Maria-Liliana Bucur

MATEMATICI APLICATE
în topografie

CUPRINS

INTRODUCERE

În multe domenii în care activează, omul îşi precizează reflecţiile cu ajutorul relaţiilor matematice. Unul din aceste domenii în care trigonometria şi geometria sunt foarte mult folosite este *topografia.* Multe probleme topografice (de întocmire a planurilor porţiunilor de teren) au ca model matematic rezolvarea triunghiului.

În numeroase probleme practice el trebuie să cunoască distanţele dintre anumite puncte de pe suprafaţa pământului şi unghiurile dintre direcţiile determinate de câte două din aceste puncte. Măsurarea directă a acestor distanţe şi unghiuri este dificilă şi, în unele cazuri imposibilă. Folosind însă cunoştinţe matematice de trigonometrie plană sau sferică şi de geometrie, o astfel de problemă se reduce la măsurarea în teren a distanţelor între anumite puncte accesibile şi a unghiurilor dintre anumite direcţii urmând ca celelalte distanţe şi unghiuri să fie determinate prin calcul folosind teoreme ale trigonometriei şi geometriei.

Distanţele în teren se măsoară cu *ruleta* sau cu *panglica* iar unghiurile cu *teodolitul.* Pentru vizarea obiectelor, teodolitul este prevăzut cu o lunetă care se poate roti atât în plan orizontal cât şi în planul vertical. În acest fel cu acest instrument se pot măsura unghiul dintre proiecţiile orizontale a două direcţii şi unghiul dintre o direcţie şi proiecţia sa pe planul orizontal.

CAPITOLUL 2 Elemente de trigonometrie

2.1 Definitie

Trigonometria (din limba greacă τρίγωνος *trígonos* = *triunghiular* si μέτρον *métron* = masura) e o parte a matematicii care studiaza unghiuri, triunghiuri si funcţii trigonometrice precum sinusul, cosinusul si tangenta. Unii matematicieni considera trigonometria o subdiviziune a geometriei iar altii o stiinta matematica distincta.

Istorie

Originea trigonometriei se considera a fi in cultura antica din Egipt, Babilon si Valea Indului, acum mai mult de 3000 de ani. Matematicienii indieni au fost pionierii calculului algebric, cu aplicatii in astronomie si in trigonometrie. Lagadha e unicul matematician cunoscut care a utilizat geometria si trigonometria pentru astronomie in cartea sa Vedanga Jyotisha, cu toate ca multe din lucrarile sale au fost distruse de catre invadatorii Indiei.

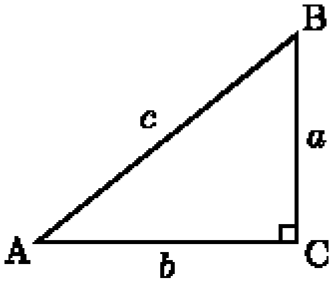
Matematicianul grec Hipparchus a compilat un tabel trigonometric pentru triunghiuri in circa 150 î.Hr.. Un alt matematician grec, Ptolemeu (circa 100 î.Hr.) a continuat sa dezvolte calculul trigonometric.

Savantul Shia Musulman Nasir al-Din Tusi a fost probabil primul care a considerat trigonometria ca o disciplina matematica distincta si a fost primul care a descris sase cazuri ale unui triunghi dreptunghic in trigonometria sferica.

Matematicianul de origine silesă Bartholemaeus Pitiscus a publicat o lucrare importantă în trigonometrie în anul 1595 și a introdus cuvântul în limbile franceză și engleză.

O importanță specială deține tehnica de triangulaţie care este utlizată în astronomie pentru a măsura distanța până la stelele apropiate, în geografie pentru a măsura distanțele între repere terestre și în sisteme de satelit pentru navigație (maritimă, în aviație si în spațiul extraterestru). Alte domenii care utilizează trigonometria sunt: muzica, acustica, optica, statistica, biologia, farmaceutica, chimia, oceanografia, ingineria si multe altele.

2.2 Funcții trigonometrice



Definitia functiilor trigonometrice se bazeaza pe rapoarte între laturi ale unui triunghi dreptunghic plan. Intr-un astfel de triunghi, latura cea mai lungă, opusă unghiului drept, se numește *ipotenuză*, iar laturile care formează unghiul drept se numesc *catete*.

În triunghiul dreptunghic, sinusul unui unghi ascutit este definit ca raportul dintre lungimea catetei opuse (c.o.) si lungimea ipotenuzei (i). Similar, cosinusul unui unghi ascutit este raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea ipotenuzei:

sinA = cateta opusa/ipotenuza

cosA = cateta alăturată/ipotenuză

Acestea sunt cele mai importante funcții trigonometrice; alte funcții pot fi definite ca diferite rapoarte ale laturilor unui triunghi dreptunghic, dar pot fi exprimate în termeni de sinus și cosinus. Acestea sunt tangenta, cotangenta, secanta și cosecanta:

$$tgA = \frac{\sin A}{\cos A} \qquad ctgA = \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} \qquad \cos ecA = \frac{1}{\sin A}$$

Definitiile anterioare se aplica doar la unghiuri între 0 si 90 grade (0 si $\pi/2$ radiani). Utilizând cercul unitate (un cerc cu raza de lungime 1) ele pot fi extinse la toate argumentele, pozitive și negative.

Funcția sinus

Funcția sinus este funcția definită pe **R** cu valori în **R** prin care $\forall \boldsymbol{\alpha}$ aparține lui **R** i se asociază un număr $\mathbf{y}_{\boldsymbol{\alpha}}$ notat $\sin\alpha$.

PROPRIETĂȚI :

1. $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

2.Formula fundamentală a trigonometriei :

$$\mathbf{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \qquad \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

3.Functia sinus este o <u>functie periodica</u> de perioada $2k\pi$ unde k aparține lui **Z** : $\sin(\alpha+2k\pi) = \sin x$ pentru orice x real și orice k întreg.

4.Funcția sinus este <u>o funcție impară</u> adică $\sin(-x)= -\sin(x)$ pentru orice x real.

5. <u>Semnul functiei sinus</u>

Cadranul	I	II	III	IV
Funcția sinus	+	+	-	-

6. <u>Monotonia functiei sinus</u>

Cadranul	I	II	III	IV
Funcția sinus	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funcția cosinus

1. Cosinusul lui α notat $\cos\alpha$ este abscisa punctului M_α .

2.Funcția cosinus este functia definita pe **R** cu valori în **R** prin care $\forall \boldsymbol{\alpha}$ aparține lui **R** i se asociază un număr $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\alpha}}$ notat $\cos\alpha$.

PROPRIETĂȚI :

1.$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

2.Formula fundamentala a trigonometriei :

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

3.Funcția cosinus este o <u>funcție periodică</u> de perioadă $2k\pi$ unde k aparține lui **Z** : $\cos(\alpha+2k\pi) = \cos x$

4. Funcția cosinus este o <u>funcție para</u> adică $\cos(-x) = \cos(x)$

5. <u>Semnul funcției cosinus</u>

Cadranul	I	II	III	IV
Funcția cosinus	+	-	-	+

6. <u>Monotonia funcției sinus</u>

Cadranul	I	II	<u>III</u>	<u>IV</u>
Funcția cosinus	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Funcția tangentă

1. Tangenta unui unghi α notata tgα este raportul dintre sinusul unghiului α si cosinusul acestuia.

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \alpha \in \Re - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$$

PROPRIETĂȚI :

1. Funcția tangentă este o funcție periodică de perioada kπ : tg(α+kπ) =tgα pentru oricare α din R | $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$

2. Funcția tangentă este o funcție impară tg(-x) = -tg(x)

3. Semnul funcției tangentă

Cadranul	I	II	III	IV
Funcția tangentă	+	-	+	-

4. Funcția tangentă este strict crescătoare pe intervale de forma $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Funcția cotangentă

1. Cotangenta unui unghi α notată ctgα este raportul dintre cosinusul unghiului α și sinusul acestuia.

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \alpha \in \{k\pi \mid k \in Z\}$$

PROPRIETĂȚI :

1. Funcția cotangentă este o funcție periodică de perioadă kπ : ctg(α+kπ)=ctgα
unde oricare α din **R**|{kπ| k aparține lui **Z**}

2. Functia cotangenta este o functie impara ctg(-x) = -ctg(x)

3. Semnul functiei cotangenta

Cadranul	I	II	III	IV
Funcția cotangentă	+	-	+	-

4. Funcția cotangentă este strict descrescătoare pe intervale de forma (o, π).

Relații trigonometrice

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x- y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$tgx \pm tgy = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}.$$

Teorema sinusurilor

Dacă laturile unui triunghi oarecare sunt *a*, *b* si *c* ți unghiurile opuse acestor laturi sunt *A*, *B* si *C*, atunci teorema sinusurilor este:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}$$

unde *R* este raza cercului circumscris triunghiului.

Teorema cosinusului

In orice triunghi ABC avem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

2.3 Măsurarea unghiurilor

Unitățile de măsură pentru unghi sunt diviziuni ale cercului.

Gradul sexagesimal (1^0) = a 360-a parte din măsura unui cerc;

Minutul sexagesimal (1') = $1/60*1^0$ $1^0=60'$;

Secunda sexagesimala (1") = $1/60*1'=1/3600*1^0$.

Gradul centesimal (1^g) este a 400-a parte din măsura unui cerc.

Radianul=măsura unui arc de cerc de raza R a cărui lungime este egală cu R.

$L_{cerc}=2\pi R$ (R>0,raza)

1 rad=măsura unui unghi la centru notat ABC care subîntinde un cerc AB de lungime R.

Funcția de măsurare în radiani a unghiurilor și respectiv a arcurilor de cerc se notează cu "μ" (miu)

Măsura în radiani a unui cerc este: 2π rad

π=3,1415926535…

Relația de transformare a gradelor sexagesimale în radiani:

(1) $\alpha=\pi/180^0*n^0$

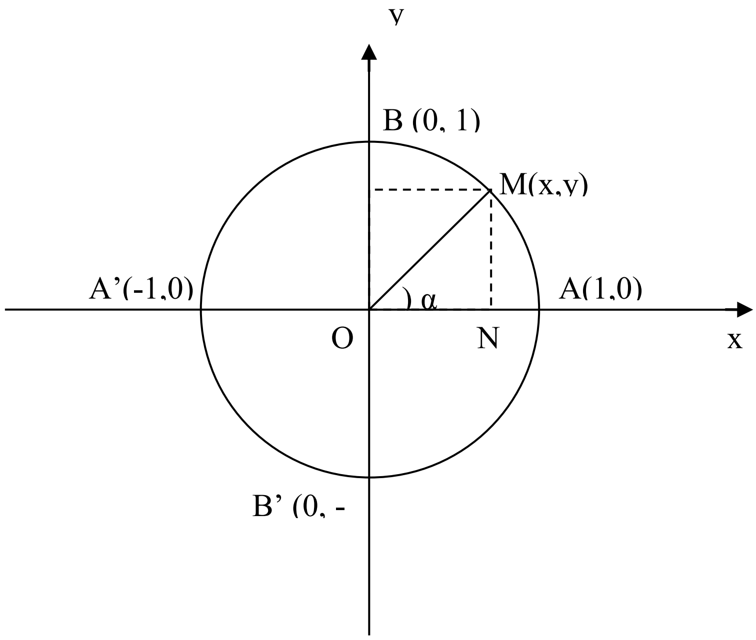
(1') $n^0=180^0/\pi*\alpha$

(2) 1 rad=$57^0 17' 44''$

Valorile funcțiilor trigonometrice

α	**0^0**	**30^0**	**45^0**	**60^0**	**90^0**
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/
ctg α	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

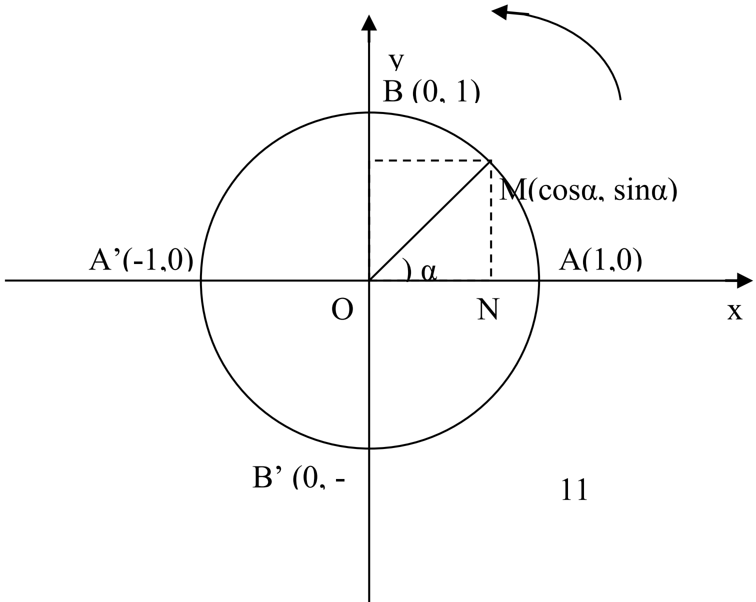
CERC TRIGONOMETRIC (*circulus*), cercul cu raza egala cu unitatea, pe care s-a stabilit o origine A (de la care se face masurarea arcelor) si un sens (de obicei antiorar). E: unit circle (O.M.).



ΔONM – triunghi dreptunghi

$$\sin\alpha = \frac{MN}{OM} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \sin\alpha$$



Punctul M se deplasează pe cerc în sens invers acelor de ceasornic, sensul numindu-se sens trigonometric sau sens direct. Pe masură ce M se mişcă pe cerc valoarea $\sphericalangle\alpha$ creşte, modificându-se astfel si coordonatele punctului M.

M=A , $\alpha = 0$ $\cos 0 = 1$

$\sin 0 = 0$

M=B , $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\sin\frac{\pi}{2} = 0$

M = A' , $\alpha = \pi$ $\cos\pi = -1$

$\sin\pi = 0$

M = B' , $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$

Cercul trigonometric este impartit de axele de coordonate in 4 regiuni numite cadrane.

Cadranul I

$\alpha \in (0^0 , 90^0)$

$\alpha \in (0^0 , \frac{\pi}{2})$

Cadranul II

$\alpha \in (90^0 , 180^0)$

$\alpha \in (\frac{\pi}{2} , \pi)$

Cadranul III

$\alpha \in (180^0 , 270^0)$

$\alpha \in (\frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2})$

Cadranul IV

$\alpha \in (270^0 , 360^0)$

$\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$

Exerciții rezolvate

1.Transformați în produs:

a) $\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}=2\sin\frac{5\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}$;

b) $\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}=-2\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}$;

c) $\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}=2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4}$;

d) $tg\frac{\pi}{4}+tg\frac{\pi}{3}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}}$.

2.Transformați în produs:

a) $1+\cos\frac{\pi}{4}=\cos 0+\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}$; b) $1-\cos\frac{\pi}{6}=\cos 0-\cos\frac{\pi}{6}=2\sin^2\frac{\pi}{8}$;

c) $1-tg\frac{\pi}{3}=tg\frac{\pi}{4}-tg\frac{\pi}{3}=-\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}}$; d) $1+tg\frac{\pi}{6}=tg\frac{\pi}{4}+tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}}$.

3.Transformă în produs:

a) $\sin a+\sin 3a=2\sin 2a\cos a$;

b) $\cos 3a-\cos 5a=-2\sin 4a\sin a$;

c) $\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\sin b\sin a$;

d) $\cos(a-b)+\cos(a+b)=2\cos a\cos b$;

e) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+a\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+a\right)-\sin 0$;

f) $\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)+\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)=2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$

f) $tg(a+b)+tg(a-b)=\frac{\sin 2a}{\cos(a+b)\cos(a-b)}$

4.Transformați în produs:

a) $\cos(x+y+z)+\cos(x-y-z)=2\cos x\cos(y+z)$

b) $\sin(x-y+z)+\sin(x+y+z)=2\sin\frac{z}{2}\cos(x-y)$;

c) $\sin(x+y-z)-\sin(x+y+z)=2\sin(-z)\cos(x+y)=-2\sin z\cos(x+y)$;

5.Transformați în produs:

a) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=2\cos 2x\cos x+\cos 2x=\cos 2x(1+\cos x)$;

b) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=2\cos x(\cos 2x+\cos 3x)=4\cos x\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}$;

c) $\sin x+\sin 3x+\sin 9x+\sin 11x=2\sin 6x\cos 5x+2\sin 6x\cos 3x=4\sin 6x\cos 4xcox$;

d) $\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=4\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$;

e) $\cos x+\cos 3x+\cos 9x+\cos 11x=2\cos 6x\cos 5x+2\cos 6x\cos 3x=4\cos 6x\cos 4x\cos x$

;

f) $tgx+2tg2x+4tg4x+8ctg8x=ctgx$

$tgx-ctgx+2tg2x+4tg4x+8ctg8x=-2ctg2x+2tgx+4tg4x+8ctg8x$

$-4ctg4x+4tg4x+8ctg8x=-8ctg8x+8ctg8x=0$

Am folosit : $tgx-ctgx=tgx-\frac{1}{tgx}=\frac{tg^2x-1}{2tgx}\cdot 2=-2ctg2x$

6)Transformați în produs:

a) $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2=$

$=\left(2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2+\left(2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2=4\cos^2\frac{x-y}{2}$;

b) $\sin^2(x+y)-\sin^2(x-y)=$

$=[\sin(x+y)+\sin(x-y)][\sin(x+y)-\sin(x-y)]=-4\sin^2 x\sin y\cos y$;

c) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=$

$=\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x;$

$$d)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+2\cos(\pi-x)=2\sin\frac{\pi}{2}\cos x+2\cos(\pi-x)=$$

$$=2\cos x+2(\cos\pi\cos x+\sin\pi\sin x)=0;$$

2.4 Ecuații trigonometrice

Ecuaţiile trigonometrice sunt ecuaţii care conțin una sau mai multe necunoscute exprimate numai prin intermediul funcţiilor trigonometrice.

Forma generală a unei ecuații trigonometrice de o necunoscută este

F(sin, cosx, tgx, ctgx) = 0

Ecuaţii trigonometrice fundamentale

Ecuaţiile cuprinse sub această titulatură sunt:

1) $\sin x = a$, a fiind real.

Dacă $|a|>1$,ecuaţia nu are soluţii, iar dacă $a\in[-1,1]$,mulţimea S de soluţii a ecuaţiei este :

$$S=\{(-1)^k\arcsin a+k\pi,\quad k\in Z\}$$

2) $\cos x = a$, a fiind real.

Dacă $|a|>1$,ecuaţia nu are soluţii, iar dacă $a\in[-1,1]$,mulţimea S de soluţii a ecuaţiei este:

$$S=\{\pm\arccos a+2k\pi,\quad k\in Z\}$$

3) $tgx = a$, a fiind real.

Soluţiile acestei ecuaţii sunt date de mulţimea

$$S=\{arctga+k\pi,\quad k\in Z\}$$

4) $ctgx = a$, a fiind real.

Soluţiile acestei ecuaţii sunt date de mulţimea

$$S=\{arcctga+k\pi,\quad k\in Z\}$$

Dacă intervin mai multe funcţii trigonometrice, dar care au acelaşi argument, de exemplu $\sin x+\cos x=-1$, atunci exprimăm ambele funcţii trigonometrice prin alte funcţii, de exemplu :

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

Nu există formule generale care să rezolve ecuațiile trigonometrice, însă există diverse metode pentru anumite tipuri de ecuatii.

1. Dacă în ecuație o funcție trigonometrică apare la o putere impară, iar celelalte numai la puteri pare, atunci se ia ca necunoscută principală funcția de putere impară, celelalte expimându-se în funcție de acesta.

Exemplu: Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{2}\cos x + 2\sin^2 x + ctg^2 x = 3, \quad cu \quad x \neq k\pi$$

Soluție : Luându-se ca necunoscută cosx, avem

$$\sqrt{2}\cos x + 2\left(1-\cos^2 x\right) + \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = 3,$$

Notând cosx=t, obținem

$$2t^4 - \sqrt{2}t^3 + \sqrt{2}t - 1 = 0$$

$$\left(\sqrt{2}t - 1\right)\left(\sqrt{2}t^3 + 1\right) = 0$$

Deci, soluțiile ecuației sunt $t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $t_2 = -\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$, de unde

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{4} + 2k_1\pi, \quad x_2 = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt[6]{2}} + \left(2k_2 + 1\right)\pi$$

Dacă intervine numai o funcţie trigonometrică, dar cu argumente diferite, atunci cu ajutorul formulelor trigonometrice de adunare transformăm funcţiile astfel ca să avem în expresie un argument unic.

Exemplul 1. Diferite funcţii trigonometrice ale aceluiaşi argument

$$\sin x + \cos x = -1,$$

Exprimăm $\sin x$ şi $\cos x$ în funcţie de $tg\frac{x}{2}$, pentru $x \neq (2k+1)\pi$, k fiind număr întreg şi se obţine $\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = -1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2tg\frac{x}{2} + 1 - tg^2\frac{x}{2} = -1 - tg^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow tg\frac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = arctg(-1) + k\pi,$$

Deci $x\in\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in Z\right\}$.

Observaţie: Întrucât numărul $tg\frac{x}{2}$, nu există dacă $x=(2k+1)\pi$, $k\in Z$, rezultă că eventualele soluţii de această formă se pierd; prin urmare , în final, trebuie verificate in ecuaţie şi numerele respective .

Ecuaţii care conţin funcţii de acelaşi nume

1) $\sin u(x)=\sin v(x) \Leftrightarrow u(x)=(-1)^k v(x)+k\pi$, $k\in Z$;

3) $tgu(x)=tgv(x) \Leftrightarrow u(x)=v(x)+k\pi$, $k\in Z$.

2) $\cos u(x)=\cos v(x) \Leftrightarrow u(x)=\pm v(x)+2k\pi$, $k\in Z$;

$\cos u(x)\neq 0$, $\cos v(x)\neq 0$

4) $ctgu(x)=ctgv(x) \Leftrightarrow u(x)=v(x)+k\pi$, $k\in Z$.

Exemplul 2. Aceeaşi funcţie trigonometrică cu argumente diferite:

$$\sin 3x=\sin x,\quad x\in(0,\pi).$$

În rezolvarea acestei ecuaţii se foloseşte formula de transformare a sumei în produs:

$$\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cdot\cos\frac{a+b}{2};$$

ecuaţia devine $2\sin x\cdot\cos 2x=0 \Leftrightarrow (\sin x=0$ sau $\cos 2x=0)$. Mulţimea de soluţii a ecuaţiei $\sin x=0$ este $S=\{k\pi,\quad k\in Z\}$,iar mulţimea de soluţii a ecuaţiei $\cos 2x=0$ este $S'=\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad k\in Z\right\}$. Deci mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S\cup S'$.

Exemplul 3. Diferite funcţii trigonometrice cu argumente diferite $\sin 2x=\cos x$, $x\in\mathbb{R}$.

Utilizând formula $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$ obţinem $2\sin x\cdot\cos x-\cos x=0$ $\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow (\cos x=0$ sau $2\sin x-1=0)$.Mulţimea de soluţii a ecuaţiei $\cos x = 0$ este $S_1 = \left\{ \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$,iar mulţimea de soluţii a ecuaţiei $\sin x = \frac{1}{2}$ este $S_2 = \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$.Deci mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S = S_1 \cup S_2$.

Ecuaţiile liniare în sinx şi cosx sunt de forma $a\sin x + b\cos x = c$, unde *a*, *b*, *c* sunt numere reale, $a \cdot b \cdot c \neq 0$ (alte cazuri conduc la ecuaţii uşor de analizat).

Distingem urmatoarele metode de rezolvare :

a) ***Metoda unghiului auxiliar*** . Se împarte ecuaţia prin ”*a*” şi se obţine $\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$; se notează $\frac{b}{a} = tg\alpha \in \mathbb{R}$, deci $\alpha = arctg\frac{b}{a}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; după câteva calcule se ajunge la ecuaţia elementară $\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$.

b) ***Metoda substitutiei*** .

Cu ajutorul formulelor $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$ obţinem o ecuaţie de gradul al doilea cu necunoscuta $tg\frac{x}{2}$.

Exemplul 4. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$, $x \in [0, 2\pi]$ (vezi ex.2 ,b).

Rezolv ecuaţia utilizând *metoda unghiului auxiliar* ; se împarte ecuaţia prin $\sqrt{3}$ şi se obţine:

$$\sin x - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin x - tg\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sin x - \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}\in\left\{(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left\{(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Cum $x\in[0,2\pi]$, alegem $x_1=\frac{\pi}{3}$ şi $x_2=\pi$. Deci $x\in\left\{\frac{\pi}{3},\pi\right\}$.

Exemplul 5. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1$, $x\in\mathbb{R}$ (vezi ex. 4, j).

Această ecuaţie se rezolvă uşor cu ajutorul cofuncţiei $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, observându-se că $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$. Ecuaţia devine $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}-x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $\left\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ [illegible] $\left\{\frac{2\pi}{3}\right.$ [illegible] $\left.\mathbb{Z}\right\}$.

2.5 Geometria triunghiului

Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

În triunghiul dreptunghic ABC cu A unghi drept folosim notaţiile cunoscute:

AB = c, AC = b, BC = a;

r = raza cercului circumscris triunghiului;

l_a = lungimea bisectoarei dusă din vârful A;

m_a = lungimea medianei din A;

r_a = lungimea razei cercului exînscris corespunzător laturii BC;

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

În acest triunghi, ABC, avem:

1. $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$
2. $m_a =$ R=a/2
3. cosA+cosB=cosC
4. S = $p(p-a)=(p-b)(p-c)$
5. acosC - asinC = b-c
6. $ct\frac{B}{2} = \frac{a+c}{2}$
7. $tg\frac{B+C}{2} \cdot tg\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}$
8. $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$
9. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$

Relaţii între unghiurile şi laturile unui triunghi oarecare

Într-un triunghi oarecare este adevărată relația A+B+C = $\boldsymbol{\pi}$

Avem:

1) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{C}{2}\right)$

2) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C}{2}\right)$

3) $tg\, A + tgB + tg\, C = tgA \cdot tgB \cdot tgC$

4) $\cos A - \cos B - \cos C = 1 - 4\sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C}{2}\right)$

5) $\sin A - \sin B + \sin C = 4\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$

6) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

7) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$

8) $ctg\frac{A}{2} + ctg\frac{B}{2} + ctg\frac{C}{2} = ctg\frac{A}{2} \cdot ctg\frac{B}{2} \cdot ctg\frac{C}{2}$

Inegalităţi verificate de functiile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi oarecare

1) $8 \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \leq 1$

2) $8 \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \leq 3\sqrt{3}$

3) $tg\frac{A}{2} \cdot tg\frac{B}{2} \cdot tg\frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$

4) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

5) $8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq 1$

6) $1 \leq \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

7) $tg\ A \cdot tg\ B + tg\ B \cdot tg\ C + tg\ C \cdot tg\ A \geq 9$

8) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9 \cdot R^2$

9) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot S$

Relaţii metrice în triunghiuri oarecare

1) Teorema sinusurilor:

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$$

2) Teorema cosinusurilor:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

3) Teorema tangentelor:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{tg\frac{A-B}{2}}{tg\frac{A+B}{2}} = \frac{tg\frac{A-B}{2}}{ctg\frac{C}{2}} = tg\frac{A-B}{2} \cdot tg\ \frac{C}{2}$$

4) Formula lui Heron:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

5) Teorema medianei:

$$4 \cdot m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$$

Alte formule utile

$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$

$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{bc}}$

$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

$tg\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

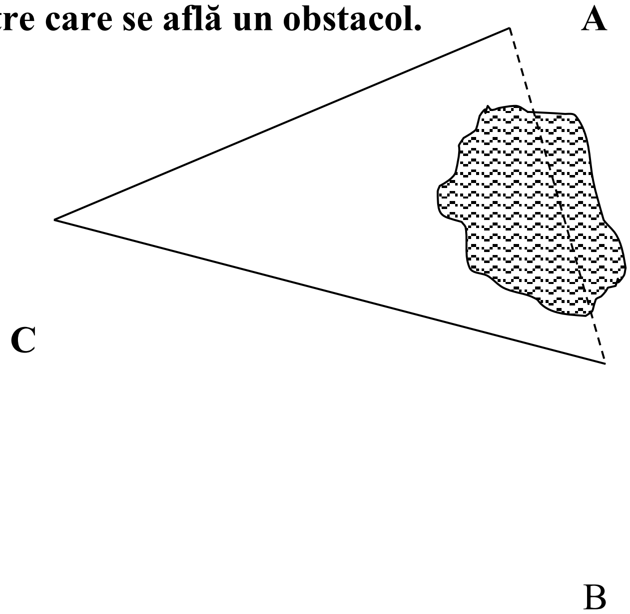
$S = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{abc}{4R}$

$a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

2.6 Aplicații în măsurători terestre

Ilustrăm prin câteva exemple metode de determinare a distanţelor între anumite puncte inaccesibile şi a unghiurilor dintre anumite direcţii.

1. **Determinarea distanţei între două puncte accesibile *A* şi *B* între care se află un obstacol.**

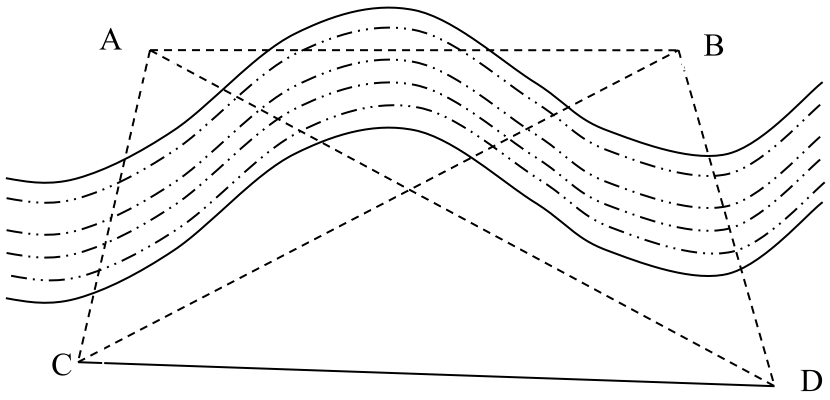


Să presupunem că avem de determinat distanţa între două puncte *A* şi *B* între care, pe direcţia lor, se află un obstacol (de exemplu un lac).

Pentru a calcula distanţa dintre *A* şi *B* alegem un accesibil *C* punct din care se văd punctele *A* şi *B* şi se pot măsura distanţele *a=BC, b=AC* şi unghiul $\widehat{ACB} = \widehat{C} = \alpha$. Distanţa *c=AB* se calculează cu ajutorul Teoremei cosinusului

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$$

2. **Determinarea distanţei între două puncte *A* şi *B* aflate într-o porţiune de teren inaccesibilă.**



Să presupunem că avem de determinat distanţa între două puncte *A* şi *B* care sunt inaccesibile în sensul posibilităţii de măsurare efectivă a distanţei la ele din punctele în care se află instrumentele de măsură (de exemplu, acestea se află pe malul opus al unui râu faţă de punctele de măsurat).

În vederea determinării distanţei între punctele *A* şi *B* se aleg două puncte *C* şi *D* din care se pot viza punctele *A* şi *B* şi se poate măsura distanţa între acestea cât şi unghiurile *ACB=*□□□*BCD=*□□□□*ADC=*□ şi *ADB=*□□

Teorema sinusurilor aplicată în triunghiul *BCD*, în care se cunosc o latură şi unghiurile adiacente conduce la :

$$\frac{CD}{\sin B} = \frac{BC}{\sin D} = \frac{BD}{\sin C}, \text{ de unde deducem: } BC = \frac{a\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)}.$$

De asemenea, în □*ACD* în care se cunosc *CD=a* şi unghiurile alăturate, Teorema sinusurilor conduce la $AC = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma+\delta)}$. Acum, în triunghiul *ABC* în care se cunosc două laturi *BA* şi *AC* şi unghiul dintre ele *ACB*=□□□aplicând Teorema cosinusurilor se obţine $AB^2=AC^2+BC^2-2$ *AB BC* cos □□

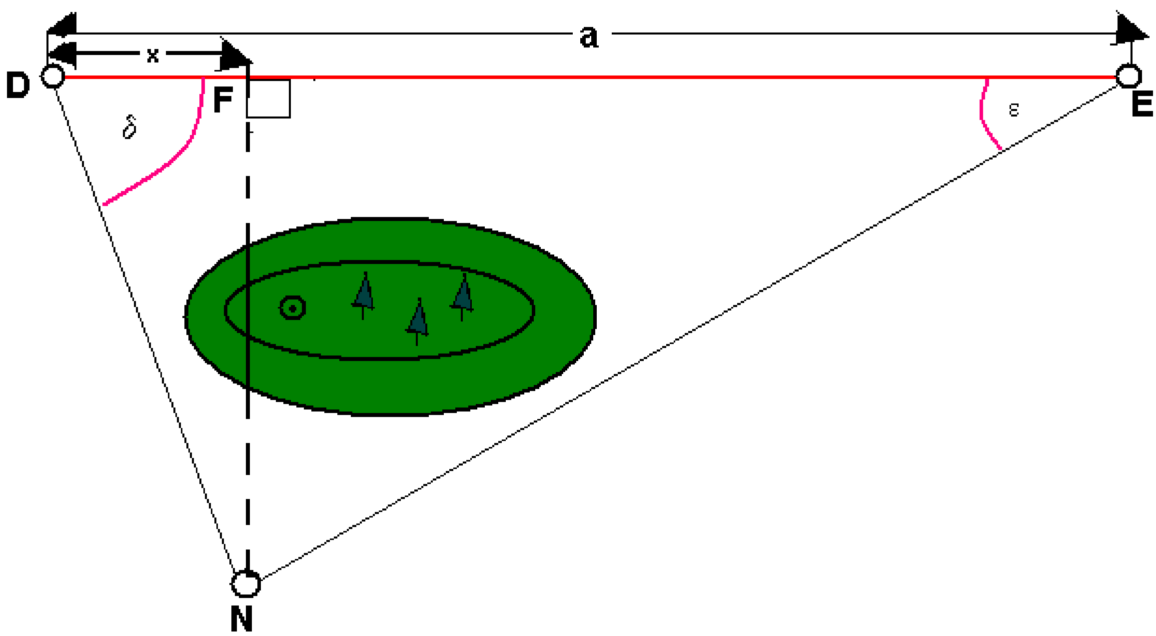
2. Determinarea poziţiei unui unghi drept în cazul în care nu avem vizibilitate.

Între localităţile D şi E se află o conductă de apă. Perpendicular pe ea va fi construită o altă conductă, pentru localitatea N. Trebuie deci să găsim distanţa x=DF de unde va porni conducta spre N, F nefiind vizibil din N, şi cunoscând DE=a şi ştiind unghiurile formate de ND şi NE cu DE.

Din triunghiurile DFN şi EFN rezultă că FN = xtgδ si iar FN = (a-x)tgε

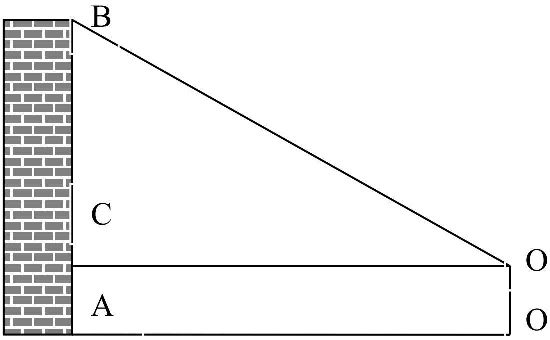
Deci xtgδ = (a-x)tgε, de unde

$x=a\dfrac{tg\varepsilon}{tg\delta+tg\varepsilon}$ sau, după transformarea tangentelor, $x = a\dfrac{\cos\delta\sin\varepsilon}{\sin(\delta+\varepsilon)}$.



4. Determinarea înălţimii unui obiect (turn, copac, etc.) în ipoteza că porţiunea de teren din vecinătatea bazei sale este situată în plan orizontal.

Înălţimea unui copac (turn) se poate calcula foarte uşor cunoscând înălţimea observatorului, distanţa de la punctul de unde se face măsurătoarea până la copac şi unghiul pe care îl formează direcţia orizontală cu dreapta care uneşte ochiul observatorului cu vârful copacului.

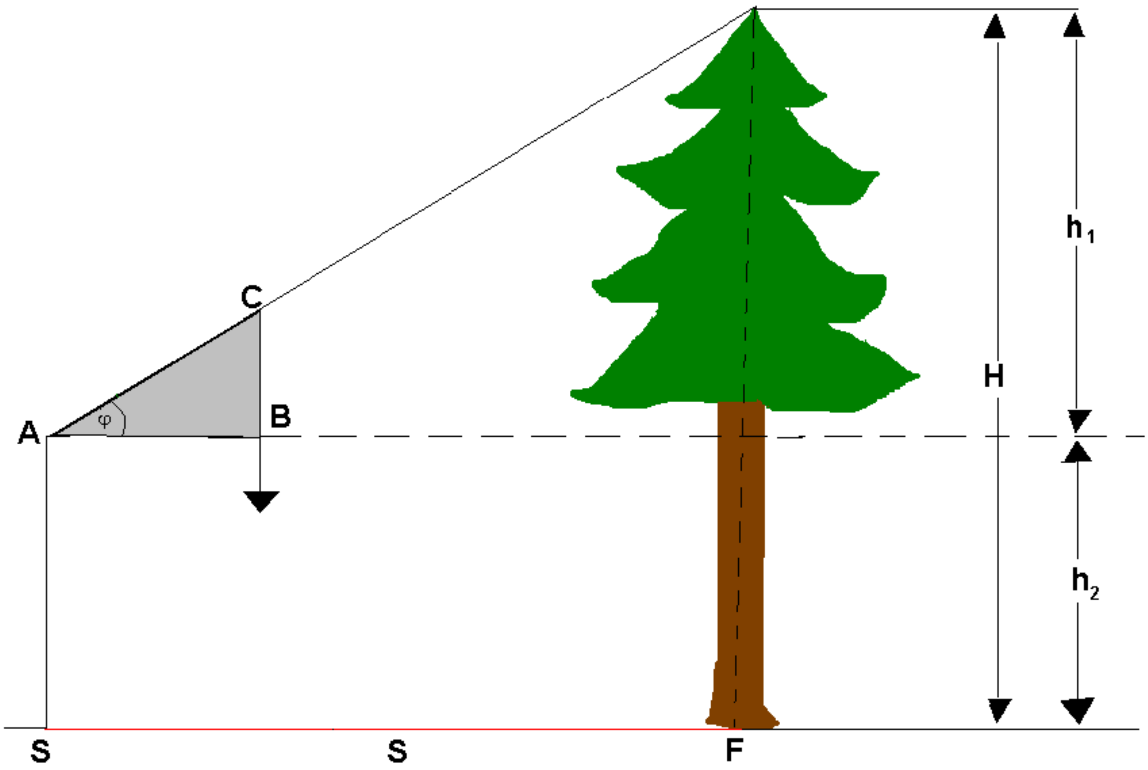


Fie $AB=H$ înălţimea turnului şi O' un punct din planul orizontal. Plasând staţia (teodolitul) în poziţia verticală $O'O$, se vizează din punctul O punctul B- vârful turnului şi se măsoară unghiul $COB=\varphi$ format de dreapta OB cu proiecţia sa pe planul orizontal. Având în vedere că distanţa $AO'=s$ se poate măsura pe teren, problema se reduce de fapt la determinarea catetei BC a triunghiului dreptunghic BCO în care se cunosc unghiul opus și cealaltă catetă $s=AO'$. Dacă $h_2=O'O$ este înălţimea teodolitului, atunci înălţimea turnului se calculează cu formula: $H=AB=AC+CB=h_2+s$ tg

Determinarea aproximativă a înălţimii.

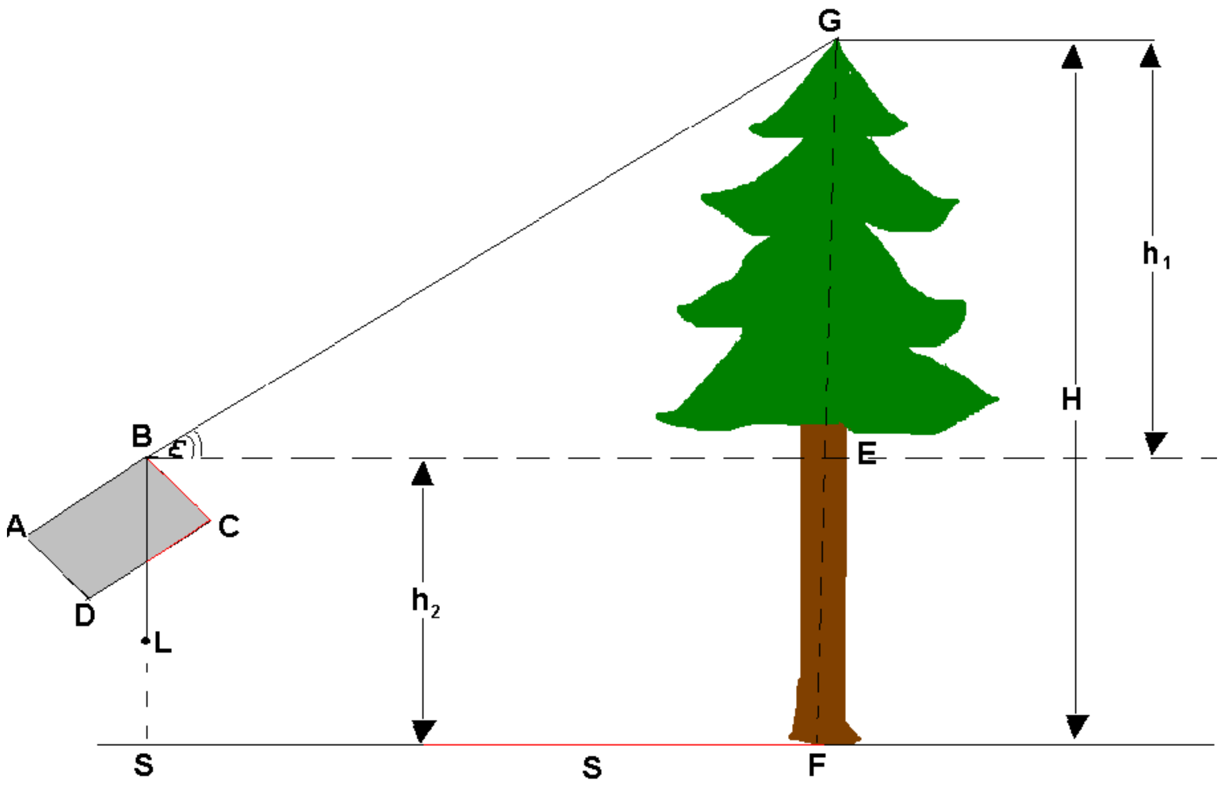
1. Putem să renunţăm la determinarea unghiului α dacă reuşim să situăm triunghiul dreptunghic isoscel ABC din fig. de mai jos astfel încât vârful copacului să fie pe prelungirea ipotenuzei. În acest caz φ ar fi de 45° iar h=s, H=s+h_2. Această metodă este aplicabilă numai dacă se

dispune de spaţiu suficient pentru alegerea convenabilă a punctului de observaşie S.



2. Dreptunghiul ABCD este ţinut într-o astfel de poziţie încât punctul G se află pe prelungirea laturii AB a dreptunghiului din figura de mai jos. Firul de plumb suspendat în B determină pe CD un segment CL. Deoarece laturile sunt perpendiculare şi triunghiurile BCL şi BEG sunt asemenea, vor fi egale unghiurile notate cu ε în figură. Astfel, $\frac{GE}{BE} = \frac{CL}{BC} = tg\varepsilon$, deci înălţimea copacului va fi

$$H = s\frac{CL}{BC} + h_2.$$

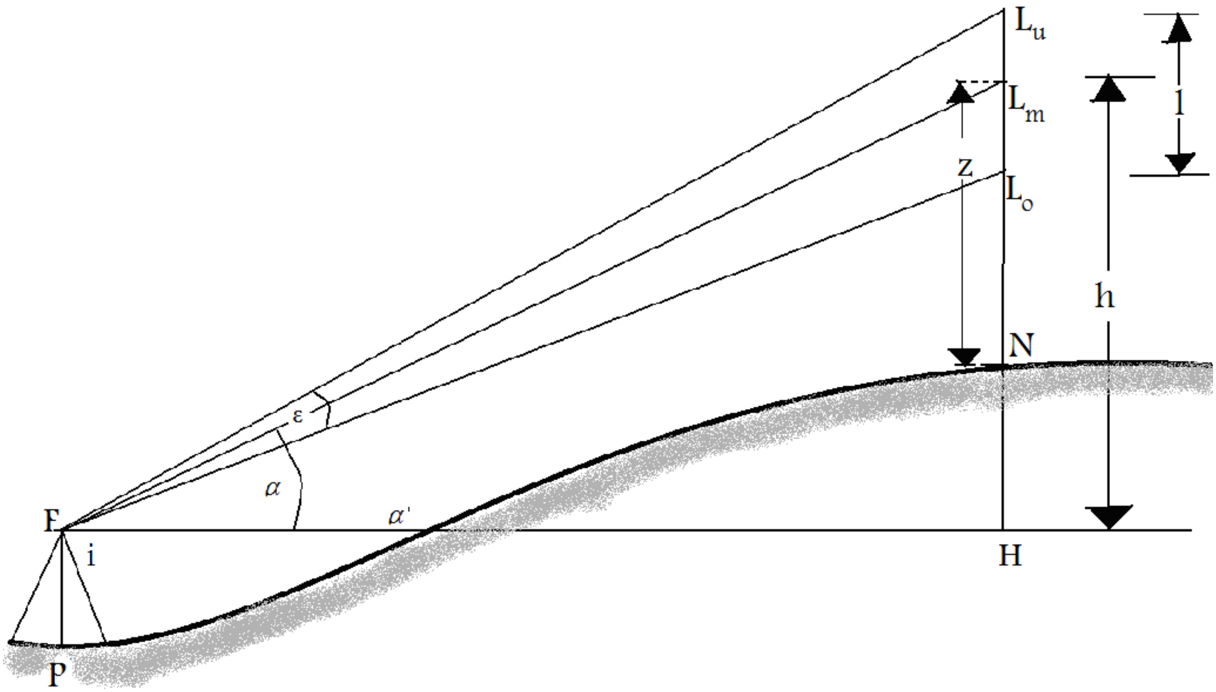


Calculul înălţimilor cu ajutorul unghiurilor de elevaţie.

Din punct de vedere practic la măsurători pe teren apar deosebiri între un unghi măsurat într-un plan orizontal și un același unghi , măsurat într-un plan vertical. Deosebirile se datorează indicilor de refracție diferiți ai aerului, funcție de densitatea locală a acestuia. Aceasta face ca o rază de lumină care se propagă cu un unghi relativ mare față de orizontală să aibă o traiectorie curbă, în locul uneia drepte. Acest fenomen se numește refracție terestră și împreună cu existența curburii pămâtului trebuie luat în considerație la determinarea înălțimilor care depășesc 200m.

Tahimetria este o măsurătoare de teren rapidă; ea se utilizează la stabilirea, prin măsurători simple și rapide a poziției și înălțimii unui număr oarecare de repere, față de poziția și înălțimea, cunoscute ale unui punct P, din care se face măsurătoarea. De exemplu, se utilizează în stabilirea formei terenului, ca bază pentru un proiect de construcție.

Crucea reticulară prezintă față de reperul central *m*, încă două repere paralele cu acesta, *o* și *u* echidistante față de m, la distanța *p*/2. Aceste trei repere se suprapun peste trei puncte, L_m, L_o și L_u ale imaginii mirei plasate în punctul N. Segmentul de lungime $l = L_u - L_o$ de pe miră este cuprins între laturile unghiului ε, a cărui bisectoare este orizontală. Funcție de distanța focală a obiectivului f și de lungimea parcursului razei luminoase în lunetă se poate stabili distanța orizontală până la miră, a, cu o relație de forma a=Cl, unde C este constanta aparatului, în cele mai multe cazuri având valoarea 100. Unghiul ε rezultă din din $tg\varepsilon/2=(l/2):a=1/(2C)$.



Dacă axa lunetei F face un unghi α cu orizontala, când reperul central al acesteia nu se suprapune peste imaginea reperului central al acesteia nu se suprapune peste iamginea reperului central al mirei Lm, atunci distanța orizontală a' se poate determina prin următoarele calcule:

$$l = H\,L_u - H\,L_o = a'[tg(\alpha+\varepsilon/2) - tg(\alpha-\varepsilon/2)]$$

$$a' = \frac{l}{tg\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right) - tg\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

sau, deoarece sin(α+ε/2)cos(α-ε/2) – sin(α-ε/2)cos(α+ε/2) = sinε, rezultă:

$$a' = \frac{l\cos\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\varepsilon} =$$

$$= l\,\frac{\cos^2\alpha\cos^2\frac{\varepsilon}{2}-\sin^2\alpha\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2}} =$$

$$= \frac{l\cos^2\alpha}{2tg\frac{\varepsilon}{2}} - \frac{l}{2}\,\frac{\sin^2\alpha}{ctg\frac{\varepsilon}{2}}$$

sau

$$a' = lC\cos^2\alpha - \frac{l}{4C}\sin^2\alpha$$

În această ultimă relație al doilea termen poate fi neglijat, deoarece 1 și sinα sunt mult mai mici decât C=100. Rezultă deci că

$$a' = lC\cos^2\alpha$$

și h= H L_m = a'tgα= $\frac{1}{2}$ Clsin2α.

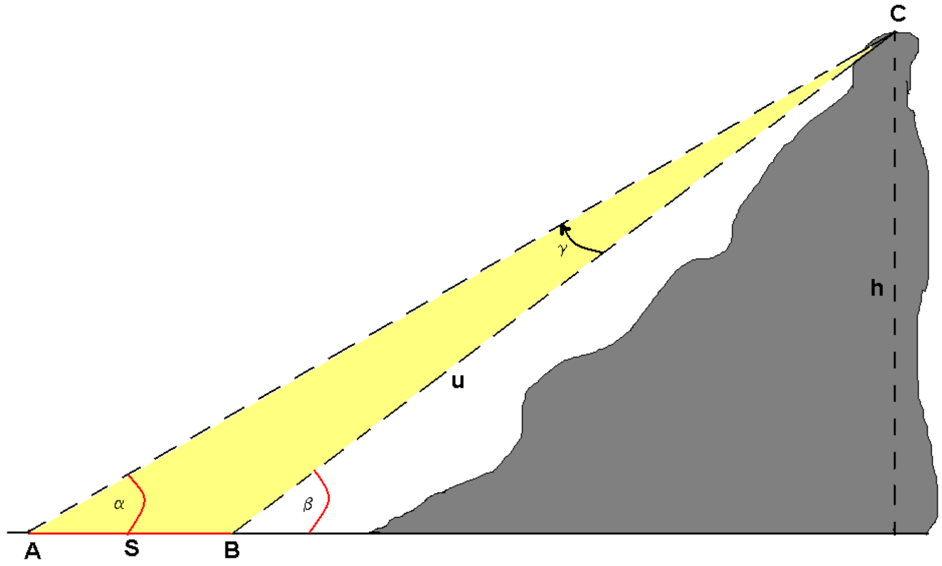
1. *Determinarea trigonometrică a înălţimilor cu linie de bază orizontală, cuprinsă în plan vertical.*

Se măsoară în direcţia reperului G o linie de bază orizontală, AB=s şi unghiurile de elevaţie α şi β în extremităţile acestei linii. Conform teoremei sinusurilor, rezultă înălţimea h:

$$\gamma = \beta - \alpha, \quad u = s\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \text{şi} \quad h = u\sin\beta,$$

deci

$$h = s\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$



2. Determinarea trigonometrică a înălţimilor cu linie de bază înclinată, cuprinsă în plan vertical.

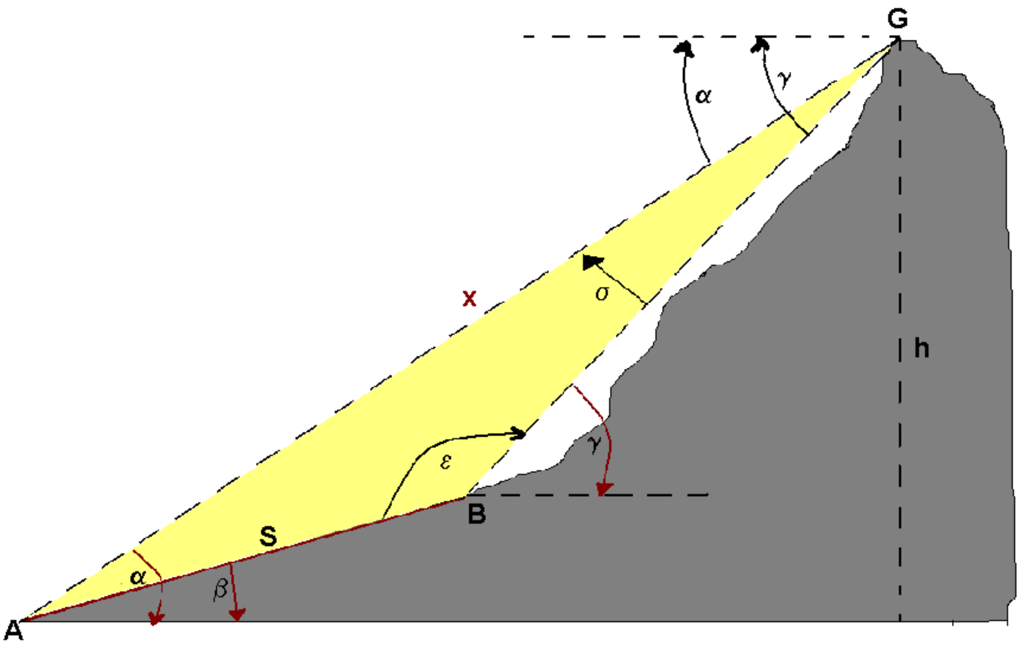
Linia de bază AB=s se găseţte într-un plan vertical care trece prin G şi face cu orizontala un unghi β. Unghiurile de elevaţie ale lui G sunt α în A şi γ în B. Diferenţa de înălţime dintre A şi G se poate calcula cu ajutorul teoremei sinusurilor.

Dacă AG=x rezultă h = xsinα,

unde $x = s\frac{\sin\varepsilon}{\sin\sigma}$, $\varepsilon = \beta + 180^{\circ} - \gamma$ şi $\sigma = \gamma - \alpha$

Înlocuind se obţine

$$h = s\frac{\sin(\gamma-\beta)\sin\alpha}{\sin(\gamma-\alpha)}$$



3. Determinarea trigonometrică a înălţimilor cu linie deavând o direcţie oarecare faţă de reper.

Din extremităţile A şi B ale liniei de bază AB=s, care se găseşte în acelaşi plan orizontal cu punctul de bază al reperului F, se măsoară unghiurile γ şi δ; în plus, din punctul A se măsoară şi unghiul de elevaţie a punctului G, respectiv ε.

Planul AFG este perpendicular pe planul orizontal FAB.

Dacă AF=z se obţine

$$h = z\,tg\varepsilon$$

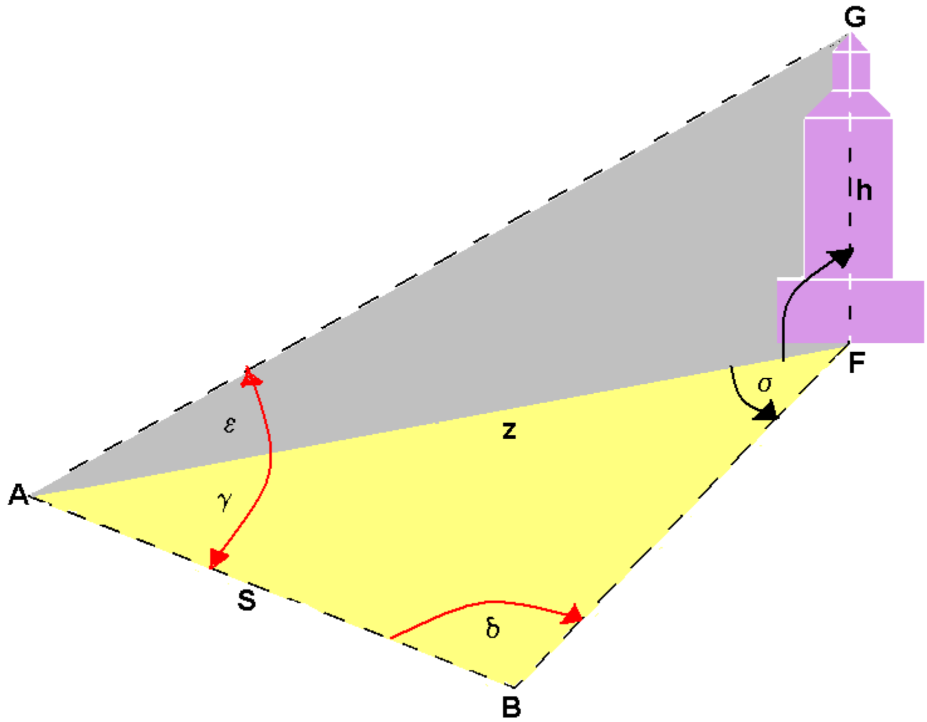
unde

$$z = s\frac{\sin\delta}{\sin\sigma} = s\frac{\sin\delta}{\sin\left[180^{o} - (\gamma+\delta)\right]} =$$

$$= s\frac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}$$

Înlocuind se obţine

$$h = s\frac{\sin\delta tg\varepsilon}{\sin(\gamma+\delta)}$$



Dacă linia de bază AB=s face un unghi ε_1 cu planul orizontal ce trece prin A şi în punctele A şi B se măsoară unghiurile orizontale α şi respective β dintre linia de bază şi punctual G ca şi unghiurile de elevaţie: ε_1 de la A către B; ε_2 de la B către G; ε de la A către G, atunci problema se reduce la una cunoscută. În triunghiul AHB' din planul orizontal ce trece prin A se cunosc: latura s'=scosε_1 şi unghiurile α şi β. După teorema sinusurilor

$$a'=s'\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},\quad b'=s'\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Din triunghiul AHG, conţinut în planul vertical se obţine

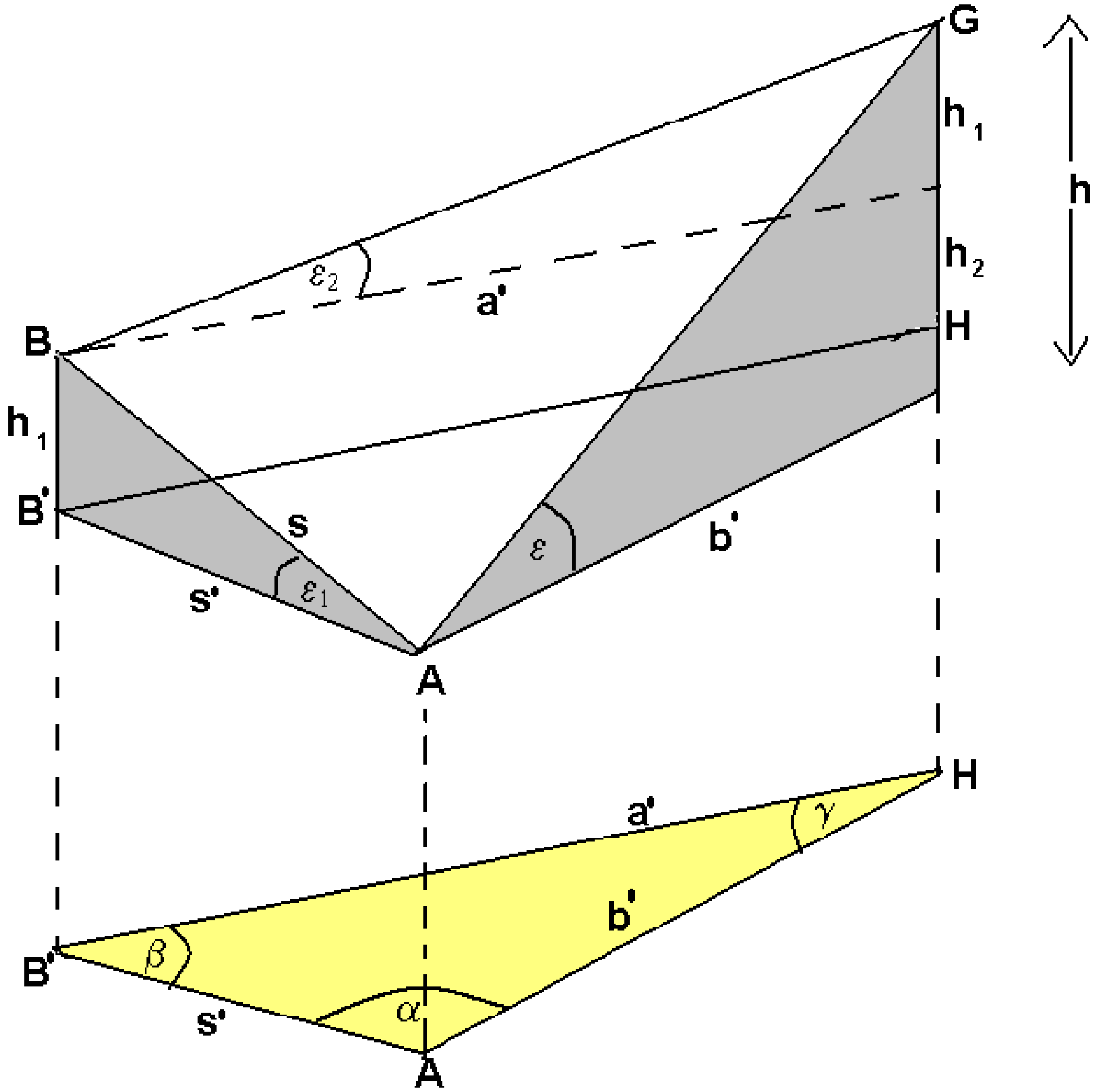
$$h = b'tg\varepsilon = s'\frac{\sin\beta tg\varepsilon}{\sin(\alpha+\beta)} = s\frac{\cos\varepsilon_1 \sin\beta tg\varepsilon}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Pentru verificare se poate folosi relaţia $h=h_1 + h_2$ unde

$$h_1 = s\sin\varepsilon_1$$

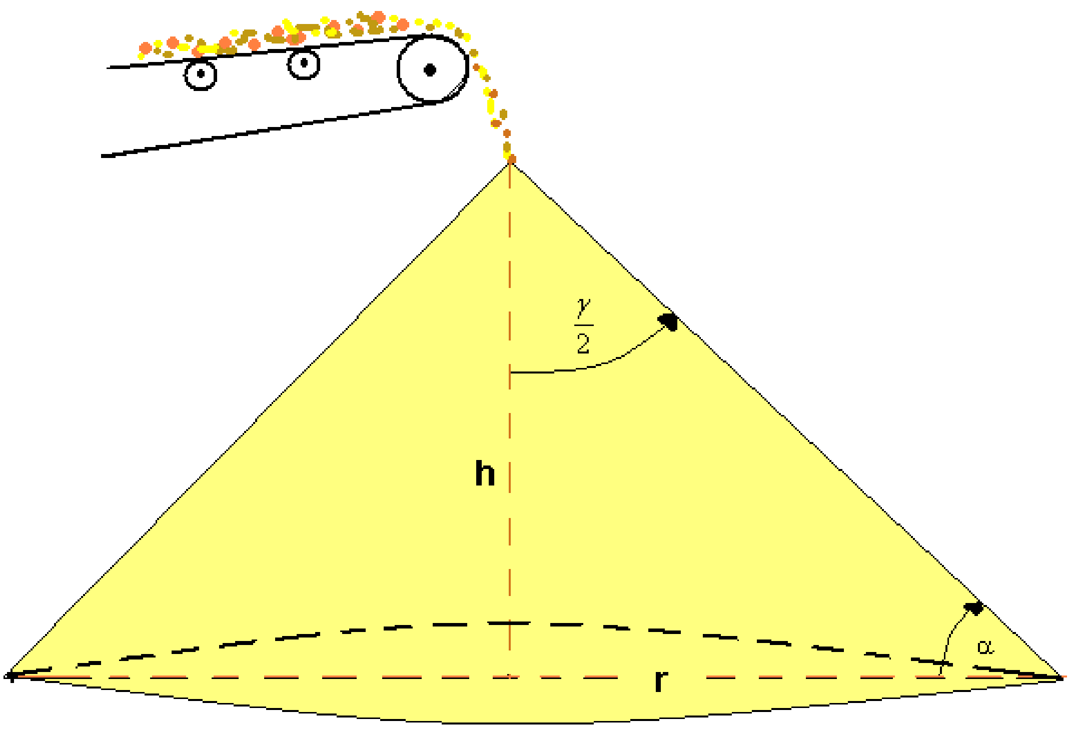
şi

$$h_2 = a'tg\varepsilon_2 = s'\frac{\sin\alpha tg\varepsilon_2}{\sin(\alpha+\beta)} = s\frac{\cos\varepsilon_1 \sin\alpha tg\varepsilon_2}{\sin(\alpha+\beta)}$$

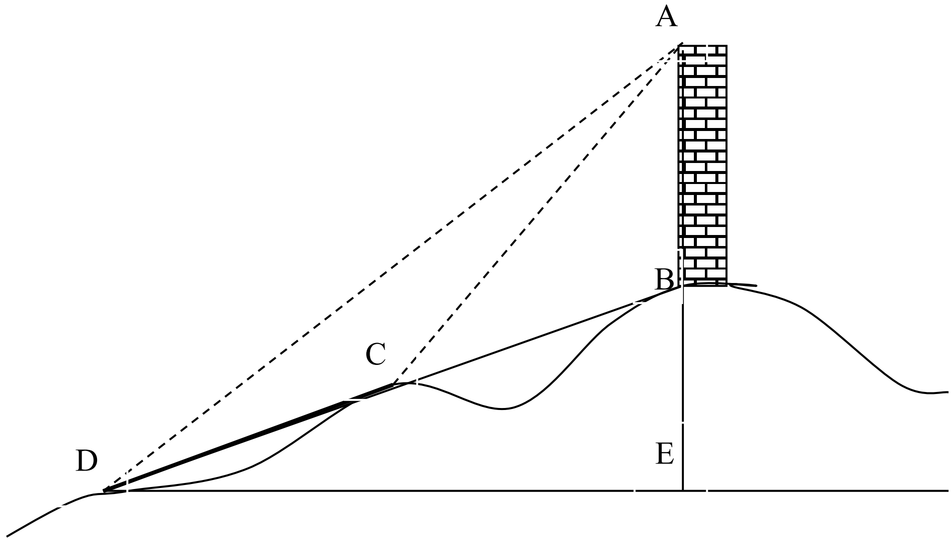


Unghiul format de generatoarea unei grămezi de nisip în formă de con cu planul bazei.

Nisipul aruncat de pe banda rulantă formează un con circular de înălţime h cu raza egală cu r. Volumul poate fi calculat după formula $V=\frac{\pi}{3}r^2 h$, unde $h=r\text{tg}\alpha$, deci $V=\frac{\pi}{3}r^3\ \text{tg}\alpha$, α fiind unghiul format de generatoarea grămezii cu planul bazei. Dacă în loc de α se ia unghiul γ de la vârful conului, atunci $h=r\text{ctg}\frac{\gamma}{2}$ şi $V=\frac{\pi}{3}r^3\ \text{ctg}\frac{\gamma}{2}$



Determinarea înălţimii unui turn inaccesibil situat pe un deal.



Fie turnul marcat *AB*. Alegem un punct accesibil *C* şi lucrăm în planul determinat de punctele *A,B* şi *C*. Luăm încă un punct *D* pe *BC* şi notăm cu *E* punctul de intersecţie al verticalei din *B* cu orizontala din *D*. Din măsurători se obţin:

CD=a, EDB=□□□*ADB=β ACB=*□□

În □*ACD* avem: $\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin(\alpha-\beta)}$, deci $AC=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

În □*ABC* avem: $\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}$, deci $AB=\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi}AC$.

Aşadar, $AB=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)\cos\varphi}$.

2.7 Folosirea transformarilor geometrice în probleme practice

Fie π mulţimea punctelor unui plan.

DEFINIŢIE. O funcţie *f* : π→π sau o restricţie a unei asemenea funcţii se numeşte **transformarea geometrică.**

Atunci când utilizăm transformările geometrice în rezolvarea unor probleme de geometrie trebuie să ştim :

1) să precizăm elementele care definesc transformările geometrice.

2) să construim imaginea unui punct printr-o transformare geometrică.
3) să construim imaginea unei figuri printr-o transformare geometrică.
4) să determinăm punctele care corespund printr-o transformare geometrică.

DEFINIŢIE: Fie $\vec{v}$ un vector dat. Se numeşte **translaţie de vector** $\vec{v}$, funcţia care asociază fiecărui punct M din planul π astfel încât :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$$

Deci $T_{\vec{v}}(M) = M'$. $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$; M' este imaginea lui M prin $T_{\vec{v}}$.

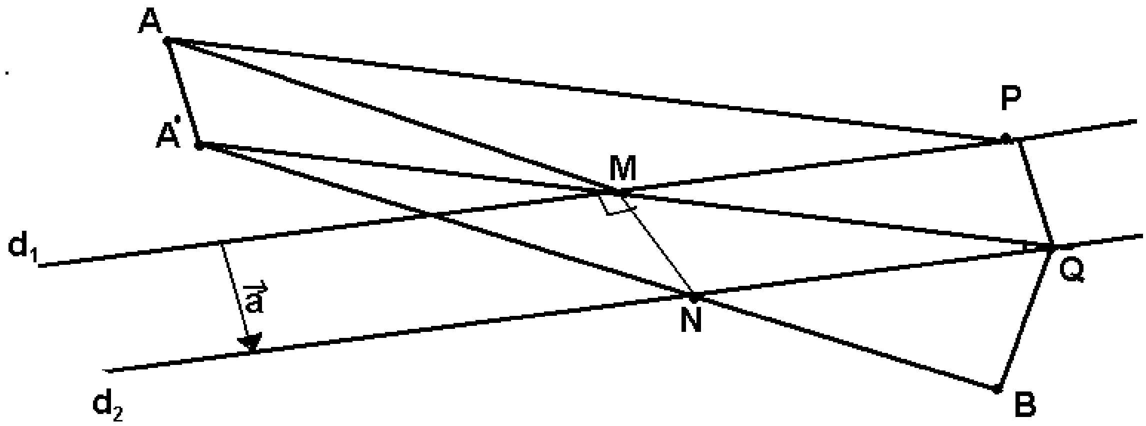
Proprietăţi:

1. Translaţia de vector $\vec{v}$ conservă lungimea unui segment.
2. Translaţia de vector $\vec{v}$ duce o dreaptă într-o dreaptă paralelă cu dreapta dată.
3. Translaţia de vector $\vec{v}$ conservă coliniaritatea unor puncte şi ordinea lor.
4. Translaţia conservă măsura unghiurilor.
5. Translaţia coservă raportul lungimilor a două segmente.
6. Translaţia transformă un poligon într-un pligon congruent cu cel dat.
7. Compunerea a două translaţii de vectori $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ este tot o translaţie de vector $\vec{v}_1+\vec{v}_2$.

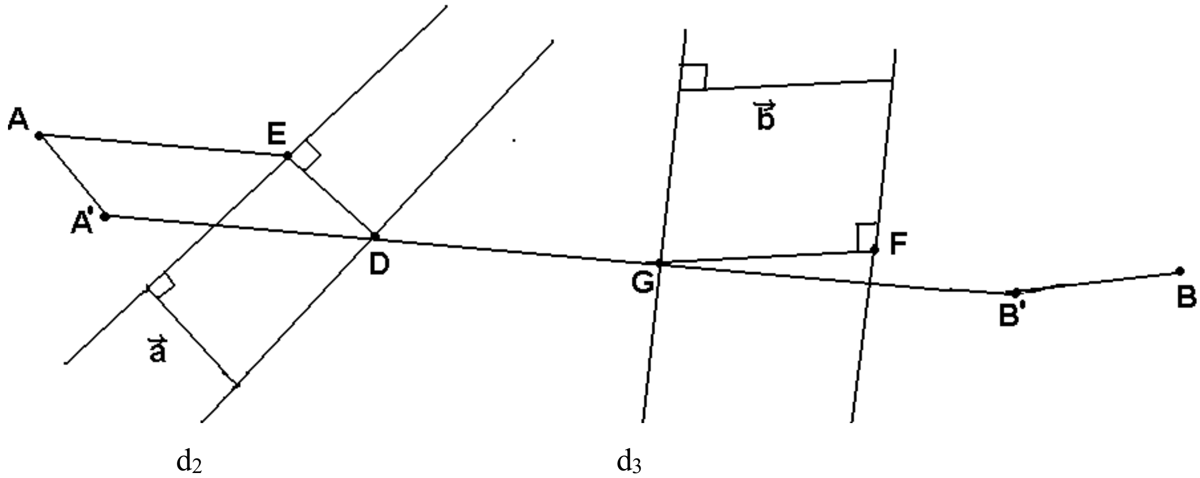
Aplicaţii:

1. În ce loc trebuie construit podul MN peste un râu care separă localităţile A şi B astfel încât drumul AMNB de la localităţile A şi B să fie cel mai scurt (malurile râului se consideră drepte paralele, iar podul este perpendicular pe maluri).

Soluţie : Se consideră translaţia de vector $\vec{v}=\overrightarrow{MN}$ prin care $T_{\vec{v}}$(A)=A'.
Deci A'N=AM, iar drumul AMNB este egal cu A'N+NB+MN. Cum lungimea segmentului MN este constantă trebuie să gasim poziţia lui N pentru care A'N+NB este minimă. Se constată astfel că punctul căutat N se află la intersecţia dreptelor d_2 şi A'B.



2. Localităţile A şi B sunt separate de două râuri. În ce locuri trebuie construite podurile DE şi GF peste aceste râuri dacă vrem ca drumul între cele două localităţi să fie cel mai scurt (malurile râurilor se consideră drepte paralele, iar podurile sunt perpendiculare pe maluri).



Soluţie: Se consideră translaţia de vector $\vec{v}=\vec{a}$ prin care $T_{\vec{v}}$ (A)=A'şi translaţia de vector $\vec{v}=\vec{b}$, prin care $T_{\vec{v}}$ (B)=B'. A', B' sunt puncte fixe.

Se formează paralelogramele AA'DE , BB'GF astfel că drumul dintre cele două localităţi devine AA'DGB'B. Dar AA' , BB' sunt constante (egale cu lăţimea râurilor, deci pentru a obţine drumul cel mai scurt trebuie ca A', D, G, B' să fie coliniare.

Construcţia : se construiesc punctele fixe A', B', apoi D, G se găsesc la intersecţia dreptei A'B' cu d_2 , respectiv d_3. Podurile se vor obţine ducând perpendiculare din D, G pe malurile opuse.

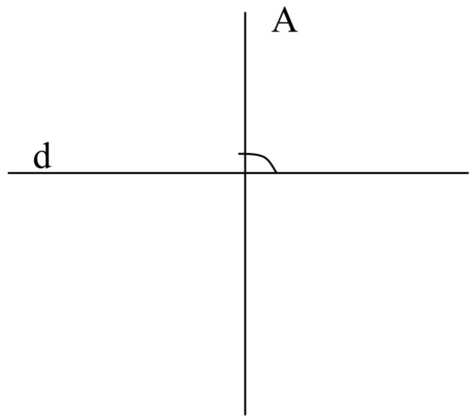
Definiţie: Punctele A şi A' din planul π se numesc simetrice în raport cu dreapta d din planul π dacă segmentul $|AA'|$ este perpendiculr pe dreapta d şi o intersectează într-un punct O, astfel încât $|AO|\equiv|OA'|$.Punctul A' se numeşte simetricul punctului A în raport cu dreapta d.

Definiţie: Simetria axială de axă d în planul π este o transformare a planului π prin care punctele dreptei d se transformă în ele înselei şi orice alt punct A se transformă în simetricul său A' în raport cu dreapta d.

Simetria axială de axă d se notează cu S_d.
Prin urmare $S_d: \pi\to \pi$ astfel încât $S_d(A)=A$ pentru orice $A\in d$ şi orice $S_d(A)=A'$ pentru

90°

orice $A \in \pi$-d, unde $|AA'|\perp d$, $\{O\}=$
$=|AA'|\cap d$;I $\|AO\|=\|OA'\|$.(figura 9.)



A'=S_d
(A)

Aplicaţii

1. Dacă două localităţi A şi B se află de aceeaşi parte a unui drum reprezentat printr-o dreaptă d, să se afle punctul M pe d, unde trebuie construit un supermarket astfel încât suma distanţa ||AM|| + ||MB|| să fie minimă.

Soluţie : Se construieşte simetricul lui A faţă de d, notat cu A'. Triunghiul AA'M este isoscel, deci ||AM|| + ||MB||=||A'M|| + ||MB||. Pentru ca distanţa ||AM|| + ||MB|| să fie minimă, trebuie ca ||A'M|| + ||MB||, ceea ce implică A', M, B coliniare. Cu alte cuvinte M se găseţte la intersecţia dreptelor A'B şi d.

Probleme de măsurare a distanţei pe mare

Pentru măsurarea distanţei între obiective aflate pe mare trebuie luată în considerare forma sferică a pământului. Calculele se vor baza deci pe teoremele trigonometriei sferice. În cazul unor distanţe relativ reduse, se poate neglija curbura pământului şi deci, se poate utiliza trigonometria plană. Reperele care apar pe hărţile marine au precizate distanţele relative între ele, ca ţi poziţia lor. Direcţiile, în special cea de deplasare a vasului se definesc faţă de direcţia nord-sud, de exemplu N35°E se citeşte 35° de la nord către est.

Pe un vas se goniometrează simultan farul L, sub direcţia S55,3°E şi turla unei clădiri înalte K sub direcţia S 28,5 ° V. Conform hărții de navigaţie, distanța KL=s=33,25km și are direcția N84,7 ° .

a) Să se afle distanțele FK=x și FL=y.
b) Ce distanță trebuie să mențină vasul pentru a trece pe lângă farul L la o distanță c=4 mile marine=7,408 km ?

Din α=55,3 °, β=28,5 °, γ=84,7 °, s=33,25 km se obține δ=180 ° – (α+γ)=40 °, ε=γ-β=56,2 °

$x=s\dfrac{\sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)}$=21,49km,

$y=s\dfrac{\sin\varepsilon}{\sin(\alpha+\beta)}$=27,77 km,

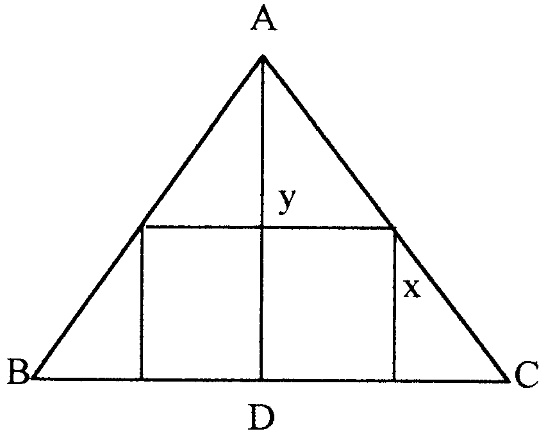
sinφ=c/y, φ=15,47 °.

Direcția vasului : S(α+φ)° E, adică S 70,77 ° E.

2.8 Probleme de extrem

1. Dintr-o placă triunghiulară ABC cu baza BC=2a, AB=AC şi înălţimea AD=h, să se decupeze o placă dreptunghiulară de arie maxima, cu o latura pe baza BC.

Soluţie:



Vom nota cu x si y laturile dreptunghiului . Din asemănarea triunghiurilor avem relaţia:

$$\frac{y}{a}=\frac{h-x}{h} \Rightarrow y=\frac{a(h-x)}{h}$$

$\Rightarrow$ S(x)= yx = $\dfrac{a(h-x)x}{h}$ unde S(x) am notat aria dreptunghiului.

$$\text{Deci, } S(x)=\frac{-ax^2+axh}{h} \Rightarrow S(x)=\frac{-ax^2}{h}+ax \Rightarrow$$

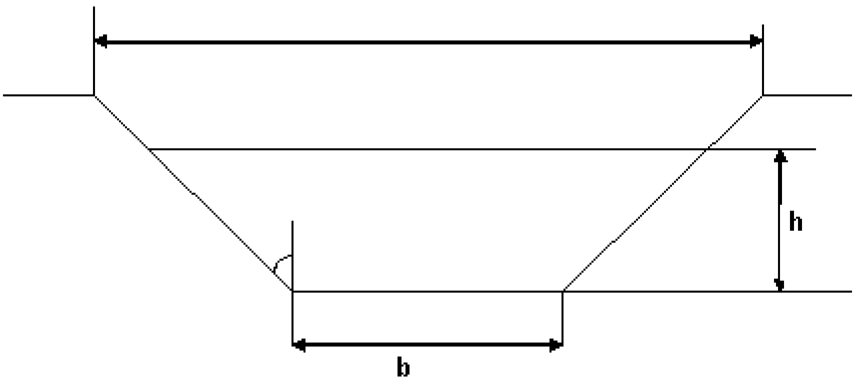
$$S'(x)=\frac{-2ax}{h}+a$$

$$S'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{h}{2}$$

Studiind semnul lui S''(x) în $x=\frac{h}{2}$ obţinem un punct de maxim local pentru care $S_{max} = \frac{ah}{4}$.

2. Se dă un canal hidraulic cu secţiunea trapezoidală de arie constantă. Cunoscând că panta taluzului este constantă, tg α=m=1, să se determine raportul dintre baza mică şi înălţimea secţiunii trapezoidale a canalului hidraulic, astfel încât să rezulte perimetrul minim udat.

Soluţie.



b

Notând cu h şi respectiv cu b, înălţimea şi respectiv baza mică a secţiunii trapezoidale a canalului hidraulic, perimetrul udat este :

$$P = b + \frac{2h}{\cos\alpha}$$

Cum însă $\cos\alpha= \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ şi cum tg α = m, avem

$$P = b+2h\sqrt{1+m^2}$$

Notând $\frac{b}{h}$ = x, rezultă:

$$P = h(x+2\sqrt{1+m^2})$$

Pe de altă parte, aria secţiunii canalului este :

$$A = h(b+mh),$$

Sau

$$A = h^2(x+m)$$

Din care :

$$H = \sqrt{\frac{A}{x+m}}, \quad (h>0)$$

Inlocuind ân expresia perimetrului, avem :

$$P = \sqrt{\frac{A}{x+m}}(x+2\sqrt{1+m^2}).$$

Deoarece A si m sunt constante , rezultă că P are un extrem când $P'(x)=0$.

$$P'(x) = \sqrt{A}\,\frac{x-2(\sqrt{1+m^2}-m)}{2\sqrt{(x+m)^3}} = 0$$

Rezultă punctul critic $x_0 = 2(\sqrt{1+m^2}-m)$ sau $x_0 \approx 0{,}83$.

Pentru a stabili natura punctului de extrem calculăm valoarea derivatei a doua şi-i studiem semnul in punctul critic obţinut.

$$P''(x) = \frac{\sqrt{A}}{4}\,\frac{2(3\sqrt{1+m^2}-2m)-x}{\sqrt{(x+m)^5}}\ .$$

Inlocuind valoarea punctului de extrem in derivata secunda,avem ;

$$P''(x_0) = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{2\sqrt{1+m^2}-m}} > 0.$$

Deci punctul critic este un minim.

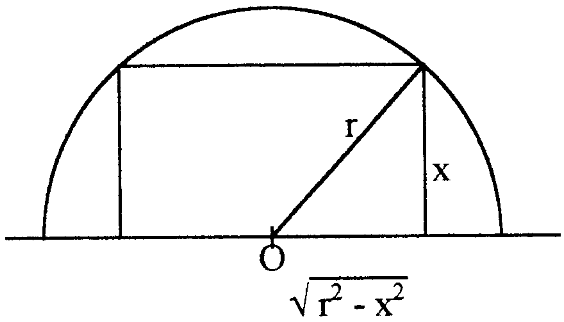
Valoarea minima a perimetrului udat, este :

$$P_{min}=2\sqrt{A(2\sqrt{1+m^2}-m)}$$

$P_{min} \approx 2{,}7\sqrt{A}$.

3. Dintr-o arcadă plină in formă de semidisc de rază r să se decupeze o fereastră dreptunghiulară ca în figură în scopul obţinerii unei luminozităţi maxime.

Soluţie:

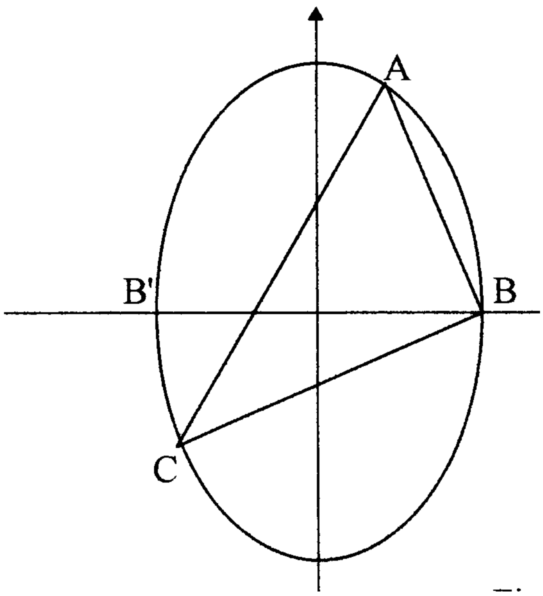


Fie x lăţimea dreptunghiului ; cealaltă latură a dreptunghiului va fi 2 $\sqrt{r^2 - x^2}$.

Aria ferestrei va fi A= $2x\sqrt{r^2 - x^2}$, iar condiţia care trebuie pusă este ca această arie să fie maximă. Această funcţie are un singur punct critic, $r\sqrt{2}/2$, care se dovedeşte a fi un punct de maxim.

4. Pe o scenă în formă eliptică de ecuaţie $2x^2+y^2= 18$ se doreşte instalarea unui reflector în punctul C al elipsei, care va trimite raze pe toate direcţiile segmentelor CM, unde M se află pe segmentul BA, A(1,4) si B(3,0) fiind puncte fixe pe elipsă. Unde trebuie instalat reflectorul pentru ca suprafaţa luminată de acesta să fie maximă.

Soluţie :



Semiaxele elipsei sunt : a = 3 şi b = $3\sqrt{2}$.

Fie C$\in$ elipsei $\Rightarrow$ C(x, $\sqrt{18-2x^2}$).

Notand cu S(x) - aria triunghilui ABC , S :$[-3,3]\to$R avem

$$S(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & \sqrt{18-2x^2} & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow S(x)=6-2x-\sqrt{18-2x^2} \Rightarrow$$

$$S'(x)=\frac{2x-2\sqrt{18-2x^2}}{\sqrt{18-2x^2}}$$

$$S'(x)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6}$$

Dintre cele două puncte critice obţinute $-\sqrt{6}$ este de maxim, iar $S_{max}=6+\sqrt{6}$.

Exerciţii propuse

1. Între localităţile *A* şi *B* trebuie tras un cablu în linie dreaptă printr-o pădure. Între *A* şi *B* nu avem vizibilitate dar putem găsi un punct *C* din care se pot măsura distanţele $b=|AC|=(\sqrt{3}+1)$ km, $a=|BC|=2$ km şi unghiul

$ACB = \square = 60^o$. Să se afle lungimea x a cablului şi unghiurile $\alpha = BAC$ si $\beta = ABC$.

2. Să se calculeze distanţa între două repere A şi B aflate pe acelaşi mal al unui râu ştiind că din două puncte accesibile C şi D aflate pe malul opus se pot instala instrumente care să măsoare distanţa $|CD|=300$ m şi unghiurile $ADC=45^o$, $BDC=75^o$, $BCD=15^o$ si $ACD=60^o$.

3. De pe malul unui râu un arbore aflat pe malul opus se vede sub un unghi de 60^o iar de pe aceeaşi direcţie de la o depărtare de 20 m de punctul iniţial, arborele se vede sub un unghi de 30^o. Să se afle înălţimea arborelui şi lăţimea râului.

4. Două localităţi reprezentate prin două puncte A şi B se află de o parte şi de alta a unui râu cu malurile drepte şi paralele având lăţimea de 100 m**.** Distanţa de la localitatea A până la râu este de 1,1 km iar de la localitatea B este de 1,85 km**.** Dintr-un punct A' aflat cu 100 m mai aproape de râu faţă de localitatea A, unghiul pe care îl face direcţia $A'B$ cu direcţia râului este de 30^o**.** Peste râu trebuie construit un pod MN . Să se determine la ce distanţă faţă de localitatea B trebuie să se proiecteze piciorul N al podului astfel încât drumul $AMNB$ să fie cel mai scurt posibil şi să se calculeze lungimea acestuia.

5. Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris în cercul de rază r.

6. Să se determine cilindrul de arie laterală maximă înscris în sfera de rază r.

CAPITOLUL 3. Trigonometrie sferică

3.1 Elemente de trigonometrie sferică

Trigonometria sferică este partea matematicii care se ocupă de rezolvarea triunghiurilor formate pe suprafața unei sfere din arce de cercuri mari.

Trigonometria sferică are o mare importanță teoretică și practică și se aplică în astronomie, în geodezie, în cartografie, în cristalografie, în geometria minieră, în teoria instrumentelor și în alte științe, atunci când, pentru studiul poziției relative în spațiu a unor puncte, linii și plane, se recurge la o sferă ajutătoare.

Un cerc de pe suprafaţa unei sfere se numeşte **cerc mare** dacă raza sa este egală cu raza sferei.

Observaţie: Un cerc de pe suprafaţa unei sfere este un *cerc mare* dacă şi numai dacă planul determinat de el conţine centrul sferei.

Partea din suprafața sferei cuprinsă între două semicercuri care au acelasi diametru, se numește **fus sferic**.

Figura de pe suprafața sferei formată din trei arce de cerc mare care se întretaie în trei puncte se numește **triunghi sferic**. Elementele triunghiului sferic sunt: trei unghiuri, fiecare în parte mai mic de 180°, și trei laturi; dacă laturile sunt mai mici decât 2d (d = 90°), atunci triunghiul se numește triunghi al lui Euler; triunghiurile care au laturile mai mari decât 2d, se numesc triunghiuri Moebius Study. Triunghiurile sferice pot fi isoscele, echilaterale, dreptunghice sau oarecare.

Triunghiurile sferice dreptunghice pot avea unul, două sau trei unghiuri drepte, iar triunghiurile sferice oarecare pot avea unul două sau trei unghiui obtuze. Dacă intr-un triunghi sferic, cel puțin o latură este egală cu un sfert din cerc, atunci triunghiul se numește cuadrantic.

Dacă în triunghiul sferic ABC (fig. 4) considerăm vârfurile ca poli și descriem, cu raze sferice egale cu 90°, polarele unui vârf, atunci aceste polare, întretăindu-se două câte două, vor da un nou triunghi sferic A'B'C', numit **triunghi polar** sau suplimentar triunghiului dat.

Evident, trei cercuri de pe suprafaţa unei sfere sunt neconcurente dacă nu există nici un punct care să fie comun tuturor celor trei cercuri. Observaţie: Trei cercuri mari determină pe suprafaţa unei sfere mai multe triunghiuri sferice. Astfel, în figură, atât ABC cât şi A'B'C' dar şi A'BC sau AB'C', sunt triunghiuri sferice.

Conform definiţiei, triunghiul sferic este o figură convexă. Aceasta înseamnă că măsura nici unui unghi al triunghiului nu este mai mare de 180 (o figură concavă determinată de trei cercuri mari neconcurente pe suprafaţa unei sfere este de exemplu exteriorul triunghiului ABC din figură - aceasta nu face obiectul studiului nostru).

Spre deosebire de cazul plan, pentru un triunghi sferic, suma unghiurilor este întotdeauna *mai mare* decât 180. Un triunghi se numeşte **dreptunghic** dacă are (cel puţin!) un unghi drept; el se va numi **rectilater** dacă are o latură cu măsura de 90. Un exemplu remarcabil de triunghi sferic este triunghiul tridreptunghic (trei unghiuri drepte) trirectilater (trei laturi de 90) - triunghiul format pe globul terestru de ecuator, meriadianele 0 si 90.

Măsurile laturilor unui triunghi sferic. Se defineşte măsura unei laturi AB a triunghiului sferic ABC ca fiind **măsura arcului de cerc mare AB**. Evident, aceasta este egală cu unghiul la centru AOB. În mod tradiţional se notează mărimile laturilor unui triunghi ABC astfel: AB=c, AC=b, BC=c.

Măsurile unghiurilor unui triunghi sferic. Măsura unghiului BAC al triunghiului sferic ABC este măsura unghiului diedru format de planele (OAB) şi (OAC).

Observaţie. Cum tangenta la un cerc este perpendiculară pe raza în punctul de contact, avem că tangentele la cercurile mari AB şi AC în punctul A sunt ambele perpendiculare pe muchia diedrului format de planele OAB şi OAC. Deci, unghiul unui triunghi sferic se poate măsura şi între tangentele

la laturile triunghiului in punctul considerat.
Proprietăţi Pentru orice triunghi sferic ABC avem:

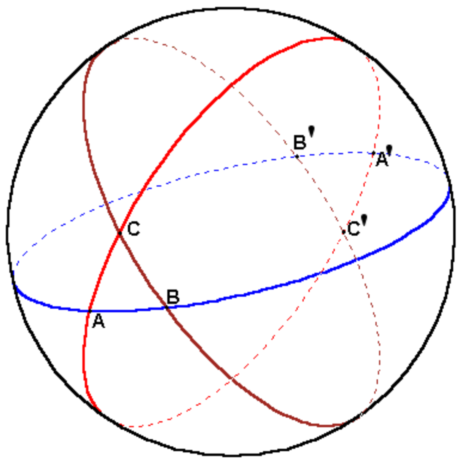
- 0< a+b+c< 360
- a< b+c, a-b< c
- 180 < A+B+C< 540
- A+B< 180+C, A-B> 180-C
- Aria triunghiului sferic este dată de:

$$S_{ABC} = (A+B+C - 180)\, \pi R^2/180$$

La baza geometriei sferice stau următoarele teoreme:

Teorema 1: Sectiunea unei sfere cu un plan oarecare este un cerc.
Teorema 2: Cercurile mari impart sfera si suprafata ei in doua parti egale.
Teorema 3: Prin doua puncte date pe suprafata unei sfere, daca acestea nu sunt asezate la extremitatile aceluiasi diametru, se poate duce un cerc mare si numai unul.
Teorema 4: Intersectia planelor a doua cercuri mari este un diametru al lor si le imparte in doua parti egale.
Teorema 5: Cea mai scurta distanta pe sfera intre doua puncte de pe suprafata ei este un arc de cerc mare mai mic de 180°.

3.1. Formulele lui Gauss

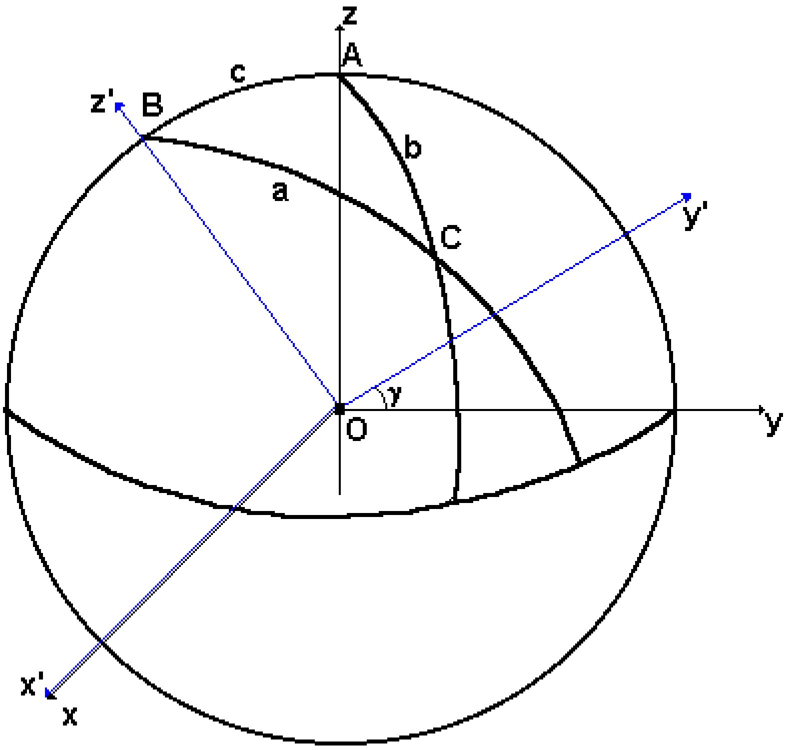


Să considerăm un triunghi sferic oarecare ABC pe suprafaţa unei sfere de rază R şi să construim două sisteme carteziene de coordonate Oxyz şi Ox'y'z' astfel:

- O este centrul sferei
- Oz trece prin B
- planul Oyz este planul (OAB)
- Oz' trece prin A
- planul Oy'z' este planul (OAB)

Impunând condiţia ca sistemul de coordonate să fie drept, axele Ox şi Ox' vor fi determinate. Mai mult, cum planele Oyz şi Oy'z' coincid, rezultă că Ox=Ox'.

Se observă faptul că sistemul Ox'y'z' se obţine din sistemul Oxyz printr-o rotaţie în jurul axei Ox.

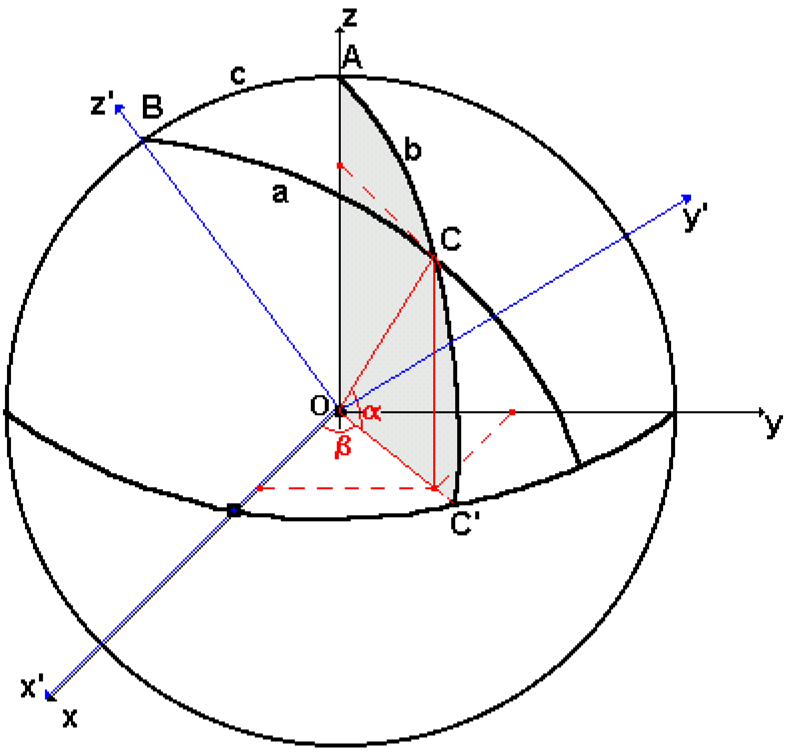


Pentru a găsi un set de expresii ce leagă elementele triunghiului sferic ABC, vom adopta următoarea strategie:

- Scriem coordonatele punctului C în sistemul Oxyz
- Scriem coordonatele punctului C în sistemul Ox'y'z'
- Scriem expresia transformării de rotaţie a sistemului Oxyz în Ox'y'z'

  Coordonatele punctului C în Oxyz sunt:

$$\begin{cases} x_C = R\cos\alpha\cos\beta \\ y_C = R\cos\alpha\sin\beta \\ z_C = R\sin\alpha \end{cases}$$



Raportându-ne acum la elementele triunghiului ABC avem (conform figurii):

$\alpha = 90^{o} - b$

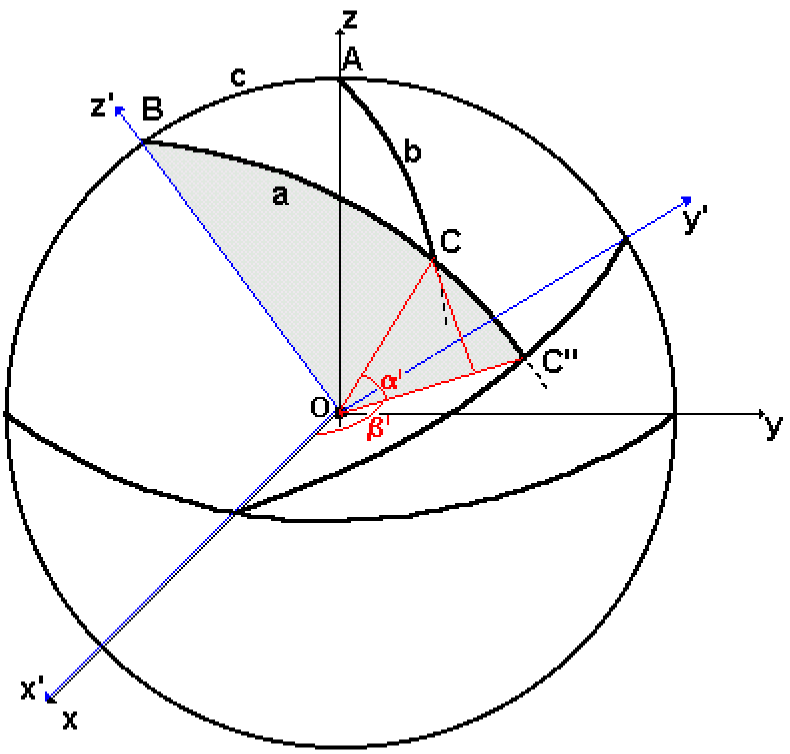
$\beta = A - 90^{o}$

şi deci obţinem:

$$\begin{cases} x_C = R\sin b\,\sin A \\ y_C = -R\sin b\cos A \\ z_C = R\cos b \end{cases} \qquad (3.1.1)$$

Coordonatele punctului C în Ox'y'z' sunt:

$$\begin{cases} x'_C = R\cos\alpha'\,\cos\beta' \\ y'_C = R\cos\alpha'\,\sin\beta' \\ z'_C = R\sin\alpha' \end{cases}$$



În acest caz avem:

$\alpha' = 90^{\circ} - a$

$\beta = 90^{\circ} - B$

Astfel, obţinem:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\gamma + z\sin\gamma \\ z' = -y\sin\gamma + z\cos\gamma \end{cases} \qquad (3.1.2)$$

Din nou, ne raportăm la elementele triunghiului ABC. Avem:

$\gamma = c$

de unde rezultă imediat:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos c + z\sin c \\ z' = -y\sin c + z\cos c \end{cases} \qquad (3.1.3)$$

Formulele lui Gauss

Din (3.1.1), (3.1.2) şi (3.1.3) obţinem

$$\begin{cases} R\sin a\sin B &= R\sin b\sin A \\ R\sin a\cos B &= -R\sin b\cos A\cos c + R\cos b\cos c \\ R\cos a &= R\sin b\cos A\sin c + R\cos b\cos c \end{cases}$$

Simplificând cu R şi sciind în ordine inversă obţinem expresia standard a formulelor lui Gauss:

$$\begin{cases} \cos a &= \cos b\cos c &+& \sin b\sin c\cos A \\ \sin a\cos B &= \cos b\sin c &-& \sin b\cos c\cos A \\ \sin a\sin B &= \sin b\sin A \end{cases}$$

Prima relaţie se numeşte teorema cosinusurilor pentru trigonometria sferică. Ultima relaţie este teorema sinusurilor, iar cea de a doua formulă se numeşte formula celor cinci elemente.

Teorema sinusurilor se poate pune şi sub forma

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

Formulele lui Gauss pentru unghiuri.

Definiţie. Se numesc **poli** ai unui cerc mare intersecţiile cu sfera ale dreptei perpendiculare pe planul cercului în centrul sferei.

Un exemplu ilustrativ este dat de polii globului terestru care reprezintă poli în sensul definiţiei de mai sus faţă de ecuatorul terestru.

Formulele lui Gauss pentru unghiuri

Să considerăm un triunghi ABC şi triunghiul său polar A'B'C'. Să scriem acum formulele lui Gauss pentru A'B'C':

$$\begin{cases} \cos a' &= \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A' \\ \sin a' \cos B' &= \cos b' \sin c' - \sin b' \cos c' \cos A' \\ \sin a' \sin B' &= \sin b' \sin A' \end{cases}$$

Dar conform proprietăţilor triunghiului polar, avem:

- $\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B) \cdot \cos(180^\circ - C) +$

  $+ \sin(180^\circ - B) \cdot \sin(180^\circ - C) \cdot \cos(180^\circ - a)$

- $\sin(180^\circ - A) \cdot \cos(180^\circ - b) = \cos(180^\circ - B) \cdot \sin(180^\circ - C) -$

  $- \sin(180^\circ - B) \cdot \cos(180^\circ - C) \cdot \cos(180^\circ - a)$

- $\sin(180^\circ - A) \cdot \sin(180^\circ - b) = \sin(180^\circ - B) \cdot \sin(180^\circ - a)$

  Adică:

- $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$
- $\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$
- $\sin A \sin b = \sin B \sin a$

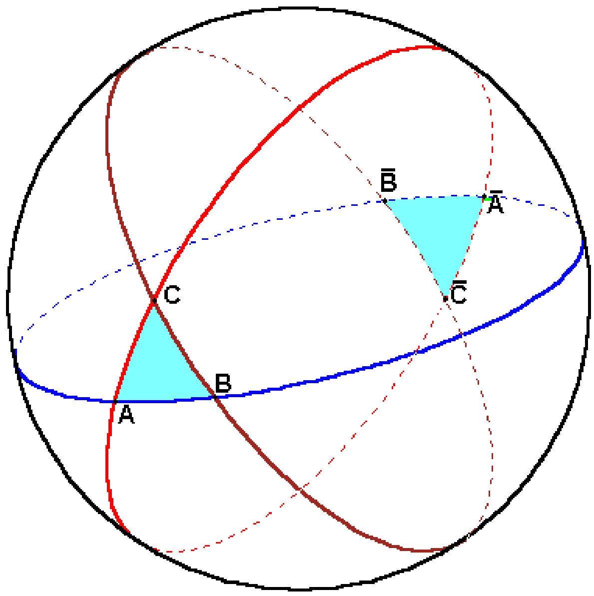
Din nou, aplicând dualitatea unghiuri-laturi introdusă de existenţa triunghiului polar, am obţinut un nou set de ecuaţii care determină triunghiul ABC. Acestea se numesc formulele lui Gauss pentru unghiuri. În contrast cu aceasta, formulele lui Gauss în forma originală se mai numesc formulele lui Gauss pentru unghiuri. Se observă că ultima relaţie se putea deduce imediat din teorema sinusurilor pentru laturi. În schimb, demonstrarea geometrică a primelor două relaţii ar fi fost extrem de laborioasă; se observă încă o dată eleganţa prin care formalismul triunghiului polar ne aduce informaţii noi despre un triunghi sferic.

Aria triunghiului sferic

Demonstrarea formulei ariei triunghiului sferic pleacă de formula ariei **fusului sferic** . Acesta se defineşte ca fiind zona determinată pe suprafaţa unei sfere de două cercuri mari ale căror planuri formează unghiul diedru D. Aria fusului sferic de unghi diedru D este:

$$S_D = 2\pi R^2 D/180$$

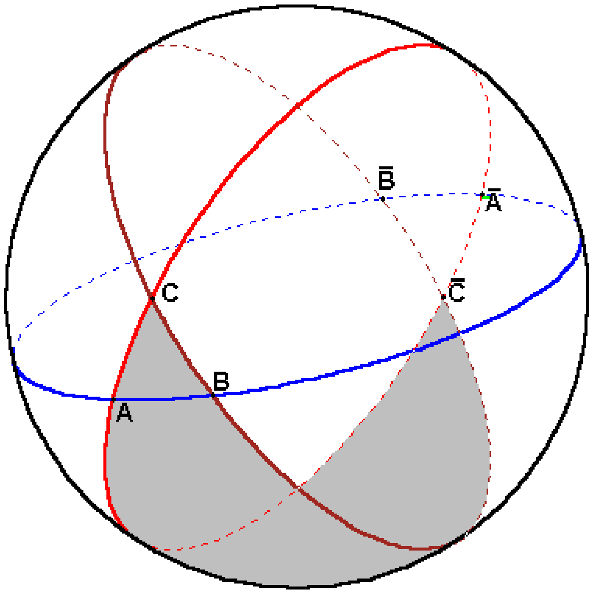
(pentru a reţine această formulă să observăm că întreaga sferă poate fi definită ca fiind un fus sferic de deschidere 360) Să considerăm triunghiul ABC ca în figură. Se observă pentru început că:



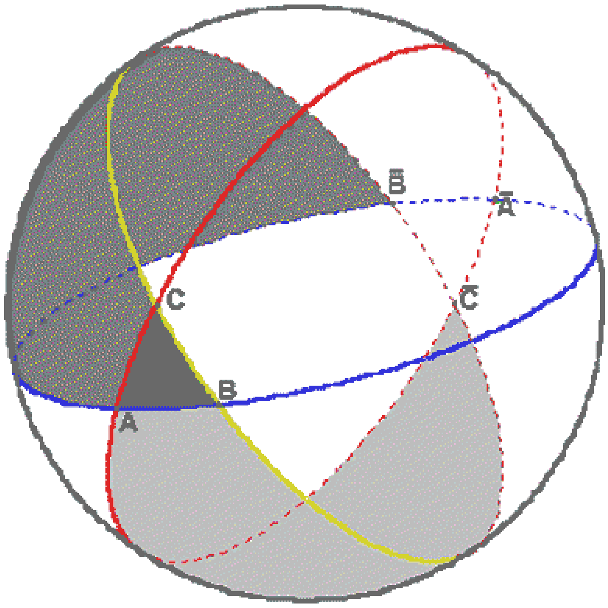
$$ABC \equiv \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

Măsurile celor două triunghiuri sunt evident egale, datorită simetriei. Acum, să considerăm următoarele fusuri sferice:

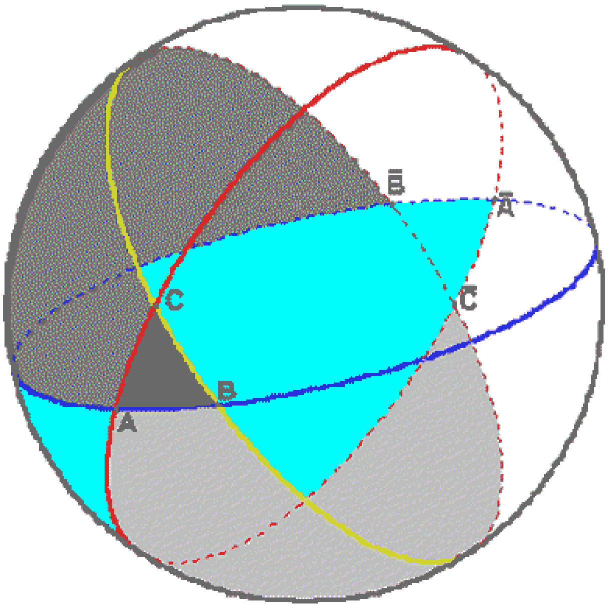
$$S_{CA\bar{C}BC} = S_C = 2\pi R^2 C/180$$



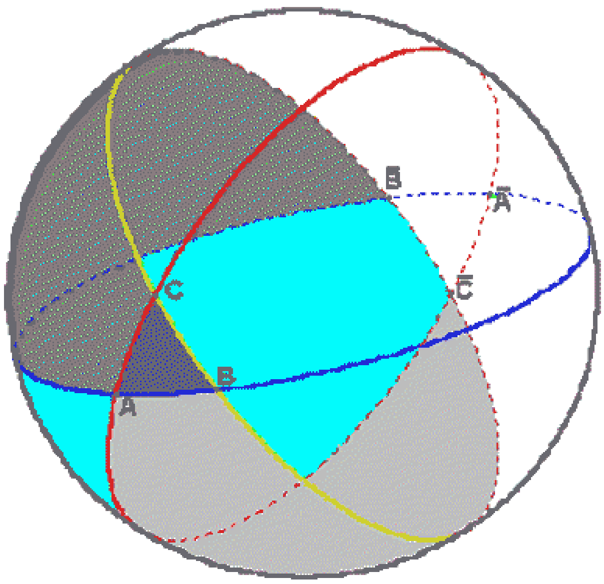
$$S_{BA\bar{B}CB} = S_B = 2\pi R^2 B/180$$



$$S_{A\bar{B}\bar{A}\bar{C}A} = S_{\bar{A}} = 2\pi R^2 A/180$$



Însumând aceste suprafeţe se observă că obţinem o semisferă plus de două ori aria triunghiului ABC (acesta aparţine fusului B cât şi fusului C, deci a fost considerat de două ori)



Adunând deci aceste relaţii obţinem:

$$S_A + S_B + S_C = 2\pi R^2 + 2\, S_{ABC} = 2(A+B+C)\, \pi R^2/180$$

$$S_{ABC} = (A+B+C - 180)\, \pi R^2/180$$

Coordonate geografice

Admitem pentru început că Pământul este sferic. Axa imaginară pp', în jurul căreia el se roteşte, se numeşte axă proprie, punctele în care axa geografică proprie înţeapă sfera terestră sunt: p – polul Nord geografic; p' – polul Sud geografic (a se vedea figura 1).

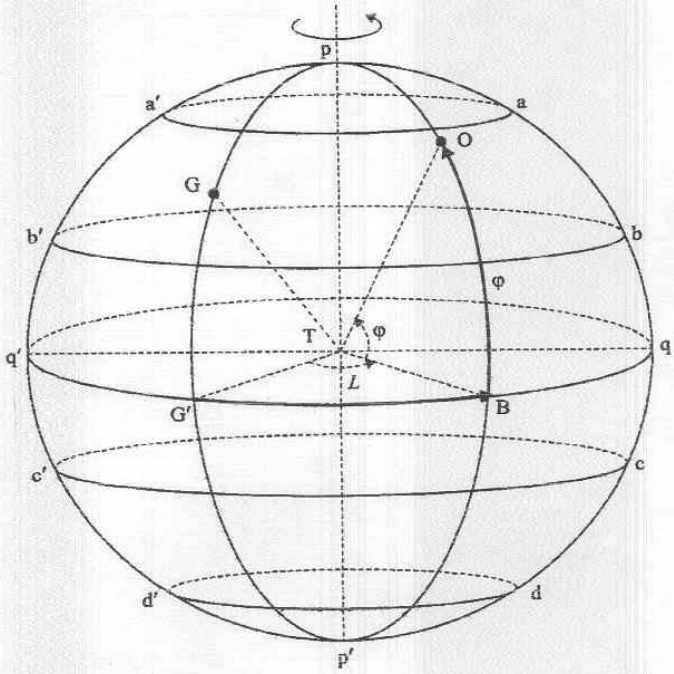


Fig. 1

Semicercul mare care trece prin polii geografici ai Pământului şi printr-un punct (loc) O de pe suprafaţa Pământului este meridianul geografic al locului. Meridianul geografic al observatorului de la Greenwich este denumit primul meridian (meridian origine / zero).

Cercul mare de pe suprafaţa Pământului, care reprezintă intersecţia planului meridian zero cu sfera terestră, divizează suprafaţa Pământului în două semisfere: emisfera Est şi emisfera Vest.

Putem defini coordonatele geografice ale locului O de pe suprafaţa Pământului, care sunt latitudinea geografică (φ) şi longitudinea geografică (L).

Latitudinea φ a locului O este dată de unghiul OTB pe care îl face verticala locului O cu planul ecuatorului (dacă locul O este în emisfera Nord, atunci latitudinea sa nordică este pozitivă, $0 \leq \varphi \leq 90^0$, iar dacă locul O este în emisfera Sud, atunci latitudinea sa sudică este negativă, $-90^0 \leq \varphi \leq 0$).

Longitudinea L a locului O este dată de unghiul diedru G'TB pe care îl face planul meridianului zero cu planul meridianului locului (dacă locul O este în emisfera Est, atunci longitudinea sa estică este pozitivă, $0 \leq L \leq 180^0$, iar dacă locul O este în emisfera Vest, atunci longitudinea sa vestică este negativă $-180^0 \leq L \leq 0$).

În urma studiilor efectuate în ceea ce priveşte forma Pământului, s-a constatat că ea diferă de aceea a unui elipsoid de revoluţie şi că forma geometrică a Pământului nu se poate identifica cu o formă geometrică simplă.

Dacă în rezolvarea celor mai multe probleme de astronomie se admite că Pământul este o sferă omogenă, atunci când se impun evaluări mai precise ale formei şi dimensiunilor Pământului, se admite că acesta este un elipsoid de revoluţie (sferoid) neomogen.

S-a stabilit că semiaxa mare, situată în planul ecuatorial, este $a = 6378{,}24$ km iar semiaxa mică (a cărei direcţie coincide cu axa nord-sud) este $b = 6356{,}86$ km

Măsurători efectuate prin intermediul sateliţilor au arătat că $a = 6375{,}75$ km, raza polului nord este $b_n = 6355{,}36$ km iar raza polului sud este $b_s = 6325{,}36$ km, cu 30 km mai mică decât raza polului nord, astfel încât Pamântul este un elipsoid turtit.

Probleme

1. *Cât de lung este arcul unui cerc mare al globului pământesc pentru care unghiul la centru este de 60°? (raza Pământului se consideră R=6370km).*

Soluție: Deoarece lungimea unui cerc de rază R este 2πR. Deoarece cercul corespunde unui unghi la centru de 360°, rezultă că lungimea unui arc corespunzător unui unghi α (exprimat in grade), este:

$$L = \frac{2\pi R\alpha}{360^o}$$ **(formula lungimii unui arc)**

Deci, în cazul nostru lungimea arcului corespunzător unghiului de 60° va fi 2πR / 6, adică 6667,26km.

Observație: Formula de mai sus poate fi folosită și pentru a găsi unghiul la centru atunci când se cunoaște lungimea arcului: Cât este unghiul la centru corespunzător unui arc de cerc mare al globului pământesc de lungime 20km?

Din formula precedentă obținem $\alpha = \frac{360^o L}{2\pi R}$, iar un calcul simplu arată că

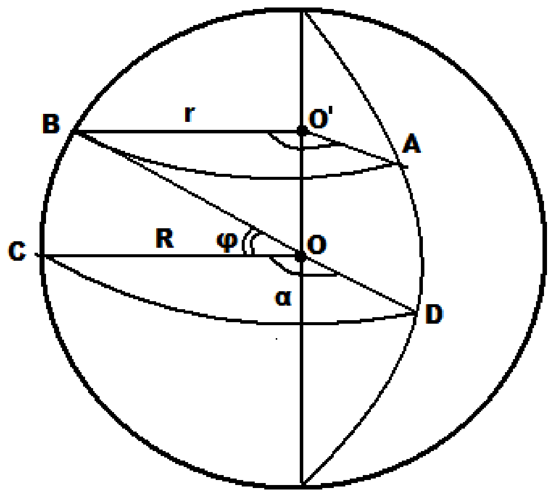
α =0,0539°.

2. *Doi globtroteri calatoresc intre doua meridiane, unul pe paralela de latitudine φ=56°, iar altul pe ecuator. Știind că primul a parcurs l=100km, aflați lungimea L a drumului parcurs de cel de-al doilea.*

Soluție: Presupunând că unghiul dintre cele două meridiane este α, lungimea drumului parcurs de cei doi va fi:

$l = \frac{2\pi r\alpha}{360^o}$ și $L = \frac{2\pi R\alpha}{360^o}$, unde r este raza cercului paralel pe care s-a deplasat primul (cel de-al doilea s-a deplasat pe ecuator, deci raza cercului este raza Pământului R=6370). Împărțind cele două relații, obținem:

$$\frac{L}{l} = \frac{R}{r}$$



După cum se vede și din figură, unghiul OBO' este egal cu φ, deci în triunghiul OBO', $\cos \varphi = r / R$, așadar, $R / r = 1 / \cos \varphi$, prin urmare,

$$L = l / \cos \varphi$$

Deci, în urma calculului $L \approx 181{,}81$km.

3. *Un biciclist a parcurs într-o una drumul dintre două localități din Franța și Rusia, aflate la latitudinile $\varphi_1 = 45^o$, $\varphi_2 = 60^o$, știind că longitudinile lor geografice diferă cu 90^o. Câți km a parcurs biciclistul? (presupunând că a mers pe drumul cel mai scurt, adică pe cercuri mari ale Pământului).*

Soluție: Considerăm triunghiul sferic PAB, unde P este polul nord, iar A și B sunt cele două localități.

Aplicând teorema cosinusurilor în acest triunghi, obținem:

$\cos x = \cos(90^o - \varphi_1) \cdot \cos(90^o - \varphi_2) + \sin(90^o - \varphi_1) \cdot \sin(90^o - \varphi_2) \cdot \cos 90^o$

Deci:

$$\cos x = \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2$$

Asadar, $\cos x = 0{,}705 \cdot 0{,}865 = 0{,}609$, deci $x = 52{,}42^o$

Folosind acum formula lungimii unui arc obținem distanța L dintre cele două localități:

$$L = \frac{2\pi R x}{360^o}$$

Unde R este raza Pământului.

Deci $L \approx 5827$km

4. *Prin Iași ($\varphi = 47^o10'$, $L = 27^o34'$) se duce cercul mare care atinge în cel mai nordic punct al său cercul polar de nord ($\varphi_1 = 66^o33'$). Sub ce unghi față de meridianul Iașilor se află acest cerc și care este longitudinea geografică a punctului de atingere?*

Soluție:Fie I punctul corespunzător Iașului. Prin I ducem cercul mare care este tangent în cel mai nordic punct al său cercului polar de nord, în punctul A. Meridianul acestui punct de tangență este perpendicular pe cercul polar și pe cercul mare dus. S-a construit astfel un triunghi sferic, PAI, care are unghiul din A de 90°. Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul PAI, obținem:

$$\frac{sinx}{\sin(90^o - \varphi_1)} = \frac{sin90^0}{\sin(90^o - \varphi)}$$

De aici rezultă că sinx = $\frac{\sin(90^0 - \varphi 1)}{\sin(90^0 - \varphi)}$, deci sinx = $\frac{\cos\varphi 1}{\cos\varphi}$,

adică x = *35°49'*.

5.

3.2 Aplicații în astronomie

Datorită faptului că ochiul uman nu poate discerne distanţele pînă la obiectele cereşti (Soarele, Luna, planetele, stelele, etc.), acestea par a se afla la aceeaşi distanţă de fiecare persoană care le observă; bolta cerească apare ca o sferă pe care se deplasează corpurile cereşti. Pentru scopuri practice imediate (orientare, determinarea timpului, etc.) este necesară cunoaşterea direcţiei de vizare a unui astru, distanţa pînă la acesta fiind irelevantă. În plus, cea mai evidentă mişcare a aştrilor, mişcarea diurnă aparentă` este o mişcare de rotaţie omogenă faţă de observator (mişcare datorată rotaţiei Pământului), susţinând aparenţa cerului sferic.

Din punct de vedere matematic, în măsura în care nu suntem interesaţi de distanţele reale până la aştri, vom opera doar cu direcţiile pe care aceştia se găsesc faţă de observator. În acest caz, putem construi o sferă de rază arbitrară şi putem echivala în mod trivial "direcţiile" din spaţiul tridimensional cu "punctele" acestei sfere. Astfel, formalismul calculelor ce trebuiesc efectuate pentru determinările astronomice se simplifică de la geometria tridimensională carteziană la o geometrie bidimensională sferică. Centrul unei astfel de sfere poate fi ochiul observatorului, caz în care sfera se numește ***sfera cerească topocentrică***, sau centrul Pământului, caz în care va fi numită ***sferă cerească geocentrică***, sau chiar centrul Soarelui, când se va numi ***sferă cerească heliocentrică***. Verticala care trece prin centrul sferei o taie în două puncte diametral opuse : zenitul, notat Z și nadirul, notat Na.

Planul perpendicular pe verticală care trece prin centrul sferei se numește plan orizontal al locului de observație. El taie sfera după un cerc mare care se numește ***orizont matematic*** (sau adevărat al locului). Un cerc mic al sferei paralel cu orizontul matematic se numește ***almucantarat***. Dreapta paralelă cu axa Pământului care trece prin centrul sferei se numește axa lumii. Aceasta intersectează sfera cerească în două puncte numite ***polul nord ceresc*** și ***polul sud ceresc***. Planul care trece prin centrul sferei și este perpendicular pe axa lumii se numește plan ecuatorial ceresc, iar intersecția acestuia cu sfera ceresca se numește ***ecuator ceresc***. Un observator terestru nu simte mișcarea de rotație a Pământului. Aceasta îi produce aparența unei mișcări de rotație a cerului întreg, în sens invers sensului de rotație al Pământului, numită mișcare diurnă aparentă. Cercurile mari care trec prin polii cerești se numesc cercuri de declinație sau orare. Punctul N al orizontului matematic cel mai apropiat de polul nord se numește ***punctul cardinal nord*** (punctul diametral opus se numește punctul cardinal sud – S, iar punctele E și W egal depărtate de N și S se numesc puncte cardinal est, respectiv vest).

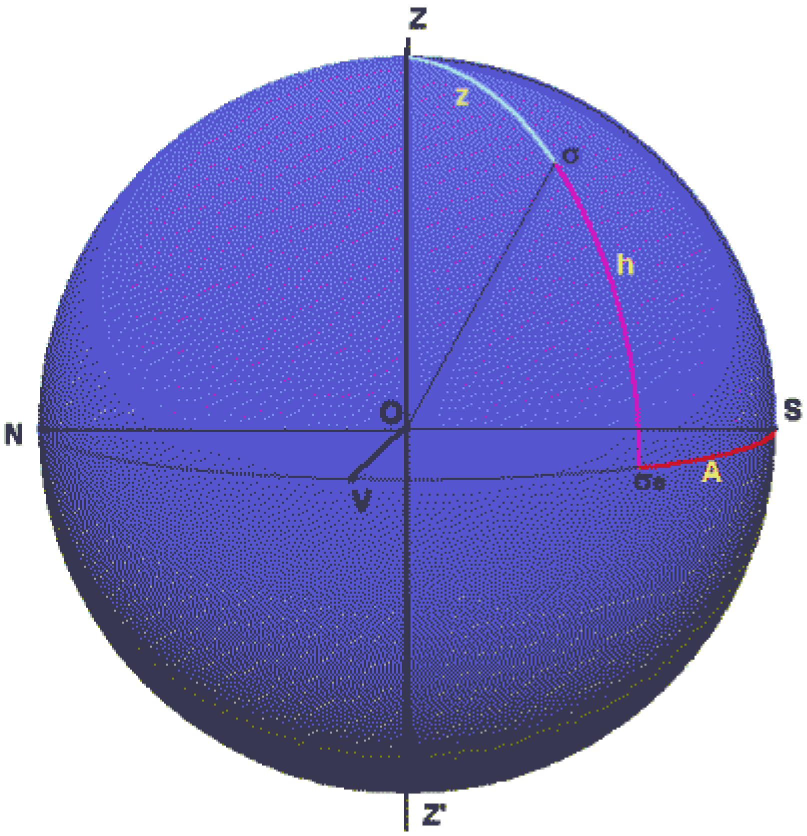
3.2.1 Coordonate și transformări de coordonate în astronomie

Principalele sistemele de coordonate folosite în astronomie (orizontale, ecuatoriale, ecliptice, galactice) au acelaşi reper - observatorul. O transformare de coordonate de la unul din aceste sisteme la altul este deci echivalentă cu un set de rotaţii în jurul axelor de coordonate carteziene. Dar, după cum am arătat, formulele care determină rotaţia în sistemul cartezian se reduc la formulele lui Gauss în trigonometria sferică. Astfel, determinarea direcţiilor de observare a corpurilor cereşti în diferite sisteme de coordonate se va reduce la rezolvarea unor triunghiuri pe sfera cerească, folosind fie formulele lui Gauss pentru laturi, fie formulele lui Gauss pentru unghiuri.

Sistemul coordonatelor orizontale constă în:

- **înălţime h** definită ca fiind unghiul format de raza vectoare a astrului cu planul orizontului. Aceasta se află cuprinsă între 0^o și 90^o dacă astrul se găsește deasupra orizontului și este cuprinsă între -90^o și 0^o în caz contrar;
- **azimut A** definit ca unghiul format de planul vertical al astrului cu planul meridianului locului, măsurat pe orizont de la punctul cardinal sud în sens retrograd (adică S-V-N-E).

Distanţa zenitală a unui astru este complementul înălţimii z=90-h.



În acest caz ca plan fundamental a fost considerat planul orizontului matematic.

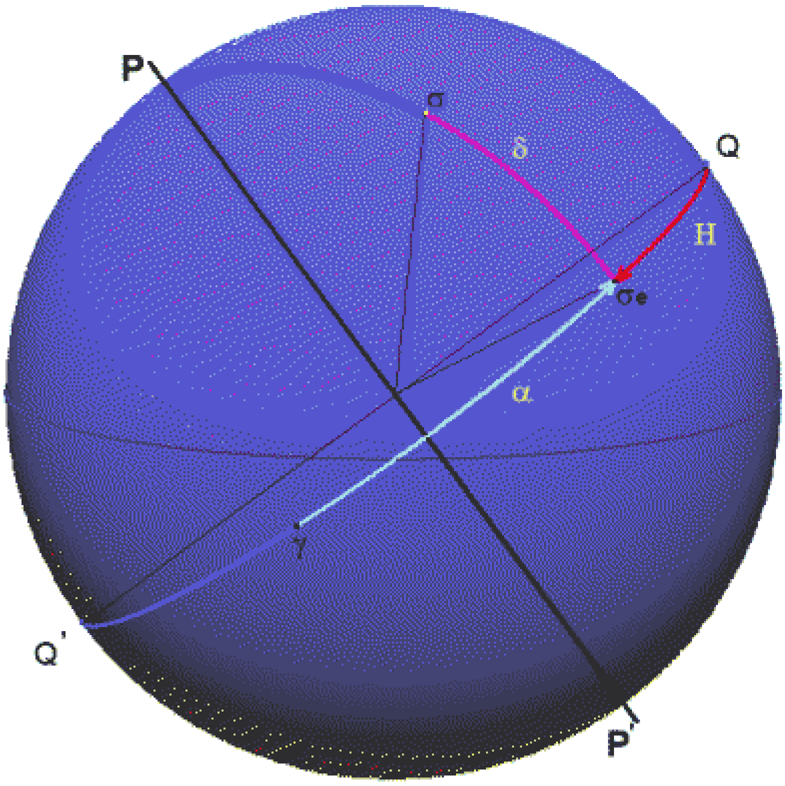
Sistemul coordonatelor orare constă în:

- **declinaţia δ** definită ca fiind unghiul format de raza vectoare a astrului cu planul ecuatorului ceresc ;
- **unghiul orar H,** unghiul format de planul orar al astrului cu planul meridianului locului, măsurat pe ecuatorul ceresc al locului de la culminaţia superioară a ecuatorului Q în sens retrograd (adică Q-V-Q'-E).

În mişcarea diurnă aparentă a unui astru σ declinaţia sa δ rămâne constantă (ea fiind deci o caracteristică a astrului), în timp ce unghiul orar H variază, acesta depinzând şi de locul din care este observat astrul (prin poziţia meridianului ceresc al locului de observare). De aceea, aceste coordonate orare se numesc şi **coordonate semilocale**.

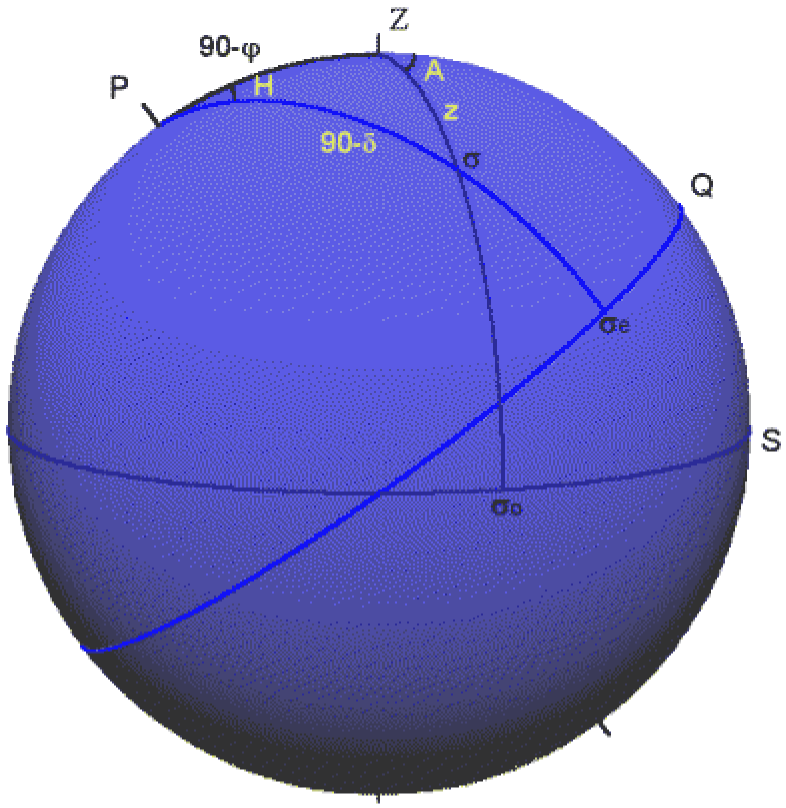
Sistemul coordonatelor ecuatoriale constă din:

- **declinaţie δ,** definită ca mai sus
- **ascensia dreaptă α,** unghiul format de planul orar al astrului cu planul orar al punctului vernal, măsurat pe ecuatorul ceresc al locului de la punctul vernal în sens direct (adică Q-E-Q'-V).



Vom începe cu transformarea coordonatelor ecuatoriale în coordonate orare. Trebuie să avem în vedere faptul că distanţa zenitală a polului ceresc este complementul latitudinii:

$$PZ = 90^0 - \varphi$$



Se observă că pentru a face această transformare este esenţial triunghiul PZσ, numit şi **triunghiul de poziţie** sau **triunghi paralactic** al astrului. Pentru a determina latura Pσ şi unghiul alăturat acesteia σPZ trebuie să aplicăm formulele lui Gauss notând triunghiul PZσ astfel:

- Pσ <-- a
- P <-- B

Vom avea deci A-->Z, B-->P, C--> σ măsurile laturilor şi unghiurilor ce intervin în formulele lui Gauss vor fi:

$$a \to 90^0 - \delta;\ \ b \to z;\ \ c \to 90^0 - \varphi;\ \ A \to 180^0 - A;\ \ B \to H;$$

Aplicând formulele lui Gauss (1) asupra triunghiului de poziţie în aceste condiţii obţinem:

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \cos z\,\sin\varphi - \sin z\,\cos\varphi\,\cos A \\ \cos\delta\,\cos H &= \cos z\,\cos\varphi + \sin z\,\sin\varphi\,\cos A \quad (2) \\ \cos\delta\,\sin H &= \sin z\,\sin A \end{aligned}$$

Astfel, am obţinut coordonatele orare; pentru a determina coordonatele ecuatoriale trebuie să avem în vedere că timpul sideral

$$s = H_{\Upsilon} = H_{\sigma} + \alpha_{\sigma}$$

pentru orice astru σ. Vom avea deci:

$$H = s - \alpha$$

Înlocuind pe H în (2) obţinem:

$$\sin\delta = \cos z\,\sin\varphi - \sin z\,\cos\varphi\cos A \quad (3)$$
$$\cos\delta\,\cos s\,\cos\alpha + \cos\delta\,\sin s \sin\alpha = \cos z\,\cos\varphi + \sin z\,\sin\varphi\cos A \quad (4)$$
$$\cos\delta\,\sin s\,\cos\alpha - \cos\delta\,\cos s\,\sin\alpha = \sin z\,\sin A \quad (5)$$

Din ecuaţiile (3) nu putem calcula direct coordonatele ecuatoriale deoarece în membrii stângi ne intervine timpul sideral s. Pentru a elimina acest inconvenient aplicăm următorul procedeu:

$$(4) * \sin s - (5) * \cos s$$

şi obţinem:

$$\cos\delta\,\sin\alpha = \sin s\,\cos z\,\cos\varphi + \sin s\,\sin z\,\sin\varphi\,\cos A - \cos s\,\sin z\,\sin A \quad (6)$$

iar apoi din:

$$(4) * \cos s + (5) * \sin s$$

rezultă

$$\cos\delta \cos\alpha = \cos s \cos z \cos\varphi + \cos s \sin z \sin\varphi \cos A + \sin s \sin z \sin A \quad (7)$$

Ecuaţiile (3), (6) şi (7) ne dau transformarea coordonatelor orizontale în coordonate ecuatoriale:

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \cos z \sin\varphi - \sin z \cos\varphi \cos A \\ \cos\delta \sin\alpha &= \sin s \cos z \cos\varphi + \sin s \sin z \sin\varphi \cos A - \cos s \sin z \sin A \\ \cos\delta \cos\alpha &= \cos s \cos z \cos\varphi + \cos s \sin z \sin\varphi \cos A + \sin s \sin z \sin A \end{aligned}$$

Sub formă matricială aceste ecuaţii se scriu:

$$\begin{bmatrix} \cos\delta \cos\alpha \\ \cos\delta \sin\alpha \\ \sin\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos s \sin\varphi & \sin s & \cos s \cos\varphi \\ \sin s \sin\varphi & -\cos s & \sin s \cos\varphi \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin z \cos A \\ \sin z \sin A \\ \cos z \end{bmatrix}$$

Transformarea Ecuatoriale --> Orare --> Orizonate

Primul pas constă în transformarea coordonatelor orare în coordonate orizontale. În triunghiul de poziţie PZσ nu cunoaştem în acest caz latura Zσ şi unghiul din Z. Vom nota deci triunghiul de poziţie astfel: A-->P, B-->Z, C--> σ. Rezultă că:

$$a \to z;\ b \to 90^0 - \delta;\ c \to 90^0 - \varphi;\ A \to H;\ B \to 180^0 - A;$$

Din formulele lui Gauss obţinem:

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos H \\ -\cos A \sin z &= \sin\delta \cos\varphi - \cos\delta \sin\varphi \cos H \\ \sin z \sin A &= \cos\delta \sin H \end{aligned}$$

Pentru a face legătura cu coordonatele ecuatoriale folosim din nou timpul sideral:

$$H = s - \alpha$$

şi obţinem:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \sin\delta\ \sin\varphi + \cos\delta\ \cos\varphi\ \cos s\ \cos\alpha + \cos\delta\ \cos\varphi\ \sin s\ \sin\alpha \\
\cos A\ \sin z &= -\sin\delta\ \cos\varphi + \cos\delta\ \sin\varphi\ \cos s\ \cos\alpha + \cos\delta\ \sin\varphi\ \sin s\ \sin\alpha \\
\sin z\ \sin A &= \cos\delta\ \sin s\ \cos\alpha - \cos\delta\ \cos s\ \sin\alpha
\end{aligned}$$

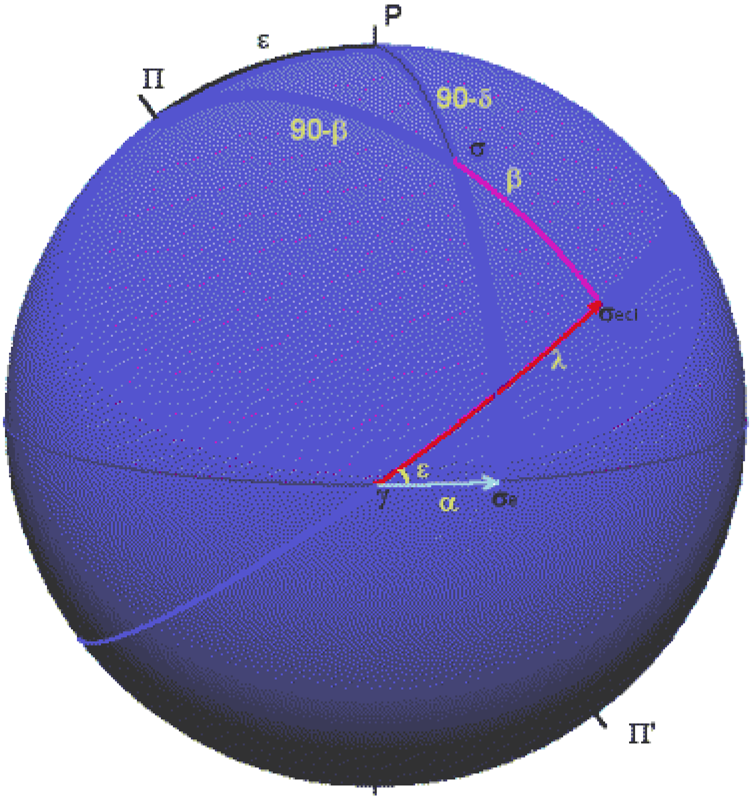
sau sub formă matricilă

$$\begin{bmatrix} \cos A\ \sin z \\ \sin z\ \sin A \\ \cos z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos s\ \sin\varphi & \sin s\ \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \sin s & -\cos s & 0 \\ \cos s\ \cos\varphi & \sin s\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\delta\ \cos\alpha \\ \cos\delta\ \sin\alpha \\ \sin\delta \end{bmatrix}$$

Transformarea Ecuatoriale --> Ecliptice

Coordonatele ecliptice sunt:

- **latitudinea ecliptică** unghiul format de raza vectoare a astrului cu planul eclipticii.
- **longitudinea ecliptică** unhiul format de planul meridian ecliptic al astrului cu planul meridian ecliptic al punctului vernal, măsurat pe ecliptică de la punctul vernal în sens direct.



Triunghiul sferic ce trebuie rezolvat este în acest caz PΠσ. Trebuie determinate latura Πσ şi mărimea unghiului din Π. Vom lua deci A=P, B=Π şi C=σ şi vom avea:

$$a \to 90^0 - \beta;\ \ b \to 90^0 - \delta;\ \ c \to \varepsilon;\ \ A \to 90^0 + \alpha;\ \ B \to 90^0 - \lambda;$$

Formulele lui Gauss se scriu direct:

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \sin\delta\ \cos\varepsilon\ - \cos\delta\ \sin\varepsilon\ \sin\alpha \\ \cos\beta\ \sin\lambda &= \sin\delta\ \sin\varepsilon + \cos\delta\ \cos\varepsilon\ \sin\alpha \\ \cos\beta\ \cos\lambda &= \cos\delta\ \cos\alpha \end{aligned}$$

Punând aceste relaţii sub formă matricială, avem:

$$\begin{bmatrix} \cos\beta\ \cos\lambda \\ \cos\beta\ \sin\lambda \\ \sin\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\delta\ \cos\alpha \\ \cos\delta\ \sin\alpha \\ \sin\delta \end{bmatrix}$$

Transformarea Ecliptice --> Ecuatoriale

În acelaşi triunghi PΠσ alegem A=Π, B=P, C=σ şi deci $a \to 90^0 - \delta;\ b \to 90^0 - \beta;\ c \to \varepsilon;\ A \to 90^0 - \lambda;\ B \to 90^0 + \alpha;$

Din formulele lui Gauss rezultă transformarea:

$$\begin{aligned}\sin\delta &= \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda\\ \cos\delta\sin\alpha &= -\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda\\ \cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda\end{aligned}$$

sau sub formă matricială:

$$\begin{bmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon\\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta\cos\lambda\\ \cos\beta\sin\lambda\\ \sin\beta\end{bmatrix}$$

3.2.2 Timpul în astronomie

- **Timp sideral**

Definiţie. Se numeşte **timp sideral**, în locul de observare, corespunzător poziţiei aparente a punctului vernal γ într-un moment diurn oarecare, unghiul orar al punctului vernal γ, măsurat de-a lungul ecuatorului ceresc, în sens retrograd, de la meridianul superior al locului şi până la cercul orar al punctului vernal γ, exprimat în ore:

$$t_s = H_\gamma,$$

unde H_γ este unghiul orar într-un moment diurn pentru o poziţie aparentă a punctului vernal γ.

Definiţie. Se numeşte **zi siderală** intervalul de timp dintre două treceri consecutive ale punctului vernal γ la meridianul superior al locului (intervalul de timp dintre două culminaţii superioare succesive ale punctului vernal γ).

- **Timpul solar adevărat**

Centrul discului aparent al Soarelui este denumit în astronomie **Soarele adevărat (**T_a**)**.

Într-un moment diurn oarecare, poziţia aparentă a Soarelui adevărat pe sfera cerească este caracterizată de unghiul orar H_a.

Definiţie. Se numeşte **timp solar adevărat**, în locul de observare, corespunzător poziţiei aparente a Soarelui adevărat într-un moment diurn oarecare, unghiul orar al Soarelui adevărat, măsurat de-a lungul ecuatorului ceresc, în sens retrograd, de la culminaţia inferioară a Soarelui adevărat până la cercul orar al Soarelui adevărat, exprimat în ore:

$$t_a = 12^h + H_a$$

Definiţie. Se numeşte **zi solară adevărată** intervalul de timp dintre două treceri consecutive ale Soarelui adevărat la meridianul ceresc superior sau inferior al locului (intervalul de timp dintre două culminaţii de acelaşi fel consecutive).

Observaţie. Într-un acelaşi loc de pe suprafaţa Pământului, durata zilei solare adevărate este variabilă şi drept urmare utilizarea acesteia nu este convenabilă pentru necesităţile vieţii cotidiene.

Ziua solară şi ziua siderală sunt inegale, datorită deosebirilor dintre mişcările aparente diurne şi anuale ale Soarelui şi a punctului vernal γ.

Concluzie. Durata zilei solare adevărate este mai mare decât durata zilei siderale, diferenţa dintre ele fiind variabilă pe parcursul unui an.

- **Timp solar mediu**

Definiţie. Se numeşte **timp solar mediu** (timp mediu t_m), în locul de observare, corespunzător poziţiei aparente a Soarelui adevărat într-un moment diurn oarecare, unghiul orar al Soarelui mediu, măsurat de-a lungul ecuatorului ceresc, în sens retrograd, de la culminaţia inferioară a Soarelui mediu şi până la cercul orar al Soarelui mediu, exprimat în ore, aşa cum rezultă din fig. 7:

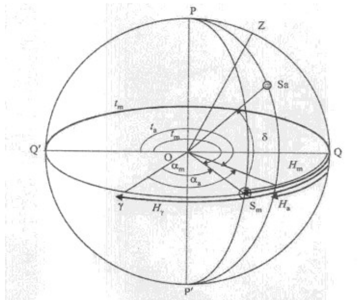


Fig. 7

$$t_m = 12^h + H_m ,$$

unde H_m este unghiul orar al Soarelui mediu.

Definiţie. Se numeşte **zi solară medie** (zi medie) intervalul de timp dintre două treceri (culminaţii) consecutive de acelaşi fel ale Soarelui mediu la meridianul locului.

Pe baza definiţiei Soarelui mediu rezultă că durata zilei medii este egală cu media anuală a duratei zilelor solare adevărate.

- **Timpul universal**

Definiţie. Se numeşte **timp universal** (TU) timpul solar mediu al meridianului de la Greenwich, motiv pentru care el se numeşte şi Greenwich Mean Time (GMT).

Observaţie. Relaţia $t_{m,G} = H_a + 12^h + \eta - L$ (unde L este longitudinea geografică, η este ecuaţia timpului, ea reprezentând timpul care trebuie adăugat algebric la timpul solar adevărat pentru a obţine timpul mediu, iar H_a este unghiul orar al Soarelui adevărat) permite determinarea timpului mediu de la Greenwich, în orice moment, din orice loc de pe suprafaţa

Pământului. În particular, dacă determinarea o face chiar observatorul de la Greenwich (fig. 8) atunci, în relaţia anterioară, $\begin{matrix} L = L_G = 0 \\ H_a = H_{a,G} \end{matrix}$,

Astfel încât

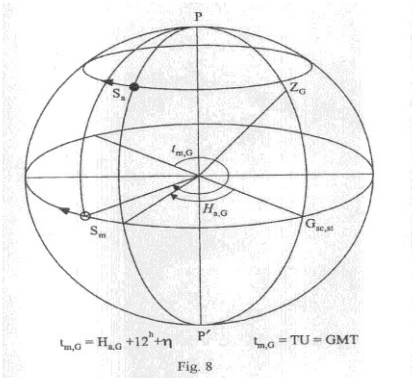


Fig. 8

$$t_{m,G} = H_{a,G} + 12^h + \eta .$$

- **Timpul legal**

Definiţie. Se numeşte **timp legal** al unui fus orar f (timpul fusului orar f), timpul solar mediu al meridianului principal al fusului orar f, aşa cum indică fig. 9, adică

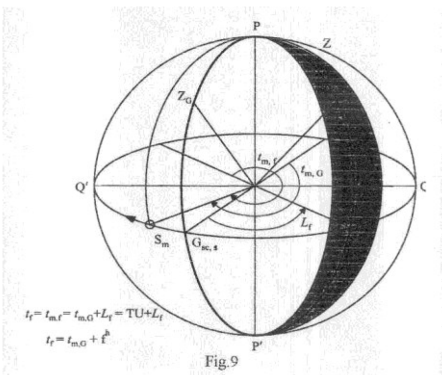


Fig.9

$$t_f = t_{m,f} = t_{m,G} + L_f = TU + L_f ,$$

unde L_f este longitudinea geografică a meridianului principal al fusului orar f, exprimată în ore

$$L_f = f^h;$$
$$t_f = TU + f^h = t_0 + f^h = t_{m,G} + f^h;$$
$$t_f = H_a + \eta - L + 12^h + f^h ,$$

unde L este longitudinea geografică a unui loc oarecare din interiorul fusului orar f, iar H_a este unghiul orar al Soarelui adevărat determinat în acel moment în locul cu longitudinea geografică L din interiorul fusului orar considerat.

Bibliografie

1. Chis Gh. Astronomie, manual cl. a XII-a, Ed. Didactica si Pedagogica, Bucuresti, 1992
2. Ghermănescu, M., *Aplicațiile Trigonometriei*, Editura Tehnică, București 1963
3. Nadolschi, V. Astronomie generala, Ed. Didactica si Pedagogoca, Bucuresti, 1963
4. Pal A., Ureche V. Astronomie, Ed. Didactica si Pedagogoca, Bucuresti, 1983
5. Pal A., Pop V., Ureche V. Astronomie, Culegere de probleme, Presa Universitara Clujeana, 1998
6. Petrescu G. Astronomie elementara, Ed. Stiintifica Bucuresti 1962
7. Pop V., Pop D. Trigonometrie plana si trigonometrie sferica, Presa Universitara Clujeana, 2003
8. Sandu M. Astronomie, Ed. Didactica, Bucuresti 2003
9. F. Turtoiu, trigonometrie. Exercitii si probleme, Editura Stiintifica, Bucuresti 1995
10. Ureche V. Universul, vol. I Astronomie, Ed. Dacia Cluj-Napoca 1982
11. Ureche V. Universul, vol. II Astrofizica, Ed. Dacia Cluj-Napoca 1987