

Analiză Matematică — Notițe de curs

(câteva noțiuni elementare pentru viitorii ingineri)

Conf. Univ. Dr. MARIA-MAGDALENA BOUREANU

Cuprins

Capitolul 1. ȘIRURI. CONVERGENȚĂ ÎN $\mathbb{R}^N$	5
Capitolul 2. SERII	9
1. Serii de numere reale. Criterii de convergență	9
2. Serii Taylor. Dezvoltări în serie	21
Capitolul 3. LIMITE DE FUNCȚII. CONTINUITATE	31
Capitolul 4. DIFERENȚIABILITATE	39
1. Diferențiabilitatea funcțiilor de variabilă reală	42
1.1. Funcții reale de variabilă reală	42
1.2. Funcții vectoriale de variabilă reală	43
2. Diferențiabilitatea funcțiilor de variabilă vectorială	44
2.1. Produsul scalar Euclidian	44
2.2. Funcții reale de variabilă vectorială. Derivate parțiale	45
2.3. Funcții vectoriale de variabilă vectorială	49
2.4. Divergență. Rotor. Derivata după o direcție dată	52
3. Derivate parțiale de ordinul 2. Aplicații	56
3.1. Puncte de extrem local	58
Capitolul 5. Variantă model de examen parțial	61
Capitolul 6. INTEGRABILITATE	63
1. Integrale Riemann pe dreapta reală. Integrale improprii	63
2. Integrale simple cu parametru	70
3. Integrale multiple	74
3.1. Calculul integralelor duble	76
3.2. Calculul integralelor triple	80
4. Integrala curbilinie de primul tip (de speța întâi)	82
5. Integrala de suprafață de primul tip (de speța întâi)	85

CAPITOLUL 1

ȘIRURI. CONVERGENȚĂ ÎN $\mathbb{R}^N$

Noțiunea de șir convergent de numere reale este cunoscută din liceu.

DEFINIȚIA 1. *Spunem că $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ este convergent la $x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N_\varepsilon$, să avem $|x_n - x| < \varepsilon$.*

Pentru a putea discuta despre convergența unui șir într-o altfel de mulțime, mai generală, introducem noțiunea de distanță.

DEFINIȚIA 2. *Fie M o mulțime oarecare. Funcția $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ se numește distanță (metrică) dacă și numai dacă au loc următoarele proprietăți:*

- (d1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in M; \quad d(x, x) = 0, \forall x \in M.$
- (d2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M.$
- (d3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in M.$

În acest caz spunem că (M, d) este spațiu metric.

Exemple:

1. pentru $M = \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|.$
2. pentru $M = \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2),$ iar

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

3. pentru $M = \mathbb{R}^3, x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3),$ iar

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

OBSERVAȚIE. *Toate acestea sunt cazuri particulare ale cazului general în care $M = \mathbb{R}^N$, deci $x, y \in M$ sunt de forma $x = (x_1, x_2, \dots, x_N),$
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_N),$ iar*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2}.$$

*Metrica d din aceste exemple se numește **metrică (distanță) Euclidiană.***

Exemple:

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = (1, 2)$, $y = (3, 8)$. Atunci distanța Euclidiană de la x la y este $d(x, y) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$.
2. Fie $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = (0, -3, 2)$, $y = (5, 1, 4)$. Atunci distanța Euclidiană de la x la y este $d(x, y) = \sqrt{(0-5)^2 + (-3-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{25+16+4} = 3\sqrt{5}$.

Există și alte tipuri de distanțe, de exemplu, oricărei mulțimi de elemente M i se poate asocia așa numita metrică trivială,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = y \\ 1, & \text{dacă } x \neq y. \end{cases}$$

Însă noi suntem interesați doar de spațiile $\mathbb{R}^N$ (de obicei $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$) înzestrate cu metrica Euclidiană.

Exercițiu: Arătați că metrica Euclidiană și metrica trivială satisfac proprietățile (d1)-(d3) descrise în Definiția 2.

Revenind la discuția inițială, cea referitoare la convergența șirurilor, putem introduce următoarea definiție.

DEFINIȚIA 3. Spunem că $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ este convergent la $x \in \mathbb{R}^N$ dacă și numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N_\varepsilon$, să avem $d(x_n, x) < \varepsilon$.

PROPRIETATEA 1. Proprietatea de convergență din $\mathbb{R}^N$ poate fi gândită pe componente, adică, pentru orice șir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ cu $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N)$, $n \geq 1$, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^1, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^N \right).$$

Demonstrație:

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Atunci

$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x_n^1 - x^1)^2 + (x_n^2 - x^2)^2 + \dots + (x_n^N - x^N)^2} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_n^1 - x^1)^2 + (x_n^2 - x^2)^2 + \dots + (x_n^N - x^N)^2 < \varepsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x_n^1 - x^1| < \varepsilon; \\ |x_n^2 - x^2| < \varepsilon; \\ \vdots \\ |x_n^N - x^N| < \varepsilon. \end{array} \right. \quad (1)$$

Reciproc, dacă (1) are loc, atunci parcurgând drumul invers deducem că $d(x_n, x) < \varepsilon\sqrt{N}$. $\square$

Exemplu: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{-3n+4}{5n+9} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+4}{5n+9} \right) = \left(0, -\frac{3}{5} \right)$.

O altă modalitate de a-l privi pe $\mathbb{R}^N$ este ca spațiu vectorial normat, dat fiind că $(\mathbb{R}^N, +, \cdot)$ are structură de spațiu vectorial.

DEFINIȚIA 4. Fie $(X, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$. Aplicația $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **normă** dacă și numai dacă au loc proprietățile

- (n1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in X; \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in M.$
- (n2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X.$
- (n3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X.$

În acest caz spunem că $(X, \|\cdot\|)$ este **spațiu normat**.

Pe $(\mathbb{R}^N, +, \cdot)$ definim **norma Euclidiană** astfel:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}, \quad \text{pentru } x = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Exemplu: Fie $x \in \mathbb{R}^3, x = (1, 2, -5)$. Atunci $\|x\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$.

Exercițiu: Arătați că norma Euclidiană satisface proprietățile (n1)-(n3) descrise în Definiția 4.

De remarcat faptul că orice spațiu normat este spațiu metric deoarece putem defini $d(x, y) = \|x - y\|$. Reciproc nu, deoarece pentru a fi spațiu normat trebuie să fie în primul rând spațiu vectorial, în timp ce pentru a avea un spațiu metric nu avem nicio restricție de acest tip, orice mulțime poate fi spațiu metric (dacă este înzestrată cu o distanță).

Rescriem acum definiția convergenței în $\mathbb{R}^N$ cu ajutorul noțiunii de normă.

DEFINIȚIA 5. Spunem că $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ este **convergent** la $x \in \mathbb{R}^N$ dacă și numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N_\varepsilon$, să avem $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

OBSERVAȚIE. *La fel cum s-a învățat în liceu, dacă un șir nu este convergent, atunci el se numește șir divergent.*

Exerciții pentru fixarea noțiunilor nou introduse

1. Fie $x, y, z, v \in \mathbb{R}^2$, $x = (-1, 2)$, $y = (0, 3)$, $z = (4, 2)$, $v = (-3, -2)$. Determinați: $\|x\|$, $\|y\|$, $\|z\|$, $\|v\|$, $\|x - y\|$, $\|y - x\|$, $\|x - z\|$, $d(x, z)$, $d(x, v)$, $d(y, z)$, $d(z, y)$, $d(v, z)$, $d(y, v)$.
2. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, $x = (-1, 0, 2)$, $y = (0, -3, 1)$, $z = (-1, 1, 2)$. Determinați: $\|x\|$, $\|y\|$, $\|z\|$, $\|x - y\|$, $d(x, z)$, $d(y, z)$.
3. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, unde:

$$a) \ x_n = \left(\frac{n^2 + 5n - 4}{2n^2 + 7n + 111}, \frac{n^2 + 59}{-8n^3 + 6n^2 + 8n + 8} \right);$$

$$b) \ x_n = \left(\frac{-8n^5 + 5n^3 - 41}{n^6 + n + 1}, \frac{-3n^4 - 9}{-6n^4 + 8n^2}, \frac{-n^3 + n^2 - 3}{n^3 + 2n + 4} \right);$$

$$c) \ x_n = \left(\frac{(-1)^n}{n^6 + n^3 - n^2}, \frac{2n^2 + 12n}{4n^2 - 10n - 13} \right);$$

$$d) \ x_n = \left(\frac{\cos(n^2 + 3n)}{n^2 - n + 2}, \frac{-n^2 + n - 19}{n^4 + n^2 + 2}, \frac{n - 1}{7n + 2} \right);$$

$$e) \ x_n = \left(\frac{\sin(25n - 14)}{-4n^3 + n^2 - 5n}, n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right).$$

CAPITOLUL 2

SERII

1. Serii de numere reale. Criterii de convergență

Fie $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$. Acestui șir i se poate asocia:

$$S_1 = x_1$$

$$S_2 = x_1 + x_2$$

$$S_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

.

.

.

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

$$S_{n+1} = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + x_{n+1}$$

.

.

.

DEFINIȚIA 6. Fie $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$. Șirul $(S_n)_{n \geq 1}$ definit prin $S = \sum_{k=1}^n x_k$ poartă numele de șirul sumelor parțiale asociate lui $(x_n)_{n \geq 1}$, iar perechea $(x_n, S_n)_{n \geq 1}$ poartă numele de serie generată de șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ și se notează de obicei cu $\sum_{n \geq 1} x_n$.

OBSERVAȚIE. Seria trebuie gândită ca o sumă infinită de termeni,

$$\sum_{n \geq 1} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \dots$$

De asemenea, putem avea $\sum_{n \geq 0} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \dots$ sau

$\sum_{n \geq k} x_n = x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n + \dots$. De fapt forma generală este $\sum_{n \geq k} x_n$, cu $k \in \mathbb{N}$ arbitrar fixat, însă pentru simplitate vom prezenta toate

proprietățile seriilor folosind notația $\sum_{n \geq 1} x_n$, ținând în minte faptul că acestea sunt valide pentru $\sum_{n \geq k} x_n$.

Operații cu serii de numere reale:

1. Adunarea. Fie $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$. Atunci

$$\sum_{n \geq 1} x_n + \sum_{n \geq 1} y_n = \sum_{n \geq 1} (x_n + y_n).$$

2. Înmulțirea cu scalari. Fie $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\alpha \sum_{n \geq 1} x_n = \sum_{n \geq 1} (\alpha x_n).$$

Preocuparea pentru sume infinite este cunoscută încă din Grecia Antică, cu aproximativ 2500 de ani în urmă, de când datează paradoxul lui Zenon (490-430 î.e.n.) Astfel se pune problema parcurgerii unei distanțe d dintre două puncte A și B în felul următor: prima dată se parcurge jumătate din distanța d , apoi jumătate din distanța rămasă, apoi jumătate din distanța rămasă, apoi jumătate din distanța rămasă... și tot așa, ajungând la

$$d = \frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \frac{d}{8} + \frac{d}{16} + \cdots = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{d}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n \right).$$

DEFINIȚIA 7. Spunem că o serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă există $S \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. În acest caz spunem că seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ are suma S , notăm $S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ și înțelegem $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$. Dacă $\sum_{n \geq 1} x_n$ nu este serie convergentă, atunci ea se numește serie divergentă.

Exemple:

1. Din discuția de mai sus, se observă că $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{d}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$ este o serie convergentă de sumă d . Folosind operația de înmulțire cu scalari a seriilor pentru a împărți prin d , obținem că suma seriei $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ este 1. Această constatare intuitivă va putea fi demonstrată cu

ajutorul argumentului pe care îl vom folosi puțin mai jos, atunci când vom discuta despre seriile geometrice.

2. Seria $\sum_{n \geq 4} \frac{1}{n^2 - n}$ este convergentă și are suma $\frac{1}{3}$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4}^n \frac{1}{k^2 - k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4}^n \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Am văzut că fiecărui șir i se poate asocia șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 1}$. Și reciproc este valabil: dacă știm sumele parțiale, putem determina termenii șirului procedând astfel

$$\begin{aligned} x_1 &= S_1 \\ x_2 &= S_2 - S_1 \\ x_3 &= S_3 - S_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_n &= S_n - S_{n-1} \\ x_{n+1} &= S_{n+1} - S_n \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bazându-ne pe această observație putem formula următorul rezultat.

TEOREMA 1. (*Criteriul necesar de convergență*) Dacă $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă, atunci $x_n \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$.

Demonstrație:

Demonstrația este imediată. Fie $(S_n)_{n \geq 1}$ șirul sumelor parțiale asociate lui

$(x_n)_{n \geq 1}$ și S suma acestei serii convergente. Cum știm că $x_n = S_n - S_{n-1}$, trecând la limită deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = S - S = 0.$$

□

OBSERVAȚIE. *Reciproc nu este adevărat, sunt serii $\sum_{n \geq 1} x_n$ care sunt divergente chiar dacă $x_n \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$, cum ar fi $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ (seria armonică), la care șirul sumelor parțiale este divergent.*

CONSECINȚA 1. *Dacă $x_n \not\rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$, atunci $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.*

Aplicații: Arătați că următoarele serii sunt divergente:

- a) $\sum_{n \geq 1} \frac{n+4}{2n-5}$;
- b) $\sum_{n \geq 1} \frac{2n^2-3}{n+5}$;
- c) $\sum_{n \geq 1} 4^n$.

Seria care apare în cel de-al treilea exercițiu propus face parte dintr-o categorie mai largă de serii de numere reale pe care o tratăm în cele ce urmează.

Serii geometrice

DEFINIȚIA 8. *Orice serie de forma $\sum_{n \geq 0} q^n$, unde q este un număr real, se numește serie geometrică.*

Suntem interesați de convergența seriilor geometrice. Distingem următoarele două situații: $|q| \geq 1$ și $|q| < 1$. Dacă $|q| \geq 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n \neq 0$, deci, conform Consecinței 1, deducem că seria $\sum_{n \geq 0} q^n$ este divergentă. Rămâne de investigat cazul în care $|q| < 1$. (Subliniem faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ nu

garantează convergența seriei). Calculăm limita șirului sumelor parțiale.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1}{1 - q} \quad \text{pentru } q \in (-1, 1).\end{aligned}$$

Prin urmare pentru $|q| < 1$ seria $\sum_{n \geq 0} q^n$ este convergentă și are suma $S = \frac{1}{1 - q}$.

Aplicații: Aflați suma următoarelor serii geometrice:

$$a) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n;$$

$$b) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{5}\right)^n;$$

$$c) \sum_{n \geq 0} \frac{(-5)^n}{8^n}.$$

Câteva proprietăți legate de convergență ale seriilor

PROPRIETATEA 2. Dacă două serii $\sum_{n \geq 1} x_n$ și $\sum_{n \geq 1} y_n$ sunt convergente, atunci și suma lor, $\sum_{n \geq 1} (x_n + y_n)$, converge. În plus, dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S_1$ și $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = S_2$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = S_1 + S_2$.

Exercițiu: Arătați că seria $\sum_{n \geq 0} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \right)$ este convergentă și calculați-i suma.

Reciproca nu este adevărată, adică dacă suma a două serii este convergentă nu înseamnă că și cele două serii sunt convergente. De asemenea, dacă două serii sunt divergente, nu înseamnă că și suma lor este divergentă.

Exemplu:
$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n \geq 0} 5^n + \sum_{n \geq 0} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 5^n \right).$$

PROPRIETATEA 3. *Proprietatea de convergență a seriilor se păstrează la înmulțirea cu scalari. Adică, dacă $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă, atunci și*

$\sum_{n \geq 1} (\alpha x_n)$ converge, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$. În plus, dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n) = \alpha S$. Pe de altă parte, dacă $\sum_{n \geq 1} y_n$ este divergentă, atunci și $\sum_{n \geq 1} (\alpha y_n)$ diverge, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercițiu: Studiați convergența seriei $\sum_{n \geq 0} (8 \cdot 5^n)$.

PROPRIETATEA 4. *Dacă într-o serie se schimbă ordinea unui număr finit de termeni, nu se schimbă convergența seriei, iar dacă seria a fost convergentă, suma rămâne aceeași.*

PROPRIETATEA 5. *Dacă într-o serie adăugăm sau scoatem un număr finit de termeni, nu se schimbă convergența seriei, dar, în cazul în care seria inițială a fost convergentă, suma se va schimba.*

Exemplu: Calculați suma seriei $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Rezolvare: Observăm că avem o serie geometrică cu $q = \frac{4}{9}$. Dat fiind că $|q| < 1$, deducem că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}.$$

În același timp,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \left(\frac{4}{9}\right)^0 + \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n,$$

deci

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{9}{5} - 1 - \frac{4}{9} = \frac{16}{45}.$$

Alte criterii de convergență a seriilor

TEOREMA 2. (*Criteriul lui Leibniz*) Fie $(x_n)_n$ un șir descrescător de numere pozitive care converge la 0. Atunci seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^n x_n$ este convergentă.

OBSERVAȚIE. Seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^n x_n$ se numește serie alternată deoarece oricare doi termeni consecutivi ai săi au semne diferite.

De asemenea este util să reamintim câteva proprietăți ale șirurilor de numere reale.

TEOREMA 3. (*Teorema lui Weierstrass*) Orice șir monoton și mărginit este convergent. În particular, orice șir mărginit inferior care descrește converge, iar orice șir mărginit superior care crește converge.

În plus, se mai știe din liceu că dacă un șir este pozitiv, limita sa, dacă există, va fi mai mare sau egală cu 0. Prin urmare, pentru a îndeplini condițiile stipulate de Criteriul lui Leibniz este suficient să arătăm că șirul $(x_n)_n$ este pozitiv și descrescător.

Aplicație: Arătați că seria $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă.

TEOREMA 4. (*Criteriul lui Cauchy pentru serii*) Seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N_\varepsilon$ și oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right| < \varepsilon.$$

CONSECINȚA 2. Fie seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Dacă $\alpha \leq 1$, seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă.

2. Dacă $\alpha > 1$, seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă.

Exemple:

1. Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă.
2. Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

OBSERVAȚIE. Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ se numește serie armonică, iar dacă $\alpha \neq 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ se numește serie armonică generalizată.

TEOREMA 5. (**Criteriul comparației**) Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$ și $\sum_{n \geq 1} y_n$ două serii de numere pozitive cu proprietatea că există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N$, $x_n \leq y_n$.

- (i) Dacă seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum_{n \geq 1} y_n$ este divergentă.
- (ii) Dacă seria $\sum_{n \geq 1} y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă.

Exemplu: Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 14}$ este convergentă deoarece $\frac{1}{n^2 + 14} < \frac{1}{n^2}$, oricare ar fi $n \geq 1$, iar seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

TEOREMA 6. (**Criteriul rădăcinii sau Criteriul radicalului**) Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$ o serie de numere pozitive. Dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$, atunci:

- (i) Dacă $l < 1$ seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă.
- (ii) Dacă $l > 1$ seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

OBSERVAȚIE. Dacă $l = 1$ nu se poate spune nimic despre convergența seriei $\sum_{n \geq 1} x_n$ cu ajutorul acestui criteriu.

Exemplu: Seria $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{8n^2 - 5n + 3}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n$ este divergentă.

Rezolvare: Se observă că pentru orice $n \geq 1$, $\frac{8n^2 - 5n + 3}{2n^2 + 3n + 1} > 0$, iar

$$x_n = \left(\frac{8n^2 - 5n + 3}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - 5n + 3}{2n^2 + 3n + 1} = \frac{4}{2} = 2 > 1,$$

de unde deducem că $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{8n^2 - 5n + 3}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n$ este serie divergentă.

TEOREMA 7. (Criteriul raportului) Fie $\sum_{n \geq 1} x_n$ o serie de numere strict pozitive. Dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$, atunci:

- (i) Dacă $l < 1$ seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă.
- (ii) Dacă $l > 1$ seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

OBSERVAȚIE. Dacă $l = 1$ nu se poate spune nimic despre convergența seriei $\sum_{n \geq 1} x_n$ cu ajutorul acestui criteriu.

Exemplu: Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ este convergentă.

Rezolvare: Reamintim că $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n-1) \cdot n$.

$$x_n = \frac{1}{n!}, \text{ deci } x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}, \text{ unde, conform definiției de mai sus,}$$

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n \cdot (n+1). \text{ Prin urmare}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

de unde rezultă că $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ este serie convergentă.

Exerciții pentru fixarea noțiunilor nou introduse

1. Arătați că seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 2n}$ este convergentă și calculați-i suma.

2. Folosind consecința criteriului necesar de convergență, arătați că următoarele serii sunt divergente:

a) $\sum_{n \geq 1} (-2n^5 + 16n^4 - 5n + 3);$

b) $\sum_{n \geq 1} \frac{-n^2 - n + 12}{n^2 + n - 1};$

c) $\sum_{n \geq 2} \frac{2n^3 - n^2}{5n^2 + 9n - 11};$

d) $\sum_{n \geq 0} \frac{7n^8 + 5n^6 - 4n^4 - 3n^2}{6n + 15};$

e) $\sum_{n \geq 5} 7^n.$

3. Folosind proprietățile seriilor geometrice, stabiliți convergența seriilor și determinați suma seriilor convergente:

a) $\sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{6}\right)^n;$

b) $\sum_{n \geq 0} \frac{7^n}{2^n};$

c) $\sum_{n \geq 1} \frac{4^n}{(-5)^n};$

d) $\sum_{n \geq 3} \frac{4^{n+1}}{5^n};$

e) $\sum_{n \geq 2} \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}};$

f) $\sum_{n \geq 4} \frac{7^{n-2}}{6^n};$

$$g) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{(-2)^{2n+1}}{5^n} + \frac{5^n}{6^{n+2}} \right).$$

4. Folosind criteriul lui Leibniz, arătați că următoarele serii sunt convergente:

$$a) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+5};$$

$$b) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n^4+2};$$

$$c) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2^n};$$

$$d) \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n(n+2)}{n};$$

$$e) \sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^{n+1}n}{-5^n}.$$

5. Folosind consecința criteriului lui Cauchy, precizați care dintre următoarele serii sunt convergente:

$$a) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^5};$$

$$b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$c) \sum_{n \geq 2} \frac{4}{n^3};$$

$$d) \sum_{n \geq 6} \sqrt{\frac{5}{2n}};$$

$$e) \sum_{n \geq 1} \frac{-3}{\sqrt[3]{4n^4}}.$$

6. Folosind criteriul comparației, precizați care dintre următoarele serii sunt convergente:

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+5};$$

$$\begin{aligned}
b) & \sum_{n \geq 1} \frac{3}{n^4 + 15}; \\
c) & \sum_{n \geq 2} \frac{6}{5n^3 - 8}; \\
d) & \sum_{n \geq 4} \frac{5}{2\sqrt{n-2}}; \\
e) & \sum_{n \geq 3} \frac{9}{\sqrt[3]{4n^2 + 5n - 3}}; \\
f) & \sum_{n \geq 2} \frac{2n + 1}{5n^4 + 3n^2}.
\end{aligned}$$

7. Folosind criteriul radicalului, precizați care dintre următoarele serii sunt convergente:

$$\begin{aligned}
a) & \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2n^2 - n + 3}{3n + 1} \right)^n; \\
b) & \sum_{n \geq 3} \left(\frac{21n^2 + 6}{28n^2 - 7n + 11} \right)^n; \\
c) & \sum_{n \geq 20} \left(\frac{n - 16}{n^2 - n + 9} \right)^n; \\
d) & \sum_{n \geq 4} \left(\frac{3n + 5}{2n + 3} \right)^{4n+5}; \\
e) & \sum_{n \geq 1} \left(\frac{5n - 10}{n^4 + 3n + 1} \right)^{2n-1}; \\
f) & \sum_{n \geq 2} \cos^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right).
\end{aligned}$$

8. Folosind criteriul raportului, precizați care dintre următoarele serii sunt convergente:

$$\begin{aligned}
a) & \sum_{n \geq 0} \frac{n}{(n + 5)!}; \\
b) & \sum_{n \geq 2} \frac{4^n}{n^4};
\end{aligned}$$

$$c) \sum_{n \geq 3} \frac{2n - 5}{6^n};$$

$$d) \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{6^n};$$

$$e) \sum_{n \geq 1} \frac{5^n}{(n-1)!}.$$

2. Serii Taylor. Dezvoltări în serie

DEFINIȚIA 9. Fie $(a_n)_n$ un șir de numere reale și $n \in \mathbb{N}$. Se numește serie Taylor centrată în x_0 cu coeficienții a_n seria de funcții $\sum_{n \geq 0} f_n$, unde $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. O serie Taylor centrată în 0 se numește serie de puteri.

Exemplu: seria geometrică este o serie de puteri, adică o serie Taylor centrată în origine, deoarece avem $f_n(x) = x^n$, deci $x_0 = 0$, iar $a_n = 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Șirul sumelor parțiale $(S_n)_n$ se definește similar celui de la seriile numerice, adică

$$S_n = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \sum_{k=0}^n f_k,$$

iar suma seriei reprezintă limita când $n \rightarrow \infty$ a acestui șir, adică

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right).$$

Interesul nostru în cele ce urmează este să stabilim mulțimea de valori ale lui x pentru care este convergentă o serie Taylor. Iar apoi, pornind de la o funcție care reprezintă suma unei serii Taylor, să putem scrie seria Taylor asociată ei. Această procedură se numește **dezvoltare în serie Taylor**, iar funcția de la care pornim se numește **funcție dezvoltabilă în serie Taylor**. De exemplu, gândindu-ne la suma seriei geometrice, putem spune că funcția

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul originii, iar dezvoltarea ei în serie Taylor este

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Pentru a da însă în mod riguros definiția unei funcții dezvoltabile în serie Taylor, este nevoie ca mai întâi să introducem alte câteva noțiuni.

DEFINIȚIA 10. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Elementul $x \in \mathbb{R}$ se numește punct de acumulare pentru $(x_n)_n$ dacă și numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, există $n_k \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$.

OBSERVAȚIE. Definiția anterioară ne spune că $x \in \mathbb{R}$ este punct de acumulare pentru $(x_n)_n$ dacă și numai dacă există un subșir al lui $(x_n)_n$ care converge la x .

Exemplu: Șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n$ are două subșiruri, date de paritatea lui n :

$$(x_{2m})_m \text{ cu } x_{2m} = (-1)^{2m} = 1 \rightarrow 1 \text{ când } n \rightarrow \infty;$$

$$(x_{2m+1})_m \text{ cu } x_{2m+1} = (-1)^{2m+1} = -1 \rightarrow -1 \text{ când } n \rightarrow \infty.$$

Deducem așadar că șirul $(x_n)_n$ are două puncte de acumulare: 1 și -1.

DEFINIȚIA 11. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și notăm cu γ mulțimea punctelor sale de acumulare. Atunci infimumul acestei mulțimi, $\inf \gamma$, se numește limita inferioară a lui $(x_n)_n$, în timp ce supremumul acestei mulțimi, $\sup \gamma$ se numește limita superioară a lui $(x_n)_n$.

Notății:

$$\inf \gamma = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n;$$

$$\sup \gamma = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Reamintim că infimumul unei mulțimi A reprezintă cel mai mare minorant al acestei mulțimi, unde α este minorant dacă și numai dacă $\alpha \leq a, \forall a \in A$. Iar supremumul unei mulțimi A reprezintă cel mai mic majorant al acestei mulțimi, unde β este majorant dacă și numai dacă $\beta \geq a, \forall a \in A$.

Exemple:

1. Dacă $A = (-1, 8)$, $\inf A = -1$ iar $\sup A = 8$.

2. Dacă șirul $(x_n)_n$ este definit astfel

$$(x_n)_n : 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3, \dots$$

atunci $\gamma = \{1, 2, 3\}$, iar $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.

OBSERVAȚIE. Dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, atunci

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Revenind cu discuția la seriile Taylor, introducem următoarea definiție.

DEFINIȚIA 12. Fie $\sum_{n \geq 0} f_n$ o serie Taylor centrată în x_0 de coeficienți a_n , $n \in \mathbb{N}$. Prin raza de convergență a acestei serii înțelegem $r \geq 0$ dat de

$$r = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{dacă } 0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ \infty, & \text{dacă } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Exemplu: Raza de convergență a seriei geometrice $\sum_{n \geq 0} x^n$ este $r = 1$, deoarece $a_n = 1$ implică, evident, că

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

La exerciții ceva mai complicate, următoarea observație poate fi utilă.

OBSERVAȚIE. Dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, atunci

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Exemplu: Pentru seria $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$, este mai ușor să calculăm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

și, luând în considerație observația anterioară, obținem că raza acestei serii este $r = \infty$.

TEOREMA 8. Fie $\sum_{n \geq 0} f_n$ o serie Taylor centrată în x_0 de coeficienți a_n , $n \in \mathbb{N}$, cu raza de convergență $r \geq 0$.

(i) Dacă $r = 0$, singurul punct în care seria $\sum_{n \geq 0} f_n$ este convergentă este $x = x_0$.

(ii) Dacă $r > 0$, atunci:

a) seria $\sum_{n \geq 0} f_n$ este convergentă pentru $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ și divergentă pentru $x \in (-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, \infty)$.

b) suma seriei admite derivate de orice ordin pe intervalul $(x_0 - r, x_0 + r)$ și aceste derivate se pot calcula prin derivarea termen cu termen a seriei inițiale, iar raza de convergență a seriilor nu se schimbă după derivare. Mai exact, seria derivată

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n \geq 0} (a_n (x - x_0)^n)' = \sum_{n \geq 0} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

are raza de convergență tot r și suma S' .

c) seria poate fi integrată termen cu termen pe orice interval $[a, b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$.

OBSERVAȚIE. Teorema 8 furnizează informații referitoare la convergența seriei pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0 \pm r\}$. Cazul în care $x \in \{x_0 \pm r\}$ se studiază separat.

Exemplu: Dat fiind că raza de convergență a seriei geometrice este $r = 1$, deducem, conform acestui rezultat teoretic, că

$$\sum_{n \geq 0} x^n \text{ este convergentă pentru } x \in (-1, 1),$$

și divergentă pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

ceea ce coincide cu ceea ce am aflat și noi în secțiunea anterioară, atunci când am investigat convergența seriei geometrice. Pentru punctele $x = \pm 1$ se studiază convergența seriilor ce se obțin prin înlocuirea lui x cu aceste două valori, și constatăm că seriile $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ și $\sum_{n \geq 0} 1^n$ sunt diver-

gente, deci $\sum_{n \geq 0} x^n$ este divergentă pentru $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

În plus, Teorema 8, ne furnizează și alte informații, cum ar fi faptul că, prin derivare termen cu termen, obținem că seria

$$\left(\sum_{n \geq 0} x^n \right)' = \sum_{n \geq 0} nx^{n-1}$$

este convergentă pe $(-1,1)$ și are suma

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

OBSERVAȚIE. Teorema 8 furnizează informații referitoare la convergența seriei pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0 \pm r\}$. Cazul în care $x \in \{x_0 \pm r\}$ s studiază separat.

Per ansamblu, Teorema 8 ne arată cum, pornind de la coeficienții a_n , $n \in \mathbb{N}$, și de la punctul fixat $x_0 \in \mathbb{R}$, deducem proprietăți referitoare la suma seriei. Suntem interesați de drumul invers care, pornind de la o funcție ce reprezintă suma unei serii Taylor, ne arată cum ajungem la această serie Taylor.

DEFINIȚIA 13. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Funcția f se numește dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului $x_0 \in I$, dacă există un interval $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$, unde $r > 0$, și o serie $\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$

convergentă pe $(x_0 - r, x_0 + r)$ astfel încât $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ pentru orice $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

În mod firesc, ne întrebăm când este f dezvoltabilă în serie Taylor în jurul unui punct și cum am putea determina coeficienții a_n , $n \in \mathbb{N}$. Un răspuns parțial este furnizat de teorema următoare.

TEOREMA 9. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului $x_0 \in I$, atunci f admite derivate de orice ordin în x_0 și pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

OBSERVAȚIE. O funcție care admite derivate de orice ordin în x_0 se numește indefinit derivabilă în x_0 .

Reciproca Teoremei 9 nu este valabilă, în sensul că dacă f este indefinit derivabilă în x_0 nu înseamnă neapărat că f este dezvoltabilă în serie în jurul lui x_0 . De fapt, rolul Teoremei 9 este să ne indice când f **nu** este dezvoltabilă în serie în jurul lui x_0 , și anume, atunci când nu admite derivate de orice ordin în x_0 .

Aplicație: Fie $f : (6, 10) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 8|$. Arătați că f nu este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 8$.

Rezolvare: Arătăm că f nu este indefinit derivabilă în $x_0 = 8$. Știm că f este continuă,

$$f(x) = \begin{cases} x - 8, & \text{dacă } x \geq 8, \\ -x + 8 & \text{dacă } x \leq 8, \end{cases} \quad \text{și} \quad f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 8, \\ -1 & \text{dacă } x < 8. \end{cases}$$

Cum $\lim_{x \rightarrow 8; x > 8} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 8; x < 8} f'(x)$ rezultă că f nu este derivabilă în $x_0 = 8$. În concluzie f nu este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 8$.

TEOREMA 10. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis, $x_0 \in I$ un punct fixat și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ indefinit derivabilă pe un interval deschis V care îl conține pe x_0 . Dacă există $M > 0$ astfel încât oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și oricare ar fi $x \in V$ să avem $|f^{(n)}(x)| \leq M$, atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0 . Mai exact, pentru orice $x \in V$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \\ &\quad + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots \end{aligned}$$

OBSERVAȚIE. Dacă există, dezvoltarea în serie Taylor a unei funcții este unică, dat fiind că această funcție reprezintă suma seriei respective (deci folosim unicitatea limitei).

Aplicație: Să se arate că funcția $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, este dezvoltabilă în serie de puteri pe $\mathbb{R}$ și să se determine seria corespunzătoare.

Rezolvare: Trebuie să arătăm că f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul originii. Derivând obținem

$$f'(x) = \cos x$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\sin x \\
f^{(3)}(x) &= -\cos x \\
f^{(4)}(x) &= \sin x = f(x) \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned}$$

Observăm că derivatele se repetă din 4 în 4, f este indefinit derivabilă și $|f^{(n)}(x)| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Conform Teoremei 10, f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 0$ și avem

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots
\end{aligned}$$

Am obținut așadar că

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

OBSERVAȚIE. Ținând cont de definiția sumei unei serii, Teorema 10 ne dă următoarea formulă:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right).
\end{aligned}$$

Exemplu: Având în vedere dezvoltarea anterioară a funcției $\sin$ în serie de puteri, deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sin x.$$

OBSERVAȚIE. Uneori Teorema 10 nu se poate aplica. În această situație, știind că dezvoltarea în serie Taylor a unei funcții este unică, încercăm să facem o legătură prin derivare sau integrare (nedefinită) între această funcție și suma unei serii Taylor cunoscute, apoi aplicăm Teorema 8b) sau Teorema 8c), după caz.

Exemplu: Arătați că $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 - x)$, este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul originii și scrieți seria corespunzătoare.

Rezolvare: Observăm că f nu îndeplinește ipotezele Teoremei 10 privind mărginirea derivatelor de orice ordin pe un interval deschis V care conține originea. Prin urmare, în locul Teoremei 10 folosim faptul că

$$\ln(1 - x) = - \int \frac{1}{1 - x} dx.$$

Dat fiind că

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n \geq 0} x^n, \quad \text{când } x \in (-1, 1),$$

folosim Teorema 8c). Astfel, integrând termen cu termen seria geometrică $\sum_{n \geq 0} x^n$, $x \in (-1, 1)$, deducem că f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul originii și are dezvoltarea

$$\ln(1 - x) = - \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exerciții pentru fixarea noțiunilor nou introduse

1. Studiați convergența seriilor Taylor:

a) $\sum_{n \geq 0} (x - 2)^n;$

b) $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n};$

c) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n;$

d) $\sum_{n \geq 0} n!(x - 4)^n;$

e) $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{n!} x^n.$

2. Arătați că $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul originii și scrieți seria corespunzătoare. Faceți apoi legătura între aceasta și dezvoltarea în serie Taylor centrată în origine a funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$ folosind Teorema 8.
3. Arătați că $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$, este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul originii și scrieți seria corespunzătoare. (Indiciu: Se folosește faptul că $\frac{1}{(1-x)^3} = \left(\frac{1}{2(1-x)^2}\right)'$.)
4. a) Arătați că $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, este dezvoltabilă în serie de puteri și scrieți seria corespunzătoare. Folosind această dezvoltare arătați că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e.$$

- b) Scrieți dezvoltarea în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 1$ a funcției f .

CAPITOLUL 3

LIMITE DE FUNCȚII. CONTINUITATE

DEFINIȚIA 14. *Spunem că $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^N$ este o bilă deschisă centrată în x_0 și de rază r dacă*

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid d(x, x_0) < r\}.$$

De asemenea,

$$\overline{B(x_0, r)} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid d(x, x_0) \leq r\}$$

se numește bilă închisă centrată în x_0 și de rază r .

Reamintim definiția distanței Euclidiene:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2},$$

unde $x, y \in \mathbb{R}^N$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$.

Exemplu: dacă $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = (1, -2, 5)$, $y = (-2, -1, 3)$, norma diferenței lor este

$$\|x - y\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$

Exemple de bile deschise:

1. În $\mathbb{R}$, bilele deschise centrate în x_0 sunt intervale deschise centrate în x_0 , adică intervale de forma

$$(x_0 - r, x_0 + r).$$

2. În $\mathbb{R}^2$, bilele deschise centrate în x_0 sunt reprezentate de suprafața din interiorul cercurilor centrate în x_0 , $\mathcal{C}(x_0, r)$ (sunt discuri de cerc fără frontieră, adică fără cercul propriu-zis).
3. În $\mathbb{R}^3$, bilele deschise centrate în x_0 sunt reprezentate de interiorul sferelor centrate în x_0 , $\mathcal{S}(x_0, r)$.

DEFINIȚIA 15. *Fie $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Spunem că $V \subseteq \mathbb{R}^N$ este o vecinătate a lui x_0 și notăm $V \in \mathcal{V}(x_0)$ sau $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ dacă există $B(x_0, r)$, o bilă deschisă centrată în x_0 , astfel încât $B(x_0, r) \subseteq V$.*

Exemplu: O vecinătate a punctului $x_0 = (3, 7) \in \mathbb{R}^2$ este suprafața dreptunghiulară $(1, 5) \times (6, 8)$.

În particular, orice bilă deschisă centrată în x_0 este o vecinătate a lui x_0 , deci $B(x_0, r) \in \mathcal{V}(x_0)$.

DEFINIȚIA 16. *Spunem că $a \in \mathbb{R}^N$ este punct de acumulare pentru o mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^N$ dacă și numai dacă în orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ există $x \in A$ astfel încât $a \neq x$ (cu alte cuvinte $A \cap (V \setminus \{a\}) \neq \emptyset$). Mulțimea tuturor punctelor de acumulare a unei mulțimi A se notează A' și mai este numită și mulțime derivată a lui A .*

Exemplu: $A = [1, 3] \cup \{4, 5, 9\} \Rightarrow A' = [1, 3]$.

Reamintim acum definiția limitei unei funcții definite pe axa reală, $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

DEFINIȚIA 17. *Spunem că $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are limita $l \in \mathbb{R}$ în punctul $a \in A'$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in A$ cu $|x - a| < \delta$ avem*

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

Cu alte cuvinte, când x se apropie de a , valoarea lui f în x se apropie de l .

Trecem acum la definiția generală, cea referitoare la orice funcție $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$. Deoarece trecerea de la funcțiile de pe axa reală, studiate în liceu, la această clasă de funcții poate părea puțin inconfortabilă la început, pentru studenții din anul I, dăm câteva exemple de funcții $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Exemple:

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x) = (x + 1, 3x^2 - 2, \cos x, 4^{x-1})$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 7x^4y - 5xy + 10y^2 + 1$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = \left(\frac{x + yz}{y^2 + 2}, e^{x+2y-z} \right)$.

DEFINIȚIA 18. *Spunem că $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$ are limita $l \in \mathbb{R}^p$ în punctul $a \in A'$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$ avem*

$$\|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

Evident, așa cum am mai explicat, definiția de mai sus poate fi formulată și cu ajutorul noțiunii de distanță, dat fiind că $d(x, y) = \|x - y\|$.

TEOREMA 11. *Dacă există, limita este unică.*

De asemenea, este bine de menționat că o funcție care ia valori în $\mathbb{R}^p$ se numește funcție vectorială și este de forma

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)),$$

iar funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_p : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ reprezintă componentele sale cu valori reale.

OBSERVAȚIE. *Limita poate fi privită pe componente, adică definiția anterioară poate fi reformulată, ținând cont de faptul că $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ și $l = (l_1, l_2, \dots, l_p)$, după cum urmează.*

DEFINIȚIA 19. *Spunem că $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$ are limita $l \in \mathbb{R}^p$ în punctul $a \in A'$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in A$ cu $|x_i - a_i| < \delta$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ avem*

$$|f_j(x) - l_j| < \varepsilon \quad \text{pentru orice } j \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

Exemple:

$$1. f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}, x^2 + 3 \right) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3) \right) = (1, 3).$$

$$2. f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x^2 + 2, xy - 3, 2x^3 + y^2) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} f(x, y) \\ &= \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} (x^2 + 2), \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} (xy - 3), \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} (2x^3 + y^2) \right) \\ &= (3, -5, 2). \end{aligned}$$

TEOREMA 12. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ dacă și numai dacă oricare ar fi $(x_n)_n \subset A$ astfel încât $x_n \rightarrow a$ când $n \rightarrow \infty$, avem

$$f(x_n) \rightarrow l \quad \text{când } n \rightarrow \infty.$$

CONSECINȚA 3. *Dacă există $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq A$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$, atunci nu există $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.*

Exercițiu: Fie $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x, y, z) = \frac{2xy - z}{x^2 + y^2 - z}$. Stabiliți dacă există $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z)$.

Rezolvare: Alegem

$$(x_n, y_n, z_n) = (0, \frac{1}{n}, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$$

și

$$(x'_n, y'_n, z'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0, 0).$$

Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n, z_n) = 0,$$

dar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n, z'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n}} = 1,$$

ceea ce înseamnă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n, z_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n, z'_n)$$

și conform Consecinței 3, deducem că nu există $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z)$.

DEFINIȚIA 20. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$. Spunem că f are limită în $a \in A'$ după direcția $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ dacă există $\lim_{t \rightarrow 0} f(a + tv)$.

OBSERVAȚIE. Prin $0 \in \mathbb{R}^N$ înțelegem elementul $(0, 0, \dots, 0)$. În general, pentru simplificarea scrierii, nu facem diferență de notație între un scalar $x \in \mathbb{R}$ și un vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ deoarece considerăm că se subînțelege din context (de exemplu, în definiția anterioară, 0 nu putea fi scalar deoarece avem $0 \in \mathbb{R}^N$).

PROPRIETATEA 6. Dacă există $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, atunci f are limită în $a \in A'$ după orice direcție $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ și $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(a + tv)$.

Reciproc nu: se poate ca o funcție să aibă limită în a după orice direcție $v \neq 0$, dar să nu aibă limită în a .

Exemplu: În exercițiul anterior, nu există $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z)$. Arătăm acum că f are limită în 0 după orice direcție $v \neq 0$. Fie $v = (v_1, v_2, v_3) \in$

$\mathbb{R}^3$ arbitrar ales.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(0 + tv) &= \lim_{t \rightarrow 0} f(tv_1, tv_2, tv_3) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2 v_1 v_2 - tv_3}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2 - tv_3} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2tv_1 v_2 - v_3}{tv_1^2 + tv_2^2 - v_3} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } v_3 \neq 0, \\ \frac{2v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2} & \text{dacă } v_3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Trecem acum la noțiunea de continuitate.

DEFINIȚIA 21. *Spunem că $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$ este continuă în $a \in A \cap A'$ dacă și numai dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Dacă f nu este continuă în a , atunci spunem că f este discontinuă în a . Dacă f este continuă în orice $a \in A$, atunci spunem că f este continuă pe A .*

TEOREMA 13. *Funcția $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ este continuă în $a \in A \cap A'$ dacă și numai dacă toate componentele ei f_i , $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, sunt continue în a .*

Exercițiu: Studiați continuitatea funcției $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dată de $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, unde

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^5 - 6x^3y^2 + 12y - 6; \\ f_2(x, y) &= \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \end{aligned}$$

în punctul $(0, 0)$.

Rezolvare: Funcția f_1 este continuă în $(0, 0)$ deoarece

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_1(x, y) = 6 = f_1(0, 0).$$

De asemenea, $f_2(0, 0) = 0$, iar

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_2(x, y) = 0$$

deoarece $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2) = 0$ și funcția $\sin$ este mărginită. De aici rezultă că și f_2 este continuă în $(0, 0)$, ceea ce conduce la concluzia că f este continuă în $(0, 0)$.

Exerciții pentru fixarea noțiunilor nou introduse

1. Fie $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + 3y^2}$.
 - a) Calculați limita funcției f în punctul $(-2, 2)$.
 - b) Stabiliți dacă există limita funcției f în punctul $(-2, 2)$ după orice direcție $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; dacă există, calculați-o.
 - c) Arătați că nu există limita funcției f în punctul $(0, 0)$.
 - d) Determinați limita funcției f în punctul $(0, 0)$ după direcția vectorului v , unde:
 - (i) $v = (-3, 5)$;
 - (ii) $v = (0, 2)$;
 - (iii) $v = (4, 1)$.
2. Fie $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - x \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{xy - y - x + 1}{xy - x}$.
 - a) Calculați limita funcției f în punctul $(2, 1)$.
 - b) Stabiliți dacă există limita funcției f în punctul $(2, 1)$ după orice direcție $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; dacă există, calculați-o.
 - c) Arătați că nu există limita funcției f în punctul $(0, 1)$.
 - d) Determinați limita funcției f în punctul $(0, 1)$ după direcția vectorului $v = (3, 2)$.
3. Fie $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + yz^2 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{x^2y - 4z}{x^3 + yz^2}$.
 - a) Calculați limita funcției f în punctul $(1, 1, -2)$.
 - b) Calculați limita funcției f în punctul $(1, 1, -2)$ după direcția vectorului $v = (0, 1, 3)$.
 - c) Stabiliți dacă există limita funcției f în punctul $(0, 0, 0)$.
 - d) Determinați limita funcției f în punctul $(0, 0, 0)$ după direcția vectorului $v = (2, 4, 1)$.
4. Fie funcțiile $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y) = \left(x^2y + 6, \frac{x^2 - 4y^2}{x - 2y}, 3xy \right)$$

și $g : (\mathbb{R}^*)^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$g(x, y, z) = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} + 2, x + y + 4z, \frac{xy + 7y^2}{3y} \right).$$

Calculați limita funcției f în punctul $(4, 2)$ și limita funcției g în punctul $(0, 0, 3)$.

5. Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dată de $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$, unde

$$f_1(x, y, z) = |3y - 5|;$$

$$f_2(x, y, z) = \begin{cases} xy - (1 - z) \sin \frac{1}{1 - z} & \text{dacă } z \neq 1, \\ xy - 1 & \text{dacă } z = 1. \end{cases}$$

Studiați continuitatea funcției f în punctul $(1, 0, 1)$.

6. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dată de $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, unde

$$f_1(x) = \begin{cases} 5x - 3 & \text{dacă } x \leq 1, \\ -2x + 4 & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{dacă } x < 4, \\ 2x & \text{dacă } x \geq 4. \end{cases}$$

Studiați continuitatea funcției f pe $\mathbb{R}$.

CAPITOLUL 4

DIFERENȚIABILITATE

Diferențiabilitatea funcțiilor poate fi privită ca o generalizare a noțiunii de derivabilitate care a fost studiată în liceu și rămâne în strânsă legătură cu aceasta. De aceea amintim în cele ce urmează cele mai importante formule ale derivatelor precum și regulile de bază care apar în calculul derivatelor.

Derivate ale unor funcții elementare

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Consecințe: $(const.)' = 0$, $x' = 1$;
2. $(a^x)' = a^x \ln a$. Consecință: $(e^x)' = e^x$;
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. Consecință: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
4. $(\sin x)' = \cos x$;
5. $(\cos x)' = -\sin x$;
6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
7. $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$;
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
9. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$;
11. $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{x^2+1}$.

Câteva reguli de derivare

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$;
2. $(cf)' = cf'$, unde $c \in \mathbb{R}$;
3. $(fg)' = f'g + fg'$;
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$;
5. $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$.

Exemple:

1.

$$\begin{aligned}
 & (-4x^{50} + 27x^3 - 16x^2 + 3x - 68)' \\
 &= (-4x^{50})' + (27x^3)' - (16x^2)' + (3x)' - (68)' \\
 &= -4(x^{50})' + 27(x^3)' - 16(x^2)' + 3x' \\
 &= -200x^{49} + 81x^2 - 32x + 3;
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 & ((6x^2 + x - 9) \cos x)' \\
 &= (6x^2 + x - 9)' \cos x + (6x^2 + x - 9) (\cos x)' \\
 &= (12x + 1) \cos x + (6x^2 + x - 9)(-\sin x);
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\log_5 x}{\operatorname{arctg} x}\right)' &= \frac{(\log_5 x)' \operatorname{arctg} x - \log_5 x (\operatorname{arctg} x)'}{\operatorname{arctg}^2 x} \\
 &= \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x \ln 5} - \frac{\log_5 x}{1+x^2}}{\operatorname{arctg}^2 x};
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 (\arccos(4^x))' &= \frac{-1}{\sqrt{1-(4^x)^2}} (4^x)' \\
 &= \frac{-4^x \ln 4}{\sqrt{1-4^{2x}}}.
 \end{aligned}$$

Pentru a ușura procesul de însușire a noțiunii de diferențiabilitate, în funcție de tipul funcțiilor studiate, vom trata, pe rând, următoarele cazuri:

1. cazul funcțiilor reale de variabilă reală, adică funcții de tipul $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplu: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^2 - 6$.

2. cazul funcțiilor vectoriale de variabilă reală, adică funcții de tipul $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Exemplu: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (5x^2 - 6, 2x + 8, e^x)$.

3. cazul funcțiilor reale de variabilă vectorială, adică funcții de tipul $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplu: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{x+y}$.

4. cazul funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială, adică funcții de tipul $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Exemplu: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$f(x, y, z) = (xyz, x^2 - 6z, \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 2), 2y + 4).$$

Înainte de a începe această discuție introducem câteva definiții utile.

DEFINIȚIA 22. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Punctul $x_0 \in A$ este punct interior al mulțimii A dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât $V \subseteq A$.

DEFINIȚIA 23. Mulțimea A se numește mulțime deschisă dacă este formată numai din puncte interioare. Complementara unei mulțimi deschise se numește mulțime închisă.

OBSERVAȚIE. O mulțime închisă poate fi gândită ca reuniunea dintre o mulțime deschisă A cu frontiera sa și se notează prin $\bar{A}$.

Exemple:

1. Toate bilele deschise sunt mulțimi deschise (a se vedea Definiția 14 precum și exemplele corespunzătoare).
2. Orice interval (a, b) este o mulțime deschisă. De asemenea, reuniunea, intersecția și produsul cartezian a două intervale deschise (sau a oricăror mulțimi deschise) reprezintă o mulțime deschisă. În același timp, un interval de forma $[a, b)$ nu este o mulțime deschisă deoarece punctul a nu este punct interior al acestui interval. Nici intervalele de forma $(a, b]$ sau $[a, b]$ nu sunt mulțimi

deschise, din motive similare. Mai mult, $[a, b]$ este o mulțime închisă deoarece $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$.

DEFINIȚIA 24. Fie V și W două spații vectoriale peste $\mathbb{R}$. Se numește aplicație liniară o funcție $f : V \rightarrow W$ având următoarele proprietăți:

1. f este aditivă, adică $f(x+y) = f(x)+f(y)$, oricare ar fi $x, y \in V$;
2. f este omogenă, adică $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $x \in V$.

OBSERVAȚIE. O aplicație liniară mai este numită și morfism de spații vectoriale.

PROPRIETATEA 7. Fie V și W două spații vectoriale peste $\mathbb{R}$. Funcția $f : V \rightarrow W$ este aplicație liniară dacă și numai dacă

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $x, y \in V$.

Aceste noțiuni intervin în definiția diferențiabilității.

1. Diferențiabilitatea funcțiilor de variabilă reală

1.1. Funcții reale de variabilă reală.

DEFINIȚIA 25. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime deschisă, $x_0 \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Funcția f se numește diferențiabilă în punctul x_0 dacă există o aplicație liniară $L_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0.$$

Dacă f este diferențiabilă în $x_0 \in A$, aplicația liniară L_{x_0} se numește diferențiala funcției f în punctul x_0 și se notează df_{x_0} . Funcția f se numește diferențiabilă pe A dacă este diferențiabilă în fiecare punct $x \in A$, iar funcția $df : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dată de

$$df(x) = df_x,$$

se numește diferențiala funcției f pe A , unde mulțimea $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ reprezintă mulțimea tuturor aplicațiilor liniare de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$.

TEOREMA 14. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime deschisă, $x_0 \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este diferențiable în punctul x_0 dacă și numai dacă f este derivabilă în x_0 , iar*

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h,$$

oricare ar fi $h \in \mathbb{R}$.

Exemplu: Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Funcția f este derivabilă, $f'(x) = \cos x$, deci conform teoremei anterioare f este diferențiable și diferențiala sa este dată de $df_x(h) = h \cos x$.

OBSERVAȚIE. *Teorema 14 poate fi privită și invers, adică dacă f este diferențiable în punctul x_0 , atunci f este derivabilă în x_0 , iar*

$$f'(x_0) = df_{x_0}(1).$$

Reamintim din liceu că o funcție $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nu poate fi derivabilă în $x_0 \in A$ dacă nu este continuă în $x_0 \in A$.

1.2. Funcții vectoriale de variabilă reală.

DEFINIȚIA 26. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime deschisă, $x_0 \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^N$. Funcția f se numește diferențiable în punctul x_0 dacă există o aplicație liniară $L_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ astfel încât*

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)\|}{|h|} = 0.$$

Dacă f este diferențiable în $x_0 \in A$, aplicația liniară L_{x_0} se numește diferențiala funcției f în punctul x_0 și se notează df_{x_0} .

Reamintim definiția normei Euclidiene pentru $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}.$$

La fel ca în capitolele precedente, este mai simplu să lucrăm pe componente, atunci când avem de-a face cu cantități vectoriale din $\mathbb{R}^N$.

TEOREMA 15. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime deschisă, $x_0 \in A$ și funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}^N$, deci f este de forma $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$, cu componentele $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Funcția f este diferențiable în x_0 dacă și numai dacă toate componentele sale $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, sunt*

diferențiabile în x_0 , iar diferențiala funcției f în punctul x_0 este dată de formula

$$\begin{aligned} df_{x_0}(h) &= (h \cdot f'_1(x_0), h \cdot f'_2(x_0), \dots, h \cdot f'_N(x_0)) \\ &= h \cdot (f'_1(x_0), f'_2(x_0), \dots, f'_N(x_0)), \end{aligned}$$

unde $h \in \mathbb{R}$.

DEFINIȚIA 27. Funcția f se numește diferențiabilă pe A dacă este diferențiabilă în fiecare punct $x \in A$.

Exercițiu: Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x) = (4x - 16, x^2, \ln x, \arctg x)$. Arătați că f este diferențiabilă pe $(0, \infty)$ și determinați diferențiala sa.

Rezolvare: Funcția f este de forma $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, cu componentele

$$f_1(x) = 4x - 16, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = \ln x, \quad f_4(x) = \arctg x.$$

Cum fiecare componentă f_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, este derivabilă pe $(0, \infty)$, din Teorema 14 deducem că f_1, f_2, f_3 și f_4 sunt diferențiabile pe $(0, \infty)$. Aplicând acum Teorema 15 obținem că f este diferențiabilă pe $(0, \infty)$, iar diferențiala sa este dată de

$$\begin{aligned} df_x(h) &= h \cdot (f'_1(x), f'_2(x), f'_3(x), f'_4(x)) \\ &= (4h, 2xh, \frac{h}{x}, \frac{h}{x^2 + 1}), \end{aligned}$$

oricare ar fi $h \in \mathbb{R}$.

2. Diferențiabilitatea funcțiilor de variabilă vectorială

Înainte de a începe discuția propriu-zisă despre diferențiabilitate, introducem definiția produsului scalar Euclidian, împreună cu câteva proprietăți, deoarece o vom folosi în interiorul acestei secțiuni (și, în plus, aceasta este o noțiune matematică deosebit de importantă).

2.1. Produsul scalar Euclidian.

DEFINIȚIA 28. Se numește produs scalar Euclidian aplicația pozitiv definită, biliniară și simetrică $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_N y_N,$$

unde $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$.

OBSERVAȚIE. O altă notație pentru produsul scalar, la fel de des utilizată, este $x \cdot y$, deci

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_N y_N.$$

Noi vom utiliza ambele notații în cele ce urmează deoarece este important să familiarizăm cititorul cu ambele variante.

Exemplu: Fie $x = (1, 2, -5)$ și $y = (-3, 2, -1)$. Produsul scalar al vectorilor x și y este

$$\langle x, y \rangle = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + (-5) \cdot (-1) = -3 + 4 + 5 = 6$$

(sau, utilizând cealaltă notație, putem scrie $x \cdot y = -3 + 4 + 5 = 6$).

OBSERVAȚIE. $\langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 = \|x\|^2$. Mai mult, deoarece în loc de $\langle x, x \rangle$ putem scrie $x \cdot x$, uneori în loc de $\|x\|^2$ scriem x^2 .

PROPRIETATEA 8. $\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\widehat{x, y})$.

Aplicație: Cosinusul unghiului făcut de vectorii $x = (2, 4, 0)$ și $y = (3, -3, 8)$ este

$$\cos(\widehat{x, y}) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{6 - 12 + 0}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{82}} = -\frac{3}{\sqrt{410}}.$$

CONSECINȚA 4. Doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^N$ sunt ortogonali (și notăm $x \perp y$) dacă și numai dacă $\langle x, y \rangle = 0$ (adică unghiul făcut de acești doi vectori este $\frac{\pi}{2}$).

Exemplu: Fie $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = (1, 3)$, $y = (6, -2)$. Atunci $\langle x, y \rangle = 6 - 6 = 0$, deci $x \perp y$.

2.2. Funcții reale de variabilă vectorială. Derivate parțiale.

DEFINIȚIA 29. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă, $x_0 \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Funcția f se numește diferențiabilă în punctul x_0 dacă există o aplicație liniară $L_{x_0} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Dacă f este diferențiabilă în $x_0 \in A$, aplicația liniară L_{x_0} se numește diferențiala funcției f în punctul x_0 și se notează df_{x_0} .

Reamintim că definiția normei Euclidiene pentru $h \in \mathbb{R}^N$, unde $h = (h_1, h_2, \dots, h_N)$, este $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_N^2}$.

Acum că avem definiția diferențiabilității unei funcții reale de variabilă vectorială se pune întrebarea: oare cum putem face legătura cu derivabilitatea? Pentru aceasta introducem o nouă definiție.

DEFINIȚIA 30. *Se numește derivată parțială a funcției $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ în raport cu variabila x_i în punctul $a \in A$, următoarea limită:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_N) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N)}{t}.$$

Notații: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_{x_i} f(a)$, $f_{x_i}(a)$.

De fapt, pentru a afla $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, derivăm f în raport cu x_i în mod obișnuit (adică rămân valabile formulele cunoscute ale derivatelor funcțiilor elementare) în timp ce celelalte componente x_j , $j \neq i$, sunt privite ca și cum ar fi constante.

Exemple:

1. Dacă $f(x, y) = x^9 \sin y$, atunci derivatele sale parțiale sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 9x^8 \sin y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^9 \cos y.$$

2. Dacă $g(x, y, z) = xy^2z^3 - 4y^5z^2 + 7z$, atunci derivatele sale parțiale sunt:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = y^2z^3,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = 2xyz^3 - 20y^4z^2,$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 3xy^2z^2 - 8y^5z + 7.$$

OBSERVAȚIE. *Rolul derivatei de la funcțiile de variabilă reală este jucat aici, unde funcția f are variabilă vectorială, de vectorul care are drept componente derivatele parțiale ale lui f . Acest vector se numește*

gradientul funcției f și scriem

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right).$$

O altă notație pentru gradient este $\text{grad } f$.

Exemple: Luând în considerare funcțiile f și g din exemplele anterioare, avem:

1. $(\nabla f)(x, y) = (9x^8 \sin y, x^9 \cos y),$
2. $(\nabla g)(x, y, z) = (y^2 z^3, 2xy z^3 - 20y^4 z^2, 3xy^2 z^2 - 8y^5 z + 7)$

TEOREMA 16. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă în punctul a . Atunci,

$$\begin{aligned} df_a(h) &= (\nabla f)(a) \cdot h \quad (= \text{produsul scalar Euclidian } \langle (\nabla f)(a), h \rangle) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(a)h_N, \end{aligned}$$

oricare ar fi $h = (h_1, h_2, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N$.

Aplicație: Determinați diferențiala funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, date de formula $f(x, y, z) = e^{3xy^4 - z^3}$, în punctul $(2, 1, -1)$.

Rezolvare: Reamintim din liceu, de la funcțiile reale de variabilă reală, următoarea formulă a derivatei unei funcții compuse:

$$(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot (u(x))'.$$

Avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= e^{3xy^4 - z^3} \frac{\partial}{\partial x}(3xy^4 - z^3) = 3y^4 e^{3xy^4 - z^3}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= e^{3xy^4 - z^3} \frac{\partial}{\partial y}(3xy^4 - z^3) = 12xy^3 e^{3xy^4 - z^3}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= e^{3xy^4 - z^3} \frac{\partial}{\partial z}(3xy^4 - z^3) = -3z^2 e^{3xy^4 - z^3}. \end{aligned}$$

În consecință,

$$(\nabla f)(x, y, z) = \left(3y^4 e^{3xy^4 - z^3}, 12xy^3 e^{3xy^4 - z^3}, -3z^2 e^{3xy^4 - z^3} \right),$$

iar

$$(\nabla f)(2, 1, -1) = (3e^7, 24e^7, -3e^7) = e^7 (3, 24, -3),$$

deci

$$df_{(2,1,-1)}(h) = e^7 (3h_1 + 24h_2 - 3h_3) \quad \text{oricare ar fi } h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Observăm că în aplicația anterioară am derivat parțial o funcție compusă. Formulele generale pentru derivatele parțiale ale unei funcții $f \circ u$, unde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(u)}{\partial x}(x, y, z) &= f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z), \\ \frac{\partial f(u)}{\partial y}(x, y, z) &= f'(u) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z), \\ \frac{\partial f(u)}{\partial z}(x, y, z) &= f'(u) \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z). \end{aligned}$$

Bineînțeles, se procedează similar atunci când avem de-a face cu funcții u de două variabile, etc.

Exemplu: Pentru $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \pi)$, $f(x, y) = \operatorname{arctg}(2x^5 - 3x^3y^2)$, ne gândim la formula $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{-1}{x^2 + 1}$ și la cele spuse mai sus, observând că avem de-a face cu o funcție de forma $\operatorname{arctg} u$, unde $u(x, y) = 2x^5 - 3x^3y^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{-1}{u^2 + 1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{-10x^4 + 9x^2y^2}{(2x^5 - 3x^3y^2)^2 + 1}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-1}{u^2 + 1} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{6x^3y}{(2x^5 - 3x^3y^2)^2 + 1}. \end{aligned}$$

De asemenea, când avem de calculat derivatele parțiale ale produsului sau raportului a două funcții, utilizăm formulele (adaptându-le la numărul de variabile corespunzător):

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x}; \quad \frac{\partial(fg)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}g + f\frac{\partial g}{\partial y};$$

respectiv,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}g - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}g - f\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}.$$

DEFINIȚIA 31. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că f este derivabilă parțial pe A dacă există derivatele parțiale ale lui f în raport cu toate variabilele sale în orice punct din A . Dacă, în plus, toate derivatele parțiale sunt continue, atunci spunem că f este de clasă C^1 pe A și notăm $f \in C^1(A)$.

TEOREMA 17. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^1(A)$, atunci f este diferențiable pe A (adică f este diferențiable în orice punct $a \in A$).

2.3. Funcții vectoriale de variabilă vectorială.

DEFINIȚIA 32. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o mulțime deschisă, $x_0 \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \geq 2$). Funcția f se numește diferențiable în punctul x_0 dacă există o aplicație liniară $L_{x_0} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$ astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0.$$

Dacă f este diferențiable în $x_0 \in A$, aplicația liniară L_{x_0} se numește diferențiala funcției f în punctul x_0 și se notează df_{x_0} .

OBSERVAȚIE. În definiția anterioară, $\|\cdot\|$ reprezintă norma Euclidiană din $\mathbb{R}^N$.

Privind funcția f pe componente avem

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, f_p(x_1, x_2, \dots, x_N)),$$

cu $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.

TEOREMA 18. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă, $x_0 \in A$ și funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$. Funcția f este diferențiable în x_0 dacă și numai dacă toate componentele sale $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, sunt diferențiable în x_0 .

DEFINIȚIA 33. Funcția f se numește diferențiable pe A dacă este diferențiable în fiecare punct $x \in A$.

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \geq 2$), $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$. Dacă fiecare componentă f_i , $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, este derivabilă parțial în a în raport cu fiecare variabilă x_i , atunci putem păstra toate aceste derivate parțiale într-o matrice.

DEFINIȚIA 34. *Matricea*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}$$

se numește *matrice Jacobi* (sau *matrice Jacobiană*) asociată funcției f în punctul $a \in A$. Dacă această matrice este pătratică (adică $N = p$), atunci determinantul său se numește *Jacobianul funcției f* sau *determinantul funcțional asociat lui f* și se notează

$$\det J_f(a) = |J_f(a)| = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_N)}{D(x_1, x_2, \dots, x_N)}(a).$$

TEOREMA 19. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ o funcție diferențiabilă în punctul a . Atunci

$$df_a(h) = J_f(a)h,$$

oricare ar fi $h = (h_1, h_2, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N$.

Exercițiu: Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x^2 + xy, xyz, z^2x^3 - \arctg(yz))$.

a) Determinați diferențiala funcției f .

b) Calculați Jacobianul lui f în punctul $(-1, 0, 1)$.

Rezolvare:

a) Componentele lui f sunt funcțiile $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_1(x, y, z) = x^2 + xy, \quad f_2(x, y, z) = xyz, \quad f_3(x, y, z) = z^2x^3 - \arctg(yz).$$

Calculăm derivatele parțiale ale acestor funcții.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = 2x + y; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = x; \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = 0;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = yz; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = xz; \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = xy;$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z) &= 3x^2z^2; & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) &= -\frac{z}{1+y^2z^2}; \\ \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) &= 2zx^3 - \frac{y}{1+y^2z^2}.\end{aligned}$$

Ținând cont de Teorema 19, calculăm

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x+y & x & 0 \\ yz & xz & xy \\ 3x^2z^2 & -\frac{z}{1+y^2z^2} & 2zx^3 - \frac{y}{1+y^2z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2x+y)h_1 + xh_2 \\ yzh_1 + xzh_2 + xyh_3 \\ 3x^2z^2h_1 - \frac{zh_2}{1+y^2z^2} + 2zx^3h_3 - \frac{yh_3}{1+y^2z^2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

De aici deducem că

$$\begin{aligned}df_{(x,y,z)}(h) &= \\ & \left((2x+y)h_1 + xh_2, yzh_1 + xzh_2 + xyh_3, 3x^2z^2h_1 - \frac{zh_2}{1+y^2z^2} + 2zx^3h_3 - \frac{yh_3}{1+y^2z^2} \right).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
|J_f(-1, 0, 1)| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(-1, 0, 1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(-1, 0, 1) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(-1, 0, 1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(-1, 0, 1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(-1, 0, 1) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(-1, 0, 1) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(-1, 0, 1) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(-1, 0, 1) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(-1, 0, 1) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Foarte strâns legate de derivatele parțiale sunt următoarele noțiuni care apar adesea în aplicațiile specifice profilului ingineresc.

2.4. Divergență. Rotor. Derivata după o direcție dată.

DEFINIȚIA 35. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ o funcție de clasă C^1 pe A . Atunci

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} f(a) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) + \cdots + \frac{\partial f_N}{\partial x_N}(a).
\end{aligned}$$

se numește *divergența lui f în punctul $a \in A$* .

Exemplu: Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (5x^2 - 3y, 2x^4y^{10})$. Prin urmare $f_1(x, y) = 5x^2 - 3y$, $f_2(x, y) = 2x^4y^{10}$ și

$$\operatorname{div} f(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = 10x + 20x^4y^9.$$

OBSERVAȚIE. Ținând cont și de noțiunea de gradient pe care am introdus-o în acest capitol, putem introduce o nouă noțiune, și anume, operatorul Laplace asociat lui $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ (A fiind mulțime deschisă)

$$\begin{aligned}\Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right).\end{aligned}$$

Remarcăm aici prezența derivatelor parțiale de ordin superior (am presupus că putem deriva parțial încă o dată derivatele parțiale) care vor fi introduse ceva mai târziu, motiv pentru care deocamdată nu insistăm asupra acestei noțiuni.

Trecem acum la o altă noțiune importantă.

DEFINIȚIA 36. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f \in C^1(A)$. Atunci

$$\operatorname{rot}_a f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(a), \frac{\partial f_1}{\partial z}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) \right)$$

se numește rotorul lui f în punctul a .

Această definiție se reține mai ușor dacă se merge pe următoarea scriere formală a rotorului:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} f &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{k},
\end{aligned}$$

unde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ reprezintă versorii corespunzători axelor de coordonate Ox , Oy , respectiv Oz ale unui sistem cartezian de coordonate din $\mathbb{R}^3$, prin urmare $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Reamintim că prin versor înțelegem un vector de lungime 1, adică un vector a cărui normă este 1.

Exercițiu: Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (4x^2z, x + 2y - z^3, \cos(3x^2 - 2z))$. Determinați $\operatorname{rot}_{(x,y,z)} f$ apoi calculați $\operatorname{rot}_{(0,4,3)} f$.

DEFINIȚIA 37. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă, $a = (a_1, \dots, a_N) \in A$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ un versor dat. Funcția f se numește derivabilă în a după direcția v dacă

$$(\exists) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}.$$

Dacă există, această limită se numește derivata lui f după direcția v în punctul a și se notează $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$.

TEOREMA 20. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă, $a = (a_1, \dots, a_N) \in A$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ un versor dat. Dacă f este diferențiabilă în a , atunci

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v) = \nabla f(a) \cdot v.$$

Reamintim că $\nabla f(a)$ reprezintă gradientul lui f în a și are expresia

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) \right).$$

Exercițiu: Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 5y^3 \ln(x^2 + 3y^4 + 1)$. Determinați derivata lui f în $(2, 1)$ după direcția versorului $(-1, 0)$.

Exerciții pentru fixarea noțiunilor nou introduse

1. Fie vectorii $u = (1, 2, -4)$, $v = (2, -3, 5)$ și $w = (-2, -1, 0)$. Determinați $\|u\|$, $d(v, w)$, $\langle u, v \rangle$, $v \cdot w$, $\cos(\widehat{u, v})$, v^2 , w^2 , $\cos(\widehat{w, v})$.

2. Determinați:

a) $(3x^8 - 4x^5 + 2x^2 - x + 9)'$;

b) $(5x^{10} - 7x^8 + 12x^4 - x^2 + 9x - 3)'$;

c) $(-x^6 + 7x^4 + x + 14x - \operatorname{arctg}' x)'$;

d) $(x^7 \cdot \log_3 x)'$;

e) $\left(\frac{x^3 - 4x + 1}{\sin x} \right)'$;

f) $(\operatorname{tg}(5x - 3))'$;

g) $(\ln(3x^3 + 73x + 5))'$.

3. Determinați diferențiala funcției f , unde:

a) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x + 8$;

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 9^x + x^9 + 9x + 9$;

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (\sin x, \operatorname{ctg} x, e^x + 4)$;

d) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\cos(\ln x), x^4 + 3x)$;

e) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3x^4 + 7x^3y^2 - 2xy^4$;

f) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3z^4 + x \cos z + y^8 \operatorname{arctg} x$;

g) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x^2 + 2yz, zy^3 - 2, 4x^2y - 5x^3y)$.

În plus, calculați Jacobianul funcției f în punctul $(0, 1, 2)$.

4. Fie funcțiile $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{7x-y^4}$ și $g : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x + y, 3x^2 \ln y)$. Determinați $\nabla f(1, -1)$ și $\operatorname{div} g(5, 1)$.

5. Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (e^z, 3xy^6 + 2yz, 4x^3y^2z)$. Determinați $\operatorname{rot}_{(x,y,z)} f$. Cât este $\operatorname{rot}_{(-2,1,0)} f$?

6. Stabiliți care dintre următorii vectori este versor:

a) în $\mathbb{R}^2$: $u = (1, 2)$, $v = (0, -1)$, $w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

b) în $\mathbb{R}^3$: $u = (0, 0, 1)$, $v = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $w = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

7. Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \cos(xy^2 - 3xz^4)$. Determinați derivata lui f în $(0, 5, 1)$ după direcția versorului $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

8. Fie $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3y^27^x$, $g(x, y) = 4xy^3$. Determinați $\nabla(fg)$ și $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)$.

3. Derivate parțiale de ordinul 2. Aplicații

DEFINIȚIA 38. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că f este de două ori derivabilă parțial în a dacă și numai dacă fiecare derivată parțială a lui f în a , $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a)$, este derivabilă parțial în raport cu toate variabilele. Derivata parțială a unei derivate parțiale se numește derivată parțială de ordinul 2 și avem notația

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} & \text{dacă } i \neq j, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} & \text{dacă } i = j. \end{cases}$$

În acest context, derivatele parțiale ale lui f sunt numite derivate parțiale de ordinul întâi. Dacă derivatele parțiale de ordinul întâi ale unei funcții reale de variabilă vectorială erau păstrate într-un vector care se numește gradient, derivatele parțiale de ordinul doi sunt păstrate într-o matrice, după cum urmează.

DEFINIȚIA 39. *Matricea*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (a) & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (a) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_N} \right) (a) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (a) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (a) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_N} \right) (a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (a) & \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (a) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_N} \right) (a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(a) \end{pmatrix}$$

se numește *matrice Hessiană* asociată funcției f în punctul $a \in A$.

DEFINIȚIA 40. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este de două ori derivabilă parțial în fiecare punct din A , spunem că f este de două ori derivabilă parțial pe A . Dacă f este de două ori derivabilă parțial pe A și derivatele parțiale de ordinul 2 sunt continue, atunci spunem că f este de clasă C^2 pe A și notăm $f \in C^2(A)$.

TEOREMA 21. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^2(A)$, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, oricare ar fi $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

TEOREMA 22. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^2(A)$, atunci matricea Hessiană H_f este simetrică, adică $H_f =$

$(H_f)^t$. În plus, pentru a face legătura cu ceea ce se studiază de obicei la cursul de algebră de către studenții din anul I de la facultăți cu profil tehnic, $H_f(a)$ (cu $a \in A$) determină o formă pătratică $\varphi_a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi_a(h) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j.$$

Exercițiu: Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + 3xy + 7y^2 z^3$. Determinați Hessiana funcției f în punctul $(4, -1, 1)$.

OBSERVAȚIE. $\text{Tr } H_f = \Delta f$, unde prin $\text{Tr } H_f$ înțelegem urma matricei H_f , adică suma elementelor de pe diagonala principală.

3.1. Puncte de extrem local.

DEFINIȚIA 41. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$. Spunem că a este punct de extrem local al funcției f dacă există vecinătate V a lui a astfel încât $f(x) - f(a)$ să aibă semn constant pe V . Mai exact, dacă $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in V$, atunci a este punct de maxim local al funcției f . Iar dacă $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in V$, atunci a este punct de minim local al funcției f .

OBSERVAȚIE. Dacă $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in A$, atunci a este punct de maxim global al funcției f . Dacă $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in A$, atunci a este punct de minim global al funcției f .

DEFINIȚIA 42. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$. Spunem că a este punct critic (sau staționar) al lui f dacă și numai dacă $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, oricare ar fi $i \in \{1, \dots, N\}$.

Exercițiu: Determinați punctele critice ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy - 2y$.

TEOREMA 23. (Teorema lui Fermat)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și $a \in A$. Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă parțial în a și a este punct de extrem local al lui f , atunci a este punct critic al lui f .

Cu alte cuvinte, pentru funcțiile derivabile parțial pe A , punctele de extrem local se caută printre punctele critice.

DEFINIȚIA 43. Spunem că o mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^N$ este convexă dacă și numai dacă oricare ar fi $x, y \in A$, $tx + (1-t)y \in A$, oricare ar fi $t \in [0, 1]$ (adică o dată cu capetele unui segment, conține și segmentul).

DEFINIȚIA 44. Fie o matrice pătratică $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Minorii

$$\Delta_1 = b_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det B.$$

se numesc *minori principali* ai matricei B .

TEOREMA 24. (*Teorema lui Sylvester*)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și convexă și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$. Fie $a \in A$ un punct critic al lui f și $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ minorii principali ai lui $H_f(a)$.

- a) Dacă $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_N > 0$, atunci a este punct de minim local pentru f .
- b) Dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^N \Delta_N > 0$, atunci a este punct de maxim local pentru f .

Dacă nu ne aflăm în niciuna dintre situațiile descrise de Teorema lui Sylvester, apelăm la definiția punctelor de extrem local sau la una dintre proprietățile.

PROPRIETATEA 9. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$ și $a \in A$ un punct critic al lui f .

Dacă $H_f(a)$ are toate valorile proprii strict pozitive, atunci a este punct de minim local.

Dacă $H_f(a)$ are toate valorile proprii strict negative, atunci a este punct de maxim local.

Deosebit de utile sunt următoarele două proprietăți care vizează cazurile 2-dimensional și 3-dimensional, în aceleași ipoteze ca mai sus.

- (i) Pentru $N = 2$, dacă $\Delta_2 < 0$, atunci a este punct de șa al lui f , nu punct de extrem.
- (ii) Pentru $N = 3$, dacă Δ_3 și $\text{Tr } H_f(a)$ au semne diferite, atunci a este punct de șa al lui f , nu punct de extrem.

Algoritm de determinare a punctelor de extrem local

Sintetizând, pentru a stabili dacă o funcție admite puncte de extrem local, parcurgem următoarele etape:

- I determinăm punctele critice (dacă f nu admite puncte critice, nu admite nici puncte de extrem local);
- II calculăm Hessiana și aflăm valoarea Hessiane în fiecare punct critic găsit;
- III pentru fiecare punct critic aplicăm Teorema 24 (Teorema lui Sylvester), definiția, sau una dintre proprietățile de mai sus, pentru a determina dacă este punct de extrem local.

Aplicație: Stabiliți dacă următoarele funcții admit puncte de extrem local.

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy - 2y$;
- b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Exerciții pentru fixarea noțiunilor nou introduse

1. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y \cos x$. Determinați Hessiana funcției f .
- 2.
2. Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy^3 - 5xyz^2$. Determinați Hessiana funcției f în punctul $(3, 2, -2)$ și Laplaceanul funcției f în punctul $(-1, -2, 1)$.
3. Stabiliți dacă următoarele funcții admit puncte de extrem local.
 - a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = -x^3 - 3y^2 + 6x$;
 - b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

CAPITOLUL 5

Variantă model de examen parțial

ANALIZĂ MATEMATICĂ – VARIANTĂ MODEL DE EXAMEN PARȚIAL

Student:

Fac. de Autom., Calc. și Electr.,

Anul I, Grupa:

Numărul 1, Data:

1. Să se calculeze:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, unde $x_n = \left(\frac{-5n^4 + 3n^3 + 2n^2 - 12}{3n^4 - 16n^2 + 9}, \frac{\sin(3n^2 - n - 1)}{3n^2 - n} \right)$.
b) $\|x\|$, unde $x = (4, -2, -3)$.

2. a) Stabiliți convergența seriei $\sum_{n \geq 0} \frac{2n}{(n+7)!}$ folosind criteriul raportului.

b) Scrieți dezvoltarea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$ în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 0$.

3. Să se determine:

a) $(x^9 - 4x^7 + 6x^2 - 41)'$; b) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{g} \right)$

unde $f(x, y) = x^3y^4 - 3x^5y$ și $g(x, y) = \cos y$.

4. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dată de $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$, unde $f_1(x, y) = xy + 6x^2$, $f_2(x, y) = 5x^3y^2$ și $f_3(x, y) = xe^y$.

- a) Calculați limita funcției f în punctul $(-1, 2)$.
b) Determinați matricea Jacobiană asociată lui f .
c) Determinați gradientul lui f_2 în punctul $(1, 3)$.
d) Stabiliți dacă funcția f_1 admite puncte de extrem local.

CAPITOLUL 6

INTEGRABILITATE

1. Integrale Riemann pe dreapta reală. Integrale improprii

Considerăm cunoscute din liceu definiția și principalele proprietăți ale integralelor Riemann de pe dreapta reală, astfel că în cele ce urmează vom face doar o foarte scurtă recapitulare a anumitor proprietăți și definiții. În plus, vom aminti două tipuri de aplicații în viața reală ale acestor integrale și vom introduce o nouă noțiune – aceea de integrale improprii.

DEFINIȚIA 45. Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : J \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că f admite primitivă pe J dacă există $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe J astfel încât $F' = f$. În acest caz spunem că F este primitiva funcției f .

OBSERVAȚIE. Dacă f admite o primitivă F , atunci ea admite o infinitate de primitive de forma $F + c$, unde c reprezintă o constantă reală.

Reamintim din liceu următoarele formule.

Primitive ale unor funcții elementare

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}$, oricare ar fi $\alpha \neq -1$.

Consecință: $\int dx = x + \mathcal{C}$.

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + \mathcal{C}$.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}$. Consecință: $\int e^x dx = e^x + \mathcal{C}$.

4. $\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}$.

5. $\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}$.

$$6. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}.$$

$$7. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}.$$

$$8. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + \mathcal{C}.$$

$$9. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + \mathcal{C}.$$

$$10. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + \mathcal{C}.$$

$$11. \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + \mathcal{C}.$$

$$12. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + \mathcal{C}.$$

$$13. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + \mathcal{C}.$$

$$14. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + \mathcal{C}.$$

TEOREMA 25. (*Formula Leibniz-Newton*)

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă care admite primitive. Atunci oricare ar fi F o primitivă a lui f pe $[a, b]$, avem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Exemple:

$$\begin{aligned} 1. \int_0^2 (3^x + 3x^3) dx &= \left. \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3x^4}{4} \right|_0^2 = \frac{3^2}{\ln 3} - \frac{3^0}{\ln 3} + \frac{3 \cdot 2^4}{4} - \frac{3 \cdot 0^4}{4} = \\ &= \frac{8}{\ln 3} + 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int_{-1}^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}} dx &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 5} \right) \Big|_{-1}^4 = \ln \left(4 + \sqrt{21} \right) - \ln \left(-1 + \sqrt{6} \right) = \\ &= \ln \left(\frac{4 + \sqrt{21}}{-1 + \sqrt{6}} \right). \end{aligned}$$

Aplicații ale integralelor Riemann pe dreapta reală

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$. Atunci:

1. aria domeniului $D \subset \mathbb{R}^2$ mărginit de graficul funcției f , axa Ox , și dreptele de ecuații $x = a$ și $x = b$, este dată de formula

$$\mathcal{A}(D) = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Exemplu: Dacă $f(x) = x$, atunci, calculând aria subgraficului funcției f mărginite de axa Ox și de dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = c > 0$, regăsim formula ariei unui triunghi dreptunghic isoscel cu catetele de lungime c :

$$\mathcal{A}_\Delta = \int_0^c |x| dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^c = \frac{c^2}{2}.$$

2. volumul corpului $D \subset \mathbb{R}^3$ obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox este dat de formula

$$\mathcal{V}(D) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Exemplu: Dacă $f; [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = r > 0$, atunci, calculând volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox , regăsim formula volumului unui cilindru circular drept de rază r și înălțime h :

$$\mathcal{V}_{\text{cilindru}} = \pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 x \Big|_0^h = \pi r^2 h.$$

Revenind cu discuția la calculul integralelor Riemann, trebuie spus că, spre deosebire de ceea ce s-a învățat în liceu, aici vom întâlni și situații în care intervalul de integrare este nemărginit.

DEFINIȚIA 46. *Integralele pentru care intervalul de integrare este nemărginit se numesc integrale improprii în raport cu intervalul (sau integrale improprii de speța a întâi).*

Aceste integrale se rezolvă în mod obișnuit doar că atunci când unul dintre capetele intervalului este nemărginit vom calcula limita în capătul respectiv. Dacă această limită nu există sau nu este finită, funcția nu este integrabilă pe intervalul respectiv.

Ne putem întâlni cu unul dintre următoarele cazuri.

1. $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$
2. $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$
3. $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty; b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$

Example:

1. $\int_{-\infty}^2 5x^4 dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} x^5|_a^2 = 2^5 - \lim_{a \rightarrow -\infty} a^5 = +\infty.$ Prin urmare funcția f dată de expresia $f(x) = 5x^4$ nu este integrabilă pe intervalul $(-\infty, 2)$. (Spunem că integrala sa este divergentă pe acest interval.)
2. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg b - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$ Prin urmare funcția f dată de expresia $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ este integrabilă pe intervalul $(1, \infty)$. (Spunem că integrala sa este convergentă pe acest interval.)

De asemenea, ne putem întâlni și cu situația în care integrandul (adică funcția ce se dorește a fi integrată) este nemărginit pe intervalul de integrare.

DEFINIȚIA 47. *Integralele pentru care integrandul este nemărginit pe intervalul de integrare se numesc integrale improprii în raport cu funcția (sau integrale improprii de speța a doua).*

De această dată vom utiliza limitele laterale. Ne putem întâlni cu unul dintre următoarele cazuri.

1. Dacă f nu este definită în a , atunci $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a; t > a} \int_t^b f(x) dx.$
2. Dacă f nu este definită în b , atunci $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b; t < b} \int_a^t f(x) dx.$

Exemplu: $\int_0^4 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0; t > 0} \ln |x| \Big|_t^4 = \ln 4 - \lim_{t \rightarrow 0; t > 0} \ln t = 4 + \infty = +\infty.$ Așadar această integrală este divergentă.

Dacă se întâmplă ca într-un interval să apară mai multe puncte din acestea în care funcția nu este definită, vom ajunge la unul dintre cele două cazuri expuse mai sus folosind proprietatea de aditivitate a integralei:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

unde $c \in [a, b]$.

Să recapitulăm acum câteva dintre tehnicile de calcul al integralelor.

TEOREMA 26. (*Formula de integrare prin părți*)

Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții derivabile cu derivate integrabile. Atunci

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Aplicații: Calculați:

1. $\int_1^2 xe^x dx$;
2. $\int_1^3 \ln x dx$;
3. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 x^2 \cos x dx$.

TEOREMA 27. (*Prima formulă de schimbare de variabilă*)

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta]$. Atunci

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt.$$

Aplicații: Calculați:

1. $\int_{-3}^2 e^{3x} dx$;
2. $\int_0^{\pi} x \sin(x^2 + 1) dx$;
3. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+3}$.

$$4. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2} dx.$$

Trecem acum la integrarea funcțiilor raționale.

DEFINIȚIA 48. Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval. O funcție $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ se numește rațională dacă și numai dacă există $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, oricare ar fi $x \in J$.

Un rol special este jucat de funcțiile raționale simple, încadrate în următoarele trei categorii:

$$a) f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \text{ unde } a_k \in \mathbb{R}, \text{ oricare ar fi } k, n \in \mathbb{N}. \text{ Avem } \int_b^c f(x) dx = \left(a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_b^c.$$

$$b) f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}. \text{ Avem de tratat două situații.}$$

$$\text{Dacă } n \geq 2, \int_b^c f(x) dx = \int_b^c (x-a)^{-n}(x-a)' dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} \Big|_b^c.$$

$$\text{Dacă } n = 1, \int_b^c f(x) dx = \ln|x-a| \Big|_b^c.$$

$$c) f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*, A, B, p, q \in \mathbb{R}, \text{ iar } p^2 - 4q < 0. \text{ Pentru calculul integralelor din acest tip de funcții se utilizează forma canonică a ecuației de gradul II, adică faptul că } x^2 + px + q = (x + p/2)^2 - \Delta/4.$$

Celelalte funcții raționale pot fi descompuse în funcții raționale simple. Vom arăta cum poate fi descompusă în funcții raționale simple o funcție de forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ în care $\text{grad}(P(x)) < \text{grad}(Q(x))$. Cazul în care $\text{grad}(P(x)) \geq \text{grad}(Q(x))$ se reduce la cazul anterior aplicând teorema împărțirii cu rest:

$$\text{dacă } P(x) : Q(x) = L(x) \text{ rest } R(x),$$

atunci

$$P(x) = Q(x) \cdot L(x) + R(x),$$

deci

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

cu $\text{grad}(R(x)) < \text{grad}(Q(x))$.

TEOREMA 28. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție rațională, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, cu $\text{grad}(P(x)) < \text{grad}(Q(x))$. Dacă descompunerea lui Q în factori ireductibili peste $\mathbb{R}[X]$ este*

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \dots (x^2+p_lx+q_l)^{m_l},$$

unde $n_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}$, cu $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, l\}$, atunci

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{A_i^1}{x-a_i} + \frac{A_i^2}{(x-a_i)^2} + \dots + \frac{A_i^{n_i}}{(x-a_i)^{n_i}} \right) + \\ + \sum_{j=1}^l \left(\frac{B_j^1x + C_j^1}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{B_j^2x + C_j^2}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \dots + \frac{B_j^{m_j}x + C_j^{m_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{m_j}} \right)$$

iar coeficienții care apar la numărător se determină prin metoda identificării coeficienților de la polinoame egale.

Exemplu:
$$f(x) = \frac{x^4 + 4}{x(x-5)^3(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{(x-5)^2} + \frac{D}{(x-5)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+x+1)^2}.$$

Aplicații: Calculați:

1. $\int_{-1}^4 \frac{4}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx;$
2. $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+3)(x+1)} dx.$

Încheiem recapitularea metodelor studiate în liceu cu a doua schimbare de variabilă.

TEOREMA 29. (*A doua schimbare de variabilă*)
 Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, bijectivă, derivabilă și cu derivata nenulă. Atunci

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Trebuie precizat că nu există o regulă general valabilă de alegere a funcției φ . Cu toate acestea, anumite cazuri sunt standard, și prezentăm două astfel de cazuri.

1. $\int_b^c R(a^x) dx$, unde R este o funcție rațională.

Metodă de rezolvare: Se efectuează schimbarea de variabilă $a^x = t$, de unde se obține că $x = \log_a t = \varphi(t)$.

2. $\int_b^c R(\sqrt[k_1]{x}, \sqrt[k_2]{x}, \dots, \sqrt[k_n]{x}) dx$, unde R este o funcție rațională.

Metodă de rezolvare: Se calculează cel mai mic multiplu comun al ordinilor radicalilor, $m = [k_1, k_2, \dots, k_n]$, și apoi se efectuează schimbarea de variabilă $\sqrt[m]{x} = t$, de unde se obține că $x = t^m = \varphi(t)$.

Aplicații: Calculați:

1. $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{5 - 6e^x};$
2. $\int_0^{16} \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$

2. Integrale simple cu parametru

DEFINIȚIA 49. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ și $f : A \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că, pentru fiecare $x \in A$, funcția $t \rightarrow f(x, t)$ este integrabilă pe $[a, b]$. Funcția $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ se numește integrală cu parametru (parametrul fiind x).

TEOREMA 30. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f : A \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $A \times [a, b]$. Atunci funcția $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$, este continuă pe A .

TEOREMA 31. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f : A \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $A \times [a, b]$ și admite derivată parțială în raport cu x care este continuă pe $A \times [a, b]$, atunci funcția $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$, este derivabilă pe A și derivata sa este dată de*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt,$$

această derivată fiind și continuă pe A .

Algoritm de calculare a integralelor cu parametru

Pentru a calcula $\int_a^b f(x, t) dt$ parcurgem următoarele etape:

I notăm $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ și arătăm că f este continuă pe $A \times [a, b]$;

II calculăm $\frac{\partial f}{\partial x}$ și arătăm că este continuă pe $A \times [a, b]$;

III calculăm $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$;

IV determinăm primitivele lui F' , găsim funcția F după condițiile impuse de problemă.

TEOREMA 32. (Teorema lui Fubini)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f : A \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $A \times [a, b]$. Atunci funcția $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$, este integrabilă pe orice interval compact $[\alpha, \beta] \subset A$ și avem

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx \right) dt.$$

De fapt, Teorema lui Fubini ne spune că

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx \right) dt,$$

adică, dacă f este continuă, se poate inversa ordinea în care integrăm.

Exerciții pentru fixarea noțiunilor nou introduse

1. Calculați primitivele:

$$a) \int \left(\frac{1}{x^2 + 5} + \cos x \right) dx;$$

$$b) \int \left(x^{-3} + \frac{1}{3 - x^2} \right) dx;$$

$$c) \int \left(\frac{8}{\sqrt{7 - x^2}} + 14x^{-1} \right) dx;$$

$$d) \int \left(\frac{1}{2x^2 - 3} + 4\operatorname{ctg} x \right) dx;$$

$$e) \int \frac{1}{\sqrt{6x^2 - 8}} dx.$$

2. Calculați următoarele integrale improprii și specificați dacă sunt convergente:

$$a) \int_{-1}^{\infty} (-2x^2 + 5x - 3) dx;$$

$$b) \int_{-\infty}^0 \frac{-7}{4x^2 + 2} dx;$$

$$c) \int_0^2 \frac{x^8 - 3x^5 + x - 11}{x} dx;$$

$$d) \int_5^6 \frac{1}{x - 6} dx;$$

3. Calculați

$$a) \int_{-1}^0 (3x + 16) e^x dx;$$

$$b) \int_{-3}^0 x \sin x dx;$$

$$c) \int_1^e x \ln^2 x dx;$$

$$d) \int_0^3 e^{10x} \cos x dx;$$

$$e) \int_2^3 \frac{1}{2x-3} dx;$$

$$f) \int_0^{\frac{\pi}{16}} \sin(8x) dx;$$

$$g) \int_{-1}^2 x^2 5^{x^3-4} dx;$$

$$h) \int_2^4 \frac{1}{(5x-9)^3} dx;$$

$$i) \int_3^6 \frac{x+3}{x^2+6x-3} dx;$$

$$j) \int_3^6 \frac{dx}{x^2+6x-3};$$

$$k) \int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2+x+2}.$$

4. Calculați

$$a) \int_{-1}^0 \frac{x+2}{(x-1)^3} dx;$$

$$b) \int_2^3 \frac{x+5}{(x+1)^7} dx;$$

$$c) \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx;$$

$$d) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+x};$$

$$e) \int_1^2 \frac{x^2+1}{x^3+5x} dx;$$

$$f) \int_2^3 \frac{x}{(2x^2+7)(x-1)} dx.$$

5. Calculați

$$a) \int_0^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$b) \int_{16}^{81} \frac{\sqrt[4]{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} dx;$$

$$c) \int_0^9 \frac{x + 1}{\sqrt{x} + 1} dx;$$

$$d) \int_7^{26} \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x + 1}};$$

$$e) \int_1^2 \frac{5^x}{5^x + 5} dx;$$

$$f) \int_0^2 \frac{dx}{1 + e^{3x}};$$

$$g) \int_0^1 \frac{dx}{3 - 2e^x};$$

$$h) \int_2^3 \frac{3^{2x}}{4 \cdot 3^x + 2} dx.$$

6. Să se calculeze $\int_0^1 f(x, t) dt$, unde $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, iar

$$f(x, t) = \ln \frac{(1 + xt)(2 - t)}{(1 - xt)(2 + t)}.$$

3. Integrale multiple

În cele ce urmează ne ocupăm de calculul integralelor duble, pentru funcții de două variabile, și de integrale triple, pentru funcții de trei variabile.

DEFINIȚIA 50. Spunem că mulțimea $D \subset \mathbb{R}^N$ este conexă dacă nu există două mulțimi deschise disjuncte $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^N$ astfel încât $D \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap D \neq \emptyset$ și $M_2 \cap D \neq \emptyset$. O mulțime deschisă și conexă se numește domeniu. Un domeniu închis și mărginit se numește domeniu compact.

Fie $D \subset \mathbb{R}^N$ un domeniu compact. Principalele proprietăți care erau valabile în cazul integralelor simple rămân valabile pentru integralele multiple.

PROPRIETATEA 10. Dacă f este continuă pe D , atunci f este integrabilă pe D .

PROPRIETATEA 11. (*Proprietatea de liniaritate*)

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $f, g : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Dacă $N = 2$ atunci

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy.$$

(ii) Dacă $N = 3$ atunci

$$\begin{aligned} & \iiint_D (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) dx dy dz = \\ &= \alpha \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz + \beta \iiint_D g(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

PROPRIETATEA 12. (*Proprietatea de aditivitate a domeniului*)

Fie $f : D = D_1 \cup D_2 \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Dacă $N = 2$ atunci

$$\iint_{D=D_1 \cup D_2} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

(ii) Dacă $N = 3$ atunci

$$\iiint_{D=D_1 \cup D_2} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{D_2} f(x, y, z) dx dy dz.$$

PROPRIETATEA 13. (*Proprietatea de monotonie*)

Fie $f, g : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Dacă $N = 2$ și $f(x, y) \leq g(x, y)$ oricare ar fi $(x, y) \in D$, atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

(ii) Dacă $N = 3$ și $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ oricare ar fi $(x, y, z) \in D$, atunci

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_D g(x, y, z) dx dy dz.$$

PROPRIETATEA 14. Fie $f : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Dacă $N = 2$ atunci

$$\left| \iint_D f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| \, dx dy.$$

(ii) Dacă $N = 3$ atunci

$$\left| \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz \right| \leq \iiint_D |f(x, y, z)| \, dx dy dz.$$

De asemenea, o observație importantă este aceea că

$$\iint_D dx dy = \text{aria domeniului } D,$$

iar

$$\iiint_D dx dy dz = \text{volumul domeniului } D.$$

3.1. Calculul integralelor duble. Considerăm $D = [a, b] \times [c, d]$, deci D este un domeniu dreptunghiular și $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Vom gândi ca la derivarea parțială, adică atunci când integrăm în raport cu x , îl tratăm pe y ca și cum ar fi constantă, iar când integrăm în raport cu y , îl tratăm pe x ca și cum ar fi constantă.

Exemplu: Fie $D = [-1, 1] \times [0, 2]$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3xy^2 - 2$. Atunci

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^2 \left[\int_{-1}^1 (3xy^2 - 2) dx \right] dy \\
&= \int_0^2 \left(3y^2 \int_{-1}^1 x dx - 2 \int_{-1}^1 dx \right) dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{3x^2 y^2}{2} \Big|_{x=-1}^{x=1} - 2x \Big|_{x=-1}^{x=1} \right) dy \\
&= \int_0^2 (-4) dy = -4y \Big|_{y=0}^{y=2} \\
&= -8.
\end{aligned}$$

Fie $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. După cum am văzut din Teorema lui Fubini (Teorema 32), dacă f este continuă, atunci ordinea de integrare nu contează:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Constatăm că are loc această proprietate pe exemplul anterior, în care funcția $f(x, y) = 3xy^2 - 2$ este continuă pe $D = [-1, 1] \times [0, 2]$:

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \left[\int_0^2 (3xy^2 - 2) dy \right] dx \\
&= \int_{-1}^1 (xy^3 - 2y) \Big|_{y=0}^{y=2} dx = \int_{-1}^1 (8x - 4) dx \\
&= -8.
\end{aligned}$$

Dat fiind că la funcții continue nu contează, ordinea de integrare se alege astfel încât calculul să fie mai ușor (numai când avem de-a face cu astfel de funcții).

Ne referim acum la situația în care domeniul D nu este dreptunghic. În această situație recurgem la **schimbarea de variabilă**. Mai exact, facem trecerea de la (x, y) la (u, v) printr-o transformare punctuală T care duce (u, v) în (x, y) :

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

astfel încât $T(D^*) = D$, unde D^* reprezintă noul domeniu. Prin urmare vom avea

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv,$$

unde $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ reprezintă Jacobianul acestei transformări, adică,

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}.$$

Atragem atenția asupra faptului că acest D folosit în notația asociată Jacobianului nu are nicio legătură cu domeniul D . De asemenea, să reținem că în schimbarea de variabilă Jacobianul este în modul.

Constatăm că determinarea transformării T este vitală. Din nefericire, nu există nici aici o alegere universal valabilă pentru T , ci va trebui să ne orientăm după ecuațiile care definesc frontiera domeniului D . O transformare uzuală este următoarea.

Transformarea în coordonate polare

După cum știm, de multe ori, pentru a determina poziția exactă a unui punct M situat în plan, fixăm un reper cartezian xOy și folosim abscisa și ordonata lui M , prin urmare avem $M(x, y)$. O altă modalitate de a stabili poziția lui M în reperul cartezian xOy este folosind lungimea segmentului OM și unghiul făcut de acesta cu axa Ox (în viața reală se ajunge deseori la o anumită destinație folosind o busolă și măsurând distanța parcursă). Așadar, dacă notăm $OM = r$, și notăm cu θ unghiul făcut de OM cu axa Ox , putem face legătura între (x, y) și (r, θ) cu ajutorul funcțiilor trigonometrice:

$$\sin \theta = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}} = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}} = \frac{x}{r}.$$

În consecință, transformarea

$$\begin{cases} x = x(r, \theta) \\ y = y(r, \theta) \end{cases}$$

este dată în mod concret de ecuațiile

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Jacobianul acestei transformări este

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

Exemplu: Calculați $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, unde D reprezintă discul limitat de cercul $\mathcal{C}(A(1, 2), 2)$. Reamintim că ecuația unui cerc de centru $A(x_A, y_A)$ și rază r , notat $\mathcal{C}(A(x_A, y_A), r)$, este

$$\mathcal{C}(A(x_A, y_A), r) : (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2.$$

De aceea, în cazul domeniului nostru avem

$$\mathcal{C}(A(1, 2), 2) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2.$$

Este clar că pentru a calcula această integrală este necesară trecerea la coordonate polare. Însă observăm că centrul cercului nu este situat în centrul sistemului cartezian de coordonate xOy , deci este necesar să facem o translație, ceea ce implică trecerea la coordonate polare sub următoarea formă:

$$\begin{cases} x - 1 = r \cos \theta \\ y - 2 = r \sin \theta, \end{cases}$$

unde $r \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, deci $D^* = [0, 2] \times [0, 2\pi]$ (fără această transformare nu ne putem descurca cu D deoarece nu putem diviza integrala dublă în două integrale simple). Ajungem la

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} [(r \cos \theta + 1)^2 + (r \sin \theta + 2)^2] r d\theta \right) dr$$

care se rezolvă în mod obișnuit deoarece noul domeniu de integrare D^* este un domeniu dreptunghiular.

De remarcat faptul că D poate fi un semidisc, caz în care, când trecem la coordonate polare, $\theta \in [0, \pi]$, sau $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \pi]$, etc. De asemenea, putem avea domenii care reprezintă un sfert de disc, $2/3$ dintr-un disc etc.

3.2. Calculul integralelor triple. Integralele triple se tratează în mod similar celor duble. Considerăm $D = [a, b] \times [c, d] \times [\alpha, \beta]$, deci D este un domeniu paralelipipedic. Fie $f : [a, b] \times [c, d] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. La fel ca la integralele duble, vom folosi faptul că, dacă f este continuă, atunci nu contează ordinea de integrare.

Exemplu: Fie $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 3] \times [1, e]$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{y \cos x}{z}$. Calculați $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$.

În situația în care domeniul D nu este paralelipipedic recurgem la **schimbarea de variabilă** făcând trecerea de la (x, y, z) la (u, v, w) printr-o transformare punctuală T care duce (u, v, w) în (x, y, z) prin

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

astfel încât $T(D^*) = D$, unde D^* reprezintă noul domeniu. Vom avea

$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{D^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw, \end{aligned}$$

unde $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ reprezintă Jacobianul acestei transformări, adică,

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u, v, w) \end{vmatrix}.$$

Din nou, nu există nici aici o alegere universal valabilă pentru T , astfel că ne orientăm după ecuațiile care definesc frontiera domeniului D . O transformare uzuală este următoarea.

Transformarea în coordonate cilindrice

Dacă suntem în spațiu, cu un reper cartezian $Oxyz$ fixat, un punct M este unic determinat de coordonatele sale (x, y, z) , unde $x = \text{pr}_{Ox}M$, $y = \text{pr}_{Oy}M$, $z = \text{pr}_{Oz}M$. O altă modalitate de a stabili poziția lui M în reperul cartezian $Oxyz$ este folosind lungimea segmentului $OM' = r$, unde $OM' = \text{pr}_{xOy}OM$, unghiul θ făcut de OM' cu axa Ox și $z = \text{pr}_{Oz}M$. Cu ajutorul funcțiilor trigonometrice, transformarea

$$\begin{cases} x = x(r, \theta, z) \\ y = y(r, \theta, z) \\ z = z(r, \theta, z) \end{cases}$$

este dată în mod concret de ecuațiile

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z. \end{cases}$$

Jacobianul acestei transformări este

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial x}{\partial z}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial y}{\partial z}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial z}{\partial z}(r, \theta, z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Exerciții pentru fixarea noțiunilor nou introduse

1. Calculați $\iint_D f(x, y) dx dy$, unde:

$$a) D = [0, 6] \times [0, 1] \text{ și } f(x, y) = \frac{\sqrt{xy}}{x + 2};$$

- b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2, 1], y \in [0, \pi]\}$ și $f(x, y) = x \cos y - y^2 e^x$;
- c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ și $f(x, y) = \frac{y}{1 + xy}$;
- d) D reprezintă discul limitat de cercul $\mathcal{C}(A(2, -3), 3)$ și $f(x, y) = 3x - 8y$;
- e) D reprezintă un sfertul de disc din cel de-al doilea cadran al cercului $\mathcal{C}(A(5, 5), 1)$ și $f(x, y) = xy$.

2. Calculați $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$, unde:

- a) $D = [-1, 4] \times [-2, 0] \times [1, 3]$ și $f(x, y, z) = 1$. Se poate determina valoarea acestei integrale fără a utiliza calculul integral?
- b) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [1, 2], y \in [0, 2\sqrt{2}], z \in [1, e]\}$ și $f(x, y, z) = \frac{4^x}{z(2 - y^2)}$;
- c) D reprezintă discul cilindrului circular drept care are ca bază cercul $\mathcal{C}(A(-4, -1), 3)$ și generatoarea de lungime 2, iar $f(x, y, z) = x + y^2 + z^4$.

4. Integrala curbilinie de primul tip (de speța întâi)

DEFINIȚIA 51. Orice funcție continuă $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ se numește drum în $\mathbb{R}^N$, iar $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ reprezintă capetele drumului γ . Dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, atunci spunem că γ este drum închis.

Dacă $\gamma = (f_1, f_2, \dots, f_N)$, atunci egalitățile

$$\begin{cases} f_1(t) = x_1 \\ f_2(t) = x_2 \\ \vdots \\ f_N(t) = x_N \end{cases}$$

se numesc ecuații parametrice ale drumului γ , iar

$$(\gamma) = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t) \mid t \in [a, b]\}$$

se numește imaginea drumului γ sau traiectoria drumului γ .

DEFINIȚIA 52. *Un drum $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ se numește neted dacă $\gamma \in C^1$ și $\gamma'(t) \neq 0$, oricare ar fi $t \in [a, b]$.*

De exemplu, drumul $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ este un drum neted și închis, de ecuații parametrice

$$\begin{cases} \cos t = x \\ \sin t = y \end{cases}$$

care are ca traiectorie cercul trigonometric $x^2 + y^2 = 1$. De asemenea, dacă vom considera drumul $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$, atunci acesta are ca traiectorie cercul centrat în origine de rază r : $x^2 + y^2 = r^2$. Dacă vrem să gândim acest cerc în dimensiunea 3, avem $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$, deci ecuațiile sale parametrice sunt

$$\begin{cases} \cos t = x \\ \sin t = y \\ 0 = z. \end{cases}$$

DEFINIȚIA 53. *Două drumuri $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ și $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^N$ se numesc echivalente dacă există $h : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ bijectivă, continuă, cu inversa continuă, astfel încât $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t))$, oricare ar fi $t \in [a, b]$.*

DEFINIȚIA 54. *Se numește curbă în $\mathbb{R}^N$ orice clasă de drumuri echivalente din $\mathbb{R}^N$. Dacă drumurile dintr-o curbă sunt netede, atunci curba se numește curbă netedă.*

PROPRIETATEA 15. *Toate drumurile care aparțin unei curbe netede au aceeași lungime, iar aceasta se numește lungimea curbei.*

În cele ce urmează, vom nota cu γ fie un drum, fie o curba generată de acesta.

DEFINIȚIA 55. *Fie $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ o curbă netedă de ecuații*

$$\begin{cases} f(t) = x \\ g(t) = y \end{cases}$$

și fie F o funcție continuă (deci integrabilă) pe un domeniu ce conține imaginea lui γ . Atunci integrala curbilinie de primul tip (sau de speța

întâi) a lui F de-a lungul lui γ este dată de formula

$$\int_{\gamma} F(x, y) dl = \int_a^b F((f(t), g(t)) \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt.$$

În mod similar, pentru o curbă netedă $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dată de ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} f(t) = x \\ g(t) = y \\ h(t) = z, \end{cases}$$

definim integrala curbilinie de primul tip (sau de speța întâi) a lui F de-a lungul lui γ prin formula

$$\int_{\gamma} F(x, y, z) dl = \int_a^b F((f(t), g(t), h(t)) \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt.$$

De reținut că atunci când calculăm o integrală curbilinie de primul tip nu contează sensul de parcurgere al lui γ . De asemenea, dacă γ este dat de o ecuație de tipul $y = \tilde{f}(x)$, putem nota $x = t$ pentru a obține o parametrizare a curbei γ .

Aplicații ale integralei curbilinii de primul tip

1. **Lungimea unei curbe:** curba reprezentată de drumul neted $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ are lungimea $l_{\gamma} = \int_{\gamma} dl$.
2. **Masa unui fir material:** dacă imaginea (γ) a drumului neted $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ modelează un fir material, iar $\rho : (\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă care asociază fiecărui punct $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in (\gamma)$ densitatea $\rho(x_1, x_2, \dots, x_N)$ a firului în acel punct, atunci masa firului este $m = \int_{\gamma} \rho(x_1, x_2, \dots, x_N) dl$.

Exemple:

1. Pentru $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ calculând lungimea curbei reprezentate de γ regăsim formula de lungime a cercului

de rază r . Într-adevăr, ținând cont că ecuațiile parametrice ale acestui drum sunt

$$\begin{cases} r \cos t = x \\ r \sin t = y, \end{cases}$$

deci

$$f(t) = r \cos t, \quad g(t) = r \sin t,$$

avem

$$l_\gamma = \int_\gamma dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = rt \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi r = l_{C(O(0,0),1)}.$$

2. Să se calculeze masa unui fir material cu densitatea $\rho(x, y, z) = xyz + 5$, modelat de imaginea unei curbe $\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$, care este dată prin ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t + 1 \\ z = 1 - 2t. \end{cases}$$

5. Integrala de suprafață de primul tip (de speța întâi)

DEFINIȚIA 56. Orice funcție de clasă C^1 , $S : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ este un domeniu (mulțime deschisă și conexă) se numește pânză netedă. Dacă matricea Jacobiană asociată lui S are rangul doi în orice punct al domeniului D , atunci S se numește pânză netedă nesingulară.

$S(D)$ reprezintă imaginea pânzei S .

DEFINIȚIA 57. Spunem că două pânze $S_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $S_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sunt echivalente dacă și numai dacă există o aplicație $T : D_1 \rightarrow D_2$ bijectivă, de clasă C^1 , cu inversa de clasă C^1 , astfel încât Jacobianul asociat lui T să fie strict pozitiv în fiecare punct din D_1 , iar $S_1 = S_2 \circ T$.

DEFINIȚIA 58. O clasă de pânze netede nesingulare se numește suprafață netedă, iar imaginea unei suprafețe reprezintă imaginea unei pânze din clasa respectivă de echivalență.

TEOREMA 33. Fie $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ (V fiind un domeniu care conține imaginea lui S) o funcție continuă (deci și integrabilă), unde S este o suprafață netedă.

(i) Dacă S este dată de ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

unde $(u, v) \in D$, atunci integrala de suprafață de primul tip (sau de speța întâi) a funcției Φ pe S este dată de

$$\begin{aligned} & \iint_S \Phi(x, y, z) dS = \\ &= \iint_D \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} du dv, \end{aligned}$$

unde

$$A(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix},$$

$$B(u, v) = \frac{D(x, z)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix},$$

$$C(u, v) = \frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}.$$

(ii) Dacă S este dată explicit de ecuația

$$z = f(x, y), \quad \text{unde } (x, y) \in D,$$

atunci integrala de suprafață de primul tip (sau de speța întâi) a funcției Φ pe S este dată de

$$\iint_S \Phi(x, y, z) dS =$$

$$= \iint_D \Phi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Aplicații ale integralei curbilinii de primul tip

1. **Aria unei suprafețe:** aria suprafeței $S : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ este $\mathcal{A}_S = \iint_S dS$.
2. **Masa unei suprafețe:** dacă funcția de integrat Φ reprezintă densitatea materialului din care este confecționată suprafața S , atunci integrala de suprafață de primul tip a funcției Φ pe S reprezintă masa suprafeței S .

Exemplu: Ținând cont că o sferă centrată în origine și de rază R este dată de ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, și că ea se parametrizează astfel:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \theta, \end{cases}$$

cu $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$, putem "recupera" formula ariei sferei folosind integrala de suprafață de primul tip a funcției $\Phi \equiv 1$ pe sferă. Mai exact,

$$\mathcal{A}_S = \iint_S dS = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{A^2(\varphi, \theta) + B^2(\varphi, \theta) + C^2(\varphi, \theta)} d\varphi \right) d\theta,$$

unde

$$A(\varphi, \theta) = \frac{D(x, y)}{D(\varphi, \theta)} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \end{array} \right|,$$

$$B(\varphi, \theta) = \frac{D(x, z)}{D(\varphi, \theta)} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \end{array} \right|,$$

$$C(\varphi, \theta) = \frac{D(y, z)}{D(\varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \end{vmatrix},$$

iar

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) &= -R \sin \varphi \sin \theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\varphi, \theta) &= R \cos \varphi \cos \theta, \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) &= R \cos \varphi \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\varphi, \theta) &= R \sin \varphi \cos \theta, \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) &= 0, & \frac{\partial z}{\partial \theta}(\varphi, \theta) &= -R \sin \theta. \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$A(\varphi, \theta) = \begin{vmatrix} -R \sin \varphi \sin \theta & R \cos \varphi \cos \theta \\ R \cos \varphi \sin \theta & R \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} = -R^2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$B(\varphi, \theta) = \begin{vmatrix} -R \sin \varphi \sin \theta & -R \cos \varphi \cos \theta \\ 0 & -R \sin \theta \end{vmatrix} = R^2 \sin \varphi \sin^2 \theta,$$

$$C(\varphi, \theta) = \begin{vmatrix} R \cos \varphi \sin \theta & R \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & -R \sin \theta \end{vmatrix} = -R^2 \cos \varphi \sin^2 \theta,$$

de unde obținem că

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_S &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{R^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + R^4 \sin^2 \varphi \sin^4 \theta + R^4 \cos^2 \varphi \sin^4 \theta} d\varphi \right) d\theta, \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{R^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + R^4 \sin^4 \theta} d\varphi \right) d\theta, \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} R^2 |\sin \theta| d\varphi \right) d\theta = \int_0^\pi \left(R^2 \sin \theta \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \right) d\theta, \\ &= -2\pi R^2 \cos \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Menționăm că în calculele de mai sus s-a folosit formula fundamentală a trigonometriei: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ și faptul că funcția $\sin$ este pozitivă pe $[0, \pi]$.

Exerciții pentru fixarea noțiunilor nou introduse

1. Să se calculeze lungimea curbei $\gamma : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ date de ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = t + 2 \end{cases}$$

În plus, știind că densitatea firului de material modelat de (γ) este dată de funcția $\rho(x, y) = x^2 - 7y + 1$, calculați masa acestui fir de material.

2. Să se calculeze $\int_{\gamma} (x + 2y + 3z) dl$, unde $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

3. Să se calculeze $\int_{\gamma} xy dl$, unde γ este dată de ecuația $y = 2x^2$, cu $x \in [-3, 3]$. (Indiciu: notăm $x = t$. De asemenea, reamintim că dacă f este funcție pară, atunci $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$, iar dacă f este funcție impară, atunci $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.)

4. Să se calculeze $\iint_S (2z + 3) dS$ unde S este dată parametric prin

$$\begin{cases} x = 2u \cos v \\ y = -2u \sin v \\ z = 3u, \end{cases}$$

unde $u \in [0, 1]$, $v \in [0, \pi]$.

5. Să se calculeze aria unei suprafețe S date de ecuația $z = x + 4y$, $(x, y) \in [1, 2] \times [0, 2]$. În plus, știind că densitatea materialului din care este confecționată suprafața este $\rho(x, y, z) = y^3 + 3xy + 2z^2$, să se calculeze masa acestei suprafețe.