ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

2.1 Șiruri de numere reale

Definiția 2.1.1 *Se numește* ***șir de numere reale*** *orice funcție* $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$.

Se notează $f(n)$ cu a_n, pentru orice n număr natural, n fiind locul termenului a_n în șir, iar șirul de termen general a_n îl vom nota cu $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sau $(a_n)_n$.

Definiția 2.1.2 *Dacaă* $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ *este un șir de numere naturale, atunci șirul de termen general* $y_k = a_{n_k}$ *pentru orice k număr natural, se va numi* ***subșir*** *al șirului* $(a_n)_n$.

Definiția 2.1.3 *Un șir* $(a_n)_n$ *se numește* ***staționar*** *dacă există* $n_0 \in \mathbf{N}$ *astfel ca* $a_n = a_{n_0}$ *pentru orice* $n \geq n_0$.

Un șir $(a_n)_n$ *se numește* ***constant*** *dacă* $a_n = a$ *pentru orice n număr natural.*

Un șir $(a_n)_n$ *se numește* ***periodic*** *dacă există* $k \in \mathbf{N}$ *astfel ca* $a_{n+k} = a_n$ *pentru orice* $n \in \mathbf{N}$.

Exemple:

1. Șirul de termen general $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$ este un șir de numere reale.

2. Șirul de termen general $a_n = \left[1 + \frac{3}{n}\right]$, $n \in \mathbf{N}^*$, unde $[.]$ reprezintă partea întreagă, este staționar deoarece $a_1 = 4$, $a_2 = 2, a_3 = 2, \ldots, a_n = 2, \ldots$
3. Șirul de termen general $a_n = (-1)^n$ este periodic deoarece $a_{n+2} = a_n$ pentru orice *n* natural.
4. Pentru șirul de termen general $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{2n} = \frac{1}{2n}$ determină un subșir, numit subșirul termenilor de rang par.

Trei caracteristici mai importante se studiază legat de șirurile de numere reale: monotonia, mărginirea și convergența.

Definiția 2.1.4 *Un șir $(a_n)_n$ se numește:*

- ***mărginit*** *dacă există M >0 astfel ca $|a_n| \leq M$ pentru orice n număr natural;*
- ***crescător (strict crescător)*** *dacă $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$) pentru orice n număr natural;*
- ***descrescător (strict descrescător)*** *dacă $a_n \geq a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) pentru orice n număr natural;*
- ***monoton (strict monoton)*** *dacă este crescător sau descrescător (respectiv strict crescător sau strict descrescător).*

Exemple:

1. Șirul de termen general $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$ este un șir mărginit de numere reale, deoarece toți termenii săi se găsesc

în intervalul [-1,1]. Acest șir nu este monoton.

2. Șirul de termen general $a_n = n$ este un șir crescător, fără a fi mărginit.
3. Șirul de termen general $a_n = \frac{1}{n}$, n ∈ **N*** este un șir descrescător și mărginit.

Noțiunea de limită este foarte intuitivă și naturală. Înainte de a da definiția riguroasă, vom face un mic experiment. Să calculăm cu ajutorul calculatorului câțiva termini ai șirului definit de relația $a_{n+1} = \cos a_n$ pentru orice *n* număr natural și $a_0 = 1$:

$a_1 = \cos 1 = 0{,}5403$

$a_2 = \cos a_1 = 0{,}85755$

$a_3 = \cos a_2 = 0{,}65429$

$a_4 = \cos a_3 = 0{,}79348$

$a_5 = \cos a_4 = 0{,}70137$

$a_{17} = \cos a_{16} = 0{,}73876$

$a_{18} = \cos a_{17} = 0{,}7393$

$a_{19} = \cos a_{18} = 0{,}73894$

$a_{20} = \cos a_{19} = 0{,}73918$

Este evident că aceste valori se apropie de numărul 0,73. Vom vedea că acest șir are o limită care se rotunjește la numărul 0,73. Pentru aceasta vom define limita unui șir și vom evidenția metode de calcul a limitei unui șir.

Definiția 2.1.4 *Spunem că un șir $(a_n)_n$ de numere reale are* ***limita***

$a \in \mathbf{R}$ dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există $N_\varepsilon \in$ **N** *astfel încât pentru orice $n \geq N_\varepsilon$ să avem $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Spunem că șirul $(a_n)_n$ de numere reale are **limita** *∞ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N_\varepsilon \in$* **N** *astfel încât pentru orice $n \geq N_\varepsilon$ să avem $a_n > \varepsilon$.*

Spunem că șirul $(a_n)_n$ de numere reale are **limita**-*∞ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N_\varepsilon \in$* **N** *astfel încât pentru orice $n \geq N_\varepsilon$ să avem $a_n > \varepsilon$.*

Definiția 2.1.5 *Spunem că un șir $(a_n)_n$ de numere reale este* ***convergent*** *dacă are limită finită. În caz contrar șirul se numește* ***divergent****.*

Proprietăți:

1. *Dacă există, limita unui șir este unică.*
2. *Dacă un șir are limită finită, atunci el este mărginit (reciproca nu este adevărată: nu orice șir mărginit are limită).*
3. *Un șir de numere reale are limta a dacă și numai dacă orice subșir al său are limita a.*

Exemple:

1. *Șirul de termen general $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$ are limita 0.*

Rezolvare: Fie $\varepsilon > 0$.

$|a_n - a| = |a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ echivalent cu $n > \frac{1}{\varepsilon}$, deci N_ε poate fi ales $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$.

2. *Șirul de termen general* $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$*, n*$\in$$\boldsymbol{N}$** are limita 0, fără a fi monoton (acesta arată că reciproca teoremei lui Weierstrass nu este adevărată).*

Rezolvare: Fie $\varepsilon > 0$.

$|a_n - a| = |a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ echivalent $n > \frac{1}{\varepsilon}$, deci N_ε poate fi ales $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$.

3. *Șirul de termen general* $a_n = \frac{1}{n^p}$, $n \in \boldsymbol{N}^*$*are limita 0 dacă p este strict pozitiv, are limita ∞ dacă p este strict negativ și este șir constant 1, deci are și limita 1, pentru p=0.*

Rezolvare: Fie $\varepsilon > 0$. Dacă $p > 0$ avem:

$|a_n - a| = |a_n| = \frac{1}{n^p} < \varepsilon$ echivalent cu $n > \sqrt[p]{\frac{1}{\varepsilon}}$, deci N_ε poate fi ales $\left[\sqrt[p]{\frac{1}{\varepsilon}}\right]+1$.

Dacă $p<0$, atunci $-p> 0$ deci $a_n > \varepsilon$ echivalent cu $n > \sqrt[-p]{\varepsilon}$ deci N_ε poate fi ales $\left[\sqrt[-p]{\varepsilon}\right]+1$.

4. *Șirul de termen general* $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$*, unde P și Q sunt două polinoame, are:*
   - *Limita 0 dacă gradP < gradQ;*
   - *Limita +∞ sau -∞ dacă grad P > gradQ;*
   - *Limita* $\frac{a_k}{b_k}$ *dacă cele două polinoame au același grad, k, iar coeficienții lor dominanți sunt* a_k *și* b_k*.*

Rezolvare: se scoate factor comun forțat și la numărător și la numitor puterea cea mai mare anumărului n, apoi se aplică exercițiul precedent.

5. *Șirul de termen general $a_n = q^n$, $n \in \boldsymbol{N}^*$ are:*
   - *Limita 0 dacă $|q| < 1$;*
   - *Limita $+\infty$ dacă $q > 1$*
   - *Nu are limită dacă $q \leq -1$*
   - *Este constant 1, deci are și limita 1 dacă $q = 1$.*

   Rezolvare: Fie $\varepsilon > 0$.

   $|a_n - a| = |a_n| = q^n < \varepsilon$ echivalent cu:

   $n \ln q < \ln\varepsilon$, deci, $n > \frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon \ln q}$

   N_ε poate fi ales $max(\left[\frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon \ln q}\right]+1, 0)$ (am ținut cont că dacă $|q| < 1$ atunci $\ln q < 0$).

6. *Dacă $|a_n| \to 0$, atunci $a_n \to 0$.*

   Rezolvare: se demonstrează imediat folosind definiția.

   Observație: Dacă $|a_n| \to |a|$, nu rezultă neapărat că $a_n \to a$.

Operații cu limite de șiruri

Fie $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ două șiruri de numere reale. Sunt adevărate:

i. *Dacă $(a_n)_n$ are limita a și $(b_n)_n$ are limita b, atunci $(a_n+b_n)_n$ are limita $a+b$, cu excepția situației când $a = \infty$ și $b = -\infty$, caz în care nu se poate spune nimic despre natura șirului $(a_n+b_n)_n$.*

   Menționăm că $\infty + \infty = \infty$, $\infty + l = \infty$, pentru orice l

număr real.

ii. *Dacă $(a_n)_n$ are limita a și $(b_n)_n$ are limita b, atunci $(a_n \cdot b_n)_n$ are limita $a \cdot b$, cu excepția situației când $a = \infty$ și $b = 0$, caz în care nu se poate spune nimic despre natura șirului $(a_n \cdot b_n)_n$.*

Menționăm că $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot l = \infty$, pentru orice l număr real pozitiv și $\infty \cdot l = -\infty$, pentru orice l număr real negativ.

iii. *Dacă $(a_n)_n$ are limita a și $(b_n)_n$ are limita b, iar$(b_n)_n$ aretermenii nenuli, atunci $(\frac{a_n}{b_n})_n$ are limita $\frac{a}{b}$, cu excepția $a = \infty$ și $b = \infty$ sau $a = 0$ și $b = 0$, cazuri în care nu se poate spune nimic despre natura șirului $(\frac{a_n}{b_n})_n$.*

Situațiile $[\infty - \infty]$, $[\infty \cdot 0]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $[0^0]$, $[1^\infty]$,…se numesc cazuri de nedeterminare.

De multe ori, pentru a calcula limita unui șir nu se folosește definiția, ci se utilizează criterii:

Criteriul cleștelui

Fie $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ și $(c_n)_n$ trei șiruri de numere reale astfel ca:

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ pentru orice } n \geq N$$

Atunci:

a. *Dacă $(a_n)_n$ și $(c_n)_n$ sunt convergente și au aceeași limită a, atunci și $(b_n)_n$ va fi convergent și va avea tot limita a.*

b. *Dacă* $(a_n)_n$ *tinde la* ∞, atunci $(b_n)_n$ *va tinde tot la* ∞.

c. *Dacă* $(c_n)_n$ *tinde la* $-\infty$, atunci $(b_n)_n$ *va tinde tot la* $-\infty$.

Consecință

Produsul dintre un șir care tinde la 0 și unul mărginit are limita 0.

Într-adevăr, dacă $(a_n)_n$ *este convergent la 0 și* $(b_n)_n$ *este mărginit de M, atunci:*

$$0 \le |a_n \cdot b_n| \le M\,|a_n|$$

Folosind acum criteriul cleștelui a. rezultă că $|a_n \cdot b_n| \to 0$, deci $a_n \cdot b_n \to 0$.

Exemple:

1. *Șirul* $a_n = \frac{\sin n}{n}$ *are limita 0, deoarece este produsul dintre un șir mărginit de termen general sin n și un șir care tinde la 0,* $\left(\frac{1}{n}\right)_n$.
2. *Șirul* $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{n^2+k}$ *tinde la 0 deoarece:*

   $$0 \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{n^2+k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \to 0$$

Teorema Weierstrass

Orice șir monoton și mărginit este convergent.

Observație: dacă șirul este crescător este sufficient să demonstrăm numai mărginirea superioară, iar dacă șirul este descrescător este suficient să demonstrăm mărginirea superioară.

Exemple:

1. Șirurile de termeni generali $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ *și* $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ *sunt monotone și mărginite, deci sunt convergente. Arătați că au aceeași limită.*

Rezolvare: Monotonia acestor șiruri se demonstrează folosind inegalitatea lui Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$, adevărată pentru orice n natural și orice $x \geq -1$.

Într-adevăr,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{n+1}{n} \cdot \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq$$

$$\frac{n+1}{n} \cdot \left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1.$$

Aceasta arată că șirul $(x_n)_n$ este crescător.

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq$$

$$\frac{n}{n=1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1.$$

Rezultă astfel că șirul $(y_n)_n$ este descrescător.

Să observăm acum că $x_n < y_n$. Combinând această relație cu monotonia celor două șiruri, putem scrie:

$$x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq y_n \leq y_{n-1} \leq \cdots y_0$$

De aici rezultă și mărginirea celor două șiruri, în concluzie, potrivit teoremei lui Weierstrass convergența lor.

Deoarece

$$y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^n \cdot (1+\frac{1}{n}) = x_n \cdot (1+\frac{1}{n}),$$

rezultă că ele au aceeași limită. Această limită se notează cu e, este un număr irațional aproximativ egal cu 2,71828 și verifică inegalitatea

$$(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

2. Pornind de la inegalitatea de mai sus vom demonstra că șirul de termen general

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

este monoton și mărginit, deci convergent.

Rezolvare: Logaritmând inegalitatea

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

obținem

$$n \cdot \ln\frac{n+1}{n} \leq 1 \leq (n+1) \cdot \ln\frac{n+1}{n}$$

Adică

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

Deci $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln n + \ln(n+1) \leq 0$,

adică șirul $(c_n)_n$ este descrescător.

Pentru a arăta mărginirea, sumăm inegalitățile

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

și obținem

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1} \leq ln(n+1) \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

Adică $c_n \geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \geq 0$

Șirul fiind descrescător, mărginirea inferioară este suficientă.

Limita acestui șir se notează cu *c* și se numește constanta lui Euler.

3. Cu ajutorul șirului $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ *se pot rezolva nedeterminările de forma* $[1^\infty]$.

Într-adevăr,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n}{n^2+1})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{n}{n^2+1})^{\frac{n^2+1}{n}\cdot\frac{n}{n^2+1}\cdot n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n^2}} = e$$

4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ *un șir cu proprietățile* $0 < a_{n+1} + a_n$ si $a_{n+1}^2 < a_n^2, \forall n \geq 1$. *Să se arate că șirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este convergent.*

Rezolvare:

$$a_{n+1}^2 < a_n^2 \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - a_n^2 < 0 \Leftrightarrow (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) < 0$$

Ținem cont ca $a_{n+1} + a_n > 0$ și rezultă $a_{n+1} - a_n < 0 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

$\left.\begin{cases} 0 < a_{n+1} + a_n \\ a_{n+1} < a_n \end{cases}\right\} \Rightarrow 0 < 2a_n \Rightarrow a_n > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow$ șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior de 0. Conform teoremei lui Weierstrass, rezultă că șirul este convergent.

Definiția 2.1.6 *Un șir* $(a_n)_n$ *de numere reale se numește* ***șir Cauchy***

dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ *astfel încât pentru orice* $n, m \geq N_\varepsilon$ *să avem* $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Observație: se poate înlocui ultima relație cu $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N_\varepsilon$ și orice p natural.

Criteriul lui Cauchy (proprietatea de completitudine a spațiului numerelor reale)

Orice șir Cauchy de numere reale este convergent.

Exemplu:

Studiați convergența șirului de termen general:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k(k+1)}$$

Rezolvare: Folosind faptul ca $|\sin x| \leq 1,$ rezultă

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| < \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}$$

$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ echivalent cu $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$,

deci N_ε poate fi ale max $\left(0, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]-1\right)$

O altă metodă de abordare a unui șir o poate constitui următoarea propoziție:

Propoziție: *Fie* $(a_n)_n$ *un șir de numere reale positive astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

a. *Dacă* $l < 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

b. *Dacă l > 1, atunci* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

c. *Există și* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *și este egală tot cu l.*

Exemple:

1. *Studiați convergența șirului de termen general* $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

Rezolvare:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$, deci rezultă că șirul dat are limita 0.

2. *Studiați convergența șirului de termen general:*

$$a_n = \sqrt[n]{n!\, sin\frac{\pi}{2} \cdot ... \cdot sin\frac{\pi}{n}}$$

Rezolvare: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!sin\frac{\pi}{2}\cdot...\cdot sin\frac{\pi}{n+1}}{n!sin\frac{\pi}{2}\cdot...\cdot sin\frac{\pi}{n}} = = \lim_{n\to\infty}(n+1)sin\frac{\pi}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}} \cdot \pi = \pi$

Deci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\, sin\frac{\pi}{2} \cdot ... \cdot sin\frac{\pi}{n}} = \pi$.

Probleme rezolvate:

1. *Calculați limita șirului de termen general:*

$$a_n = \frac{(n-1)!+(n-2)!}{(n-3)!(3n^2-1)}.$$

Rezolvare: $a_n = \frac{(n-2)!(n-1+1)}{(n-3)!(3n^2-1)} = \frac{(n-2)n}{3n^2-1} = \frac{1}{3}$

2. *Calculați limita șirului de termen general* $a_n = \frac{n}{n+1} \cdot cos\frac{n\pi}{3}$.

Rezolvare: În funcție de valorile funcției *cos* distingem următoarele subșiruri:

$a_{6n} = \frac{6n}{6n+1} \cdot cos\frac{6n\pi}{3} = \frac{6n}{6n+1}$, având limita 1,

$a_{6n+1} = \frac{6n+1}{6n+2} \cdot cos\frac{(6n+1)\pi}{3} = \frac{6n+1}{6n+2} \cdot \cos(2n\pi + \frac{\pi}{3}) =$ $\frac{6n+1}{6n+2} \cdot \frac{1}{2}$, având limita $\frac{1}{2}$,

$a_{6n+2} = \frac{6n+2}{6n+3} \cdot cos\frac{(6n+2)\pi}{3} = \frac{6n+2}{6n+3} \cdot \cos(2n\pi + \frac{2\pi}{3}) = \frac{6n+2}{6n+3} \cdot$ $\frac{-1}{2}$, având limita $\frac{-1}{2}$,

$a_{6n+3} = \frac{6n+3}{6n+4} \cdot cos\frac{(6n+3)\pi}{3} = \frac{6n+2}{6n+3} \cdot \cos(2n+1)\pi) = \frac{6n+2}{6n+3} \cdot$ (-1) , având limita -1,

$a_{6n+4} = \frac{6n+4}{6n+5} \cdot cos\frac{(6n+4)\pi}{3} = \frac{6n+2}{6n+3} \cdot \cos(2n\pi + \frac{4\pi}{3}) = \frac{6n+2}{6n+3} \cdot$ $\frac{-1}{2}$, având limita $\frac{-1}{2}$,

$a_{6n+5} = \frac{6n+5}{6n+6} \cdot cos\frac{(6n+5)\pi}{3} = \frac{6n+5}{6n+6} \cdot \cos(2n\pi + \frac{5\pi}{3}) = \frac{6n+1}{6n+2} \cdot \frac{1}{2}$, având limita $\frac{1}{2}$,

Deoarece aceste subșiruri au limite diferite, rezultă că șirul dat nu are limită.

3. *Calculați limita șirului de termen general:*

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+\sqrt{4k^2-1}}}.$$

Rezolvare: Amplificând cu 15onjugate obținem:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2k - \sqrt{4k^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4k - 2\sqrt{4k^2 - 1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4k - 2\sqrt{4k^2 - 1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2k - 1 + 2k + 1 - 2\sqrt{(2k-1)(2k+1)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} \left|\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}\right|$$

Așadar,

$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2n+1} - 1)$,

șir care tinde la ∞.

4. *Aflați limita șirului* $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k}$.

Rezolvare: Deoarece $\frac{k}{n^2+n} \leq \frac{k}{n^2+k} \leq \frac{k}{n^2+1}$, rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+1}$$

Deci:

$$\frac{1}{n^2+n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \leq a_n \leq \frac{1}{n^2+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} k$$

$$\frac{1}{n^2+n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$, rezultă, potrivit criteriului de comparație a., că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

5. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Rezolvare:

Fie $\left(u_n\right)_{n\geq 2}, u_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow 1 + u_n = \sqrt[n]{n} \Rightarrow \left(1 + u_n\right)^n = n$.

Dezvoltăm $\left(1+u_n\right)^n$ cu binomul lui Newton:

$$\left(1+u_n\right)^n = 1 + C_n^1 \cdot u_n + C_n^2 \cdot u_n^2 + ... = n$$

Însă toți termenii care apar în dezvoltare sunt pozitivi, deoarece $u_n > 0$. Suma tuturor termenilor fiind *n*, fiecare dintre aceștia trebuie să fie mai mic decât *n*. Scriem aceasta pentru termenul al treilea:

$$C_n^2 \cdot u_n^2 < n \Leftrightarrow \frac{n\left(n-1\right)}{2} \cdot u_n^2 < n \Leftrightarrow u_n^2 < \frac{2}{n-1} \Rightarrow u_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \forall n \geq 2$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

6. *Fie șirul cu termenul general* $a_n = \frac{1! + 2! + ... + n!}{\left(2n\right)!}$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Rezolvare: Avem

$$0 < a_n < \frac{n \cdot n!}{\left(2n\right)!} = \frac{n}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)...(2n)} \Rightarrow a_n < \frac{1}{n+2}, \forall n \geq 2$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

7. *Să se calculeze:* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

Rezolvare: Observăm că:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \forall k=\overline{1,n}.$$

Rezulta de aici:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad \forall n \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Se observă acum că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$.

Conform criteriului cleștelui a., rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

8. Fie șirul $(u_n)_{n\geq 1}, u_n = \frac{8n-3}{8n+1}$. *Se definește șirul* $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = u_1 u_2 ... u_n$.

Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ *este strict monoton și că* $a_n < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}}$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Rezolvare: O primă observație este că $u_n > 0 \Rightarrow a_n > 0, \forall n \geq 1$ (șirurile date sunt pozitiv definite). Mai mult, se vede imediat că $u_n < 1, \forall n \geq 1$.

Cum însă $\frac{a_{n+1}}{a_n} = u_{n+1} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Pentru stabilirea inegalității $a_n < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}}$, recurgem la metoda inducției matematice.

Mai întâi, se vede că $a_1 = u_1 = \frac{5}{9} < \sqrt{\frac{5}{13}} \Leftrightarrow \frac{25}{81} < \frac{5}{13} \Leftrightarrow 65 < 81$; inegalitatea se verifică așadar prin calcul direct pentru $n = 1$.

Demonstrăm că *P(n)* → *P(n+1)*

Presupunem că $a_n < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}}$ $(*)$ și să arătăm că $a_{n+1} < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+13}}$ $(**)$.

Se înmulțește inegalitatea $(*)$ cu $u_{n+1} = \frac{8n+5}{8n+9}$ și rezultă:

$$a_n \cdot u_{n+1} < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}} \cdot \frac{8n+5}{8n+9} = \frac{\sqrt{5(8n+5)}}{8n+9}$$

Pentru a deduce de aici inegalitatea $(**)$ este suficient sa aratăm că:

$$\frac{\sqrt{5(8n+5)}}{8n+9} < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+13}} \Leftrightarrow \sqrt{(8n+5)(8n+13)} < 8n+9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (8n+5)(8n+13) < (8n+9)^2 \Leftrightarrow 64n^2 + 144n + 65 < 64n^2 + 144n + 81$$

care este evidenta.

Rezultă deci $a_n < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}}$ $\forall n \geq 1$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, conform criteriului cleștelui.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$$

Probleme propuse

1. *Să se studieze convergenta șirurilor cu termenii generali:*

   a) $a_n = (1+\cos n\pi)\cdot \dfrac{n}{n+1}$

   b) $a_n = \sin\dfrac{(4n+1)\pi}{2}$

2. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos^2 n}{n} = 0$

3. *Folosind definiția să se arate că:*

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{5n-1} = \dfrac{4}{5}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = 0$

4. *Fie șirul* $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ *și să se determine rangul începând de la care toți termenii șirului diferă de 1 cu mai puțin de* $\dfrac{1}{100}$.

5. *Să se arate că șirul* $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = n^5\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2}$ *este nemărginit, dar nu tinde spre* $+\infty$.

6. *Fie șirul* $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+k}{n^3+k}$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

7. *Se consideră șirul cu termenul general:*

   $S_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+a}} + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+2a}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+a}}$, *a > 0 și p natural.*

   Să se arate că șirul este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

8. *Se consideră șirul* $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$

a. *Să se arate că șirul este monoton și mărginit;*

b. *Să se arate că* $a_n < \frac{\sqrt{2n-1}}{2n}, \forall n \geq 1$ *și să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

9. *Calculați limita șirurilor de termen general:*

a. $a_n = \frac{sin2n}{n} - n\left[(n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right]$

b. $a_n = \left(cos^2\frac{a}{n} + k sin^2\frac{a}{n}\right)^n$

c. $a_n = (1+n^a)^{\frac{1}{a}} - n$

2.2. Serii numerice

Seriile numerice au apărut din încercarea de a extinde sumele uzuale de la un număr finit de termini la unul infinit. Această încercare a dat naștere unor dileme: una binecunoscută este a sumei infinite 1 – 1 + 1 – 1+… care dacă s-ar grupa (1 – 1) + (1 – 1) +…ar da 0, iar dacă se scrie 1 – (1 – 1) – (1- 1) … ar avea suma 1.

Se va dovedi că seriile infinite nu au aceleași proprietăți ca cele finite (spre exemplu nu avem comutativitate întotdeauna).

Vom prezenta în continuare noțiuni și proprietăți generale legate de seriile numerice.

Definiția 2.2.1 Fie *$(a_n)_n$ un șir de numere reale. Se numește* ***șirul***

sumelor sale parțiale *șirul de termen general* $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Definiția 2.2.2 *Cuplul format dintr-un șir și șirul sumelor sale parțiale se numește* ***serie****, pentru care vom folosi scrierea*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \; sau \; \sum_{n\geq 0} a_n$$

Definiția 2.2.3 *O serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *se numește* ***convergentă*** *dacă șirul sumelor sale parțiale este convergent. Limita șirului sumelor parțiale se numește suma seriei.*

O serie care nu este convergentă se numește ***divergentă****.*

Dacă seria modulelor $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *este convergentă, atunci seria inițială se numește* ***absolut convergentă.***

Observație: Orice serie absolut convergentă este și convergentă, dar reciproca nu este adevărată.

Propoziție: *Dacă seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergentă, atunci șirul* $(a_n)_n$ *are limita 0.*

Într-adevăr, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci $(S_n)_n$ este convergent, deci $S_n - S_{n-1}$ va tinde la 0, deci șirul $(a_n)_n$ are limita 0.

Exemple:

1. *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *este convergentă pentru* $q \in (-1, 1)$ *și divergentă în rest (seria geometrică).*

   Rezolvare: $S_n = 1 + q + \cdots + q^n$

   $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$, care este convergent numai pentru $q \in (-1, 1)$.

2. *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ *este divergentă deoarece șirul sumelor*

parțiale este divergent.

Serii de numere pozitive

Pentru seriile de numere pozitive se observă că șirul sumelor parțiale este crescător, deci convergența acestuia se reduce la studiul mărginirii acestui șir.

Primul criteriu de comparație

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *și* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *două serii de termini pozitivi astfel încât* $a_n \leq b_n$ *pntru orice* $n \geq N$.

1. *dacă seria* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *este convergentă, atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergentă;*
2. *dacă seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este divergentă, atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *este divergentă;*

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{1}{n^2}$ *este convergentă.*

Rezolvare: Ne bazăm pe inegalitatea $sinx \leq x$, adevărată pentru orice $x \geq 0$.

Deci, $sin\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

În același timp,

$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} \ldots + \frac{1}{n\cdot(n-1)} =$

$= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$

Așadar, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, deci și seria $\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{1}{n^2}$ este convergentă.

Al doilea criteriu de comparație

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *și* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *două serii de termini pozitivi astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ *=l. Dacă* $l \in \mathbf{R}^*$*, atunci cele două serii au aceeași natură.*

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{1}{n^2}$ *este convergentă.*

Rezolvare: Ne bazăm pe limita fundamentală $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1.$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{tg\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$ =*1* $\in \mathbf{R}^*$, deci cele două serii au aceeași natură. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă, rezultă că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{1}{n^2}$ este convergentă.

Criteriul de condensare

Fie $(a_n)_n$ *un șir descrescător de numere pozitive. Atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *are aceeași natură cu seria* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$.

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ *este convergentă pentru* $a > 1$ *și divergentă pentru* $a \leq 1$ *(seria armonică).*

Rezolvare: Dacă $a < 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^a} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-a} = \infty \neq 0$, deci seria nu este convergentă.

Dacă $a > 0$, atunci șirul $\left(\frac{1}{n^a}\right)_n$ este descrescător și pozitiv, deci putem aplica criteriul de condensare.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{na}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-a)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-a})^n,$$

care este seria geometrică pentru $q = 2^{1-a}$. Deci $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ este convergentă dacă $a > 1$ și divergentă pentru $a \leq 1$

Criteriul raportului

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *o serie de termeni pozitivi astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

1. *Dacă $l < 1$, atunci seria este convergentă;*
2. *Dacă $l > 1$, atunci seria este divergentă;*
3. *Dacă $l = 1$ nu se poate spune nimic despre natura seriei cu acest criteriu.*

Exemplu

Studiați natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$.

Rezolvare: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{a^n}{n}}{\frac{a^{n+1}}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{na}{n+1} = a.$

Potrivit criteriului raportului

- Dacă $l < 1$, atunci seria este convergentă;
- Dacă $l > 1$, atunci seria este divergentă;
- Dacă l=1 nu se poate spune nimic despre natura seriei cu acest criteriu, dar seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergent (vezi prima problemă rezolvată).

O salvare pentru cazul când $l = 1$ poate fi următorul criteriu:

Criteriul Raabe-Duhamel

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *o serie de termeni pozitivi astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l.$$

Dacă $l > 1$, *atunci seria este convergentă;*

Dacă $l < 1$, *atunci seria este divergentă;*

Dacă $l = 1$ *nu se poate spune nimic despre natura seriei cu acest criteriu.*

Exemplu

Studiați natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$

Rezolvare: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \frac{1}{2}$

Deoarece $l < 1$, rezultă că seria este divergentă.

Criteriul radical al lui Cauchy

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *o serie de termeni pozitivi astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Dacă $l < 1$, *atunci seria este convergentă;*

Dacă $l > 1$, *atunci seria este divergentă;*

Dacă $l = 1$ *nu se poate spune nimic despre natura seriei cu acest criteriu.*

Exemplu

Studiați natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$.

Rezolvare: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3}$.

Potrivit criteriului radical cum l $<$ 1, rezultă că seria este convergentă.

Serii alternante

Criteriul Abel Dirichlet

Fie $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ șiruri de numere reale cu proprietățile:

1. *$(a_n)_n$ este descrescător la 0;*
2. *șirul sumelor parțiale pentru seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ este mărginit.*

Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$ este convergentă.

Un caz particular foarte utilizat este:

Criteriul lui Leibniz

Fie $(a_n)_n$ un șir descrescător la zero. Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ este convergentă.

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ este convergentă potrivit criteriului lui Leibniz.

Probleme rezolvate

1. *Arătați că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.*

Rezolvare:

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \ldots + (\frac{1}{2^{p-1}+1} + \frac{1}{2^{p-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^p}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} =$

$=1+\frac{p}{2} \to \infty$.

2. Studiați natura seriei $\sum_{n=2}^{\infty} ln(1-\frac{1}{n^2})$.

Rezolvare:

$S_n = \sum_{k=2}^{n} ln(1-\frac{1}{k^2}) = \sum_{k=2}^{n} ln\ \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} =$

$\sum_{k=2}^{n} ln(\frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k}) = \ln(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k}) = \ln\frac{n+1}{n} \to 0.$

Deci, seria este convergentă și are suma S.

3. Studiați natura seriei $\sum_{n=2}^{\infty} ln(1+\frac{1}{n^2})$.

Rezolvare: Se bazează pe inegalitatea *ln (1 + x)* $\leq x$, pentru orice $x \geq 0$ și pe criteriul de comparație.

4. *Studiați natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n tg\,\frac{1}{3^n}$.

Rezolvare: Folosim criteriul al doilea de comparație. Ne bazăm pe limita fundamentală $\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1$.

Deci $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n tg\frac{1}{3^n}}{2^n \cdot \frac{1}{3^n}} = 1 \in \mathbf{R}^*$, deci cele două serii au aceeași natură. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ este convergentă fiind seria geometrică pentru $q=\frac{2}{3} < 1$, rezultă că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n tg\,\frac{1}{3^n}$ este convergentă.

5. *Studiați natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} arcsin\,\frac{2n}{4n^2-1}$.

Rezolvare: Folosim criteriul al doilea de comparație. Ne bazăm pe limita fundamentală $\lim_{x\to 0} \frac{arcsinx}{x} = 1$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{arcsin\frac{2n}{4n^2-1}}{\frac{2n}{4n^2-1}}$ $=1\in\mathbf{R}^*$, deci cele două serii au aceeași natură.

Pentru a stabili convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n^2-1}$ folosim tot criteriul al doilea de comparație:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{4n^2-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \in\mathbf{R}^*$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n^2-1}$ are aceeași natură cu seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ care este divergentă.

Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n^2-1}$ este divergentă, rezultă că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} arcsin \frac{2n}{4n^2-1}$ va fi divergentă.

6. *Studiați natura seriei* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nlnn}$.

Rezolvare: folosim criteriul de condensare (este evident că șirul $(\frac{1}{nlnn})_n$ este descrescător și pozitiv).

Deci, seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nlnn}$ are aceeași natură cu seria

$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$.

Dar, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \cdot ln2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nln2}$, care este divergentă.

Deci, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nlnn}$ este și ea divergentă.

7. *Studiați natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$.

Rezolvare: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2} = a$.

Potrivit criteriului radical

Dacă $a < 1$, atunci seria este convergentă;

Dacă $a > 1$, atunci seria este divergentă;

Dacă $a = 1$ nu se poate spune nimic despre natura seriei cu acest criteriu, dar seria devine

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$ = e care este nenul, rezultă că seria este divergentă în acest caz.

8. *Studiați natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi\sqrt{n^2+1}$

Rezolvare: Folosim egalitățile:

$$sin(x - n\pi) = sin\, x \cdot cos\, n\pi - cos\, x \cdot sin\, n\pi$$

$$= (-1)^n \cdot \sin n\pi$$

Deci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi\sqrt{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\mathrm{n}} \sin \pi(\sqrt{n^2+1} - n\pi) = =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\mathrm{n}} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

Așadar, potrivit Criteriului lui Leibniz seria este convergentă.

9. *Studiați natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{\sqrt{n}}$

Rezolvare: Șirul de termen general $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ este descrescător la 0.

$b_k = sin\, k \cdot sin\, k^2 = \frac{1}{2}\,(cos(k - k^2) - cos(k + k^2))=$

$= \frac{1}{2}(\cos k(k-1) - \cos k(k+1))$

Deci $S_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n = \frac{1}{2}(1 - \cos n(n+1))$ de unde rezultă că $(S_n)_n$ este mărginit.

În concluzie, sunt îndeplinite condițiile criteriului Abel Dirichlet, deci seria va fi convergentă.

Probleme propuse

Studiați natura seriilor:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+a+a^2+\cdots+a^n)}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \cos\frac{\pi}{n})$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+tg\, a)\left(1+tg\,\frac{a}{2}\right)\ldots(1+tg\,\frac{a}{n})}$, $a \in \boldsymbol{R^*}/\{1\}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n \cdot \sin^{2n} x}{n+1}$, $x \in [0, \pi]$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$

2.3. Continuitate și derivabilitate

Scopul acestui paragraf este de a studia conceptele de continuitate și derivabilitate pentru funcțiile reale de variabilă reală.

Limita unei funcții într-un punct

Definiția 2.3.1 *O mulțime V de numere reale se numește* ***vecinătate***

pentru punctul a *dacă există r număr pozitiv astfel încât*

$$(a - r, a + r) \subseteq V$$

Definiția 2.3.2 *Un punct a se numește* ***punct de acumulare*** *pentru mulțimea A dacă pentru orice vecinătate V a lui a avem:*

$$V \cap (A/\{x\}) \neq \emptyset.$$

Fie $f : A \to \boldsymbol{R}$ o funcție și a un punct de acumulare pentru A.

Definiția 2.3.3 *(definiția cu vecinătăți) Vom spune că funcția* ***f are limita L în punctul a*** *(și vom scrie $\lim_{x\to a} f(x) = L$) dacă pentru orice vecinătate V a lui L există U o vecinătate a lui a astfel încât f(U) ⊆ V.*

Definiția 2.3.4 *(definiția cu δ și ε) Spunem că funcția* ***f are limita L în punctul a*** *dacă:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, astfel\ încât\ \forall\ x\ cu\ |x - a| < \delta\ rezultă\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definiția 2.3.5 *(definiția cu șiruri) Spunem că funcția* ***f are limita L în punctul a*** *dacă pentru orice șir $(a_n)_n$ care tinde la a, rezultă că șirul $(f(a_n))_n$ tinde la L.*

Analog se definesc limitele laterale (pentru limita la stânga notată $\lim_{x\nearrow a} f(x)$ sau $l_s(a)$ vom considera $x < a$, iar pentru limita la dreapta, notată $\lim_{x\searrow a} f(x)$ sau $l_d(a)$ vom considera $x > a$).

Observație: dacă există, limita unei funcții este unică.

Definiția 2.3.6 *Dacă*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

atunci funcția se numește ***continuă în punctul a.***

O funcție continuă în orice punct din domeniul său de definiție se numește continuă.

Funcția f se numește ***discontinuă în punctual a*** *dacă nu este continuă în punctul a, adică dacă nu există* $\lim_{x\to a} f(x)$*, sau dacă* $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Punctul x = a se numește ***punct de discontinuitate de prima speță*** *pentru funcția f, dacă în a funcția f are limite laterale finite diferite, sau finite, egale, dar diferite de f(a).*

Punctul x = a se numește ***punct de discontinuitate de speța a doua*** *pentru funcția f, dacă pentru funcția f, punctul x = a nu este punct de discontinuitate de speța întâi, respectiv, cel puțin una dintre limitele laterale din punctual x = a nu există, sau sunt infinite.*

Exemple de funcții continue sunt așa-zisele funcții elementare: funcțiile constante, funcțiile polinomiale, funcția logaritmică, funcția exponențială, funcțiile trigonometrice și inversele acestora.

Teoremă de caracterizare a continuității: *Fie* $f : A \to \boldsymbol{R}$ *și a un punct de acumulare pentru A.*

Sunt echivalente afirmațiile:

1) (Criteriul $\varepsilon - \delta$ *)* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \delta(a,\varepsilon): \forall x \in A$ *cu* $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

2) (Criteriul cu vecinătăți) $\forall V \in \mathcal{V}(f(a))\ \exists U \in \mathcal{V}(a): \forall x \in U \cap A \Rightarrow$

f(x) $\in V$, *adică f(U* $\cap$ *A)* $\subseteq V$.

3) (Continuitatea laterală) Dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) \in R$, $\exists \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) \in R$ *și*

$\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = f(a).$

Cu excepția cazurilor de nedeterminare $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty \cdot 0, 0^0, 1^\infty, etc.$ sunt valabile operațiile cu limite de funcții:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

De asemenea, este valabil **criteriul cleștelui**:

Dacă $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *într-o vecinătate a punctului a și* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$,

Atunci $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$

Ca o consecință, *produsul dintre o funcție care tinde la zero și una mărginită, are tot limita zero.*

Pentru calculul limitelor de funcții se folosesc așa numitele limite fundamentale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\ x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r$$

Probleme rezolvate

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{ax}{2}}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}\cdot\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}+b^{x^2}-\cos ax-\cos bx}{sinax^2+\sin bx^2}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-1+b^{x^2}-1+1-\cos ax+1-\cos bx}{sinax^2+\sin bx^2}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-1+b^{x^2}-1+1-\cos ax+1-\cos bx}{x^2}\cdot\frac{x^2}{sinax^2+\sin bx^2}=$ L

Dar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-1+b^{x^2}-1+1-\cos ax+1-\cos bx}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}-1}{x^2}+\frac{b^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos ax}{x^2}+\frac{1-\cos bx}{x^2}\right)=L_1$$

Folosind acum limitele fundamenatale și exercițiul precedent obținem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-1}{x^2}=lna$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{b^{x^2}-1}{x^2}=lnb$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos \mathrm{a}\,x}{x^2}=\frac{a^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos \mathrm{b}\,x}{x^2}=\frac{b^2}{2}$$

Deci, $L_1 = \ln a + \ln b + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin ax^2+\sin bx^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin ax^2}{ax^2}\cdot a+\frac{\sin ab}{bx^2}\cdot b} = \frac{1}{a+b}$$

În concluzie, $L = L_1 \cdot L_2 = (\ln a + \ln b + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2})/(a+b)$.

3. *Să se calculeze* $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

Rezolvare: Observăm ca avem produsul dintre o funcție care tinde la 0, anume $f(x) = x$ și una mărginită, anume $g(x) = \sin\frac{1}{x}$, deci limita va fi 0.

4. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x} = 1\cdot 0 = 0.$

Fie $f : A \to \boldsymbol{R}$ o funcție și a un punct de acumulare pentru A

Definiția 2.3.6 *Dacă există* $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *atunci spunem că f* ***are derivată în a****, iar această limită se notează cu f'(a).*

Funcția f este ***derivabilă în a*** *dacă are derivată finită în a.*

Funcția f este ***derivabilă****dacă dacă este derivabilă în orice punct din domeniul de definiție.*

Interpretarea geometrică a tangentei:

Ecuația tangentei *t* la graficul funcției *f* în punctul $M_0(x_0, y_0)$

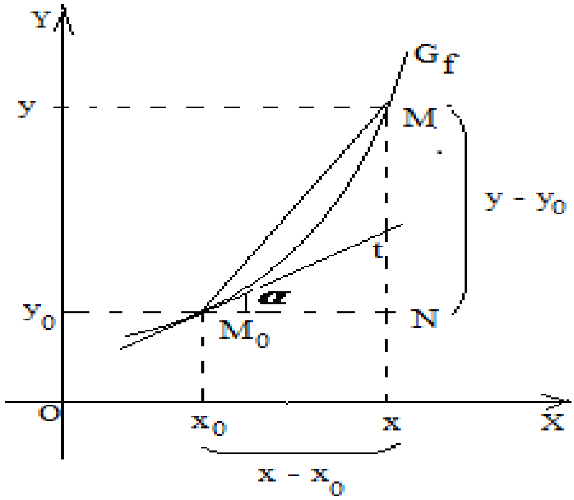
este determinată de ecuația $y - f(x_0) = m(x - x_0)$, unde

$m = tg\alpha = f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_9)}{x - x_0}$ este panta tangentei t la G_f în M_0, respectiv, coeficientul unghiular al dreptei *t*.

Observații:

1) Dacă $m = 0$, atunci tangenta va fi paralelă cu axa OX;

2) Dacă $m = \pm\infty$, atunci tangenta va fi paralelă cu axa || OY.



Exemplu: *Găsiți punctele de derivabilitate pentru funcția f :* ***R***→***R***, $f(x) = |x - a| \cdot sin\, x$.

Rezolvare: $f(x) = \begin{cases} -(x-a)\sin x, & x < a \\ (x-a)\sin x, & x \geq a \end{cases}$

Se observă că în punctele $x \neq a$ funcția este derivabilă, ca o compunere de funcții elementare. În punctul a studiem derivabilitatea cu ajutorul definiției, calculând:

$\lim\limits_{x \nearrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \nearrow a} \frac{-(x-a)\sin x}{x - a} = -\sin a$

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \searrow a} \frac{(x-a)\sin x}{x - a} = \sin a$$

Deci, funcția este derivabilă în a dacă și numai dacă $\sin a = -\sin a$, adică $a = n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$.

Operații cu funcții derivabile

1. *Dacă f și g sunt funcții derivabile, atunci f + g este derivabilă și (f + g)' = f' + g'.*
2. *Dacă f și g sunt funcții derivabile, atunci f · g este derivabilă și (f · g)' = f' · g + f· g'.*
3. *Dacă f și g sunt funcții derivabile, atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă și $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.*

Fie I și J două intervale, $x_0 \in I$ un punct arbitrar și funcțiile $f : I \to J$ și $g : J \to \mathbf{R}$.

Proprietate *Dacă f este derivabilă în $x_0 \in I$, iar g este derivabilă în $f(x_0) \in J$, atunci funcția $g \circ f : I \to \mathbf{R}$ este derivabilă și*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Consecință *Dacă $f : I \to J$ și $g : J \to \mathbf{R}$ sunt două funcții derivabile, atunci funcția $g \circ f : I \to \mathbf{R}$ este derivabilă și $(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$.*

Tabel cu derivate ale funcțiilor elementare și compuse

Funcția	Derivata	Domeniul de derivabilitate	Funcția compusă	Derivata funcției compuse

c (*constantă*)	*0*	**R**	-	-
x	*1*	**R**	*u*	*u'*
x^n, $n\in N^*$	nx^{n-1}	**R**	$u^n, n \in N^*$	$nu^{n-1}\cdot u'$
$x^\alpha, \alpha \in R$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(0,\infty)\subseteq D_{f'}$	$u^\alpha, \alpha \in R, \alpha > 0$	$\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	**R***	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,\infty)$	$\sqrt{u}, u>0$	$u'\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}$
e^x	e^x	**R**	e^u	$e^u\cdot u'$
a^x	$a^x \ln a$	**R**	a^u, $0 < a$, $a \neq 1$	$a^u \ln a\cdot u'$
lnx	$\frac{1}{x}$	$(0,\infty)$	*lnu*, $u > 0$	$\frac{u'}{u}$
sinx	*cosx*	**R**	*sinu*	*u'cosu*
cosx	*-sinx*	**R**	*cosu*	*-u'sinu*
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x\neq 0$	*tgu*, $\cos u\neq 0$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
ctgx	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\sin x\neq 0$	*ctgu*, $\sin u\neq 0$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$
arcsinx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(-1, 1)	*arcsinu*, $\lvert u\rvert \leq 1$	$u'\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$
arccosx	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(-1, 1)	*arccosu*,	*-u'*·

			$\lvert u \rvert \le 1$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$
arctgx	$\frac{1}{1+x^2}$	**R**	*arctgu*	$u' \cdot \frac{1}{1+u^2}$
arcctgx	$-\frac{1}{1+x^2}$	**R**	*arcctgu*	$-u' \cdot \frac{1}{1+u^2}$
shx	*chx* = $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	**R**	*shu*	*u'chu*
chx	*shx* = $= \frac{e^x-e^{-x}}{2}$	**R**	*chu*	*u'shu*

Teoremă*Dacă* $f: I \to J$ *este o funcție bijectivă, derivabilă, cu* $f'(x_0) \neq 0,$ *atunci funcția* $f^{-1}: J \to I$ *este derivabilă în* $y_0 = f(x_0)$ *și* $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$

Observații:

1) Inversele unor funcții inversabile, derivabile, sunt tot funcții derivabile.

2) Dacă $f: I \to J$ este bijectivă,derivabilă, cu $f'(x) \neq 0, \forall x \in I,$ atunci $f^{-1}: J \to I$ este derivabilă și $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$

3) Dacă $f: I \to J$ este bijectivă,derivabilă, cu $f'(x_0) = 0, x_0 \in I,$ atunci $f^{-1}: J \to I$ are în y_0 derivată infinită, respectiv:

$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = -\infty$, dacă f este strict descrescătoare și

$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = +\infty$, dacă f este strict crescătoare.

4) $f'(x_0) \cdot \left(f^{-1}\right)'(y_0) = 1$.

5) $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = tg\beta$, β fiind măsura unghiului format de graficul funcției *f* cu axa OY.

Exemplu:

Fie $f : [\frac{1}{2}, +\infty) \to [-\frac{1}{4}, +\infty)$, $f(x) = x^2 - x$. *Să se arate că funcția f este inversabilă și să se calculeze* $\left(f^{-1}\right)'(2)$**.**

Rezolvare: Din $y_0 = f(x_0) = 2$, rezultă $x^2 - x = 2$, de unde ar rezulta două rădăcini, însă numai $x_0=2$ se află în domeniul de definiție al funcției. Sunt îndeplinite condițiile din enunțul teoremei: funcția f este derivabilă, ca o compunere de funcții elementare, $f'(x) = 2x - 1$, deci $f'(x_0) = 2x_0 - 1 = 3 \neq 0$. Deci, *f* va fi derivabilă în $y_0=f(x_0)$ *și*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Deci, $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3}$

Fie I = (a, b) $\subseteq$ **R**, un interval și *f* : I →**R** o funcție derivabilă pe I, iar *f*‘: I →**R** derivata de ordinul întâi, sau prima derivată a funcției f. Funcția $\left(f'\right)' = f'' = f^{(2)}$ se numește **derivata a doua** sau **derivata de ordinul al doilea** a funcției *f*.

Definiția 2.3.7 *Se spune că funcția* $f : I \to \boldsymbol{R}$ *este de* ***două ori derivabilă*** *în punctul* $x_0 \in I$*, dacă*

- *f este derivabilă într-o vecinătate a lui* x_0;
- f' *este derivabilă în* x_0.

Observație: Prin convenție derivata de ordinul zero a unei funcții este chiar funcția însăși.

Generalizare:

1) *O funcție f se numește derivabilă de ordinul n + 1,* $n \in \boldsymbol{N}$ *dacă este derivabilă de ordinul n și dacă* $f^{(n)}$ *este derivabilă.*

2) O funcție f se numește infinit derivabilă dacă este derivabilă de orice ordin n, $n \in$ ***N.***

Proprietate *Orice funcție elementară este infinit derivabilă.*

2.4. Șiruri și serii de funcții

Se pot defini șiruri cu elemente în alte mulșimi decât mulțimea numerelor naturale. Dacă A este o mulțime, definim un șir cu elemente în A ca o aplicație s: **N**→ A. Dacă A este o mulțime de funcții atunci șirul respectiv se numește șir de funcții și se notează $(f_n)_n$.

Două probleme vom studia în legătură cu aceste șiruri de funcții: convergența punctuală și convergența uniformă.

Definiția 2.4.1*Fie* $(f_n)_n$ *un șir de funcții,* $f_n : A \to \boldsymbol{R}$*. Spunem că*

$(f_n)_n$ ***converge punctual*** *la* $f: A \to \boldsymbol{R}$ *dacă pentru orice* $x \in A$ *și pentru orice ε>0 există* $N_{\varepsilon,x} \in \boldsymbol{N}$ *astfel încât pentru orice n≥* $N_{\varepsilon,x}$ *să avem* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$(f_n)_n$ ***converge uniform*** *la* $f: A \to \boldsymbol{R}$ *dacă pentru orice ε>0 există* $N_{\varepsilon,} \in \boldsymbol{N}$ *astfel încât pentru orice n≥* N_ε *și pentru orice x∈ A să avem* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Cele două noțiuni sunt periculos de asemănătoare. Convergența punctual presupune găsirea unui rang N care depinde de *x* și *ε*. Dacă acest rang poate fi ales independent de *x*, atunci aceasta atrage și convergența uniform.

Pentru un șir de funcții $(f_n)_n$, convergența punctuală se poate studia folosind metodele prezentate la secțiunea „Șiruri de numere”. Convergența uniform folosește metode noi, cele mai frecvente fiind evidențiate în continuare.

Propoziție: *Fie* $(f_n)_n$ *un șir de funcții,* $f_n : A \to \boldsymbol{R}$ *astfel încât există un șir de numere reale* $(a_n)_n$ *care tinde la zero, astfel încât* $|f_n(x) - f(x)| < a_n$ *pentru orice n natural și orice x∈A. Atunci* $(f_n)_n$ *converge uniform la f.*

Definiția 2.4.1 Definiția 2.4.1 *O serie de funcții este cuplul format dintre un șir de funcții* $(f_n)_n$ *,* $f_n : A \to \boldsymbol{R}$ *și șirul sumelor sale parțiale,* $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x)$.

O serie de funcții $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *se numește punctual (uniform) convergentă dacă șirul sumelor sale parțiale este punctual (uniform) convergent.*

Un caz particular de serii de funcții sunt ***seriile de puteri***, adică seriile de forma $\sum_{n\geq 0} c_n \cdot (x - x_0)^n$.

Pentru o serie de puteri se defineşye raza de convergență:

$$R = \sup\{ r \in \boldsymbol{R} \ / \ \forall\, x\ cu\ |x - x_0| < r, seria\ este\ convergent\text{ă}\}$$

Teorema Cachy-hadamard ne permite calculul razei de convergență după formula:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}}$$

Probleme propuse:

1. *Studiați continuitatea funcțiilor și specificați tipul discontinuităților acolo unde este cazul:*

   a) $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ x^2 - 2, & x > 1 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ ax^2 - 2, & x > 1 \end{cases}$

2. *Determinați derivatele funcțiilor compuse* $f : I \to J$ *, de mai jos:*

   a) $f(x) = (2x^3 + x)^2$

   b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c) f(x) = e^{2x+1}

d) f(x) = 5^{x^2+3x}

e) f(x) = ln($3x^2-5x+1$*)*

f) f(x) = $\log_5(x^3-x^2)$

g) f(x) = $\sin x^3$

h) f(x) = cos x^4

i) f(x) = tg $2x^5$

j) f(x) = ctg $3x^4$

k) f(x) = arcsin x^7

l) f(x) = arccos x^8

m) f(x) = arctg x^9

n) f(x) = arcctg x^{10}

3. *Determinați derivata de ordinul doi a funcțiilor f de mai jos:*

a) *f(x) =* $2x^3-3x^2+5x+1; I = \mathbf{R};$

b) f(x) = $-3x^4+x^3-3x^2+6x-4; I = \mathbf{R};$

c) f(x) = $x^5+4x^4-x^3+2x; I = \mathbf{R};$

d)f(x) = $\frac{2x-1}{3}; I = \mathbf{R};$

e) f(x) = $\frac{x}{x+2}; I = \mathbf{R} \setminus \{-2\};$

f) f(x) = $\sqrt{x}; I = (0, \infty);$

g) f(x) = $x^2+2\ln x;\ I=[e^{-1},1];$

h) f(x) = $x + 1 + \sin x$*; I =* $[-\frac{\pi}{2}, 0]$;

i) f(x) = $e^x \cos x : I = \mathbf{R}$*;*

j) f(x) = $\log_2 x + 2^x ; I = [2, 3]$*;*

k) f(x) = arcctg x, I = $\mathbf{R}$.

2. *Arătați că funcțiile f :* $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *de mai jos, verifică relațiile date:*

a) f(x) = $e^x \sin x$;

$f''(x) - 2f''(x) + 2f(x) = 0$;

b) f(x) = $arctgx$;

$(1 + x^2) f''(x) + 2xf''(x) = 0$.

4. *Arătați că funcțiile f: D*$\to \mathbf{R}$ *de mai jos, au derivată în punctul* $x_0 \in D'$ *indicat, determinați* $f'(x_0)$*, calculați derivata funcției f pe D și scrieți ecuația tangentei t la graficul funcției în punctul* x_0*:*

a) f(x) = $3x^2 - 5x + 1$*,* $x_0 = 1$*, D = ...*

b) f(x) = $\frac{x+2}{2x-1}$*,* $x_0 = 2$*, D = ...*