0$ (căci $A_{21}^{(0)} < 0$) nu se scrie $R_{\underset{>}{\bar{s}1}}^{(0)}$.

Deoarece pentru $A_{21}^{(0)} = -1 < 0, \underset{(0)}{u_4} = 3 > D_4$ nu avem $A_{\bar{r}1} < 0$ cu $\bar{r} \in I^{(0)} \setminus I_{>}^{(0)}$. Deci nu se mai scrie $\overline{R_{\bar{k}1}^{(0)}}$. Rămâne numai $r_{31}^{(0)} = \frac{1}{3} = \frac{\underset{0}{u_3}}{A_{11}^{(0)}} : (j = 1)$. Deoarece u_1 nu are margine superioară, D_1 se scrie:

$$\alpha_1^{(0)} = r_{31}^{(0)} = \frac{1}{\boxed{3}} = \frac{\underset{0}{u_3}}{A_{11}^{(0)}}$$

(adică $\alpha_1^{(0)} = \min\left\{D_1, r_{31}^{(0)}\right\} = r_{31}^{(0)}$). Se alege $\underset{(1)}{u_1} = \alpha_1^{(0)} = \frac{\underset{0}{u_3}}{A_{11}^{(0)}}$ ca nouă valoare bazică în locul lui u_3. Rezultă:

$$\underset{(1)}{U}\ \left|\begin{array}{l} \underset{(1)}{u_1} = 1/3 \\ \underset{(1)}{u_4} = 10/3 \end{array}\right. ;\quad I^{(1)} = \{1;4\};\ \left|\begin{array}{l} \underset{(1)}{u_3} = 0 \\ \underset{(1)}{u_2} = 0 \end{array}\right. ;\quad K_1^{(1)} = \{3;2\};\ K_2^{(1)} = \Phi$$

$$\underset{(0)}{M^{-1}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} \boxed{3} \\ -1 \end{pmatrix} \right. \Rightarrow \underset{(1)}{M_{(1,4)}^{-1}}\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

care este un nou program de bază, dar nu complet deoarece $\underset{1}{u_4} = \frac{10}{3} > D_4 = 2$. Deci $I_{>}^{(1)} = \{4\}$. Se va relua algoritmul. Se alege $j = 2 \in K_1^{(1)}$.

Avem:

$$P_2^{(1)} = \underset{(1)}{M^{-1}} P_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} A_{12}^{(1)} \\ A_{22}^{(1)} \end{matrix};\ \begin{cases} \underset{(2)}{u_1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\underset{(2)}{u_2} \\ \underset{(2)}{u_4} = \frac{10}{3} - \frac{5}{3}\underset{(2)}{u_2} \end{cases};\ r_{42}^{(1)} = \frac{\frac{10}{3}-\frac{3}{3}}{\frac{5}{3}} = 2.$$

Avem $A_{12}^{(1)} = -\frac{1}{3} < 0$ pe linia lui $\underset{(2)}{u_1} = \frac{1}{3}$. Dar u_1 nu are margine superioară. Deci nu se scrie $\overline{R_{13}^{(1)}}$.

Avem $A_{22}^{(1)} = \frac{5}{3} > 0$ 0 pe linia lui $\underset{(2)}{u_4} = \frac{10}{3} > D_4 = 2$.

Deci se scrie: $\underset{>}{R_{42}^{(1)}} = \frac{\underset{(1)}{u_4} - D_4}{A_{22}^{(1)}} = \frac{\frac{10}{3} - 2}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}.$

Calculăm $\alpha_2^{(1)} = \min\left\{D_2 = \frac{3}{2};\ r_{42}^{(1)} = 2\right\} = \frac{3}{2} = D_2$;

Avem $\underset{>}{R_{42}^{(1)}} < \alpha_2^{(1)}$. Se poate alege $\underset{(2)}{u_2} = R_{42}^{(1)}$ sau $\underset{(2)}{u_2} = \alpha_2^{(1)}$. Se preferă $\underset{(2)}{u_2} = \alpha_2^{(1)} = \frac{3}{2} = D_2$ pentru a nu schimba baza. Rezultă:

$$\underset{2}{U}\left|\begin{array}{l} \underset{(2)}{u_1} = 5/6 \\ \underset{(2)}{u_4} = 5/6 \end{array}\right. ; \quad I^{(2)} = \{1;4\}; \quad \left|\begin{array}{l} \underset{(2)}{u_2} = 3/2 = D_2 \\ \underset{(2)}{u_3} = 0 \end{array}\right. ; \quad \begin{array}{l} K_2^{(2)} = \{2\} \\ K_1^{(2)} = \{3\} \end{array}; \underset{(2)}{M} = \underset{(1)}{M}.$$

Cum $I_{>}^{(2)} = \phi$ STOP; U_2 este un program complet filtrat. De aici mai departe se aplică algoritmul de generare a programelor complet filtrate pornind de la unul dat, $\underset{0}{U}$ (se poate lua $\underset{2}{U}$ ca $\underset{0}{U}$).

Iată un caz în care una (sau mai multe) din variabile nu are margine superioara.

Exercițiul 4.5.2. Să se aleagă, $\underset{(2)}{u_4} = \underset{>}{R_{(4;2)}} = 4/5$ şi să se scrie noul program, cât şi $M_{(1;2)}^{-1}$ (căci u_2 devine bazică în locul lui u_4 care devine secundară la valoarea, $\underset{(2)}{u_4} = 2 \in K_2^{(2)}$. Se pivotează pe $\underset{(1)}{M}^{-1}$ cu pivot $A_{22}^{(1)} = 5/3$).

Având această pregătire se poate trece la elaborarea algoritmului de rezolvare a problemelor de programare liniară generale, cu variabile mărginite inferior şi superior, sau unele mărginite inferior, dar superior nu.

Exercițiul 4.5.6. Să considerăm sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} \quad -1 \le x_1 \le 1; \quad x_2 \ge 1; \quad x_3 \ge 0; \quad x_4 \ge 0.$$

Făcând transformarea: $x_1 - (-1) = u_1$; $x_2 - 1 = u_2$; $x_3 = u_3$; $x_4 = u_4$ rezultă:

$$\begin{cases} u_1 \quad + 2u_3 \qquad = 4 \\ \quad u_2 + u_3 + 2u_4 = 3 \end{cases} \qquad 0 \le u_1 \le 2;\ u_2 \ge 0;\ u_3 \ge 0;\ u_4 \ge 0$$

Un program complet filtrat este $\underset{0}{U}^t = (2;2;1;0)$. Putem scrie: $\begin{cases} \underset{(1)}{u_1} = 2 - 0.\underset{(1)}{u_4} \\ \underset{(1)}{u_2} = 2 - (-2).\underset{(1)}{u_4} \end{cases}$

Cum u_2 nu este mărginit superior şi nici u_4, rezultă că pentru orice $u_4 > 0$ va rezulta un program complet $(2; 2+2u_4; 1; u_4), u_4 \to \infty$. Iată un caz în care mulțimea programelor complete este nemărginită.

Dacă toate variabilele sunt mărginite, $0 \le U \le D$ (D_k - finite), atunci mulțimea programelor complete (inclusiv a celor complet filtrate) este compactă.

BIBLIOGRAFIE

1. [*Bal*]- Balinski, M.L *Integer Programming.* Mang. Sci., 12 nr. 3 (1965) p. 253-313.

2. [*Bel*]- Bellman, R.E *Dynamic Programming.* Princeton Univ. Press, 1957.

3. [*Bel.Dre*]- Bellman, R.E. Dreyfus,S.E *Programare dinamică aplicată.* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957.

4. [*Ben*]- Benders, J.F *Partition Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems.* Numerische Math. 4 (1962), p.238-252

5. [*D.W.*]- Dantzig G.B, Wolfe, P., *Decomposition Algoritm for Linear Programming.* Econometrica, 9, nr. 4, 1961, *Linear Programming and Extension,* Princeton Univ. Press, 1957. N.J 1963.

6. [*Dr.Mal.*]- Dragomirescu M., Maliţa M., *Programarea pătratică.* Ed. Stiinţifică, Bucureşti, 1968.

7. [*Dz.Gom.*]- Dzielinski, B.P., Gomory, R.E., Management Sci. 11, nr. 9 (1965), p. 874-890.

8. [*F.Ful.*]- Ford, L.R, Fulkerson, D.R *Flows in Networks.* Princeton Univ. Press. Princeton N.J., 1962.

9. [*Gil.Gom.*]- Gilmore, P.C., Gomory, R.E., Operation Res., nov-dec. 1963, p. 863-887.

10. [*Ko.*]- Koopmans, C.T., *Optimum Utilisation of the Transportation System.* Econometrica-Supl. 1949.

11. [*Kau.*]- Kaufmann A., Cruon, R., *La programmation dynamique,* Dunod, Paris 1965.

12. [*Lanc.*]- Lancaster, K., *Analiză economică matematică.* Ed. Stiinţifică, Bucureşti, 1970.

13. [*Lan.*]- Lange O., *Decizii optime.* Ed. Stiinţifică, Bucureşti, 1975.

14. [$Las.$]- Lasdon, S.L., *Teoria optimizării sistemelor mari.* Ed. Stiinţifică, Bucureşti, 1975.

15. [$Mih.Stef.$]- Mihoc Gh., Stefănescu, A., *Programarea Matematică,* E. D. P., Bucureşti, 1973.

16. [$St.$]- Stavre P., Matematici aplicate în economie. Ed. Scrisul Românesc, 1982.

17. [$St.Ion.Zan.$]- Stavre P., Ionescu, V., Zanfir, St., *Matematică.* Reprografia Univ. din Craiova, 1990.

18. [$St.Roc.$]- Stavre P., Rocşoreanu C., *Optimizări şi aplicaţii în economie.* Ed. Infomed 1995.

19. [$St.$]- Stavre P., *Programare Liniară (I),* Ed. Universitaria, 1998.

20. [$St.$]- Stavre P., Algoritmul $\theta\,(D)$. Conf. Naţ. a Soc. de Şt. Mat., Ed.. Reprograf, 2000, p. 231-237.

21. [$St.$]- Stavre P., Algoritmul discret cu reducerea memoriei de calcul, Proc. of the Rom. Soc. of Mat. vol I, Ed. Univ. Transilvania, 2001, p. 301-308.

22. [$St.$]- Stavre P., Matematici Aplicate, vol I-II, Ed. Universitaria, (1999; 2000).

23. [$Stn.$]- Stănescu, M.M., Algebră Liniară, Geometrie Analitică şi Diferenţială, Reprografia Univ. Craiova, Craiova 2000.

24. [$Stn.$]- Stănescu M.M., Munteanu F., Slesar V., Culegere de probleme de Algebră Liniară, Geometrie Analitică şi Geometrie Diferenţială, Craiova, Ed. Sitech 2003.

25. [$Wil.Chic.$]- Williams, H.P., Chichester, 1993. *Model solving in mathematical programing.* Chichester 1993.

26. ***, *Modern Mathematical Method of Optimization,* Academic Verlag, Berlin 1993.

Cuprins