Dr. Aurel Diamandescu

MATEMATICI GENERALE

SINTEZE

(TEORIE ŞI PROBLEME)

Pentru studenţii anului I,
cursuri cu frecvenţă redusă,
Facultatea de Electromecanică.

2005

Prefaţă

Această lucrare tratează teme referitoare la capitole importante din Analiza matematică

Funcţii continue,
Funcţii derivabile,
Funcţii integrabile.

Metoda folosită: fiecare problemă este complet rezolvată şi este urmată de comentarii şi de o aducere aminte nu numai a rezultatelor teoretice folosite în rezolvare, dar şi a altor rezultate conexe. La rândul lor, ele sunt însoţite de exemple.

Dorinţa autorului este ca lucrarea să fie de un real ajutor studenţilor Facultăţii de electromecanică, anul I (F.R) în străduinţele lor de înţelegere şi însuşire a unor cunoştinţe de Analiză matematică.
Trimiterile de forma "vezi Teorema 5.7.17" se referă la Cursul de Analiză matematică, vol. I, II, Ed. Universitaria, Craiova, 2005 al autorului. Consultarea acestei cărţi este necesară pentru aprofunderea noţiunilor prezentate în aceste sinteze.
Autorul precizează faptul că aceste sinteze sunt o parte dintr-o lucrare mai amplă ce va apare în curând la Editura Universitaria din Craiova.

Craiova, Noiembrie 2005 Dr. Aurel Diamandescu

CAPITOLUL 1

Funcţii continue

Problema 1

Folosind definiţia $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcţii într-un punct, să se arate că

a). $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^3 + 3x - 5\right) = 9$;

b). $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-2}{|x-5|} = +\infty$;

Rezolvare. Definiţia $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcţii reale de variabilă reală într-un punct este Definiţia 4.1.6.

a). Limita $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^3 + 3x - 5\right) = 9$ se încadrează în pct. 1 al Definiţiei amintite. Ca urmare, avem

$$\lim_{x\to 2} \left(x^3 + 3x - 5\right) = 9 \Longleftrightarrow$$
$$(\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\colon\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ 0 < |\ x - 2\ | < \delta \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow |\ x^3 + 3x - 14\ | < \varepsilon).$$

Fie un $\delta \in (0, 1)$ ce va fi determinat ulterior şi fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 < |\ x - 2\ | < \delta$. Atunci,

$$\begin{aligned} |\ x^3 + 3x - 5 - 9\ | &= |\ x^3 + 3x - 14\ | = \\ &= |\ (x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 15(x-2)\ | \le \\ &\le |\ x-2\ |^3 + 6|\ x-2\ |^2 + 15|\ x-2\ | < \\ &< \delta^3 + 6\delta^2 + 15\delta < 22\delta. \end{aligned}$$

Ca urmare, pentru $\varepsilon > 0$ dat, alegem $\delta(\varepsilon) = \min\{1, \frac{\varepsilon}{22}\}$ şi atunci, pentru $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 < |\ x - 2\ | < \delta(\varepsilon)$ avem $|\ x^3 + 3x - 5 - 9\ | < \varepsilon$.

Aşadar, $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^3 + 3x - 5\right) = 9$

b). Limita $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-2}{|x-5|} = +\infty$ se încadrează în pct. 2 al Definiţiei amintite. Ca urmare, $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-2}{|x-5|} = +\infty \Longleftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}, 0 < |\ \mathrm{x} - 5\ | < \delta \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{x} - 2}{|\ \mathrm{x} - 5\ |} > \varepsilon).$$

Fie un $\delta > 0$ ce va fi determinat ulterior şi fie x $\in \mathbb{R}$ astfel încât $0 < |\ \mathrm{x} - 5\ | < \delta$. Atunci,

$$\frac{\mathrm{x} - 2}{|\ \mathrm{x} - 5\ |} = \frac{\mathrm{x} - 5 + 3}{|\ \mathrm{x} - 5\ |} = \frac{\mathrm{x} - 5}{|\ \mathrm{x} - 5\ |} + \frac{3}{|\ \mathrm{x} - 5\ |} > \frac{3}{\delta} - 1.$$

Condiţia $\frac{3}{\delta} - 1 \geq \varepsilon$ se verifică pentru $\delta \in (0, \frac{3}{\varepsilon + 1}]$.

Ca urmare, pentru $\varepsilon > 0$ dat, alegem $\delta(\varepsilon) = \frac{3}{\varepsilon + 1}$ şi atunci, pentru orice x $\in \mathbb{R}$ astfel încât $0 < |\ \mathrm{x} - 5\ | < \delta(\varepsilon)$ avem $\frac{\mathrm{x} - 2}{|\ \mathrm{x} - 5\ |} > \varepsilon$.

Aşadar, $\lim\limits_{\mathrm{x} \to 5} \frac{\mathrm{x} - 2}{|\ \mathrm{x} - 5\ |} = +\infty$.

Observaţii. 1. Pentru o funcţie f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, limita $\lim\limits_{\mathrm{x} \to \mathrm{a}} \mathrm{f(x)} = \ell$ prezintă 9 cazuri diferite, după cum a şi ℓ sunt finite sau $\pm\infty$. Toate aceste cazuri sunt cuprinse în Definiţia 4.1.6. Două dintre ele au fost ilustrate mai sus.
2. Din cele de mai sus se poate deduce următoarea schemă de aplicare a definiţiei $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcţii într-un punct. Ne situăm în cazul a şi ℓ finite. Pentru un $\delta > 0$ şi x astfel încât $|\ \mathrm{x} - \mathrm{a}\ | < \delta$, în expresia $|\ \mathrm{f(x)} - \ell\ |$ punem în evidenţă pe $|\ \mathrm{x} - \mathrm{a}\ |$ şi facem majorarea $|\ \mathrm{f(x)} - \ell\ | \leq \mathrm{F}(\delta)$. Punem condiţia $\mathrm{F}(\delta) < \varepsilon$ şi rezolvăm această inecuaţie cu necunoscuta δ, obţinând soluţia $\delta < \mathrm{g}(\varepsilon)$. Luând $\delta(\varepsilon)$ în intervalul $(0,\mathrm{g}(\varepsilon))$, condiţia din definiţie se verifică şi ca urmare am demonstrat că $\lim\limits_{\mathrm{x} \to \mathrm{a}} \mathrm{f(x)} = \ell$.
În cazul în care a şi ℓ nu sunt finite, se procedează asemănător.
3. Facem precizarea că şi în domeniul limitelor de funcţii avem un analog al Principiului cleştelui de la şiruri (vezi Teoremele 4.1.7, 4.1.8).
4. Cele spuse mai sus rămân valabile şi pentru limitele laterale, cu adaptările corespunzătoare.

Problema 2

Se dau funcţiile f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \mathrm{x}^2, & \text{dacă } \mathrm{x} \neq 0 \\ \\ \mathrm{a}, & \text{dacă } \mathrm{x} = 0 \end{cases}, \ \mathrm{g(x)} = \begin{cases} \mathrm{x}, & \text{dacă } \mathrm{x} \in \mathbb{Q} \\ \\ 0, & \text{dacă } \mathrm{x} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

unde a este un număr real nenul.
Să se studieze existenţa limitelor $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0} (\mathrm{f} \circ \mathrm{g})(\mathrm{x})$ şi $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0} (\mathrm{g} \circ \mathrm{f})(\mathrm{x})$.

Rezolvare. Folosim Definiţia 1.2.10 a compunerii a două funcţii şi Criteriul lui Heine (Teorema 4.1.1) privind limita unei funcţii într-un punct.

Se constată că $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0} (\mathrm{f} \circ \mathrm{g})(\mathrm{x})$ nu există în timp ce $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0} (\mathrm{g} \circ \mathrm{f})(\mathrm{x})$ există şi este egală cu 0. ■

Observaţii. 1. Criteriul lui Heine (Teorema 4.1.1 sau varianta sa mai rafinată, Teorema 4.1.2) este o condiţie necesară şi suficientă de existenţă a limitei unei funcţii într-un punct. El se mai numeşte şi Definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct.
Criteriul lui Heine şi diverse variante ale lui sunt des utilizate în probleme privind limita unei funcţii într-un punct.
Folosirea Criteriului lui Heine în probleme privind existenţa limitei unei funcţii într-un punct se face după modelul următor: O funcţie $\mathrm{f} : \mathrm{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limita ℓ în punctul $\mathrm{a} \in \mathrm{D}'$ dacă se verifică condiţia: oricare ar fi şirul $(\mathrm{x_n})$ de elemente din D, diferite de a şi convergent la a, avem $\ell = \lim \mathrm{f}(\mathrm{x_n})$.
Folosirea Criteriului lui Heine în probleme privind inexistenţa limitei unei funcţii într-un punct se face după modelul următor: O funcţie $\mathrm{f} : \mathrm{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu are limită (nu are limita ℓ) în punctul $\mathrm{a} \in \mathrm{D}'$ dacă se verifică condiţia: există un şir $(\mathrm{x_n})$ de elemente din D, diferite de a şi convergent la a şi astfel încât $\lim \mathrm{f}(\mathrm{x_n})$ nu există (respectiv, nu are limita ℓ). Practic, se determină două şiruri $(\mathrm{x'_n})$ $(\mathrm{x''_n})$ din D, convergente la a astfel încât $\lim \mathrm{f}(\mathrm{x'_n})$ şi $\lim \mathrm{f}(\mathrm{x''_n})$ sunt diferite între ele (respectiv, una dintre ele diferită de ℓ) (acum, şirul $(\mathrm{x_n})$ este şirul intercalat $\mathrm{x'_1}, \mathrm{x''_1}, \mathrm{x'_2}, \mathrm{x''_2}, \ldots$).
2. Stabilirea existenţei sau inexistenţei limitei unei funcţii într-un punct se poate face şi cu definiţia (în diversele ei variante - cu vecinătăţi

sau $\varepsilon - \delta$) sau folosind proprietăţile funcţiilor care au limită într-un punct.
3. Problema se poate rezolva şi altfel:
– făcând compunerea celor două funcţii
– aplicând Limita funcţiei compuse (Teorema 4.1.5).
Iată, pe scurt, rezolvarea cu această ultimă idee:
Se demonstrează mai întâi că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Se mai observă că $f(x) \neq 0$ pentru $x \neq 0$ şi că g nu are această proprietate.
Referitor la limita $\lim\limits_{x\to 0} (\, g \circ f \,)(x)$, toate condiţiile din Teorema 4.1.5 se verifică. Ca urmare, $\lim\limits_{x\to 0} (\, g \circ f \,)(x) = 0$.
Referitor la limita $\lim\limits_{x\to 0} (\, f \circ g \,)(x)$, toate condiţiile din Teorema 4.1.5, cu excepţia uneia, se verifică. Ca urmare, Teorema nu se poate aplica.
Se vede de aici că ipoteza iii) din Teorema 4.1.5 este esenţială.
4. În condiţiile Teoremei 4.1.5, se spune că făcând substituţia (sau schimbarea de variabilă) $y = f(x)$ avem

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to y_0} g(y) = z_0, \text{ unde } \lim_{x\to a} f(x) = y_0.$$

Problema 3

Să se calculeze următoarele limite:
i). $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$; ii). $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$; iii). $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$; $m, n \in \mathbb{N}$.
iv). $\lim\limits_{x\to\infty} x\arcsin \frac{x+2}{\sqrt{2x^4 - x^2 - 1}}$.

Rezolvare. i). Deoarece $\lim\limits_{x\to 1} (x^m - 1) = 0$, limita prezintă nedeterminarea $\frac{0}{0}$. Pentru îndepărtarea ei, descompunem polinoamele în factori şi simplificăm:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1} = \frac{m}{n}.$$

ii). Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} (x^m - 1) = \infty$, limita prezintă nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$. Pentru îndepărtarea ei, scoatem factori comuni pe aceia care provoacă nedeterminarea:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^m\left(1 - x^{-m}\right)}{x^n(1 - x^{-n})} = \lim_{x\to\infty} x^{m - n}\frac{1 - x^{-m}}{1 - x^{-n}}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{dacă } m = n \\ 0, & \text{dacă } m < n \\ \infty, & \text{dacă } m > n \end{cases}.$$

iii). Se procedează asemănător ca mai sus, cu o mică schimbare în final:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^m\left(1 - x^{-m}\right)}{x^n(1 - x^{-n})} = \lim_{x\to-\infty} x^{m - n}\frac{1 - x^{-m}}{1 - x^{-n}}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{dacă } m = n \\ 0, & \text{dacă } m < n \\ \infty, & \text{dacă } m > n,\ m - n = \text{nr. par} \\ -\infty, & \text{dacă } m > n,\ m - n = \text{nr. impar} \end{cases}.$$

iv). Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + 2}{\sqrt{2x^4 - x^2 - 1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x(1 + \frac{2}{x})}{x^2\sqrt{2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}}$ $= 0$, limita prezintă nedeterminarea $0{\cdot}\infty$. Pentru îndepărtarea ei, amplificăm cu $\sin u(x)$, unde

$$u(x) = \arcsin \frac{x + 2}{\sqrt{2x^4 - x^2 - 1}} \to 0 \text{ pentru } x \to \infty$$

şi folosim limita fundamentală a sinusului, vjj):

$$\lim_{x\to\infty} x\arcsin \frac{x + 2}{\sqrt{2x^4 - x^2 - 1}} = \lim_{x\to\infty} x\frac{u(x)}{\sin u(x)} \cdot \sin u(x) =$$

$$= 1\cdot \lim_{x\to\infty} x\frac{x + 2}{\sqrt{2x^4 - x^2 - 1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x})}{x^2\sqrt{2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Se vede că nedeterminarea $0{\cdot}\infty$ s-a transformat - prin limita fundamentală a sinusului - în nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$ şi aceasta a fost îndepărtată prin simplificarea forţată cu x^2.

Observaţie. Reamintim câteva chestiuni în legătură cu calculul limitelor de funcţii.
Se ştie că limita sumei a două funcţii este egală cu suma limitelor, dacă acestea există şi suma lor are sens; nu are sens operaţia $\infty - \infty$. În acest caz se recomandă transformarea funcţiei de sub limită; de exemplu, în cazul sumei sau diferenţei de radicali, este indicată amplificarea cu conjugata; uneori, un factor comun forţat este benefic.

Alteori, se poate folosi o limită fundamentală, de exemplu, j) sau jj). de mai jos.
Exemple. 1°. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{2}.$
Se vede că limita a prezentat nedeterminarea $\infty-\infty$; amplificând cu conjugata, limita prezintă nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$. Scoaterea unui factor forţat si simplificarea cu el îndepărtează această nedeterminare şi permite aplicarea regulii generale: limita unui cât (Teorema 4.1.6).
2°. $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\frac{e^{-x}}{x}+1\right)=\lim\limits_{y\to\infty}-y\left(1-\frac{e^y}{y}\right)=+\infty.$
Se vede că limita a prezentat nedeterminarea $\infty-\infty$; scoaterea factorului forţat x şi schimbarea de variabilă $x=-y$ conduce la limita unui produs în care fiecare factor are limita $-\infty$. În sfârşit, regula generală privind limita unui produs (vezi din nou Teorema 4.1.6) ne dă rezultatul final.
Se ştie că limita produsului a două funcţii este egală cu produsul limitelor, dacă acestea există şi produsul lor are sens; nu are sens operaţia $0\cdot\infty$. În acest caz, se recomandă transformarea funcţiei de sub limită astfel încât unul din factori să aibă limita diferită de 0 şi de $\pm\infty$; limita va fi decisă de factorul rămas. Uneori, se poate folosi o limită fundamentală, de exemplu, v) sau vj).
Exemple. 1°. $\lim\limits_{x\searrow 0}xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{e^y}{y}=\infty$. Se vede că limita (laterală) a prezentat nedeterminarea $0\cdot\infty$. O schimbare de variabilă convenabilă transformă limita în limita fundamentală v).
2°. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x+2}e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{x+2}\cdot(xe^x)=1\cdot\lim\limits_{y\to\infty}\left(-\frac{y}{e^y}\right)=0.$ Se vede că limita a prezentat nedeterminarea $0\cdot\infty$. Separarea unui factor care are limită finită şi o schimbare de variabilă convenabilă transformă limita în limita fundamentală v).
Se ştie că limita câtului a două funcţii este egală cu câtul limitelor, dacă acestea există şi câtul lor are sens; nu au sens operaţiile $\frac{0}{0}$ şi $\frac{\infty}{\infty}$. Dacă limita în cauză prezintă una dintre aceste nedeterminări, pentru îndepărtarea ei se efectuează anumite transformări sau se aplică anumite formule - numite limite fundamentale. De exemplu, la i) am descompus polinoamele în factori şi am simplificat, iar la ii) şi iii) am scos factori comuni forţat pentru ca factorii rămaşi să aibă limită finită, rămânând ca factorii apăruţi să decidă limita.
Se ştie că limita unei puteri este egală cu puterea limitelor, dacă

acestea există şi puterea lor are sens; nu au sens operaţiile 1^∞, 0^0, ∞^0. Dacă limita în cauză prezintă nedeterminarea 1^∞, pentru îndepărtarea ei se foloseşte limita fundamentală a lui e, adică limita jx) de mai jos. Dacă limita în cauză prezintă una din nedeterminările 0^0 sau ∞^0, atunci se logaritmează, nedeterminarea transformându-se în $0\cdot\infty$.

Exemple. 1°. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\frac{x}{x+1}} =$
$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}} = e$. Se vede că limita a prezentat nedeterminarea 1^∞. Am pus în evidenţă la bază pe 1, astfel că am ales $u(x) = \frac{1}{x+1}$. Am transformat expresia (funcţia) de sub limită, pentru a putea aplica limita fundamentală jx).

2°. $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x = \lim\limits_{x\searrow 0} e^{\ln x^x} = e^{\lim\limits_{x\searrow 0}\ln x^x} = e^{\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x} = e^0 = 1$. Se vede că limita a prezentat nedeterminarea 0^0. S-a logaritmat, adică s-a folosit identitatea $a = e^{\ln a}$ (ce rezultă din definiţia logaritmului unui număr într-o bază), apoi s-a permutat limita cu exponenţierea şi limita s-a redus la limita fundamentală vj).

3°. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1$. Se vede că limita a prezentat nedeterminarea ∞^0. S-a logaritmat, apoi s-a permutat limita cu exponenţierea şi limita s-a redus la limita fundamentală vj). Se mai observă că prin schimbarea de variabilă $y = \frac{1}{x}$, limita se reduce la cea anterioară.

Prezentăm mai jos *limite fundamentale* mai des folosite:
Fie funcţiile polinomiale $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_{m\text{-}1}x + a_m$$
$$Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n\text{-}1}x + b_n,$$

unde a_0 şi b_0 sunt nenule. Atunci:

j). $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_0 > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_0 < 0 \end{cases}$;

Pe scurt, $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = a_0\cdot\infty$.

jj). $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{dacă } a_0 > 0,\ m = \text{nr. par} \\ -\infty & \text{dacă } a_0 > 0,\ m = \text{nr. impar} \\ -\infty & \text{dacă } a_0 < 0,\ m = \text{nr. par} \\ +\infty & \text{dacă } a_0 < 0,\ m = \text{nr. impar} \end{cases}$;

Pe scurt, $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = a_0\cdot(-\infty)^m$.

jjj). $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m < n \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } m = n \\ +\infty, & \text{dacă } m > n,\ a_0 b_0 > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } m > n,\ a_0 b_0 < 0 \end{cases}$

jv). $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{P(-y)}{Q(-y)}$ şi se aplică rezultatul de la jjj).

v). $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{b^x} = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ b > 1;$

vj). $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln^m x}{x^n} = 0$, sau $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln^m x = 0,\ \forall n, m \in \mathbb{N}.$

În cele ce urmează, u(x) este o funcţie cu proprietatea

$$\lim_{x\to a} u(x) = 0 \text{ şi } u(x) \neq 0 \text{ pentru } x \neq a.$$

vjj). $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;\ \lim\limits_{x\to a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1;$

vjjj). $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;\ \lim\limits_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)} = 1;$

jx). $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,\ \lim\limits_{x\to a} (1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e.$

x). $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1;\ \lim\limits_{x\to a} \frac{\ln(1 + u(x))}{u(x)} = 1;$

xj). $\lim\limits_{x\to 0} \frac{b^x - 1}{x} = \ln b;\ \lim\limits_{x\to a} \frac{b^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln b;\ b > 0,\ b \neq 1;$

xjj). $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1 + x)^r - 1}{x} = r;\ \lim\limits_{x\to a} \frac{(1 + u(x))^r - 1}{u(x)} = r;\ \forall r \in \mathbb{R}.$

Problema 4

Să se determine numerele reale a, b astfel ca dreapta de ecuaţie $y = 3x + 2$ să fie asimptotă spre $+\infty$ pentru graficul funcţiei

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{|x^2 - 1| - x}{ax + b}.$$

Cu a şi b astfel determinate, să se determine celelalte asimptote la graficul funcţiei.

Rezolvare. Se ştie că dreapta $y = mx + n$ este asimptotă spre $+\infty$ pentru graficul funcţiei f dacă şi numai dacă sunt finite limitele

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},\ n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx).$$

Asimptota se numeşte oblică când $m \neq 0$ şi orizontală când $m = 0$.

De asemenea, se ştie că dreapta $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, este asimptotă verticală la graficul funcţiei f dacă şi numai dacă α este punct de acumulare pentru domeniul de definiţie D al funcţiei şi cel puţin una din limitele laterale $\lim\limits_{x \nearrow \alpha} f(x)$, $\lim\limits_{x \searrow \alpha} f(x)$ este infinită.

Concret, în problemă punem pentru început condiţiile

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|x^2-1|-x}{x(ax+b)} = 3, \lim_{x\to\infty} \left(\frac{|x^2-1|-x}{ax+b} - 3x\right) = 2.$$

În calculul acestor limite, ţinem seama că într-o vecinătate a lui $+\infty$, avem $|x^2 - 1| = x^2 - 1$. Ca urmare, conform regulilor de calcul cu limite de funcţii,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|x^2-1|-x}{x(ax+b)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1-x}{x(ax+b)} = \frac{1}{a} = 3,$$
$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{|x^2-1|-x}{ax+b} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1-x}{ax+b} - \frac{1}{a}x\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a(x^2-1-x)-x(ax+b)}{a(ax+b)} = \frac{-(a+b)}{a^2} = 2.$$

De aici rezultă $a = \frac{1}{3}$ şi $b = -\frac{5}{9}$.

Ca urmare, $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{3}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x^2-1|-x}{\frac{1}{3}x - \frac{5}{9}}$.

Se constată cu uşurinţă că dreapta $y = 3x + 2$ este asimptotă oblică la graficul funcţiei f şi la $-\infty$. Apoi, din

$$\lim_{x \nearrow \frac{5}{3}} f(x) = -\infty \text{ şi } \lim_{x \searrow \frac{5}{3}} f(x) = +\infty,$$

avem că dreapta $x = \frac{5}{3}$ este asimptotă verticală de ambele părţi la graficul funcţiei f. ■

Observaţii. 1. În general, o funcţie nu poate să admită atât asimptotă oblică cât şi asimptotă orizontală spre $+\infty$ (respectiv $-\infty$). Remarcăm faptul că pentru o funcţie dată, pot avea loc diverse situaţii:
– să existe asimptote oblice atât spre $+\infty$ cât şi spre $-\infty$ (distincte sau nu),

– să existe asimptote orizontale atât spre $+\infty$ cât şi spre $-\infty$ (distincte sau nu),
– să existe asimptotă oblică spre $+\infty$ cât şi asimptotă orizontală spre $-\infty$ (sau invers),
– să existe asimptotă spre $+\infty$ dar să nu existe asimptotă spre $-\infty$ (sau invers),
– să nu existe asimptote atât spre $+\infty$ cât şi spre $-\infty$,
– să existe sau să nu existe asimptote verticale în fiecare din aceste situaţii.
În sfârşit, mai remarcăm faptul că asimptotele la graficul unei funcţii se mai numesc, uneori, asimptotele funcţiei.
2. Pentru o funcţie raţională $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, D fiind domeniul maxim de definiţie, avem reguli simple în ceea ce priveşte existenţa asimptotelor:
i). graficul lui f are asimptotă orizontală (aceeaşi spre $+\infty$ şi spre $-\infty$) dacă şi numai dacă polinoamele P şi Q au grade egale; în acest caz, asimptota orizontală este $y = n$, unde $n = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$.
ii). graficul lui f are asimptotă oblică (aceeaşi spre $+\infty$ şi spre $-\infty$) dacă şi numai dacă grad P = 1 + grad Q; în acest caz, asimptota oblică este $y = mx + n$, unde $mx + n$ este câtul împărţirii polinomului P la polinomul Q.
iii). graficul lui f are asimptota verticală $x = a$ dacă şi numai dacă $Q(a) = 0$.
3. În mod cu totul asemănător, se poate introduce noţiunea de curbă asimptotă: curba C de ecuaţie $y = g(x)$ este curbă asimptotă către $+\infty$ $(-\infty)$ la graficul lui f dacă $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$, respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Este clar că în acest caz, putem vedea curba de ecuaţie $y = f(x)$ drept curbă asimptotă la graficul lui g.
Exemplu: graficul funcţiei $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$ admite curba asimptotă $y = x^2$, atât spre $+\infty$ cât şi spre $-\infty$.
Se constată uşor că graficul unei funcţii raţionale $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ admite drept curbă asimptotă o parabolă de ecuaţie $y = ax^2 + bx + c$ dacă şi numai dacă grad P = 2 + grad Q; în acest caz, $ax^2 + bx + c$ este câtul împărţirii polinomului P la polinomul Q.

Problema 5

Să se studieze continuitatea funcţiilor:

a). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ \alpha, & \text{dacă } x = 1 \\ x^2 - 2x + \beta, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$;

b). $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x^3, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Rezolvare. a). Avem în vedere Definiţia 4.2.9, Teorema 4.2.5 şi Exemplul 4.2.10. Pe fiecare din intervalele deschise $(-\infty,1)$, $(1,\infty)$, funcţia f este continuă, fiind funcţie polinomială. Rămâne de studiat continuitatea în punctul $x = 1$. Avem

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(x^2 + x + 1\right) = 3$$
$$f(1+0) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(x^2 - 2x + \beta\right) = \beta - 1$$

şi $f(1) = \alpha$. Condiţia de continuitate a lui f în punctul $x = 1$ se scrie $3 = \beta - 1 = \alpha$ şi ne dă $\alpha = 3$ şi $\beta = 4$.

Tragem următoarele concluzii:

– pentru $\alpha \neq 3$ şi $\beta \neq 4$, f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; punctul $x = 1$ este punct de discontinuitate de speţa întâia (vezi Definiţia 4.2.12); funcţia f nu este continuă la stânga şi nici la dreapta în punctul $x = 1$.

– pentru $\alpha = 3$ şi $\beta \neq 4$, f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; punctul $x = 1$ este punct de discontinuitate de speţa întâia; în plus, funcţia f este continuă la stânga în punctul $x = 1$ dar nu este continuă la dreapta în acest punct.

– pentru $\alpha \neq 3$ şi $\beta = 4$, f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; punctul $x = 1$ este punct de discontinuitate de speţa întâia; în plus, funcţia f este continuă la dreapta în punctul $x = 1$ dar nu este continuă la stânga în acest punct.

– pentru $\alpha = 3$ şi $\beta = 4$, funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b). Deoarece funcţia h nu are ramurile definite pe subintervale ale lui $\mathbb{R}$, nu se poate proceda ca mai sus. Deoarece nu se ştie în ce punct funcţia este continuă, vom folosi Criteriul lui Heine privind limita unei funcţii într-un punct (Teoremele 4.1.1, 4.1.2) şi privind continuitatea unei funcţii într-un punct (Teorema 4.2.1). Fie deci $a \in \mathbb{R}$ un punct în care funcţia h este continuă. Ca urmare, pentru orice şir (x_n) de numere reale cu $\lim x_n = a$, avem $\lim h(x_n) = h(a)$. Presupunem că $a \in \mathbb{Q}$. Fie şirul de numere iraţionale $(a + \frac{\pi}{n})$, convergent la a. Atunci, $\lim h(a + \frac{\pi}{n}) = h(a)$ ne dă $a^2 = a^3$. Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, fie un şir (x'_n) de numere raţionale convergent la a. Atunci, $\lim h(x'_n) = h(a)$ ne dă $\lim x'^3_n = a^2$, adică $a^3 = a^2$. Tragem concluzia că dacă funcţia h este continuă în punctul $a \in \mathbb{R}$, atunci $a^2 = a^3$ (adică $a = 0$ sau $a = 1$). De asemenea, mai tragem concluzia că dacă $a^2 \neq a^3$, atunci funcţia h nu este continuă în punctul $a \in \mathbb{R}$.

Demonstrăm că funcţia este continuă în orice punct $a \in \mathbb{R}$ pentru care $a^2 = a^3$. Fie (x_n) un şir oarecare de numere reale, astfel încât $\lim x_n = a$. Se poate întâmpla una din situaţiile:

– şirul (x_n) are un număr finit de termeni raţionali iar ceilalţi sunt iraţionali;

– şirul (x_n) are un număr finit de termeni iraţionali iar ceilalţi sunt raţionali;

– şirul (x_n) are un număr infinit de termeni raţionali şi un număr infinit de termeni iraţionali.

În prima situaţie, prin eliminarea termenilor raţionali, şirul (x_n) are numai termeni iraţionali. Ca urmare, şirul imagine $(h(x_n))$ este şirul (x_n^2) şi evident, $\lim h(x_n) = a^2$.

În a doua situaţie, prin eliminarea termenilor iraţionali, şirul (x_n) are numai termeni raţionali. Ca urmare, şirul imagine $(h(x_n))$ este şirul (x_n^3) şi evident, $\lim h(x_n) = a^3$.

În a treia situaţie, şirul imagine $(h(x_n))$ este format din exact două subşiruri $(x_{k_n}^3)$ şi $(x_{p_n}^2)$, convergente la a^3 respectiv a^2. Cum $a^2 = a^3$, şirul imagine $(h(x_n))$ este convergent (vezi Propoziţia 3.1.5) şi $\lim h(x_n) = a^2 = a^3$.

Deci, indiferent de situaţie, $\lim h(x_n) = h(a)$. Funcţia h este continuă în orice punct $a \in \mathbb{R}$ pentru care $a^2 = a^3$.

Concluzia finală este aceea că funcţia h este continuă în punctele $x = 0$ şi $x = 1$ şi este discontinuă în toate celelalte puncte din $\mathbb{R}$.

Să precizăm natura punctelor de discontinuitate ale lui h. Fie deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$un astfel de punct. Fie (a_n) un şir de numere raţionale şi (b_n) un şir de numere iraţionale, ambele convergente la a. Avem

$$\lim h(a_n) = \lim a_n^3 = a^3 \text{ şi } \lim h(b_n) = \lim b_n^2 = a^2.$$

Cum $\lim h(a_n) \neq \lim h(b_n)$, rezultă că funcţia h nu are limită în punctul a.

Aşadar, punctele de discontinuitate ale funcţiei h sunt de speţa a doua. ■

Observaţii. 1. Funcţiile elementare - polinomiale, raţionale, trigonometrice, puteri reale, exponenţiale - sunt continue pe domeniul lor maxim de definiţie; în general vorbind, domeniul maxim de definiţie al unei astfel de funcţii este fie un interval (care poate fi chiar $\mathbb{R}$) fie o reuniune finită de intervale deschise.
Cele mai simple funcţii neelementare sunt cele "definite pe ramuri", adică de forma funcţiilor f sau g de mai sus.
O funcţie neelementară aparte este funcţia modul,

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to |x|,$$

a cărei explicitare este

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x < 0 \\ x, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}.$$

Funcţia modul este continuă pe $\mathbb{R}$.
Operaţiile de adunare, scădere, înmulţire cu scalari, înmulţire, împărţire sau ridicare la putere efectuate cu funcţii continue conduc tot la astfel de funcţii (vezi Teorema 4.2.3).
Exemple. 1°. Funcţiile $e^x + x^2$, $e^x - x^2$, x^2e^x sunt continue pe $\mathbb{R}$, ca sumă, diferenţă respectiv produsul funcţiilor continue e^x şi x^2;

2°. Funcţia $\frac{e^x}{x^2}$ este continuă pe $D = (-\infty, 0) \cup (0,\infty)$ pentru că este câtul a două funcţii continue şi numitorul nu se anulează pe D;
3°. Funcţia $2e^x$ este continuă pe $\mathbb{R}$, ca produsul funcţiei continue e^x cu scalarul 2, sau ca produsul a două funcţii continue: exponenţiala e^x şi funcţia constantă 2.
4°. Funcţia $\left(x^2\right)^{e^x}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, ca putere a două funcţii continue;
5°. Funcţia x^{2e^x} este continuă pe $(0,\infty)$, ca putere a două funcţii continue; Trebuie observată diferenţa, datorată domeniului de definiţie a funcţiei de la bază.
De asemenea, compunerea a două funcţii continue este tot o funcţie continuă. (vezi Teorema 4.2.4).
De exemplu, funcţia $f(x) = | x - 2 |$ este continuă pe $\mathbb{R}$ ca fiind compunerea $g \circ u$ a funcţiilor continue $u(x) = x - 2$ şi $g(x) = | x |$.
Menţionăm faptul că operaţiile de mai sus efectuate fie cu funcţii discontinue fie cu funcţii discontinue şi cu funcţii continue conduc fie la funcţii continue fie la funcţii discontinue. Ilustrăm aceasta prin câteva exemple.
1°. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcţie discontinuă într-un punct a. Este clar că $f + f = 2f$ este discontinuă în punctul a, în timp ce $f - f = 0$ este continuă pe $\mathbb{R}$, ca fiind o funcţie constantă.
2°. Funcţia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este discontinuă în fiecare punct din $\mathbb{R}$. Funcţia $f(x) = | u(x) | = 1$ este continuă pe $\mathbb{R}$.
Se vede de aici că din continuitatea funcţiei $| g |$ nu rezultă continuitatea funcţiei g.
3°. În acelaşi timp, funcţia produs dintre o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$ şi o funcţie discontinuă pe $\mathbb{R}$ poate fi continuă pe $\mathbb{R}$ (ca în $0 \cdot u = 0$) sau discontinuă pe $\mathbb{R}$ (ca în $1 \cdot u = u$).
Mai reamintim că o funcţie continuă comută cu luarea limitei, fapt deja folosit până acum de mai multe ori.
De asemenea, dacă f şi g sunt continue pe D, atunci funcţiile

$$\max\{f,g\} : D \to \mathbb{R},\ x \to \max\{f(x),g(x)\}$$
$$\min\{f,g\} : D \to \mathbb{R},\ x \to \min\{f(x),g(x)\}$$

sunt continue pe D.

În sfârşit, precizăm că toate operaţiile de mai sus se pot extinde la un număr finit oarecare de funcţii.
2. Un punct $a \in D$ în care funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ nu este continuă se numeşte punct de discontinuitate pentru funcţie. Punctul de discontinuitate este de speţa întâia dacă funcţia are limite laterale finite în acest punct. În caz contrar, punctul de discontinuitate este de speţa a doua (vezi Definiţia 4.2.12).
Aşadar, într-un punct de discontinuitate de speţa întâia pentru o funcţie, aceasta are limite laterale finite care ori sunt diferite între ele, caz în care funcţia nu are limită în punct, ori sunt egale între ele, caz în care funcţia are limită (finită) în punct, dar valoarea lor diferă de valoarea funcţiei în punct.
Într-un punct de discontinuitate de speţa a doua.pentru o funcţie, aceasta ori are ambele limite laterale, dar una dintre ele este infinită, ori cel puţin una din limitele laterale nu există.
Dacă punctul a este punct de discontinuitate de speţa întâia pentru f şi dacă $f(a) = f(a + 0)$, atunci se spune că f este continuă la dreapta în acest punct (sau că a este punct de continuitate la dreapta pentru f); similar, dacă $f(a) = f(a - 0)$, atunci se spune că f este continuă la stânga în acest punct (sau că a este punct de continuitate la stânga pentru f).
Se poate demonstra că discontinuităţile unei funcţii monotone pe un interval sunt numai de speţa întâia (vezi în §4.1/4.1.5).
Cele spuse mai sus pot fi interpretate şi din punct de vedere al continuităţii într-un punct: dacă pentru o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ şi pentru un punct $a \in D$ care este punct de acumulare bilateral pentru D (vezi Definiţia 4.1.8) există $f(a - 0)$ şi $f(a + 0)$, atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă $f(a - 0) = f(a + 0) = f(a)$.
3. Se poate demonstra (în mod asemănător ca la pct. c)) un rezultat general:
Dacă funcţiile $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt continue pe $\mathbb{R}$, atunci funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x), & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

este continuă într-un punct $a \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $f_1(a) = f_2(a)$. Ca urmare, pentru o astfel de funcţie f, mulţimea punctelor de continuitate este $\{x \in \mathbb{R} \mid f_1(x) = f_2(x)\}$.

Problema 6

Să se precizeze care dintre funcţiile

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + \cos 2x,$$
$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_n(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N},$$

este continuă uniform.

Rezolvare. Avem în vedere Definiţia 4.2.14.

a). Fie un $\delta > 0$ şi $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\ x - y\ | < \delta$. Avem

$$|\ f(x) - f(y)\ | = |\ \sin x + \cos 2x - \sin y - \cos 2y\ | \leq$$
$$\leq |\ \sin x - \sin y\ | + |\ \cos 2x - \cos 2y\ | \leq 3|\ x - y\ | < 3\delta.$$

(s-a ţinut cont de formulele trigonometrice

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \tfrac{x-y}{2} \cos \tfrac{x+y}{2}$$

$$\cos 2x - \cos 2y = -2 \sin (x - y) \sin (x + y)$$

precum şi de inegalitatea $|\ \sin x\ | \leq |\ x\ |$, valabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$).

Acum, pentru $\varepsilon > 0$ dat, alegem $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$ şi atunci, dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $|\ x - y\ | < \delta(\varepsilon)$, avem $|\ f(x) - f(y)\ | < \varepsilon$.

Conform Definiţiei, funcţia f este uniform continuă.

b). Începem cu un caz simplu: $n = 1$. Evident, pentru $x, y \in \mathbb{R}$ avem

$$|\ g_1(x) - g_1(y)\ | = |\ x - y\ |,$$

de unde se vede că este suficient să alegem, pentru $\varepsilon > 0$ dat, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, pentru ca, dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $|\ x - y\ | < \delta(\varepsilon)$ să avem $|\ g_1(x) - g_1(y)\ | < \varepsilon$.

Conform Definiţiei, funcţia g_1 este uniform continuă.

Pentru $n \geq 2$ şi $m \in \mathbb{N}$ avem

$$\mid g_n(m+\tfrac{1}{m}) - g_n(m-\tfrac{1}{m}) \mid = \big(m+\tfrac{1}{m}\big)^n - \big(m-\tfrac{1}{m}\big)^n =$$
$$= 2\big[C_n^1 m^{n-2} + C_n^3 m^{n-6} + \cdots\big] \geq 2n,$$

ceea ce arată că diferenţa $\mid g_n(m+\frac{1}{m}) - g_n(m-\frac{1}{m}) \mid$ nu poate fi mai mică decât 1, chiar dacă diferenţa dintre argumentele $m+\frac{1}{m}$ şi $m-\frac{1}{m}$ poate fi oricât de mică.

Concluzia: funcţia g_n, $n \geq 2$, nu este uniform continuă ■

Observaţie. Reamintim definiţia $\varepsilon - \delta$ a continuităţii unei funcţii reale de variabilă reală într-un punct (vezi Definiţia 4.2.5, pct. 1):

$$\text{funcţia } f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ este continuă în punctul } a \in D \Longleftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, a) > 0 : \forall x \in D, |x - a| < \delta \Longrightarrow \mid f(x) - f(a) \mid < \varepsilon.$$

Aici, δ depinde, îngeneral, de ε şi de punctul a. Independenţa lui δ de a înseamnă un anume tip de continuitate a funcţiei f şi anume continuitatea uniformă.
Aşadar, definiţia continuităţii uniforme a unei funcţii reale de variabilă reală se reformulează astfel:

$$\text{funcţia } f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ este continuă uniform pe } D \Longleftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in D, \mid x - y \mid < \delta \Longrightarrow \mid f(x) - f(y) \mid < \varepsilon.$$

(vezi Definiţia 4.2.14). Evident, o funcţie continuă uniform pe D este continuă în fiecare punct din D (adică pe D). Să mai remarcăm că proprietatea de continuitate a unei funcţii într-un punct este locală, depinzând doar de valorile ei într-o vecinătate a punctului, iar proprietatea de continuitate uniformă a unei funcţii pe o mulţime este globală, depinzând de valorile ei pe întreaga mulţime.
Operaţiile de adunare, scădere, înmulţire cu scalari efectuate cu funcţii continue uniform pe o mulţime conduc tot la astfel de funcţii. De asemenea, compunerea a două funcţii continue uniform este tot o astfel de funcţie. Justificarea acestor afirmaţii este imediată.
Funcţia $g_2(x) = x^2$ de mai sus arată că produsul a două funcţii continue uniform nu este în mod obligatoriu tot o astfel de funcţie.
De altfel, exemple simple arată că operaţiile de înmulţire, împărţire sau ridicare la putere efectuate cu funcţii continue uniform nu conduc, în general, tot la astfel de funcţii.

Se poate constata cu uşurinţă că produsul a două funcţii continue uniform şi mărginite este tot o funcţie continuă uniform. Dacă una din funcţii nu este mărginită, funcţia produs s-ar putea să nu fie continuă uniform, după cum se poate vedea din următorul

Exemplu. Funcţia $f(x) = x\sin x$ nu este continuă uniform pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr aceasta rezultă din identitatea $f(2n\pi + h) - f(2n\pi - h) = 4n\pi \sin h$ şi raţionând prin reducere la absurd.

Tot funcţia $g_2(x) = x^2$ de mai sus arată că funcţiile continue pe o mulţime nu sunt în mod obligatoriu şi continue uniform pe mulţimea respectivă. Sunt cunoscute câteva rezultate simple în legătură cu continuitatea uniformă a unei funcţii continue pe o mulţime:

1°. Teorema lui Cantor: Orice funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuă pe mulţimea compactă D, este continuă uniform pe D (vezi Teorema 4.2.10).

2°. Orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuă şi periodică, este continuă uniform pe $\mathbb{R}$.

3°. Orice funcţie $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, continuă şi care are limitele finite $\lim\limits_{x \searrow \alpha} f(x)$, $\lim\limits_{x \nearrow \beta} f(x)$, este continuă uniform pe (α, β). Aici, α, β pot fi finite sau infinite.

4°. Orice funcţie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, lipschitziană, este continuă uniform pe intervalul I. În particular, dacă f este derivabilă pe I cu excepţia eventuală a unui număr finit de puncte şi derivata f' este mărginită, atunci f este continuă uniform pe I.

Să justificăm aceste afirmaţii.

1°. Demonstraţia Teoremei se află în §4.2/4.2.6.

2°. Ideea de demonstraţie este următoarea: fie $T > 0$ perioada principală a funcţiei. Pe intervalul $[0,2T]$, funcţia f este continuă uniform, conform teoremei lui Cantor. Pentru $\varepsilon > 0$ dat, fie $\delta(\varepsilon) < T$ din definiţia continuităţii uniforme. Se arată că acest $\delta(\varepsilon)$ este cel căutat pentru probarea continuităţii uniforme a funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

3°. Considerăm mai întâi cazul particular în care α şi β sunt finite. Fie F prelungirea prin continuitate a funcţiei f la intervalul $[\alpha, \beta]$. Teorema lui Cantor ne asigură că F este continuă uniform pe $[\alpha, \beta]$. Acum este clar că f este continuă uniform pe (α, β).

În cazul general pentru α şi β, având în vedere definiţia $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcţii într-un punct (Definiţia 4.1.4), Criteriul lui Cauchy-Bolzano (Teorema 4.1.3) şi Teorema lui Cantor, se demonstrează continuitatea uniformă a lui f pe (α, β).

4°. Pentru prima parte, vezi Propoziţia 4.2.2. În cazul particular considerat, cu Teorema lui Lagrange se arată că f este lipschitziană pe intervalul I.
Se poate demonstra cu uşurinţă că orice funcţie continuă uniform pe un interval I transformă o submulţime mărginită a lui I tot într-o mulţime mărginită.
Alte amănunte în legătură cu funcţiile continue uniform se pot găsi în §4.2/4.2.4 – 4.2.6.

Problema 7

Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x + 1$, este mărginită pe fiecare interval compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dar nu este mărginită pe nici un interval necompact de forma $(-\infty,b]$ sau $[a,+\infty)$.

Rezolvare. Avem în vedere definiţia unei funcţii mărginite dată în Definiţia 1.3.4. De asemenea, avem în vedere Propoziţia 1.3.4.

Pentru fiecare x din intervalul compact $[a,b]$ avem $| x | \leq \max\{| a |, | b |\} = r$ şi ca urmare,

$$| f(x) | = | x^3-2x+1 | \leq | x |^3 + 2| x | + 1 \leq r^3+2r+1$$

ceea ce arată că funcţia f este mărginită pe $[a,b]$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pentru $x \geq \max\{a,n\}$ avem

$$f(x) = x^3 - 2x + 1 = x(x^2 - 2) + 1 \geq n + 1,$$

ceea ce arată că funcţia f nu este mărginită superior pe intervalul $[a,+\infty)$. Ca urmare, funcţia f nu este mărginită pe intervalul $[a,+\infty)$.

Pe de altă parte, funcţia f este minorată (sau mărginită inferior) pe $[a,+\infty)$. Într-adevăr, deosebim două cazuri:

i). Cazul $a < 2$. Pe intervalul $[a,2]$ funcţia f este mărginită, deci minorată, conform teoremei lui Weierstrass (vezi Corolarul 4.2.4). Pe intervalul $[2,\infty)$, f este minorată, pentru că avem $1 \leq f(x)$ pentru $x \geq 2$. Aşadar, funcţia f este minorată pe intervalul $[a,\infty)$.

ii). Cazul $a \geq 2$. Ca şi mai sus, f este minorată pe $[a,\infty)$ pentru că avem $1 \leq f(x)$ pentru $x \geq a$.

Concluzia este că pe intervalul $[a,\infty)$, funcţia f este minorată dar nu este majorată.

În mod asemănător se arată că pe intervalul $(-\infty,b]$ funcţia f nu este minorată dar este majorată. ■

Observaţie. Exemple simple arată că, în general, o funcţie continuă $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu este mărginită pe intervalul I. În cazul în care intervalul I este un interval compact, $I = [a,b]$, are loc binecunoscuta teoremă fundamentală a lui Weierstrass privind mărginirea funcţiilor: Orice funcţie continuă pe un interval compact este mărginită şi îşi atinge marginile. Aşadar, există cel puţin două puncte x_1 şi x_2 în intervalul compact $[a,b]$ astfel încât

$$f(x_1) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2), \forall x \in [a,b]$$

Punctele x_1 şi x_2 sunt puncte de minim absolut pentru funcţia f: x_1 este punct de minim absolut pentru f iar x_2 este punct de maxim absolut pentru f.
Reamintim că, în general, numerele

$$m = \inf_{x\in I} f(x) = \inf f(I),\ M = \sup_{x\in I} f(x) = \sup f(I)$$

se numesc marginile funcţiei f pe mulţimea I.
Diverse proprietăţi ale marginilor unei funcţii se pot găsi în Propoziţia 1.3.5.
Sunt cunoscute câteva rezultate simple în legătură cu mărginirea unei funcţii continue pe o mulţime:
1°. Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, continuă şi astfel încât $\lim_{x\to b} f(x)$ este finită. Atunci, f este mărginită şi îşi atinge cel puţin una din margini. Aici, b poate fi finit sau $+\infty$.
Similar, dacă $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă şi astfel încât $\lim_{x\to a} f(x)$ este finită, atunci avem aceeaşi concluzie. Aici, a poate fi finit sau $-\infty$.
De asemenea, dacă $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ este continuă şi astfel încât $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci avem aceeaşi concluzie. Aici, a şi b pot fi finite sau nu. Facem precizarea că dacă limitele nu sunt egale, dar sunt finite, atunci funcţia este doar mărginită.
Exemplu. Fiecare din funcţiile

$$\begin{array}{lll} f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, & f(x) = \frac{x}{x+1}, \\ g : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}, & g(x) = 2^x, \\ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & h(x) = \mathrm{arctg} \mid x \mid , \end{array}$$

ilustrează cele de mai sus.
Pe de altă parte, funcţia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = \mathrm{arctg}\, x$, este continuă, are limite finite la capetele lui $\mathbb{R}$ dar nu îşi atinge marginile. Aceasta arată că cerinţa ca limitele să fie egale este esenţială. Se constată că funcţia este mărginită pe $\mathbb{R}$.
Justificarea acestor afirmaţii este imediată, dacă se are în vedere Definiţia 4.1.4 a limitei unei funcţii într-un punct şi Teorema lui Weierstrass de mai sus.
2°. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuă şi periodică. Atunci, f este mărginită şi îşi atinge marginile.
Justificarea este imediată. Facem precizarea că funcţia îşi atinge marginile de o infinitate de ori, cel puţin câte o dată în fiecare interval $[nT,(n+1)T]$, $n \in \mathbb{Z}$, unde $T > 0$ este o perioadă a funcţiei.
3°. Fie $f : D \to \mathbb{R}$, lipschitziană. Atunci, f transformă orice submulţime mărginită a lui D tot într-o mulţime mărginită.
În particular, dacă f este derivabilă pe un interval I cu excepţia eventuală a unui număr finit de puncte şi derivata f' este mărginită, atunci f este mărginită pe fiecare subinterval mărginit al lui I.
Justificarea este imediată.
4°. Fie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, o funcţie monotonă, nu neapărat continuă. Atunci, g este mărginită şi îşi atinge marginile. Mai precis, dacă g este crescătoare, marginile ei sunt $m = g(a)$ şi $M = g(b)$ iar dacă este descrescătoare, marginile ei sunt $m = g(b)$ şi $M = g(a)$. Aşadar, marginile unei funcţii monotone se ating în capetele intervalului.
Dacă g este monotonă pe intervalul deschis (a,b), atunci ea este mărginită - fără să-şi atingă marginile - dacă şi numai dacă este mărginită pe câte o vecinătate a capetelor intervalului.
Justificările sunt imediate.

Problema 8

1. Să se stabilească semnul funcţiei

$$f(x) = 1 + \sin^2 x - \cos^2 x + \sin 2x$$

pe domeniul său maxim de definiţie.
2. Să se stabilească numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei

$$x^4 + 3x^2 + 2px - 1 = 0,\ p \in \mathbb{R} \text{ fiind dat.}$$

Rezolvare. 1). Domeniul maxim de definiţie al funcţiei f este $\mathbb{R}$. Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, fiind o sumă de astfel de funcţii. Pentru $x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + (\sin x + \cos x)^2 = 2\sin x(\sin x + \cos x)$. Deoarece funcţia f este 2π – periodică, este suficient să stabilim semnul său pe intervalul $[0,2\pi]$. Funcţia f se anulează pe acest interval în punctele x date de ecuaţiile $\sin x + \cos x = 0$, $\sin x = 0$. Aceste puncte sunt $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ respectiv 0, π, 2π. Având în vedere faptul că o funcţie continuă are semn constant pe orice interval pe care nu se anulează, rezultă următorul tablou de semne:

$\backslash$ x	0		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$2\sin x$	0	+	+	+	0	−	−	−	0
$\sin x + \cos x$	+	+	0	−	−	−	0	+	+
f(x)	0	+	0	−	0	+	0	−	0

Explicăm cum s-a stabilit în tablou semnul factorului $h(x) = \sin x + \cos x$. Am stabilit că zerourile lui h din intervalul $[0,2\pi]$ sunt $\frac{3\pi}{4}$ şi $\frac{7\pi}{4}$. Funcţia h este continuă pe $[0,2\pi]$. Ca urmare, pe fiecare din intervalele $[0,\frac{3\pi}{4})$, $(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$, $(\frac{7\pi}{4},2\pi]$, h are semn constant. Este clar, $h(\frac{\pi}{2}) = +1$ dă semnul pe primul interval, $h(\pi) = -1$ dă semnul pe al doilea interval iar $h(2\pi) = +1$ dă semnul pe al treilea interval. Cele trei semne se trec în tablou, în locurile cuvenite.

2). Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2px - 1$. Avem $f(0)<0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$; există deci puncte x_1 suficient de mari astfel încât $f(x_1) > 0$. Conform Teoremei de intersecţie a lui Cauchy, există cel puţin un $c_1 \in (0,x_1)$ astfel încât $f(c_1) = 0$. Analog, din $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, există cel puţin un $c_2 < 0$ astfel încât $f(c_2) = 0$. În concluzie, ecuaţia dată are cel puţin două rădăcini reale. Fiind ecuaţie cu coeficienţi reali de grad par, ea poate avea numai un număr par de rădăcini reale. Presupunem că ecuaţia f(x) = 0 are patru rădăcini reale. Conform teoremei lui Rolle, ecuaţia $f'(x) = 0$ are cel puţin trei rădăcini reale. Analog, ecuaţia $f''(x) = 0$ are cel două rădăcini reale. Dar $f''(x) = 12x^2 + 6$ şi acest polinom nu are rădăcini reale. Contradicţia arată că presupunerea făcută este falsă. În concluzie, ecuaţia dată are exact două rădăcini reale.

Altfel, folosim Metoda grafică. Ecuaţia se poate scrie sub forma $x^4 + 3x^2 = 1 - 2px$. Reprezentând grafic funcţiile $u(x) = x^4 + 3x^2$ şi $v(x) = 1 - 2px$ în acelaşi sistem de coordonate xOy, se poate trage concluzia că ecuaţia dată are exact două rădăcini reale. ■

Observaţie. În rezolvarea primei părţi a problemei s-a folosit următorul rezultat:
O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$, continuă pe intervalul I şi care nu se anulează în nici un punct al intervalului, are semn constant pe intervalul I.
Demonstraţia se bazează pe următoarea Lemă, utilă în rezolvarea diferitelor probleme dar şi în demonstrarea altor rezultate teoretice. Ea mai poartă şi denumirea de Teorema de intersecţie a lui Cauchy: "Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există cel puţin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = 0$."
Demonstraţia Lemei: Presupunem $f(a) < 0$, cazul contrar tratându-se în mod asemănător. Fie mulţimea $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq 0\}$ care, evident, este nevidă şi mărginită. Conform cu Axioma lui Cantor-Dedekind (vezi Definiţia 1.3.2), există $\xi = \sup A$. Din Definiţia 1.2.6 rezultă că $\xi \in [a,b]$. Vom arăta că ξ poate fi luat drept c din enunţul Lemei. În primul rând, din $f(a) < 0$ şi din continuitatea lui f în punctul a, există o vecinătate U a lui a astfel încât $f(x) < 0$ pentru $x \in U \cap [a,b]$. În al doilea rând, din $f(b) > 0$ rezultă la fel că există o vecinătate V a lui b astfel încât $f(x) > 0$ pentru $x \in V \cap [a,b]$. De aici, tragem concluzia că punctul ξ aparţine intervalului deschis (a,b). Acum, avem două posibilităţi: $\xi \in A$ sau $\xi \notin A$. Dacă $\xi \in A$, atunci $f(\xi) \leq 0$. Presupunem că $f(\xi) < 0$. Din continuitatea lui f în punctul ξ, există o vecinătate $W = (\xi - r, \xi + r)$ a lui ξ astfel încât $f(x) < 0$ pentru orice $x \in W \cap [a,b]$. Deci, există puncte $x > \xi$ din A astfel încât $f(x) < 0$, ceea ce contrazice definiţia lui ξ. Rămâne deci $f(\xi) = 0$.

Dacă $\xi \notin$ A, atunci f(ξ) > 0. Din Propoziţia 1.3.1, pentru fiecare n $\in \mathbb{N}$, există $x_n \in$ A astfel încât $\xi - \frac{1}{n} < x_n \leq \xi$. Principiul cleştelui ne dă lim $x_n = \xi$. Criteriul lui Heine (Teorema 4.2.1) ne dă lim f(x_n) = f(ξ). Din $x_n \in$ A, rezultă f(x_n) $\leq$ 0 şi ca urmare, f(ξ) $\leq$ 0, ceea ce contrazice faptul că f(ξ) > 0. Aşadar, $\xi \notin$ A nu poate avea loc.

Aşadar, avem f(ξ) = 0 şi luând c = ξ, demonstraţia Lemei este încheiată.

Demonstraţia rezultatului enunţat. Prin reducere la absurd. Presupunem că funcţia f nu are semn constant pe I. Atunci, există două puncte a < b din I astfel încât f(a) şi f(b) au semne contrare. Lema tocmai demonstrată ne dă un punct c $\in$ (a,b) cu f(c) = 0, ceea ce contrazice ipoteza asupra lui f. Aşadar, presupunerea făcută este falsă.

Rămâne adevărat că funcţia f are semn constant pe I şi demonstraţia este încheiată.

În general vorbind, a stabili semnul unei funcţii revine la a indica submulţimile din domeniul său de definiţie pe care funcţia este pozitivă, negativă sau se anulează. Practic, se procedează astfel:

p_1: se determină toate zerourile $a_1 < a_2 < ... < a_n < ...$ale funcţiei continue f din intervalul I (zero al funcţiei f înseamnă o rădăcină a ecuaţiei f(x) = 0)

p_2: se stabileşte semnul lui f în fiecare din intervalele (a_1,a_2), (a_2,a_3), ...(prin alegerea a câte unui punct b din fiecare interval, semnul lui f(b) este semnul lui f pe intervalul respectiv).

Revenim la Lemă, dând o interpretare geometrică a ei. Graficul funcţiei f este $G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y = f(x)\}$ şi poate fi văzut ca fiind curba de ecuaţie (explicită) y = f(x) - vezi §5.9/5.9.1. În condiţiile Lemei, graficul lui f intersectează axa Ox în punctul (c,0). De aici, numele de Teorema de intersecţie a lui Cauchy.

În rezolvarea celei de a doua părţi a problemei s-au folosit următoarele rezultate, în fapt două generalizări imediate ale Lemei:

i). Fie f, g : [a,b] $\to \mathbb{R}$ două funcţii continue astfel încât f(a) < g(a) şi f(b) > g(b). Atunci, există cel puţin un punct c $\in$ (a,b) astfel încât f(c) = g(c).

Într-adevăr, se aplică Lema funcţiei ajutătoare h = f − g.

ii). Dacă f : (a,b) $\to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi f(a + 0)·f(b − 0) < 0, atunci există cel puţin un punct c $\in$ (a,b) astfel încât f(c) = 0. Aici, a şi b pot fi finite sau nu.

Într-adevăr, din definiţia limitelor laterale se deduce că există puncte $a' > a$ şi $b' < b$, suficient de apropiate de a şi respectiv b, astfel încât $f(a')$ şi $f(b')$ au acelaşi semn cu $f(a+0)$ şi respectiv $f(b-0)$. Aplicând Lema pe intervalul $[a',b']$, rezultă concluzia.
Facem precizarea că atât în Lemă cât şi în această ultimă generalizare a sa, dacă funcţia este strict monotonă, atunci punctul c este unic.

Problema 9

Se dă funcţia $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$. Se cere:

a). Să se determine $a > 0$, minim posibil, astfel încât funcţia f să fie injectivă;

b). Pentru $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$, fie $I = [\frac{\sqrt{6}}{2}, \infty)$ şi $J = f(I)$. Să se arate că $f : I \to J$ este inversabilă şi că inversa sa f^{-1} este continuă pe J;

c). Să se determine f^{-1} în cazul anterior şi să se verifice faptul că este continuă pe J.

Rezolvare. a). Se ştie că pentru o funcţie continuă pe un interval I, injectivitatea este echivalentă cu stricta monotonie. Deoarece funcţia polinomială f este continuă, trebuie să determinăm $a > 0$, minim posibil, astfel încât funcţia f să fie strict monotonă. Cum $f(x) = x^2(x^2 - 3) + 2$ este strict crescătoare pentru $x \geq \sqrt{3}$, rezultă că trebuie să determinăm $a > 0$, minim posibil, astfel încât funcţia f să fie strict crescătoare pe $[a,\infty)$. Avem în vedere funcţia de gradul al doilea $g(t) = t^2 - 3t + 2$, care este strict crescătoare pentru $t \geq \frac{3}{2}$.

Aşadar, din $x > y \geq a$ trebuie să rezulte $f(x) > f(y)$. Din

$$x^4 - 3x^2 > y^4 - 3y^2 \iff (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 3) > 0 \iff \iff x^2 + y^2 - 3 > 0,$$

se vede că este suficient ca $y^2 \geq \frac{3}{2}$ pentru ca să se verifice condiţia. Aceasta înseamnă să luăm $a^2 = \frac{3}{2}$.

Presupunem că acest $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ nu este minim posibil pentru a se verifica condiţia de mai sus. Fie atunci a cel căutat şi x şi y astfel încât $a \leq y < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$. Atunci, inegalitatea $f(x) > f(y)$ ne dă $x^2 + y^2 - 3 > 0$, ceea ce este imposibil.

În concluzie, $a > 0$, minim posibil, astfel încât funcţia f să fie injectivă este $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

b). Şi de data aceasta folosim un rezultat fundamental privind funcţiile continue, rezultat care îl completează pe cel anterior:

"Fie f o funcţie continuă pe un interval I şi $J = f(I)$. Atunci, funcţia $f : I \to J$ este bijectivă dacă şi numai dacă este strict monotonă şi în acest caz, funcţia inversă $f^{-1} : J \to I$ este continuă şi strict monotonă."

Menţionăm faptul că monotonia lui f^{-1} este în acelaşi sens ca monotonia lui f.

Acum rezolvarea este simplă. Funcţia f este continuă şi strict monotonă pe intervalul $I = [\frac{\sqrt{6}}{2}, \infty)$ şi ca urmare, $f : I \to J$ este bijectivă, deci inversabilă, conform Propoziţiei 1.2.1; în plus, inversa sa f^{-1} este continuă pe J.

c). Conform cu Remarca 1.2.4, funcţia inversă f^{-1} este definită prin

$$f^{-1} : J \to I,\ f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y.$$

Conform unui alt rezultat remarcabil privind funcţiile continue, $J = f(I)$ este un interval. Deoarece f este strict crescătoare pe $I = [\frac{\sqrt{6}}{2}, \infty)$, avem că

$$J = [f(\tfrac{\sqrt{6}}{2}), \lim_{x\to\infty} f(x)) = [-\tfrac{1}{4}, \infty).$$

Aşadar, pt. $y \in J = [-\frac{1}{4}, \infty)$, rezolvăm ecuaţia $f(x) = y$. Ecuaţia devine $x^4 - 3x^2 + 2 - y = 0$ şi are rădăcinile date de $x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{4y+1}}{2}$ şi sunt $x = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{4y+1}}{2}}$. Din cele patru rădăcini, convine aceea care este în intervalul I. Se constată cu uşurinţă că $x = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{4y+1}}{2}} \in I$.

Aşadar, $f^{-1} : [-\frac{1}{4}, \infty) \to [\frac{\sqrt{6}}{2}, \infty)$, $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{4y+1}}{2}}$. Este clar că f^{-1} este continuă pe $[-\frac{1}{4}, \infty)$, ca o compunere de funcţii continue: funcţia polinomială de gradul întâi şi funcţia radical (ca funcţie inversă a funcţiei putere x^2) - vezi Teorema 4.2.4.

Se verifică astfel rezultatul găsit mai sus. ■

Observaţie. Demonstrăm rezultatele fundamentale folosite în rezolvarea problemei (şi altele). Primul grup de rezultate se referă la Proprietatea valorilor intermediare sau Proprietatea lui Darboux.
Intuitiv, funcţiile reale continue trec de la o valoare la alta luând toate valorile intermediare. Se va vedea că această proprietate nu este însă specifică funcţiilor continue.
Reamintim următoarea Definiţie: Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Se spune că o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ are Proprietatea lui Darboux (sau Proprietatea valorilor intermediare) pe intervalul I dacă pentru orice două puncte $x_1 < x_2$ din I şi oricare ar fi numărul λ cuprins între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$, există cel puţin un punct $c \in (x_1,x_2)$ astfel încât $f(c) = \lambda$ sau, echivalent, dacă transformă orice subinterval al lui I într-un interval.
Geometric vorbind, aceasta revine la aceea ca orice dreaptă $y = \lambda$ situată între dreptele $y = f(x_1)$ şi $y = f(x_2)$, intersectează graficul lui f cel puţin într-un punct cu abscisa c cuprinsă între x_1 şi x_2.
Are loc următoarea proprietate: "Orice funcţie continuă pe un interval are Proprietatea valorilor intermediare (sau Proprietatea lui Darboux) pe acel interval."
Cu alte cuvinte, "Orice funcţie continuă pe un interval transformă orice subinterval într-un interval." (sau, mai puţin riguros, "O funcţie continuă transformă un interval tot într-un interval.").
Într-adevăr, fie deci $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe intervalul I. Fie două puncte oarecare $x_1 < x_2$ din I şi fie numărul λ cuprins între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$, altfel arbitrar. Fie funcţia ajutătoare $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definită prin $\varphi(x) = f(x) - \lambda$, care este în mod evident continuă. Se constată că $\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2) < 0$. Conform Teoremei de intersecţie a lui Cauchy, există cel puţin un punct $c \in (x_1,x_2)$ astfel încât $\varphi(c) = 0$, adică $f(c) = \lambda$, ceea ce încheie demonstraţia.
Subliniem faptul că nu numai funcţiile continue au Proprietatea lui Darboux. De exemplu, funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases},$$

nu este continuă pe $\mathbb{R}$, dar are Proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.
Într-adevăr, în primul rând se vede uşor că în punctul $x = 0$ funcţia f are o discontinuitate de speţa a doua, iar în rest este continuă (vezi Exemplul 4.2.7 şi Teorema 4.2.4).
În al doilea rând, fie două puncte oarecare $x_1 < x_2$ din I şi fie numărul λ cuprins între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$, altfel arbitrar. Dacă $x_1 < x_2 < 0$ sau dacă $0 < x_1 < x_2$, atunci f este continuă pe $[x_1,x_2]$ şi ca urmare, există cel puţin un punct $c \in (x_1,x_2)$ astfel încât $f(c) = \lambda$. Fie acum cazul contrar, adică $x_1 < x_2 = 0$ sau $0 = x_1 < x_2$ sau $x_1 < 0 < x_2$. Ne situăm în primul caz, celelalte tratându-se la fel. Fie numărul λ cuprins între $f(x_1)$ şi $f(0) = 0$. Ca urmare, ecuaţia $\sin\frac{1}{x} = \lambda$ are soluţiile $x_n = \frac{1}{(-1)^n \arcsin\lambda + n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$. Dintre acestea, soluţiile x_n cu n negativ şi mare în modul se află situate în intervalul $(x_1, 0)$. Ca urmare, $f(x_n) = \lambda$.
Aşadar, indiferent de situaţie, există cel puţin un punct $c \in (x_1,x_2)$ astfel încât $f(c) = \lambda$. Afirmaţia făcută este justificată.
Facem câteva precizări: Dacă I este un interval, atunci el poate avea una din formele $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,\infty)$, (a,∞), $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $(-\infty,\infty)$. Ca urmare, $J = f(I)$ are, evident, tot una din aceste forme, dar nu neapărat aceeaşi ca I. Există un singur caz în care, în general vorbind, I şi J au aceeaşi formă: cazul $I = [a,b]$. Într-adevăr, funcţia continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este mărginită şi îşi atinge marginile m şi M, conform teoremei lui Weierstrass. Ca urmare, $J = f([a,b]) = [m,M]$. Alte mici amănunte în acest caz: dacă f este şi crescătoare, atunci $f([a,b]) = [f(a),f(b)]$ iar dacă este şi descrescătoare, atunci $f([a,b]) = [f(b),f(a)]$.
În general, dacă f nu îşi atinge marginile m şi M pe I, atunci $f(I) = (m,M)$, sau $[m,M)$ sau $(m,M]$, după caz.
Pe de altă parte, dacă $J = [\alpha, \beta]$ este un compact dat, exemple simple de funcţii f arată că I poate fi de oricare din formele de mai sus.
Cu ajutorul celor spuse mai sus, se poate determina mulţimea valorilor unei funcţii continue sau se poate stabili surjectivitatea unor funcţii elementare.
De exemplu, funcţia continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ ia toate valorile dintre -1 şi $+1$. Ca urmare, $f(\mathbb{R}) = [-1,+1]$ este mulţimea valorilor funcţiei f. Se mai poate spune că funcţia

$$f : \mathbb{R} \to [-1,+1],\ f(x) = \cos x,$$

este surjectivă.
Nu trebuie uitată metoda grafică. Graficul funcţiei continue f ajută la determinarea imaginilor J = f(I).
Alte proprietăţi ale funcţiilor cu Proprietatea lui Darboux:
1°. Dacă funcţia f : I $\to \mathbb{R}$, I interval din $\mathbb{R}$, are Proprietatea lui Darboux şi dacă în punctele a, b $\in$ I, a $\neq$ b, f(a) şi f(b) au semne contrare, atunci există cel puţin un punct c cuprins între a şi b în care funcţia se anulează: f(c) = 0. Reamintim că pentru funcţiile continue, această proprietate se numeşte Teorema de intersecţie a lui Cauchy.
2°. Dacă funcţia f : I $\to \mathbb{R}$, I interval din $\mathbb{R}$, are Proprietatea lui Darboux şi nu se anulează în nici un punct din I, atunci ea păstrează un acelaşi semn pe întreg intervalul I.
Demonstraţiile acestor proprietăţi sunt imediate.
3°. Dacă funcţia f : I $\to \mathbb{R}$, I interval din $\mathbb{R}$, are Proprietatea lui Darboux şi dacă există una din limitele laterale într-un punct a $\in$ I, atunci ea este egală cu f(a).
Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că există limita f(a - 0) = $\ell <$ f(a). Fie λ cuprins între ℓ şi f(a). Din Definiţia 4.1.1 şi din Remarca 4.1.9, există a$'$ < a astfel încât, pentru x $\in$ (a$'$,a) avem f(x) < λ. Deoarece f are Proprietatea lui Darboux, există cel puţin un punct y $\in$ (x,a) astfel încât f(y) = λ, ceea ce contrazice definiţia lui a$'$. Analog dacă $\ell >$ f(a) sau dacă există f(a + 0).
O consecinţă imediată a acestei proprietăţi este aceea că orice funcţie care are Proprietatea lui Darboux nu are nici un punct de discontinuitate de speţa întâia.
Al doilea grup de rezultate se referă la Inversarea funcţiilor continue. În acest sens, are loc următoarea proprietate: "Fie f o funcţie continuă pe un interval I şi fie J = f(I). Funcţia f : I $\to$ J este bijectivă dacă şi numai dacă este strict monotonă şi în acest caz, funcţia inversă f^{-1} : J $\to$ I este continuă şi strict monotonă (în acelaşi sens cu f)."
În demonstraţie, folosim următoarele două Leme, importante şi prin ele însăşi (ca proprietăţi ale funcţiilor monotone sau ale funcţiilor cu Proprietatea lui Darboux).
Lema 1. Orice funcţie monotonă şi surjectivă f : D $\to$ J, J = interval, este continuă pe D.
Demonstraţie. Presupunem că f este crescătoare. Fie a $\in$ D un punct oarecare şi fie b = f(a). Folosim Definiţia 4.2.1 cu vecinătăţi a unei

funcţii continue într-un punct. Deosebim două cazuri: b este interior lui J sau coincide cu unul din capetele lui J.
i). b este interior lui J. Fie $V \in \mathcal{V}(b)$. Atunci există $\alpha < \beta$ din $\mathbb{R}$ astfel încât $b \in (\alpha, \beta) \subset [\alpha, \beta] \subset f(D) \cap V$. Există α', $\beta' \in D$ astfel încât $\alpha = f(\alpha')$ şi $\beta = f(\beta')$. Deoarece f este crescătoare, rezultă că $\alpha' < a < \beta'$. Fie atunci $U = (\alpha', \beta') \in \mathcal{V}(a)$. Pentru orice $x \in U \cap D$ avem $f(x) \in [\alpha, \beta] \subset V$. Deci, f este continuă în punctul a.
ii). b este capătul din stânga a lui J. Deci, $b \leq f(x)$ pentru $x \in D$. Fie $V \in \mathcal{V}(b)$ şi $\beta \in f(D) \cap V$ astfel încât $b < \beta$. Atunci există $\beta' \in D$ astfel încât $\beta = f(\beta')$ şi $a < \beta'$. Fie $\alpha' \in D$ astfel încât $\alpha' < a$ şi fie $U = (\alpha', \beta') \in \mathcal{V}(a)$. Atunci, pentru orice $x \in U \cap D$ avem $f(x) \in (f(\alpha'),f(\beta')) = [b,\beta) \subset V$. Aşadar, f este continuă în punctul a.
Dacă b este capătul din dreapta a lui J, demonstraţia se face analog. Dacă f este descrescătoare, se procedează asemănător.
Lema 2. Dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, I interval din $\mathbb{R}$, are Proprietatea lui Darboux şi este injectivă, atunci f este strict monotonă.
Demonstraţie. Prin reducere la absurd. Presupunem că f nu este nici strict crescătoare, nici strict descrescătoare pe I Aceasta înseamnă că există trei puncte $x < y < z$ din I astfel încât $f(x) > f(y)$ şi $f(y) < f(z)$ sau $f(x) < f(y)$ şi $f(y) > f(z)$. Ne situăm în primul caz, celălalt tratându-se asemănător. Fie un număr λ cuprins între $\min\{f(x),f(z)\}$ şi $f(y)$. Deoarece f are Proprietatea lui Darboux, există c_1 cuprins între x şi y astfel încât $f(c_1) = \lambda$ şi există c_2 cuprins între y şi z astfel încât $f(c_2) = \lambda$. Avem deci $f(c_1) = f(c_2)$ şi cum f este injectivă, rezultă $c_1 = c_2$, ceea ce este imposibil. Contradicţia arată că f este strict monotonă.
Trecem la demonstraţia proprietăţii de mai sus.
Necesitatea. Aşadar, avem o funcţie continuă şi bijectivă $f : I \to J$. Trebuie să demonstrăm că f este strict monotonă şi că funcţia inversă $f^{-1} : J \to I$ este continuă şi strict monotonă (în acelaşi sens cu f).
Deoarece f este continuă, ea are Proprietatea lui Darboux. Fiind şi injectivă, Lema 2 ne dă că f este strict monotonă.Mai departe, facem precizarea că funcţia inversă f^{-1} există conform Propoziţiei 1.2.1. Ne situăm în cazul că f este strict crescătoare, cazul f strict descrescătoare tratându-se asemănător. Fie u şi v oarecare din J, astfel încât $u < v$. Fie încă $f^{-1}(u) = x$ şi $f^{-1}(v) = y$. Din bijectivitatea lui f^{-1} rezultă că $x \neq y$. Dacă am avea $x > y$, ar rezulta $f(x) > f(y)$, adică $u > v$, ceea ce nu se poate. Rămâne deci că avem $x < y$, adică $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$. Aşadar, f^{-1} este strict crescătoare. În sfârşit, deoarece funcţia

$f^{-1} : J \rightarrow I$ este strict monotonă şi surjectivă, avem, conform Lemei 1, că ea este continuă.
Suficienţa. Aşadar, avem o funcţie continuă şi strict monotonă $f : I \rightarrow J = f(I)$. Trebuie să demonstrăm că f este bijectivă şi că funcţia inversă $f^{-1} : J \rightarrow I$ este continuă şi strict monotonă (în acelaşi sens cu f). Din faptul că f este strict monotonă rezultă că f este injectivă. Surjectivitatea lui f este evidentă. Ultima parte rezultă din cele spuse mai sus.
Proprietatea tocmai demonstrată ne asigură că funcţiile inverse ale funcţiilor uzuale sunt continue. Astfel,
1°. Funcţia putere $f : [0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$, $f(x) = x^{2n}$, $(n \in \mathbb{N})$, este continuă, strict crescătoare şi surjectivă. Ca urmare, funcţia inversă a sa, numită funcţia radical (de indice par), $\sqrt[2n]{\cdot} : [0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$, $x \rightarrow \sqrt[2n]{x}$, este continuă şi strict crescătoare.
Facem precizarea că pentru n impar, funcţia putere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n + 1}$ este continuă, strict crescătoare şi surjectivă. Ca urmare, funcţia inversă a sa, numită funcţia radical (de indice impar), $\sqrt[2n+1]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \sqrt[2n+1]{x}$, este continuă şi strict crescătoare.
2°. Funcţia exponenţială $f : \mathbb{R} \rightarrow (0,\infty)$, $f(x) = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$, este continuă, strict monotonă şi surjectivă. Ca urmare, funcţia inversă a sa, numită funcţia logaritmică, $\log_a : (0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \log_a x$, este continuă şi strict monotonă.
3°. Funcţia sinus, $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1,+1]$, $x \rightarrow \sin x$, este continuă, strict crescătoare şi surjectivă. Ca urmare, funcţia inversă a sa, numită funcţia arcsinus, $\arcsin : [-1,+1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x \rightarrow \arcsin x$, este continuă şi strict crescătoare.
4°. Funcţia cosinus, $\cos : [0,\pi] \rightarrow [-1,+1]$, $x \rightarrow \cos x$, este continuă, strict descrescătoare şi surjectivă. Ca urmare, funcţia inversă a sa, numită funcţia arccosinus, $\arccos : [-1,+1] \rightarrow [0,\pi]$, $x \rightarrow \arccos x$, este continuă şi strict descrescătoare.
5°. Funcţia tangentă, $\mathrm{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$, este continuă, strict crescătoare şi surjectivă. Ca urmare, funcţia inversă a sa, numită funcţia arctangentă, $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x \rightarrow \mathrm{arctg}x$, este continuă şi strict crescătoare.
6°. Funcţia cotangentă, $\mathrm{ctg} : (0,\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$, este continuă, strict descrescătoare şi surjectivă. Ca urmare, funcţia inversă a sa, numită funcţia arccotangentă, $\mathrm{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0,\pi)$, $x \rightarrow \mathrm{arcctg}x$, este continuă şi strict descrescătoare.

7°. Funcţia sinus hiperbolic, $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{shx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, este continuă, strict crescătoare şi surjectivă. Ca urmare, funcţia inversă a sa, arcsinus hiperbolic, $\mathrm{arcsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{arcshx} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, este continuă şi strict crescătoare.
8°. Funcţia cosinus hiperbolic, $\mathrm{ch} : [0,\infty) \to [1,\infty)$, $\mathrm{chx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, este continuă, strict crescătoare şi surjectivă. Ca urmare, funcţia inversă a sa, arccosinus hiperbolic, $\mathrm{arcch} : [1,\infty) \to [0,\infty)$, $\mathrm{arcchx} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, este continuă şi strict crescătoare.
9°. Funcţia tangentă hiperbolică, $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to (-1,+1)$, $\mathrm{thx} = \frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{chx}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, este continuă, strict crescătoare şi surjectivă. Ca urmare, funcţia inversă a sa, arctangentă hiperbolică, $\mathrm{arcth} : (-1,+1) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{arcthx} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$, este continuă şi strict crescătoare.
10°. Funcţia cotangentă hiperbolică, $\mathrm{cth} : (0,+\infty) \to (1,+\infty)$, $\mathrm{cthx} = \frac{\mathrm{chx}}{\mathrm{shx}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, este continuă, strict descrescătoare şi surjectivă. Ca urmare, funcţia inversă a sa, arccotangentă hiperbolică, $\mathrm{arccth} : (1,+\infty) \to (0,+\infty)$, $\mathrm{arccthx} = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}$, este continuă şi strict descrescătoare.
Facem câteva precizări:
– în general, graficul unei funcţii şi graficul funcţiei inverse, reprezentate în acelaşi sistem de axe, sunt simetrice faţă de prima bisectoare $y = x$.
– funcţiile hiperbolice ch şi cth se mai pot inversa şi pe alte intervale din domeniile lor maxime de definiţie: ch pe intervalul $(-\infty, 0]$ iar cth pe $(-\infty, 0)$.
– denumirile de sinus hiperbolic şi cosinus hiperbolic vin de la faptul că o reprezentare parametrică a unei porţiuni a hiperbolei echilatere $x^2 - y^2 = 1$ este $x = \mathrm{cht}$, $y = \mathrm{sht}$, $t \in [0,+\infty)$. Pentru a nu se crea confuzii, funcţiile sinus şi cosinus obişnuite se numesc sinus şi cosinus circulare (pentru că o reprezentare parametrică a cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$ este $x = \mathrm{cost}$, $y = \mathrm{sint}$, $t \in [0,2\pi]$).
– funcţiile hiperbolice satisfac o serie de formule, asemănătoare cu cele din trigonometria circulară:
i). $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$;
ii). $\mathrm{ch}(x + y) = \mathrm{chx} \cdot \mathrm{chy} + \mathrm{shx} \cdot \mathrm{shy}$;
iii). $\mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{shx} \cdot \mathrm{chy} + \mathrm{chx} \cdot \mathrm{shy}$;
iv). $\mathrm{th}(x + y) = \frac{\mathrm{thx} + \mathrm{thy}}{1 + \mathrm{thx} \cdot \mathrm{thy}}$;
v). etc.
În legătură cu funcţiile monotone, mai amintim următoarele:

1°. Toate punctele de discontinuitate ale unei funcţii monotone pe un interval, $f : I \to \mathbb{R}$, sunt de speţa întâia.
Demonstraţia rezultă imediat cu ajutorul Teoremei 4.1.10.
2°. Mulţimea punctelor de discontinuitate ale unei funcţii monotone pe un interval, $f : I \to \mathbb{R}$, este cel mult numărabilă.
Demonstraţie. Presupunem pentru început că intervalul I este compact, $I = [a,b]$ şi că funcţia f este crescătoare. Fie $\sigma > 0$ şi fie n puncte $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ din intervalul deschis (a,b) în care saltul funcţiei este cel puţin egal cu σ : $f(x_i + 0) - f(x_i - 0) \geq \sigma$, $i = 1,2,...n$.Din Teorema 4.1.10, avem că $f(x_i + 0) \leq f(x_{i+1} - 0)$ şi ca urmare,

$$f(b) - f(a) \geq f(x_n + 0) - f(x_1 - 0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i + 0) - f(x_i - 0)) + \sum_{i=1}^{n-1} \big(f(x_{i+1} - 0) - f(x_i + 0)\big) \geq$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n} (f(x_i + 0) - f(x_i - 0)) \geq n\sigma.$$

De aici, rezultă că $n \leq \frac{f(b) - f(a)}{\sigma}$, ceea ce arată că numărul punctelor din I în care saltul funcţiei este cel puţin egal cu σ este finit.
Facem următoarele notaţii:
– S este mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei f;
– S_1 este mulţimea punctelor din I în care saltul funcţiei f este cel puţin egal cu 1;
– S_n, ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) este mulţimea punctelor din I în care saltul funcţiei f este cuprins între $\frac{1}{n}$ şi $\frac{1}{n-1}$.
Din proprietatea anterioară a funcţiilor monotone, rezultă în mod clar că $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$. Deoarece fiecare mulţime S_k este finită sau vidă, rezultă că S este cel mult numărabilă (vezi Propoziţia 1.4.2 şi Remarca 1.4.2) şi demonstraţia este încheiată în acest caz.
Dacă funcţia f este descrescătoare, demonstraţia este asemănătoare.
Dacă intervalul I nu este compact, atunci el se poate scrie ca o reuniune numărabilă de intervale compacte ce au în comun, două câte două, câte o extremitate $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k,b_k]$. În fiecare interval $[a_k,b_k]$, funcţia f are cel mult o mulţime numărabilă de puncte de discontinuitate. Cum o mulţime numărabilă de mulţimi cel mult numărabile

este o mulţime cel mult numărabilă, rezultă că mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este o mulţime cel mult numărabilă. Demonstraţia este acum completă.
Facem precizarea că această proprietate este un caz particular al Teoremei lui Al. Froda: “Punctele de discontinuitate de speţa întâia ale unei funcţii $f : I \to \mathbb{R}$ formează o mulţime cel mult numărabilă.”
3°. Dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, I interval din $\mathbb{R}$, este monotonă şi are Proprietatea lui Darboux, atunci ea este continuă. Cu alte cuvinte, în clasa funcţiilor monotone, Proprietatea lui Darboux este echivalentă cu continuitatea.
Într-adevăr, o astfel de funcţie nu poate avea discontinuităţi nici de speţa întâia (având Proprietatea lui Darboux), nici de speţa a doua (fiind monotonă).

CAPITOLUL 2

Funcţii Derivabile

Problema 10

Să se calculeze derivatele funcţiilor:

a). $f(x) = \ln(x^2 + 4) + \log_2(x^2 + 2x + 2) + \mathrm{arctg}\frac{x}{2}$;

b). $g(x) = x\sqrt{x^2 + 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

c). $h(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$;

d). $k(x) = x^{\ln x}$.

Rezolvare. a). Aplicăm regula de derivare a sumei a trei funcţii şi, în acelaşi timp, ţinem cont de formulele:

$$(\ln\ u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)},\ \log_2 u(x) = \frac{\ln u(x)}{\ln 2},$$
$$(\mathrm{arctg}\ u(x))' = \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}.$$

Ca urmare, deoarece avem $\left(\ln(x^2+4)\right)' = \frac{2x}{x^2+4}$ şi apoi

$$\left(\log_2(x^2+2x+2)\right)' = \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+2)\ln 2},\ \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)' = \frac{2}{x^2+4},$$

derivata funcţiei f este, pentru $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+4} + \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+2)\ln 2} + \frac{2}{x^2+4}.$$

b). Aplicăm regula de derivare a diferenţei şi a produsului a două funcţii şi, în acelaşi timp, ţinem cont de formulele:

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ şi } \left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ca urmare,

$$g'(x) = \left(x\sqrt{x^2+1} - \ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)' =$$
$$= \sqrt{x^2+1} + x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

c). Aplicăm regula de derivare a câtului a două funcţii şi avem

$$h'(x) = \frac{(2x-3)(x^2+1)-(x^2-3x+2)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2-2x-3}{(x^2+1)^2}.$$

d). Aplicăm regula de derivare a unei puteri

$$k'(x) = \left(x^{\ln x}\right)' = x^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x}\ln x\right) = 2x^{\ln x - 1}\ln x. \ \blacksquare$$

Observaţii. 1. În legătură cu funcţiile derivabile, reamintim următoarele:
Definiţia derivatei unei funcţii într-un punct.
Se spune că funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are derivată în punctul $a \in D \cap D'$ dacă există $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, finită sau infinită, notată $f'(a)$ sau $\frac{df(a)}{dx}$.
Când derivata $f'(a)$ este finită, se spune că funcţia f este derivabilă în punctul a.
Limitele laterale corespunzătoare (când au sens),

$$f'_s(a) = \lim_{x\nearrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ şi } f'_d(a) = \lim_{x\searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

se numesc derivata la stânga respectiv la dreapta a funcţiei f în punctul a.
Când aceste derivate laterale sunt finite, se spune că funcţia f este derivabilă la stânga respectiv la dreapta în punctul a.
Este clar că într-un punct de acumulare bilateral $a \in D$, funcţia f este derivabilă dacă şi numai dacă ea este derivabilă la stânga şi la dreapta şi derivatele laterale sunt egale. În acest caz, derivata funcţiei este $f'(a) = f'_s(a) = f'_d(a)$.
Dacă o funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în fiecare punct al unei submulţimi $E \subset D$, atunci se spune că f este derivabilă pe mulţimea E. În acest caz, funcţia

$$f' : E \to \mathbb{R}, x \to f'(x)$$

se numeşte derivata lui f pe mulţimea E.
Operaţia prin care se obţine derivata unei funcţii se numeşte operaţia de derivare.
În mod similar, se pot defini funcţiile derivate laterale f'_s şi f'_d prin

$$x \to f'_s(x) \text{ respectiv } x \to f'_d(x),$$

fiecare dintre ele fiind definită în acele puncte ale lui D în care funcţia f are derivata laterală respectivă finită.
De exemplu, pentru funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{|\ x\ |}, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 3x - 2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

avem

$$f'_s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f'_s(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{-x}}, & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{dacă } 0 < x \leq 1 \\ 3, & \text{dacă } x > 1 \end{cases},$$

$$f'_d : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f'_d(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{-x}}, & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ 3, & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}.$$

În general, $E = \{x \in D \mid f'_s(x) = f'_d(x), \text{ finite}\}$ şi atunci $f'(x) = f'_s(x) = f'_d(x)$, $x \in E$.
De exemplu,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{-x}}, & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ 3, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

este derivata funcţiei f.

Un prim rezultat fundamental este următorul:

"Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct".

Într-adevăr, rezultă din egalitatea, adevărată pentru $x \neq a$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a),$$

prin trecere la limită:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)\right] = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

Facem precizarea că acest rezultat rămâne valabil în cazul mai general în care funcţia este derivabilă la stânga şi la dreapta într-un punct.

Interpretarea geometrică a derivatei.

Pentru o funcţie continuă $f : I \to \mathbb{R}$, derivabilă într-un punct $a \in I$, numărul $f'(a)$ este coeficientul unghiular al (sau panta) tangentei la graficul lui f în punctul (a,f(a)). Ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul (a,f(a)) este $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Dacă f are doar derivată în punctul a, adică $f'(a) = -\infty$ sau $f'(a) = \infty$, atunci tangenta la graficul lui f în punctul (a,f(a)) este paralelă cu axa Oy şi are ecuaţia $x = a$.

Similar, pentru o funcţie derivabilă la dreapta într-un punct $a \in I$, numărul $f'_d(a)$ este coeficientul unghiular al (sau panta) semitangentei la dreapta la graficul lui f în punctul (a,f(a)). Ecuaţia semitangentei la dreapta la graficul lui f în punctul (a,f(a)) este

$$y - f(a) = f'_d(a)(x - a), \ x \geq a.$$

Dacă f are doar derivată la dreapta în punctul a (adică $f'_d(a) = -\infty$ sau $f'_d(a) = +\infty$), atunci semitangenta la dreapta la graficul lui f în punctul (a,f(a)) este paralelă cu axa Oy (şi are ecuaţia $x = a$, $y \leq f(a)$ respectiv $x = a$, $y \geq f(a)$).

Similar, pentru o funcţie derivabilă la stânga într-un punct $a \in I$, numărul $f'_s(a)$ este coeficientul unghiular al (sau panta) semitangentei la stânga la graficul lui f în punctul (a,f(a)). Ecuaţia semitangentei la stânga la graficul lui f în punctul (a,f(a)) este

$$y - f(a) = f'_s(a)(x - a),\ x \leq a.$$

Dacă f are doar derivată la stânga în punctul a (adică $f'_s(a) = -\infty$ sau $f'_s(a) = +\infty$), atunci semitangenta la stânga la graficul lui f în punctul (a,f(a)) este paralelă cu axa Oy (şi are ecuaţia $x = a$, $y \geq f(a)$ respectiv $x = a$, $y \leq f(a)$).
Dacă în punctul a funcţia are derivate laterale diferite între ele, cel puţin una finită, punctul a se numeşte punct unghiular pentru funcţia f iar punctul (a,f(a)) se numeşte punct unghiular pentru graficul lui f. Într-un astfel de punct, cele două semitangente, la stânga şi la dreapta, formează un unghi cuprins între 0 şi π radiani.
De exemplu, funcţia $f(x) = |\ x - a\ |$ are în punctul a un punct unghiular, pentru că $f'_s(a) = -1$, $f'_d(a) = +1$.
Dacă în punctul a funcţia are derivate laterale diferite între ele, ambele fiind infinite (adică dacă $f'_s(a) = -\infty$ şi $f'_d(a) = +\infty$ sau $f'_s(a) = +\infty$ şi $f'_d(a) = -\infty$), punctul a se numeşte punct de întoarcere pentru funcţia f iar punctul (a,f(a)) se numeşte punct de întoarcere pentru graficul lui f. Într-un astfel de punct, cele două semitangente, la stânga şi la dreapta, coincid.
De exemplu, funcţia $f(x) = \sqrt{|\ x - a\ |}$ are în punctul a un punct de întoarcere, pentru că $f'_s(a) = -\infty$, $f'_d(a) = +\infty$.
Derivabilitatea funcţiilor elementare.
Funcţiile elementare - polinomiale, raţionale, trigonometrice, unele puteri reale, exponenţiale - sunt derivabile pe domeniul lor maxim de definiţie; în general vorbind, domeniul maxim de definiţie al unei astfel de funcţii este fie un interval (care poate fi chiar $\mathbb{R}$) fie o reuniune finită de intervale deschise.
Urmând definiţia de mai sus, se pot calcula derivatele acestor funcţii. Este recomandabil reţinerea acestor derivate. A se vedea un tabel cu derivate imediate dintr-un manual de liceu.
Un exemplu simplu. Pentru funcţia putere naturală $f(x) = x^n$, într-un punct oarecare $a \in \mathbb{R}$ avem

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}) = na^{n-1}.$$

În punctul curent această egalitate se scrie $f'(x) = nx^{n-1}$ şi ca urmare, are loc formula de derivare

$$(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

O funcţie neelementară aparte este funcţia modul,

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to |x - a|$$

a cărei explicitare este

$$|x - a| = \begin{cases} a - x, & \text{dacă } x < a \\ x - a, & \text{dacă } x \geq a \end{cases}.$$

Urmând definiţia de mai sus, se constată că funcţia modul este derivabilă în fiecare punct $x \neq a$ şi

$$|\cdot|'(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < a \\ +1, & \text{dacă } x > a \end{cases}.$$

În punctul a, derivata la stânga este -1 iar derivata la dreapta, $+1$. Ca urmare, punctul a este punct unghiular pentru funcţia modul.
2. În legătură cu regulile de derivare, reamintim următoarele:

i). suma (diferenţa) a două funcţii derivabile $f, g : E \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe E şi derivata sumei (diferenţei) este egală cu suma (diferenţa) derivatelor; regula de derivare se scrie:

$$(f + g)' = f' + g',\ (f - g)' = f' - g';$$

ii). produsul cu un scalar a unei funcţii derivabile $f : E \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe E şi are loc regula de derivare

$$(\lambda f)' = \lambda f';$$

iii). produsul a două funcţii derivabile $f, g : E \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe E şi are loc regula de derivare

$$(fg)' = f'g + fg';$$

iv). câtul a două funcţii derivabile $f, g : E \to \mathbb{R}$ pentru care numitorul g nu se anulează este o funcţie derivabilă pe E şi are loc regula de derivare

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2};$$

v). puterea a două funcţii derivabile f, g : $E \to \mathbb{R}$ pentru care baza f este pozitivă ($f > 0$) este o funcţie derivabilă pe E şi are loc regula de derivare

$$(f^g)' = f^g\left(g'\ln f + g\frac{f'}{f}\right).$$

3. În legătură cu derivabilitatea funcţiei compuse reamintim următoarea

Teoremă. Fie I şi J intervale şi funcţiile $u : I \to J$, $f : J \to \mathbb{R}$.
Dacă u este derivabilă în punctul $a \in I$ şi f este derivabilă în punctul $u(a)$, atunci funcţia compusă $F = f \circ u$ este derivabilă în punctul a şi $F'(a) = f'(u(a)) \cdot u'(a)$.
Dacă u este derivabilă pe I şi f este derivabilă pe J, atunci funcţia compusă $F = f \circ u$ este derivabilă pe I şi are loc regula de derivare a funcţiei compuse

$$(f \circ u)' = \left(f' \circ u\right) \cdot u'.$$

Practic, aceasta se scrie $F'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$, $\forall x \in I$.
Exemple. 1°. Derivata funcţiei $G(x) = \cos^3 x$ se calculează uşor observând că are loc compunerea de funcţii

$$G(x) = \cos^3 x = (\cos x)^3 = f(u(x)),\ \text{unde } u(x) = \cos x \text{ şi } f(u) = u^3.$$

Deoarece $u'(x) = -\sin x$ şi $f'(u) = 3u^2$, avem

$$G'(x) = 3\cos^2 x(-\sin x) = -3\cos^2 x \sin x.$$

2°. Derivata funcţiei $H(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}$ se calculează uşor observând că are loc compunerea de funcţii

$$H(x) = f(g(u(x))),\ \text{unde } f(t) = \operatorname{arctg} t,\ g(u) = \sqrt{u} \text{ şi } u(x) = x^2 + 1.$$

Deoarece $u'(x) = 2x$, $g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ şi $f'(t) = \frac{1}{t^2+1}$, avem, prin aplicarea repetată a formulei de mai sus,

$$H'(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}.$$

Se observă de aici regula de derivare a unei compuneri de trei funcţii:

$$(\,f \circ g \circ u\,)' = \Big(\,f' \circ g \circ u\,\Big) \cdot (\,g' \circ u\,) \cdot u'.$$

În mod asemănător se poate stabili regula de derivare a unei compuneri de oricât de multe funcţii.
În legătură cu derivata funcţiei inverse, reamintim următoarea *Teoremă.* Fie I şi J intervale şi funcţia $f: I \to J$, continuă şi bijectivă. Dacă f are derivată într-un punct $a \in I$, atunci funcţia inversă f^{-1} are derivată în punctul corespunzător $b = f(a)$. În plus,

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \begin{cases} \frac{1}{f'(a)}, & \text{dacă } f'(a) \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } f'(a) = \pm\infty \\ +\infty & \text{dacă } f'(a) = 0, \text{ f crescătoare} \\ -\infty & \text{dacă } f'(a) = 0, \text{ f descrescătoare} \end{cases}.$$

În particular, dacă f este derivabilă pe I şi $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, atunci funcţia inversă f^{-1} este derivabilă pe J şi are loc regula de derivare a funcţiei inverse

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \text{ sau } \left(f^{-1}\right)' \circ f = \frac{1}{f'}.$$

Practic, acestea se scriu sub oricare din formele

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ unde } y = f(x),\ x \in I,$$
$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ unde } x \in I,$$
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \text{ unde } y \in J.$$

Proprietatea tocmai prezentată ne asigură că funcţiile inverse ale funcţiilor uzuale sunt derivabile pe unume intervale. Astfel,
1°. Funcţia putere $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^n$, $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$, este derivabilă, strict crescătoare şi surjectivă. În plus, $f'(a) = na^{n-1} \neq 0$ pentru $a > 0$. Ca urmare, funcţia inversă a sa, numită funcţia radical, $\sqrt[n]{\cdot}: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \to \sqrt[n]{x}$, este derivabilă în punctul $b = a^n$ şi $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{na^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{b^{n-1}}}$.
Schimbând notaţia, pentru orice $x > 0$ avem formula $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
Din cele spuse mai sus, funcţia radical $\sqrt[n]{\cdot}$ nu este derivabilă în punctul 0 şi avem $f'_d(0) = +\infty$. Pentru funcţia radical de indice impar, în punctul 0 avem $f'(0) = +\infty$.

2°. Funcţia exponenţială $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = a^x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$, este derivabilă, strict monotonă şi surjectivă. În plus, $f'(x) = a^x \ln a$ $\neq 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$. Ca urmare, funcţia inversă a sa, numită funcţia logaritmică, $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \to \log_a x$, este derivabilă în punctul $y = f(x) = a^x$ şi $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}$.
Schimbând notaţia, pentru orice $x > 0$ avem formula $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.
În particular, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
3°. Funcţia sinus, $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,+1]$, $x \to \sin x$, este derivabilă, strict crescătoare şi surjectivă. În plus, $\sin' x = \cos x \neq 0$ pentru $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ca urmare, funcţia inversă a sa,

$$\arcsin : [-1,+1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ x \to \arcsin x,$$

este derivabilă în punctul $y = \sin x$ şi are loc formula

$$\arcsin' y = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Schimbând notaţia, pentru $x \in (-1,1)$ avem $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
În punctele ± 1, funcţia arcsin nu este derivabilă dar are derivate laterale infinite: $\arcsin'_d(-1) = +\infty$, $\arcsin'_s(1) = +\infty$.
4°. Funcţia cosinus, $\cos : [0,\pi] \to [-1,+1]$, $x \to \cos x$, este derivabilă, strict descrescătoare şi surjectivă. În plus, $\cos' x = -\sin x \neq 0$ pentru $x \in (0, \pi)$. Ca urmare, funcţia inversă a sa,

$$\arccos : [-1,+1] \to [0,\pi],\ x \to \arccos x,$$

este derivabilă în punctul $y = \cos x$ şi are loc formula

$$\arccos' y = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Schimbând notaţia, pentru $x \in (-1,1)$ avem $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
În punctele ± 1, funcţia arccos nu este derivabilă dar are derivate laterale infinite: $\arccos'_d(-1) = -\infty$, $\arccos'_s(1) = -\infty$.
5°. Funcţia tangentă, $\mathrm{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$, este derivabilă, strict crescătoare şi surjectivă. În plus, $\mathrm{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$ pentru $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ca urmare, funcţia inversă a sa,

$$\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ x \to \mathrm{arctg}x,$$

este derivabilă în punctul $y = \mathrm{tg}x$ şi are loc formula

$$\mathrm{arctg}'y = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Schimbând notaţia, pentru $x \in \mathbb{R}$ avem $\mathrm{arctg}'x = \frac{1}{1 + x^2}$.
6°. Funcţia cotangentă, $\mathrm{ctg} : (0,\pi) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$, este derivabilă, strict descrescătoare şi surjectivă. În plus, $\mathrm{ctg}'x = -\frac{1}{\sin^2 x} \neq 0$ pentru $x \in (0,\pi)$. Ca urmare, funcţia inversă a sa,

$$\mathrm{arcctg} : \mathbb{R} \to (0,\pi),\ x \to \mathrm{arcctg}x,$$

este derivabilă în punctul $y = \mathrm{ctg}x$ şi are loc formula

$$\mathrm{arcctg}'y = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\sin^2 x = -\frac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2 x} = -\frac{1}{1 + y^2}.$$

Schimbând notaţia, pentru $x \in \mathbb{R}$ avem $\mathrm{arcctg}'x = -\frac{1}{1 + x^2}$.
Amănunte se pot găsi în orice manual de liceu.

Problema 11

Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$, este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$. Să se determine derivatele de ordin superior $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare. Funcţia f este un produs de două funcţii derivabile: o funcţie polinomială şi o funcţie exponenţială. Ca urmare, f este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Derivata sa este

$$f'(x) = \left(x^2 e^x\right)' = 2xe^x + x^2 e^x = e^x \left(x^2 + 2x\right).$$

Din aceleaşi motive, funcţia f' este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Ca urmare, funcţia f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$. Derivata de ordinul doi a lui f este

$$\begin{gathered} f'' = \left(f'\right)' = \left(e^x \left(x^2 + 2x\right)\right)' = \\ = e^x \left(x^2 + 2x\right) + e^x (2x + 2) = e^x \left(x^2 + 4x + 2\right). \end{gathered}$$

Presupunem acum că f este de n ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi că derivata de ordinul n este de forma

$$f^{(n)}(x) = e^x \left(x^2 + a_n x + b_n\right),$$

unde a_n şi b_n sunt numere reale ce depind de n. Este clar că $a_1 = 2$ şi $b_1 = 0$, $a_2 = 4$ şi $b_2 = 2$. Se vede că $f^{(n)}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi ca urmare, funcţia f este de n + 1 ori derivabilă pe $\mathbb{R}$. Derivata de ordinul n + 1 a lui f este

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left(e^x \left(x^2 + a_n x + b_n\right)\right)' = \\ &= e^x \left(x^2 + a_n x + b_n\right) + e^x (2x + a_n) = \\ &= e^x \left(x^2 + (a_n + 2)x + a_n + b_n\right), \end{aligned}$$

adică are aceeaşi formă ca $f^{(n)}$.

Am demonstrat prin inducţie că pentru orice număr natural n, f este de n ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi că derivata de ordinul n este de forma

$$f^{(n)}(x) = e^x \left(x^2 + a_n x + b_n\right).$$

Aşadar, conform definiţiei, funcţia f este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$.

S-au obţinut totodată şi relaţiile de recurenţă satisfăcute de şirurile de numere reale (a_n) şi (b_n):

$$a_{n+1} = a_n + 2,\ b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Prima relaţia arată că şirul de numere reale (a_n) este o progresie aritmetică cu raţia r = 2. Cum primul termen este $a_1 = 2$, rezultă că $a_n = 2 + 2(n - 1) = 2n$.

Cu aceasta, a doua relaţie devine $b_{n+1} = b_n + 2n$. Facem aici n = 1, 2, 3, ...,n − 1, adunăm membru cu membru relaţiile obţinute şi obţinem

$$b_n = 2(1 + 2 + \cdots + n - 1) = (n - 1)n.$$

Aşadar, derivata de ordinul n a lui f este

$$f^{(n)}(x) = e^x \left(x^2 + 2nx + (n - 1)n\right),\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \blacksquare$$

Observaţie. În legătură cu derivatele de ordin superior, reamintim următoarele:
Se spune că funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă în punctul $a \in D \cap D'$ dacă f este derivabilă pe o vecinătate V a lui a şi dacă derivata $f' : V \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul a. Numărul $\left(f'\right)'(a)$ se notează $f''(a)$ şi se numeşte derivata a doua (de ordinul doi) a funcţiei f în punctul a.
Dacă derivata f' este derivabilă pe D, se spune că f este de două ori derivabilă pe D. În acest caz, funcţia $f'' : D \to \mathbb{R}$, $f'' = \left(f'\right)'$, se numeşte derivata a doua (de ordinul doi) a lui f; se mai notează $f^{(2)}$.
Se poate continua. Se spune că funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de n ori $(n \geq 2)$ derivabilă în punctul $a \in D \cap D'$ dacă f este de $n - 1$ ori derivabilă pe o vecinătate V a lui a şi dacă derivata $f^{(n-1)} : V \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul a. Numărul $\left(f^{(n-1)}\right)'(a)$ se notează $f^{(n)}(a)$ şi se numeşte derivata de ordinul n a funcţiei f în punctul a.
Dacă derivata $f^{(n-1)}$ este derivabilă pe D, se spune că f este de n ori derivabilă pe D. În acest caz, funcţia $f^{(n)} : D \to \mathbb{R}$, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$, se numeşte derivata a n - a sau derivata de ordinul n, a funcţiei f.
Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, funcţia f este de n ori derivabilă în punctul a (pe mulţimea $E \subset D$), se spune că f este indefinit derivabilă în acest punct (pe această mulţime).
Uneori, se consideră drept derivată de ordinul zero a funcţiei chiar funcţia.
Pentru $n \in \mathbb{N}$, se foloseşte notaţia: $C^n(D,\mathbb{R})$ este mulţimea funcţiilor $f : D \to \mathbb{R}$ care sunt de n ori derivabile pe D şi derivata $f^{(n)}$ este continuă pe D. La fel, $C(D,\mathbb{R})$ este mulţimea funcţiilor $f : D \to \mathbb{R}$ care sunt continue pe D. În sfârşit, $C^\infty(D,\mathbb{R})$ este mulţimea funcţiilor $f \in C^n(D,\mathbb{R})$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Este clar că au loc incluziunile
$C(D,\mathbb{R}) \supset C^1(D,\mathbb{R}) \supset C^2(D,\mathbb{R}) \supset \cdots \supset C^n(D,\mathbb{R}) \supset \cdots \supset C^\infty(D,\mathbb{R})$
Când $f \in C^n(D,\mathbb{R})$, se mai spune că f este de clasă C^n (pe D); aici, $n = 0, 1, 2, ..., \infty$.
Exemple. 1°. Funcţiile elementare - polinomiale, raţionale, trigonometrice, unele puteri reale, exponenţialele, logaritmii - sunt indefinit derivabile (de clasă C^∞) pe domeniul lor maxim de definiţie.
2°. Unele funcţii au expresii simple pentru derivatele de ordin superior:

i). $\left(x^k\right)^{(n)} = \begin{cases} A_k^n x^{k-n}, & \text{dacă } n < k \\ k!, & \text{dacă } n = k \\ 0, & \text{dacă } n > k \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}$ este dat; $x \in \mathbb{R}$.

ii). $\left(x^\lambda\right)^{(n)} = \lambda(\lambda - 1)\cdots(\lambda - n + 1)x^{\lambda - n}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ este dat; $x>0$.

iii). $\left(\frac{1}{x - a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x - a)^{n+1}}$; $x \neq a$.

iv). $\left(e^{\lambda x}\right)^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ este dat; $x \in \mathbb{R}$.

v). $\sin^{(n)} x = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$; $x \in \mathbb{R}$.

vi). $\cos^{(n)} x = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$; $x \in \mathbb{R}$.

Aceste formule se pot demonstra prin inducţie.

3°. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$ şi indefinit derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Într-adevăr, din $| f(x) | \leq | x^3 \cos\frac{1}{x} | \leq | x^3 |$ pentru $x \in \mathbb{R}$ şi din Teorema 4.1.7, avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, ceea ce arată că funcţia f este continuă în punctul 0. Apoi, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$, precum mai sus. Deci, funcţia f este derivabilă în punctul 0. Cum pe intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0,\infty)$ funcţia f este o compunere de funcţii elementare, ea este derivabilă. Avem

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos\frac{1}{x} + x \sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

şi se constată cu uşurinţă că $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Funcţia f' este continuă în punctul 0. Cum pe intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0,\infty)$ funcţia f' este o compunere de funcţii elementare, ea este continuă.

În concluzie, funcţia f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$.

Apoi, deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(3x \cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\right)$ nu există, rezultă că funcţia f nu este de două ori derivabilă în punctul 0. În sfârşit, se constată cu uşurinţă că funcţia f este indefinit derivabilă pentru $x \neq 0$.

Operaţiile cu funcţii derivabile se extind şi la derivatele de ordin superior. Astfel, dacă funcţiile $f, g : D \to \mathbb{R}$ sunt de k ori derivabile pe D, iar α, β sunt constante reale, atunci şi funcţiile $\alpha f + \beta g$ şi fg sunt de k ori derivabile pe D şi au loc formulele de derivare de ordin superior

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)},$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(n-i)} g^{(i)},$$

pentru n = 1, 2, ...k. Ultima formulă se numeşte formula lui Leibniz de derivare a produsului. Ambele formule se demonstrează prin inducţie fără nici o dificultate.
Dacă, în plus, g nu se anulează pe D, atunci funcţia $\frac{f}{g}$ este de k ori derivabilă pe D.
Dacă, în plus, $f > 0$, atunci funcţia f^g este de k ori derivabilă pe D.
Dacă, în plus, $f \circ g$ are sens, atunci funcţia $f \circ g$ este de k ori derivabilă pe D.
În aceste ultime cazuri, derivatele de ordin superior se determină din aproape în aproape.
Pentru a ilustra prima formulă, fie $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$. Scriem funcţia sub forma $f(x) = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$ şi atunci, pentru $x \neq \pm a$, avem

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2a}\left[\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}\right] = \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]. \end{aligned}$$

Pentru a ilustra formula lui Leibniz, reluăm pe scurt problema de mai sus. Avem deci

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \left(e^x x^2\right)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(e^x\right)^{(n-i)} \left(x^2\right)^{(i)} = C_n^0 \left(e^x\right)^{(n)} \left(x^2\right)^{(0)} + \\ &+ C_n^1 \left(e^x\right)^{(n-1)} \left(x^2\right)^{(1)} + C_n^2 \left(e^x\right)^{(n-2)} \left(x^2\right)^{(2)} + \cdots = \\ &= e^x x^2 + C_n^1 e^x 2x + C_n^2 e^x 2 + 0 = e^x \left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right), \end{aligned}$$

care este exact rezultatul găsit mai sus.
Pentru funcţia compusă $F = f \circ g$, avem
$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ şi apoi
$F''(x) = f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x)$,
$F'''(x) = f'''(g(x)) \cdot (g'(x))^3 + 3f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g''(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x)$,
ş.a.m.d.

Problema 12

Să se determine punctele de extrem ale funcţiei:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x$$

Rezolvare. Funcţia f este derivabilă pe o mulţime deschisă. Conform Teoremei lui Fermat, derivata f' se anulează în fiecare punct de extrem al funcţiei. Deoarece $f'(x) = 3x^2 - 3$, avem

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Longleftrightarrow x \in \{-1\ +1\}.$$

Deci, punctele -1 şi $+1$ sunt posibilele puncte de extrem ale funcţiei f.

În punctul $x = -1$ avem

$$f(x) - f(-1) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2).$$

Se vede că pentru $x \in V = (-\infty, 2)$, $f(x) - f(-1) \leq 0$, ceea ce arată că punctul $x = -1$ este punct de maxim local pentru funcţia f; deoarece $f(3) - f(-1) > 0$, rezultă că punctul $x = -1$ nu este punct de maxim absolut pentru funcţia f.

În punctul $x = +1$ avem

$$f(x) - f(1) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2).$$

Se vede că pentru $x \in U = (-2,\infty)$, $f(x) - f(1) \geq 0$, ceea ce arată că punctul $x = 1$ este punct de minim local pentru funcţia f; deoarece $f(-3) - f(1) < 0$, rezultă că punctul $x = 1$ nu este punct de minim absolut pentru funcţia f.

În concluzie, punctele $x = -1$ şi $x = 1$ sunt singurele puncte de extrem local (sau extrem relativ) pentru funcţia f (mai exact, ele sunt puncte de extrem local strict pentru funcţia f). Valorile funcţiei în aceste puncte, $f(-1) = 2$ şi $f(1) = -2$, se numesc extreme locale (stricte) ale funcţiei. ■

Observaţie. În legătură cu Teorema lui Fermat, reamintim următoarele:
Fie o funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi a un punct din D.
Punctul a se numeşte punct de maxim local (sau relativ) pentru funcţia f dacă există o vecinătate V a lui a astfel încât

$$f(x) \leq f(a), \text{ pentru orice } x \in V \cap D.$$

Punctul a se numeşte punct de minim local (sau relativ) pentru funcţia f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât

$$f(x) \geq f(a), \text{ pentru orice } x \in V \cap D.$$

Cu alte cuvinte, punctul a este punct de maxim sau minim local (sau relativ) dacă diferenţa $f(x) - f(a)$ are semn constant sau se anulează pentru orice $x \in V \cap D$.
Dacă inegalităţile de mai sus au loc pentru orice $x \in D$, atunci punctul a se numeşte punct de maxim absolut respectiv punct de minim absolut pentru funcţia f.
Cu alte cuvinte, punctul a este punct de maxim sau minim absolut dacă diferenţa $f(x) - f(a)$ are semn constant sau se anulează pentru orice $x \in D$.
Un punct de minim sau de maxim (local sau absolut) pentru f se numeşte punct de extrem (local sau absolut) pentru funcţia f.
Dacă inegalităţile de mai sus sunt stricte pentru $x \neq a$, $x \in V \cap D$, punctul a se numeşte punct de maxim respectiv minim local strict.
Este evident că un punct de extrem absolut este şi un punct de extrem local (relativ) pentru funcţia respectivă.
Există o legătură între punctele de extrem şi derivata funcţiei, dată de Teorema Fermat: Dacă a este un punct de extrem local pentru funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, interior mulţimii D, iar f are derivată în punctul a, atunci derivata se anulează în acest punct.
Demonstraţia este imediată: presupunând că punctul a este punct de minim local pentru f, avem că

$$f'_s(a) = \lim_{x \nearrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0, \; f'_d(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Cum există $f'(a) = f'_s(a) = f'_d(a)$, rezultă că $f'(a) = 0$.
Dacă a este punct de maxim local, atunci el este punct de minim local pentru $-f$ şi concluzia rezultă imediat.

Se numeşte punct staţionar pentru funcţia f, un punct interior domeniului de definiţie în care derivata se anulează.
Punctele staţionare se mai numesc şi puncte critice.
O consecinţă imediată a Teoremei lui Fermat este că pentru o funcţie derivabilă pe o mulţime deschisă, punctele de extrem local se află printre punctele staţionare ale funcţiei, adică printre soluţiile ecuaţiei $f'(x) = 0$. Putem decide dacă o soluţie x_0 a acestei ecuaţii este punct de extrem pentru f studiind semnul diferenţei $f(x) - f(x_0)$.
Dar, nu orice punct staţionar al unei funcţii este punct de extrem. Într-adevăr, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ are un singur punct staţionar, anume 0, pentru că $f'(x) = 3x^2$ şi ecuaţia $f'(x) = 0$ are o singură soluţie, anume $x = 0$. Acest punct nu este punct de extrem pentru f pentru că diferenţa $f(x) - f(0) = x^3$ nu are semn constant pe nici o vecinătate a originii (sau pentru că funcţia f este strict crescătoare).
Interpretarea geometrică a Teoremei lui Fermat este următoarea: în condiţiile Teoremei, într-un punct de extrem local, tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox.

Problema 13

Să se arate că ecuaţia

$$\begin{gathered}(x-2)(x-3)(x-4) + (x-1)(x-3)(x-4) + \\ + (x-1)(x-2)(x-4) + (x-1)(x-2)(x-3) = 0\end{gathered}$$

are toate rădăcinile reale şi distincte.

Rezolvare. Ecuaţia se poate scrie $P'(x) = 0$, unde $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Pe fiecare din intervalele [1,2], [2,3], [3,4], funcţia P satisface condiţiile Teoremei lui Rolle. Ca urmare, în fiecare din intervalele (1,2), (2,3), (3,4), ecuaţia $P'(x) = 0$ are cel puţin o rădăcină. Drept consecinţă, ecuaţia $P'(x) = 0$ are cel puţin trei rădăcini reale şi distincte. Cum această ecuaţie este evident de gradul al treilea, rezultă că ea are exact trei rădăcini reale, câte una în fiecare din intervalele de mai sus. ■

Observaţie. Reamintim Teorema lui Rolle: Fie f : [a,b] $\to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe intervalul închis [a,b], derivabilă pe intervalul deschis (a,b) şi astfel încât f(a) = f(b). Atunci, există cel puţin un punct c $\in$ (a,b) astfel încât $f'(c) = 0$.
Demonstraţia se bazează pe Teorema lui Weierstrass (vezi Corolarul 4.2.4) şi pe Teorema lui Fermat. Fiind continuă, funcţia f este mărginită şi îşi atinge marginile pe intervalul compact [a,b], conform Teoremei lui Weierstrass. Fie marginile funcţiei f, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ şi $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, care sunt atinse în punctele x_1 şi x_2 din [a,b]: $m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$. Din $m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$, $\forall\, x \in$ [a,b], rezultă că x_1 şi x_2 sunt puncte de extrem absolut ale funcţiei f.
Putem avea doar una din situaţiile:
j). punctele x_1 şi x_2 coincid cu a sau b: $x_1 = x_2 = a$ sau $x_1 = x_2 = b$ sau ($x_1 = a$, $x_2 = b$) sau ($x_1 = b$, $x_2 = a$)
jj). cel puţin unul din punctele x_1 şi x_2 aparţine interiorului intervalului [a,b].
În primul caz, rezultă că f(x) = f(a), $\forall\, x \in$ [a,b] (adică f este constantă pe [a,b]). Deci, $f'(c) = 0$ pentru orice c $\in$ (a,b).
În al doilea caz, luăm drept punct c pe acela din punctele x_1 şi x_2 care aparţine interiorului intervalului [a,b]. Conform Teoremei lui Fermat, avem $f'(c) = 0$ şi demonstraţia este încheiată.
Interpretarea geometrică a Teoremei lui Rolle: dacă segmentul determinat de capetele (a,f(a)) şi (b,f(b)) ale graficului lui f este paralel cu axa Ox, atunci există cel puţin un punct al graficului cuprins între aceste capete în care tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox.
Exemple simple arată că fiecare din ipotezele Teoremei este esenţială (în sensul că dacă una din ele nu se verifică, atunci concluzia nu este în mod obligatoriu adevărată).
O consecinţă imediată a Teoremei lui Rolle: Între două zerouri ale unei funcţii derivabile pe un interval se află cel puţin un zero al derivatei.
În fapt, această consecinţă rezolvă problema de mai sus.
Mai reamintim faptul că o funcţie f : [a,b] $\to \mathbb{R}$ care este continuă pe intervalul închis [a,b] şi derivabilă pe intervalul deschis (a,b) se numeşte funcţie Rolle.

Problema 14

1. Să se determine punctele de pe parabola cubică $y = x^3$ în care tangenta este paralelă cu segmentul AB, unde A(–2,–8), B(1,1).

2. Se dau funcţiile f, g : $[0,2] \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1, & \text{dacă } x \in [0,1] \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}, & \text{dacă } x \in (1,2] \end{cases},$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 10.$$

Să se arate că se poate aplica Teorema lui Cauchy celor două funcţii. Să sa aplice Teorema şi să se determine efectiv valoarea lui c.

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f(x) = (m + 1)\arccos x + \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2}$$

să fie constantă pe un subinterval al domeniului său maxim de definiţie.

4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right) + mx,$$

să fie descrescătoare.

5. Să se studieze derivabilitatea funcţiei

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{|x|}}{1 + |x|}.$$

6. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin x$, este lipschitziană pe fiecare interval mărginit $I \subset \mathbb{R}$.

7. Să se arate că funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}}$, depinde de funcţia $g(x) = \mathrm{arctg}(x + 1)$. Să se stabilească această dependenţă.

Rezolvare. 1). Enunţul ne trimite la Interpretarea geometrică a Teoremei lui Lagrange. Se observă că punctele A(–2,–8), B(1,1) aparţin graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Aplicăm Teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul [–2,1]. Există cel puţin un punct $c \in (-2,1)$

astfel încât $f'(c) = \frac{f(1) - f(-2)}{3} = 3$. Dar $f'(x) = 3x^2$. Din $3c^2 = 3$ şi $c \in (-2,1)$ rezultă $c = -1$. Aşadar, tangenta în punctul $C(-1,-1)$ la parabola cubică $y = x^3$ este paralelă cu segmentul AB dat.

2). Se constată cu uşurinţă că funcţiile f şi g sunt funcţii Rolle pe intervalul $[0,2]$ şi că $g'(x) = x^2 - 2x - 3 \neq 0$ pe $(0,2)$. Se poate aplica Teorema lui Cauchy celor două funcţii. Ca urmare, există cel puţin un punct $c \in (0,2)$ astfel încât $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} = -\frac{7}{44}$.

Având în vedere că

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{dacă } x \in (0,1] \\ x^2 - 3x + 2, & \text{dacă } x \in (1,2) \end{cases},$$

egalitatea $\frac{f'(c)}{g'(c)} = -\frac{7}{44}$ devine $51c^2 - 190c + 111 = 0$, pentru $c \in (0,1]$ şi atunci $c = \frac{37}{51}$, respectiv $51c^2 - 146c + 67 = 0$ pentru $c \in (1,2)$ şi nu avem un astfel de punct c.

În concluzie, doar punctul $c = \frac{37}{51}$ satisface egalitatea din Teorema lui Cauchy pentru funcţiile f şi g date.

3). Domeniul maxim de definiţie D al funcţiei f se determină punând condiţiile $|x| \leq 1$, $|2x\sqrt{1 - x^2}| \leq 1$. Rezultă $D = [-1,1]$. Se ştie că funcţia arccosx este derivabilă pe $(-1,1)$ şi că funcţia $\arcsin 2x\sqrt{1 - x^2}$ este derivabilă în punctele x în care $2x\sqrt{1 - x^2}$ este derivabilă şi cuprinsă între -1 şi 1, adică în $x \in (-1,1)$, $x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pentru $x \in (-1,1) \setminus \{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$, avem

$$f'(x) = (m + 1)\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2(1 - x^2)}}\left(\sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\right) =$$
$$= \frac{-(m + 1)}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{2(1 - 2x^2)}{|1 - 2x^2|\sqrt{1 - x^2}}$$

şi ca urmare,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-m - 3}{\sqrt{1 - x^2}}, & \text{dacă } x \in (-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ \frac{-m + 1}{\sqrt{1 - x^2}}, & \text{dacă } x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ \frac{-m - 3}{\sqrt{1 - x^2}}, & \text{dacă } x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1) \end{cases}.$$

Conform unei consecinţe a Teoremei lui Lagrange, o funcţie derivabilă pe un interval este constantă dacă (şi numai dacă) derivata este nulă. Aşadar, funcţia f este constantă pe un subinterval al domeniului său de definiţie dacă şi numai dacă m = 1 sau m = –3. În consecinţă, avem

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & \text{dacă } x \in (-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}), \quad \text{pentru } m = -3 \\ c_2, & \text{dacă } x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \quad \text{pentru } m = 1 \\ c_3, & \text{dacă } x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1), \quad \text{pentru } m = -3 \end{cases}$$

Constantele c_i se determină dând lui x valori convenabile din intervalul respectiv. Apoi, din continuitatea funcţiei f, aceste identităţi au loc şi în capetele intervalelor. De altfel, determinarea constantelor se poate face şi folosind continuitatea funcţiei f. Astfel,

$$\begin{aligned} c_1 &= \lim_{x \searrow -1} c_1 = \lim_{x \searrow -1} f(x) = \\ &= \lim_{x \searrow -1} \left[-2\arccos x + \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}\right] \\ &= -2\arccos(-1) + \arcsin 0 = -2\pi, \\ c_2 &= f(0) = 2\arccos 0 + \arcsin 0 = \pi, \\ c_3 &= \lim_{x \nearrow 1} c_3 = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = \\ &= \lim_{x \nearrow 1} \left[-2\arccos x + \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}\right] = \\ &= -2\arccos 1 + \arcsin 0 = 0. \end{aligned}$$

În concluzie,

$$f(x) = \begin{cases} -2\pi, & \text{dacă } x \in [-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}], \quad \text{pentru } m = -3 \\ \pi, & \text{dacă } x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \quad \text{pentru } m = 1 \\ 0, & \text{dacă } x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1], \quad \text{pentru } m = -3 \end{cases}$$

Menţionăm că problema poate fi rezolvată şi strict trigonometric. Într-adevăr, pentru $x \in D = [-1,1]$, cu notaţia $\arcsin x = t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, avem şi $x = \sin t$ şi atunci,

$$\begin{aligned} f(x) &= (m+1)\arccos x + \arcsin 2x\sqrt{1-x^2} = \\ &= (m+1)\arccos \sin t + \arcsin 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = \end{aligned}$$

$$= (m + 1)\arccos\cos(\tfrac{\pi}{2} - t) + \arcsin 2\sin t\cos t =$$
$$= (m + 1)(\tfrac{\pi}{2} - t) + \arcsin\sin 2t.$$

Am ţinut cont că $| \cos t | = \cos t$, $\frac{\pi}{2} - t \in [0,\pi]$ şi atunci conform definiţiei lui arccos, $\arccos\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \frac{\pi}{2} - t$.

Pentru $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $2t \in [-\pi, \pi]$. Este necesar să micşorăm intervalul în care se află t pentru a se putea explicita $\arcsin\sin 2t$. Pentru $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, avem $\arcsin x = t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$; atunci, $2t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ şi deci, $\arcsin\sin 2t = 2t$.

Acum, avem

$$f(x) = (m + 1)(\tfrac{\pi}{2} - t) + 2t = (1 - m)t + \tfrac{\pi}{2}(m + 1) =$$
$$= (1 - m)\arcsin x + \tfrac{\pi}{2}(m + 1)$$

şi se vede de aici că f este constantă pentru x $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ dacă şi numai dacă $m = 1$. În plus, se vede că constanta este π. Rezultatul coincide cu cel găsit prin metodele Analizei matematice.

Asemănător se procedează pe celelalte două intervale.

4). Funcţia dată este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Conform unei consecinţe a Teoremei lui Lagrange, o funcţie derivabilă pe un interval este descrescătoare dacă (şi numai dacă) derivata este negativă pe interval. Mai precis, trebuie să punem condiţia $f' \leq 0$ adică $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Deoarece $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + m = \frac{mx^2 + 2x + m}{x^2 + 1}$, condiţia de mai sus devine $mx^2 + 2x + m \leq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Trebuie deci puse condiţiile $\Delta = 1 - m^2 \leq 0$ şi $m < 0$. De aici rezultă $m \in (-\infty, -1]$.

Aşadar, funcţia dată este descrescătoare dacă şi numai dacă $m \leq -1$.

5). Domeniul maxim de definiţie D al funcţiei f se determină punând condiţia $-1 \leq \frac{2\sqrt{| x |}}{1 + | x |} \leq 1$. Condiţia se scrie succesiv $1 + | x | \geq 2\sqrt{| x |}$ sau $\left(1 - \sqrt{| x |}\right)^2 \geq 0$ care este evident adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deci, $D = \mathbb{R}$.

Funcţia este continuă pe D, fiind o compunere de funcţii continue (vezi Teorema 4.2.6). Din Teorema de derivabilitate a funcţiei compuse, rezultă că funcţia f este derivabilă în punctele x în care funcţia $\frac{2\sqrt{|x|}}{1+|x|}$ este derivabilă şi, în plus, $\frac{2\sqrt{|x|}}{1+|x|} < 1$. Calcule simple arată că funcţia f este derivabilă în punctele $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$. Ţinând seama de regulile de derivare, pentru $x > 0$, $x \neq 1$, avem

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\cdot\right)^2}} \cdot \frac{\frac{1+x}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} = \frac{1+x}{|1-x|} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}, & \text{dacă } x \in (0,1) \\ -\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}, & \text{dacă } x \in (1,\infty) \end{cases}.$$

Observăm că există limitele laterale

$$\lim_{x\searrow 0} f'(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \infty,$$

$$\lim_{x\nearrow 1} f'(x) = \lim_{x\nearrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\searrow 1} f'(x) = \lim_{x\searrow 1} -\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = -\frac{1}{2}.$$

Conform unei consecinţe a Teoremei lui Lagrange, aceste limite ne conduc la derivatele laterale ale funcţiei în punctele 0 şi 1:

$$f'_d(0) = +\infty,\ f'_s(1) = \frac{1}{2},\ f'_d(1) = -\frac{1}{2}.$$

Ţinând seama de faptul că f este funcţie pară (adică $f(x) = f(-x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$) şi de regula de derivare a funcţiei compuse, pentru $x < 0$, $x \neq -1$, avem

$$f'(x) = f'(-x)\cdot(-x)' = -f'(-x).$$

Deci,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-x}(1-x)}, & \text{dacă } x \in (-\infty,-1) \\ -\frac{1}{\sqrt{-x}(1-x)}, & \text{dacă } x \in (-1,0) \end{cases}.$$

Observăm că există limitele laterale

$$\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = \lim_{x \nearrow 0} -\frac{1}{\sqrt{-x(1-x)}} = -\infty,$$

$$\lim_{x \nearrow -1} f'(x) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{\sqrt{-x(1-x)}} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \searrow -1} f'(x) = \lim_{x \searrow -1} -\frac{1}{\sqrt{-x(1-x)}} = -\frac{1}{2}.$$

Conform unei consecinţe a Teoremei lui Lagrange, aceste limite ne conduc la derivatele laterale ale funcţiei în punctele 0 şi –1:

$$f'_s(0) = -\infty,\ f'_s(-1) = \frac{1}{2},\ f'_d(-1) = -\frac{1}{2}.$$

Din cele spuse mai sus, tragem concluzia că punctele ± 1 sunt puncte unghiulare iar punctul 0 este punct de întoarcere pentru funcţia f. Pe $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$, derivata f' este dată de formulele de mai sus.

6). Fie deci $I \subset \mathbb{R}$ un interval mărginit. Pentru $x, y \in I$, aplicând Teorema lui Lagrange, rezultă că

$$\begin{aligned} |\, x\cdot \sin x - y\cdot \sin y \,| &= |\, f'(c) \,||\, x - y \,| = \\ &= |\, \sin c + c\cdot \cos c \,||\, x - y \,| \le \\ &\le (|\, \sin c \,| + |\, c \,||\, \cos c \,|)\, |\, x - y \,| \le \\ &\le (1 + r)\, |\, x - y \,|, \end{aligned}$$

unde $r > 0$ este astfel încât $I \subset [-r,r]$ (intervalul I este mărginit).

Deci, funcţia este lipschitziană pe fiecare interval mărginit $I \subset [-r,r]$, constanta lui Lipschitz fiind $L = 1 + r$.

7). Domeniul maxim de definiţie D al funcţiei f se determină punând condiţia $\left|\frac{x}{\sqrt{2(x^2+2x+2)}}\right| \le 1$. Se constată cu uşurinţă că $D = \mathbb{R}$. Reamintim că funcţia f depinde de funcţia g dacă există Φ astfel încât $f = \Phi \circ g$.

Deoarece f şi g sunt derivabile (sunt compuneri de astfel de funcţii), este de aşteptat ca şi Φ să fie derivabilă. Atunci, am avea $f' = (\Phi' \circ g)g'$, ceea ce arată că derivata f' ar depinde de funcţiile g şi g'. Se impune deci calculul derivatei f' :

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2+2x+2)}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2(x^2+2x+2)}}\right)^2}} \frac{\sqrt{2(x^2+2x+2)} - x\cdot\frac{2(2x+2)}{2\sqrt{2(x^2+2x+2)}}}{\left(\sqrt{2(x^2+2x+2)}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2(x^2+2x+2)}}\right)^2}} \cdot \frac{2(x^2+2x+2) - x(2x+2)}{\left(\sqrt{2(x^2+2x+2)}\right)^3} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+4x+4}{2(x^2+2x+2)}}} \cdot \frac{2(x+2)}{\left(\sqrt{2(x^2+2x+2)}\right)^3} =$$

$$= \frac{2(x+2)}{|\, x+2 \,|} \cdot \frac{1}{2(x^2+2x+2)} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{(x+1)^2+1}, & \text{dacă } x < -2 \\ \frac{1}{(x+1)^2+1}, & \text{dacă } x > -2 \end{cases}.$$

Observăm că există limitele laterale

$$\lim_{x\nearrow -2} f'(x) = \lim_{x\nearrow -2} -\frac{1}{(x+1)^2+1} = -\frac{1}{2},$$
$$\lim_{x\searrow -2} f'(x) = \lim_{x\searrow -2} \frac{1}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{2}.$$

Conform unei consecinţe a Teoremei lui Lagrange, aceste limite ne conduc la derivatele laterale ale funcţiei în punctul -2:

$$f'_s(-2) = -\tfrac{1}{2},\ f'_d(-2) = \tfrac{1}{2}.$$

Ca urmare, funcţia f nu este derivabilă în punctul -2.

De asemenea, se observă că derivata f' depinde de derivata funcţiei

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \operatorname{arctg}(x+1).$$

Mai precis, avem următoarele:

– pe intervalul $(-\infty, -2)$, funcţiile f şi $-g$ au aceeaşi derivată:

$$f'(x) = (-g(x))' = -\frac{1}{(x+1)^2+1}.$$

Conform unei consecinţe a Teoremei lui Lagrange, există o constantă k_1 astfel încât $f = -g + k_1$ pe $(-\infty, -2)$. Constanta k_1 se determină prin particularizarea lui x:

$$k_1 = (f + g)(-\sqrt{3} - 1) =$$
$$= \arcsin \tfrac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) = -\tfrac{3\pi}{4}.$$

– pe intervalul $(-2, \infty)$, funcţiile f şi g au aceeaşi derivată:

$$f'(x) = g'(x) = \tfrac{1}{(x+1)^2+1}.$$

Conform unei consecinţe a Teoremei lui Lagrange, există o constantă k_2 astfel încât $f = g + k_2$ pe $(-2, \infty)$. Constanta k_2 se determină prin particularizarea lui x:

$$k_2 = f(0) - g(0) = \arcsin 0 - \mathrm{arctg} 1 = -\tfrac{\pi}{4}.$$

Combinând rezultatele anterioare, avem

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2+2x+2)}} = \begin{cases} -\mathrm{arctg}(x+1) - \frac{3\pi}{4}, & x < -2 \\ \mathrm{arctg}(x+1) - \frac{\pi}{4}, & x > -2 \end{cases}$$

În punctul $x = -2$ avem $f(-2) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ şi această valoare se obţine şi în oricare din cele două ramuri din egalitatea anterioară.

În concluzie, dependenţa lui f de funcţia g este

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2+2x+2)}} = \begin{cases} -\mathrm{arctg}(x+1) - \frac{3\pi}{4}, & x \le -2 \\ \mathrm{arctg}(x+1) - \frac{\pi}{4}, & x > -2 \end{cases}$$

Facem următoarea remarcă: determinarea constantelor k_1 şi k_2 se poate face şi folosind continuitatea sau existenţa unor limite ale funcţiilor ce apar. De exemplu,

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty} k_1 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) + g(x)] =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left[\arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2+2x+2)}} + \mathrm{arctg}(x+1)\right] =$$
$$= \arcsin(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}) - \tfrac{\pi}{2} = -\tfrac{3\pi}{4}.$$
$$k_2 = \lim_{x\searrow-2} k_2 = \lim_{x\searrow-2} [f(x) - g(x)] =$$

$$= \lim_{x \searrow -2} \left[\arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2+2x+2)}} - \operatorname{arctg}(x+1) \right] =$$
$$= \arcsin(-1) - \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}. \blacksquare$$

Observaţie. Reamintim Teorema lui Lagrange:
Dacă f : [a,b] $\to \mathbb{R}$ este o funcţie Rolle, atunci există cel puţin un punct c $\in$ (a,b) astfel încât $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Demonstrăm un rezultat mai general, şi anume Teorema lui Cauchy:
Fie f, g : [a,b] $\to \mathbb{R}$ funcţii Rolle, astfel încât $g'(x) \neq 0$, x $\in$ (a,b). Atunci, $g(a) \neq g(b)$ şi există cel puţin un punct c $\in$ (a,b) astfel încât are loc egalitatea $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$
Demonstraţia este imediată: În primul rând, dacă am avea g(a) = g(b), atunci, din Teorema lui Rolle ar exista cel puţin un punct c $\in$ (a,b) astfel încât $g'(c) = 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Prima parte a concluziei este demonstrată.
În al doilea rând, se consideră funcţia ajutătoare $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, unde λ este ales astfel încât F să satisfacă condiţiile din Teorema lui Rolle. Aplicând lui F această Teoremă, a doua parte a concluziei este demonstrată.
Se vede că dacă în Teorema lui Cauchy luăm g(x) = x, se obţine Teorema lui Lagrange.
Interpretarea geometrică a Teoremei lui Lagrange: există cel puţin un punct al graficului lui f în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda determinată de capetele (a,f(a)), (b,f(b)) ale graficului lui f.
Exemple simple arată că fiecare din ipotezele Teoremei este esenţială (în sensul că dacă una din ele nu se verifică, atunci concluzia nu este în mod obligatoriu adevărată).
Egalitatea $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ din Teorema lui Lagrange se mai poate scrie $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ şi se numeşte formula creşterilor finite.
Teorema lui Lagrange se mai numeşte Teorema creşterilor finite.
Consecinţe ale Teoremei lui Lagrange:
1°. Orice funcţie derivabilă care are derivata nulă pe un interval este constantă pe intervalul respectiv. Mai mult, două funcţii derivabile pe un interval care au aceeaşi derivată diferă printr-o constantă pe intervalul respectiv.
Reamintim că proprietatea are loc şi reciproc, ca proprietate generală: orice funcţie constantă este derivabilă şi are derivata nulă.

Ca urmare, o funcţie derivabilă pe un interval este constantă dacă şi numai dacă are derivata nulă pe intervalul respectiv.
2°. Orice funcţie derivabilă a cărei derivată are semn constant pe un interval este monotonă pe intervalul respectiv şi anume:
i). dacă $f' \geq 0$ pe I (adică $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in I$), atunci f este crescătoare pe I;
ii). dacă $f' \leq 0$ pe I (adică $f'(x) \leq 0$, $\forall\, x \in I$), atunci f este descrescătoare pe I;
Reamintim că proprietatea are loc şi reciproc, ca proprietate generală: derivata oricărei funcţii derivabile şi monotone pe un interval are semn constant pe intervalul respectiv.
Ca urmare, o funcţie derivabilă pe un interval este monotonă dacă şi numai dacă derivata are semn constant pe intervalul respectiv.
3°. Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in (a,b)$. Dacă f este derivabilă pe (a,x_0), este continuă la stânga în x_0 şi dacă există limita $\ell = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f'(x)$, atunci $f'_s(x_0)$ există şi $f'_s(x_0) = \ell$.
Analog la dreapta lui x_0: Dacă f este derivabilă pe (x_0,b), este continuă la dreapta în x_0 şi dacă există limita $\ell = \lim\limits_{x \searrow x_0} f'(x)$, atunci $f'_d(x_0)$ există şi $f'_d(x_0) = \ell$.
4°. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Atunci, f este lipschitziană pe orice subinterval $J \subset I$ pe care derivata f' este mărginită.
Demonstraţiile sunt imediate. Pentru început, fie o funcţie derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ care are derivata nulă pe intervalul I. Fie x şi a două puncte din I, primul variabil iar al doilea fixat. Presupunem $x > a$.Aplicând Teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[a,x]$, avem $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0$, ceea ce arată că f este constantă la dreapta lui a. Analog la stânga lui a.
Acum, ne situăm în condiţiile de la 2°i). Fie $x < y$ două puncte oarecare din I. Aplicând Teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[x,y]$, avem $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$, ceea ce arată că f este crescătoare pe I.
În cazul 2°ii), se procedează asemănător.
În cazul 3°, aplicând Teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[x,x_0]$, unde $x \in (a,x_0)$, avem $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x)$, unde $c_x \in (x,x_0)$. Deoarece pentru $x \to x_0$ avem $c_x \to x_0$, rezultă că $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f'(c_x) = \ell$, ceea ce arată că $f'_s(x_0)$ există şi $f'_s(x_0) = \ell$.

În sfârşit, în cazul 4°, considerăm $J = [a,b]$ şi fie $M > 0$ astfel încât $| f'(x) | \leq M, \forall x \in J$. Pentru $x, y \in [a,b]$, aplicând Teorema lui Lagrange, rezultă că

$$| f(x) - f(y) | = | f'(c) || x - y | \leq M| x - y |,$$

ceea ce arată că funcţia f este lipschitziană.
Facem precizarea că proprietatea tocmai demonstrată rămâne adevărată şi în cazul în care f este derivabilă cu excepţia unui număr finit de puncte.
Observaţie. Reamintim Teorema lui Darboux: Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe un interval I, atunci derivata sa f' are Proprietatea lui Darboux (adică oricare ar fi două puncte $x_1 < x_2$ din I şi oricare ar fi numărul λ cuprins între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$, există cel puţin un punct $c \in (x_1,x_2)$ astfel încât $f'(c) = \lambda$).
O consecinţă importantă: Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe un interval I astfel încât $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$. Atunci, sau $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in I$ şi deci f este strict crescătoare pe I, sau $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I$. şi deci f este strict descrescătoare pe I.
Această consecinţă permite stabilirea semnului derivatei unei funcţii derivabile şi deci a intervalelor de monotonie ale funcţiei. Astfel, dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe un interval I şi dacă a şi b sunt două zerouri consecutive ale derivatei, ($f'(a) = f'(b) = 0$ şi $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a,b)$), semnul derivatei este acelaşi în orice punct din (a,b). Acest semn se poate stabili calculând valoarea derivatei într-un punct particular din (a,b).
Să ne reamintim că o problemă asemănătoare am avut la funcţiile continue.

Problema 15

Să se calculeze următoarele limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}ax - \sin ax}{\operatorname{tg}bx - \sin bx},\ a, b > 0;$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx},\ a, b > 0;$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n e^{\frac{1}{x}};$$
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right);$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \arcsin \frac{1}{x}\right)^{x^2}$;
$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$;
$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x - \arccos x\right)^{x}$.

Rezolvare. Folosim regulile lui l'Hôpital (vezi mai jos).
a). Limita $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgax - sinax}{tgbx - sinbx}$ în care a, b > 0, prezintă nedeterminarea $\frac{0}{0}$. Se observă că funcţiile $f(x) = tgax - sinax$ şi $g(x) = tgbx - sinbx$ sunt derivabile pe intervalul $I = (-\frac{\pi}{2c}, \frac{\pi}{2c})$, unde $c = \max\{a,b\}$. Avem $g'(x) = \frac{b}{\cos^2 bx} - bcosbx = b\frac{1 - \cos^3 bx}{\cos^2 bx} \neq 0$ pentru $x \in I \setminus \{0\}$.

În sfârşit, avem $\lambda = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a\frac{1 - \cos^3 ax}{\cos^2 ax}}{b\frac{1 - \cos^3 bx}{\cos^2 bx}} = \frac{a}{b} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 ax}{1 - \cos^3 bx} \cdot \frac{\cos^2 bx}{\cos^2 ax} = \frac{a}{b} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 ax}{1 - \cos^3 bx}$. Se observă că şi această limită prezintă nedeterminarea $\frac{0}{0}$. Considerăm funcţiile $f_1(x) = 1 - \cos^3 ax$ şi $g_1(x) = 1 - \cos^3 bx$ care sunt derivabile pe $\mathbb{R}$. Avem $g_1'(x) = 3b\cos^2 bx\sin bx \neq 0$ pentru $x \in (-\frac{\pi}{2b}, \frac{\pi}{2b}) \setminus \{0\}$. În sfârşit, avem $\lambda_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3a\cos^2 ax \cdot \sin ax}{3b\cos^2 bx \cdot \sin bx} = \frac{a}{b} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 ax}{\cos^2 bx} \cdot \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$. Se observă că şi această limită prezintă nedeterminarea $\frac{0}{0}$. Considerăm funcţiile $f_2(x) = \sin ax$ şi $g_2(x) = \sin bx$ care sunt derivabile pe $\mathbb{R}$. Avem $g_2'(x) = b\cos bx \neq 0$ pentru $x \in (-\frac{\pi}{2b}, \frac{\pi}{2b})$. În sfârşit, avem $\lambda_2 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f_2'(x)}{g_2'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a\cos ax}{b\cos bx} = \frac{a}{b}$. Aplicând Teorema lui l'Hôpital, avem

$$\lambda_1 = \lim_{x\to 0} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{a}{b} \cdot \lambda_2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Aplicând din nou Teorema lui l'Hôpital, avem

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{a}{b} \cdot \lambda_1 = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

În sfârşit, aplicând din nou Teorema lui l'Hôpital, avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgax - sinax}{tgbx - sinbx} = \lambda = \left(\frac{a}{b}\right)^3,$$

ceea ce încheie calculul limitei.

Facem precizarea că limita λ se poate calcula direct, fără a mai fi nevoie de a aplica încă de două ori Teorema lui l'Hôpital:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 ax}{1 - \cos^3 bx} =$$
$$= \frac{a}{b} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos ax)(1 + \cos ax + \cos^2 ax)}{(1 - \cos bx)(1 + \cos bx + \cos^2 bx)} =$$
$$= \frac{a}{b} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} \frac{1 + \cos ax + \cos^2 ax}{1 + \cos bx + \cos^2 bx} = \frac{a}{b} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} =$$
$$= \frac{a}{b} \lim_{x\to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{2 \sin^2 \frac{bx}{2}} = \frac{a}{b} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2 \left(\frac{\frac{bx}{2}}{\sin \frac{bx}{2}}\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

S-a folosit limita fundamentală $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

De altfel, este recomandabil ca în calculul limitelor de funcţii, să se combine, dacă este posibil, regula lui l'Hôpital cu metodele elementare.

Însăşi limita dată se poate calcula direct:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}ax - \sin ax}{\mathrm{tg}bx - \sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax(\frac{1}{\cos ax} - 1)}{\sin bx(\frac{1}{\cos bx} - 1)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} \cdot \frac{\cos bx}{\cos ax} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{2 \sin^2 \frac{bx}{2}} \cdot \frac{\cos bx}{\cos ax} = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

b). Limita $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$, în care a, b > 0, prezintă nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$. Se observă că funcţiile $f(x) = \ln \sin ax$ şi $g(x) = \ln \sin bx$ sunt derivabile pe intervalul $I = (0, \frac{\pi}{2c})$, unde $c = \max\{a,b\}$. Avem $g'(x) = b\,\mathrm{ctg}\, bx \neq 0$ pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2c})$.În sfârşit, avem

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{a\,\mathrm{ctg}\, ax}{b\,\mathrm{ctg}\, bx} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{ctg}\, ax}{x\,\mathrm{ctg}\, bx} = 1.$$

Conform Teoremei lui l'Hôpital, avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx} = 1$.

S-a urmat recomandarea de mai sus, folosind limita fundamentală a sinusului

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg} ax = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin ax}\cdot\cos ax = \frac{1}{a}.$$

c). Limita $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n e^{\frac{1}{x}}$ prezintă nedeterminarea $0\cdot\infty$ pentru că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}} = (e^{+\infty}) = +\infty$. Scriem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^n}{e^{-\frac{1}{x}}}$ şi nedeterminarea se transformă în $\frac{0}{0}$. Funcţiile $f(x) = x^n$ şi $g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ verifică primele condiţii din Teorema lui l'Hôpital pe intervalul (0,1). Apoi avem $\lambda = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{nx^{n-1}}{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{nx^{n+1}}{e^{-\frac{1}{x}}}$, ceea ce arată că Teorema lui l'Hôpital nu se poate aplica.

Revenim la limita dată şi facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{y}$, $y \to +\infty$. Ca urmare, (vezi Teorema 4.1.5), avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{e^y}{y^n}$ şi în această limită se poate aplica Teorema lui l'Hôpital funcţiilor $f(y) = e^y$ şi $g(y) = y^n$. Într-adevăr, ele sunt derivabile pe intervalul $(0,\infty)$, $g'(y) = ny^{n-1} \neq 0$ pe $(0,\infty)$ şi $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{e^y}{ny^{n-1}}$. Se vede de aici că ne găsim într-o situaţie similară celei iniţiale, chiar mai favorabilă, pentru că n a scăzut cu o unitate. Este clar că aplicând repetat Teorema lui l'Hôpital câturilor $\frac{f'}{g'}, \frac{f''}{g''}, \cdots, \frac{f^{(n)}}{g^{(n)}}$ (pentru că f şi g sunt de n ori derivabile pe $(0,\infty)$ şi derivatele lui g nu se anulează pe acest interval) obţinem

$$\lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y^n} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{ny^{n-1}} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{n(n-1)y^{n-2}} =$$
$$= \cdots = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{n!} = +\infty.$$

În concluzie, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{e^y}{y^n} = +\infty.$

d). Se constată cu uşurinţă că limita $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ prezintă nedeterminarea $\infty - \infty$. Transformăm funcţia şi se obţine $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x\sin x}$. Aici, se aplică Teorema lui l'Hôpital de două ori:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

În concluzie, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=0.$

e). Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x\arcsin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\arcsin y}{y}=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$, limita dată prezintă nedeterminarea 1^{∞}. Transformăm funcţia:

$$\left(x\arcsin\tfrac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{\ln\left(x\arcsin\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=e^{x^2\ln\left(x\arcsin\frac{1}{x}\right)}$$

şi având în vedere continuitatea exponenţialei, limita devine

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\arcsin\tfrac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\left(x\arcsin\frac{1}{x}\right)}.$$

Aici, limita $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\left(x\arcsin\frac{1}{x}\right)$ prezintă nedeterminarea $0\cdot\infty$, care se poate însă reduce la nedeterminarea $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(x\arcsin\tfrac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x\arcsin\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}.$$

Ultima limită se calculează cu Teorema lui l'Hôpital, făcând mai întâi schimbarea de variabilă $x=\frac{1}{t}$, $t\searrow 0$ (vezi pentru aceasta Teorema 4.1.5)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x\arcsin\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\searrow 0}\frac{\ln\frac{\arcsin t}{t}}{t^2}=\lim_{t\searrow 0}\frac{\ln\arcsin t-\ln t}{t^2}=$$

$$=\lim_{t\searrow 0}\frac{\frac{1}{\arcsin t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{1}{t}}{2t}=\lim_{t\searrow 0}\frac{t-\sqrt{1-t^2}\arcsin t}{2t^3\frac{\arcsin t}{t}\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\searrow 0}\frac{t-\sqrt{1-t^2}\arcsin t}{t^3}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\searrow 0}\frac{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t}{3t^2}=\frac{1}{6}.$$

În concluzie, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\arcsin\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\sqrt[6]{e}.$

f). Evident, limita $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$ prezintă nedeterminarea ∞^0. Transformăm funcţia:

$$x^{\frac{1}{x}}=e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

şi având în vedere continuitatea exponenţialei, limita devine

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x}.$$

Aici, limita $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x$ prezintă nedeterminarea $0\cdot\infty$, care se poate însă reduce la nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$, pentru aplicarea Teoremei lui l'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

În concluzie, $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

g). Se vede că limita dată prezintă nedeterminarea 0^0. Transformăm funcţia:

$$\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x - \arccos x\right)^x = e^{\ln\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x - \arccos x\right)^x} =$$
$$= e^{x\ln\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x - \arccos x\right)} = e^{x\ln 2\arcsin x}$$

(s-a ţinut seama că $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\forall\, x \in [-1,1]$) şi având în vedere continuitatea exponenţialei, limita devine

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x - \arccos x\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln 2\arcsin x}.$$

Aici, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln 2\arcsin x$ prezintă nedeterminarea $0\cdot\infty$, care se poate însă reduce la nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$, pentru aplicarea Teoremei lui l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} x\ln 2\arcsin x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln 2\arcsin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$
$$= -\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 0.$$

În concluzie, $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x - \arccos x\right)^x = 1$. ■

Observaţie. Reamintim că Teoremele lui l'Hôpital dau condiţii suficiente pentru calculul unor limite de forma $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, care prezintă nedeterminarea $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$ [adică în care avem una din situaţiile

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ sau $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$]. Aceste Teoreme pot fi date într-un singur enunţ:

Teorema lui l'Hôpital. Fie a, b $\in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in [a,b]$ şi fie încă funcţiile f, g : $(a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, derivabile şi astfel încât $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ şi există $\lambda = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ sau dacă $\lim\limits_{x\to x_0} \mid g(x) \mid = \infty$, atunci există $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

Atunci când x_0 este finit iar funcţiile f şi g sunt derivabile (numai) în acest punct, avem

Teorema lui l'Hôpital (2). Fie a, b $\in \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$ şi fie încă funcţiile f, g : $[a,b] \to \mathbb{R}$, derivabile în x_0 şi astfel încât $f(x_0) = g(x_0) = 0$ şi $g'(x_0) \neq 0$.

Atunci, există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V \setminus \{x_0\}$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Demonstraţiile acestor rezultate se bazează pe Teorema lui Cauchy respectiv pe Definiţia derivatei şi se găsesc în orice manual de liceu.

Facem câteva precizări în legătură cu aceste rezultate:

1°. Dacă x_0 este unul din capetele intervalului [a,b], atunci în Teoremele lui l'Hôpital vor apare limitele laterale corespunzătoare (vezi pct. b). Chiar dacă x_0 este punct interior intervalului [a,b], Teoremele lui l'Hôpital rămân adevărate dacă limita se înlocuieşte cu una din limitele laterale.

2°. Cele două Teoreme au domenii de aplicabilitate diferite.

Exemplu. Fie funcţiile f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 4x - 4, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 2x - 2, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Se constată (vezi o Problemă anterioară) că cele două funcţii sunt derivabile doar în punctul $x = 1$. Ca urmare, în calculul limitei $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ - care prezintă nedeterminarea $\frac{0}{0}$ - nu se poate aplica Teorema lui l'Hôpital. Se constată însă că se poate aplica Teorema lui l'Hôpital (2). Ca urmare,

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{4}{2} = 2.$$

3°. Aplicarea în practică a Teoremelor lui l'Hôpital (pregătirea limitei pentru aplicarea uneia din Teoreme, aplicarea, eventual repetată, a uneia din Teoreme, etc) poartă denumirea de regula lui l'Hôpital.
4°. Repetăm, este recomandabil ca în calculul limitelor de funcţii, să se combine, dacă este posibil, regula lui l'Hôpital cu metodele elementare (vezi pct. a, b, c; la c), s-a făcut şi o schimbare de variabilă).
5°. Dacă şi în calculul limitei $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se poate aplica regula l'Hôpital, atunci avem $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)}$; se spune că s-a aplicat de două ori regula lui l'Hôpital.
Se poate aplica succesiv regula l'Hôpital (dacă este posibil) de un număr finit de ori (vezi pct. a, c).
6°. Uneori, calculul limitei $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ este mai complicat (vezi pct. c) sau se reduce la limita iniţială $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ (vezi la pct. e) calculul limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(x \arcsin \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}$, fără schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{t}$). Salvarea este într-un artificiu sau în altă metodă, etc.
Exemplu. În calculul limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{shx}{e^x}$ se verifică condiţiile din regula lui l'Hôpital dar, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(shx)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{chx}{e^x} =$ (şi la fel) $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(chx)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{shx}{e^x}$ şi am ajuns de unde am plecat. Regula lui l'Hôpital nu se poate aplica.
Dar limita trebuie calculată, pentru că există:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{shx}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2x}\right) = \frac{1}{2}.$$

7°. Uneori, chiar dacă limita $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ există, derivata g' se anulează în orice vecinătate a punctului x_0, ceea ce face ca regula lui l'Hôpital aă nu se poate aplica.
Exemplu. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x + \cos x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x\left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)} = 1$. Derivata $g'(x) = 1 - \sin x$ se anulează în orice vecinătate a punctului $x_0 = +\infty$, pentru că $g'(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Regula lui l'Hôpital nu se poate aplica.
8°. Regula lui l'Hôpital se poate aplica şi în calculul unor limite care prezintă una din nedeterminările $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0. Pentru aceasta, se transformă funcţia astfel încât în calculul limitei să se poată aplica regula lui l'Hôpital. Limitele de la pct. c - g din Problemă sunt edificatoare în acest sens.

În general, se procedează astfel:
i). dacă limita $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$ prezintă nedeterminarea $0\cdot\infty$, adică dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, atunci scriem

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ sau } f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

după cum $g(x) \neq 0$ respectiv $f(x) \neq 0$ pe o vecinătate a punctului x_0. În primul caz, avem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ şi această limită prezintă nedeterminarea $\frac{0}{0}$. În al doilea caz, avem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ şi această limită prezintă nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$.
În calculul acestor limite se încearcă aplicarea regulilor lui l'Hôpital. Alegerea uneia sau alteia dintre variantele (transformările) de mai sus depinde de complexitatea calculelor ce apar.
Exemplu. În calculul limitei $\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x$ este mai convenabil să scriem

$$\lim_{x\searrow 0} x\ln x = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\searrow 0} (-x) = 0,$$

decât

$$\lim_{x\searrow 0} x\ln x = \lim_{x\searrow 0} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} = \lim_{x\searrow 0} (-x\ln^2 x),$$

pentru că se complică calculele.
ii). dacă limita $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x))$ prezintă nedeterminarea $\infty - \infty$, adică dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, sau dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, atunci scriem

$$f(x) - g(x) = f(x)g(x)\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right),$$

evident posibil pe o vecinătate a punctului x_0.
Acum avem

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)g(x)\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right)$$

şi această limită prezintă nedeterminarea $0{\cdot}\infty$. În calculul acestei limite se încearcă aplicarea regulilor lui l'Hôpital după cum s-a spus imediat mai sus.
Uneori, se mai poate scrie

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\Big(1-\tfrac{g(x)}{f(x)}\Big)$$

şi dacă $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)} \neq 1$, avem $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \pm\infty$, iar în caz contrar, limita prezintă nedeterminarea $0{\cdot}\infty$ şi în calculul ei se procedează ca mai sus.
Exemplu. În calculul limitei $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)$ care prezintă nedeterminarea $\infty-\infty$, este convenabil să scriem

$$\lim_{x\to\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to\infty} x\big(1-\tfrac{\ln x}{x}\big) = \infty,$$

pentru că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.
În prima variantă, ar trebui scris, de exemplu,

$$\lim_{x\to\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\frac{1}{\ln x}}$$

şi se vede că apar probleme de calcul.
iii). dacă limita $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ prezintă una din nedeterminările 1^∞, 0^0, ∞^0, atunci scriem

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)},$$

evident posibil pe o vecinătate a punctului x_0.
Acum avem

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)},$$

şi această ultimă limită prezintă, în fiecare caz, nedeterminarea $0{\cdot}\infty$. În calculul acestei limite se încearcă aplicarea regulilor lui l'Hôpital după cum s-a spus mai sus.
9°. Regula lui l'Hôpital se poate aplica şi în calculul unor limite de şiruri, dar nu direct, ci prin intermediul Criteriului lui Heine privind limita unei funcţii într-un punct.

Astfel, dacă avem de calculat $\lim x_n$, căutăm mai întâi o funcţie $f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(n) = x_n, \forall\ n \in \mathbb{N}$. Apoi, calculăm - eventual cu regula lui l'Hôpital, - limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lambda$. În sfârşit, având în vedere Criteriul lui Heine privind limita unei funcţii într-un punct (vezi Teorema 4.1.1), obţinem $\lim x_n = \lambda$.
Facem precizarea că în rolul şirului (n) pentru care $f(n) = x_n$, se poate considera un şir (y_n) convenabil ales astfel încât

$$\lim y_n = \infty \text{ şi } f(y_n) = x_n, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Exemple. i). Pentru calculul limitei $\lim \frac{n^2}{e^n}$, considerăm funcţia ajutătoare $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$. Se vede că $x_n = \frac{n^2}{e^n} = f(n), \forall\ n \in \mathbb{N}$. Aplicând Regula lui l'Hôpital de două ori, avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

În concluzie, $\lim \frac{n^2}{e^n} = 0$.
ii). Pentru calculul limitei $\lim \sqrt[n]{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}$, considerăm funcţia ajutătoare $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^x$. Se vede că $x_n = \sqrt[n]{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}} = f(\frac{1}{n}), \forall\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Calculăm limita $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{arctg} x)^x$, aplicând cele indicate imediat mai sus la pct. 8° :

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{arctg} x)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln(\operatorname{arctg} x)} = 1,$$

pentru că Regula lui l'Hôpital ne dă

$$\lim_{x\to 0} x\ln(\operatorname{arctg} x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{-x}{1+x^2} = 0.$$

În concluzie, $\lim \sqrt[n]{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}} = 1$.

Problema 16

1. Pentru funcţiile e^x şi sinx să se scrie
   i). polinoamele Taylor de ordinele 1, 2, 3, ... n în punctul a = 0;
   ii). formulele Taylor de ordinele 1, 2, 3, ... n în punctul a = 0.

2. Folosind formula lui Taylor, să se calculeze limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{\sin x - x}.$$

3. Să se arate că dacă f este o funcţie polinomială de grad k, atunci formula lui Taylor de orice ordin $n \geq k$ în orice punct $a \in \mathbb{R}$ este exactă (adică restul este nul).

4. Să se determine toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$f'''(x) = 0,\ x \in \mathbb{R} \text{ şi } f(1) = 1,\ f'(1) = 2,\ f''(1) = 2.$$

5. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n \sin x$, unde $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că originea este punct de extrem local pentru funcţia f în cazul n = 1, dar nu şi în cazurile n = 0, n = 2.

Rezolvare. 1). i). Derivatele de ordin superior ale funcţiei e^x sunt $(e^x)^{(n)} = e^x$ şi ca urmare, toate derivatele lui e^x în origine sunt egale cu 1. Polinoamele Taylor cerute pentru funcţia e^x sunt

$$T_1(x) = 1 + \frac{1}{1!}x,$$
$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2,$$
$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$$
$$T_4(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$
$$T_5(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$T_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

Derivatele funcţiei sinus sunt $(\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ şi ca urmare, derivatele de ordin superior ale funcţiei sinus în origine sunt $(\sin)^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$. Polinoamele Taylor cerute pentru funcţia sinus sunt

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = x$

$T_3(x) = x - \frac{1}{3!}x^3$

$T_4(x) = x - \frac{1}{3!}x^3$

$T_5(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$

....

$T_{2n+1}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

$T_{2n+2}(x) = T_{2n+1}(x)$

ii). Formulele lui Taylor cerute pentru funcţiile e^x şi sinus sunt (cu restul sub forma lui Peano)

$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + x^2\omega_2(x),$

$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + x^3\omega_3(x),$

$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + x^4\omega_4(x),$

$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{5!}x^5 + x^5\omega_5(x),$

....

$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + x^n\omega_n(x).$

respectiv

$\sin x = x + x\alpha_1(x),$

$\sin x = x + x^2\alpha_2(x),$

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + x^3\alpha_3(x),$

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + x^4\alpha_4(x),$

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + x^5\alpha_5(x),$

....

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + x^{2n+1}\alpha_{2n+1}(x),$$

$\sin x = T_{2n+2}(x) + x^{2n+2}\alpha_{2n+2}(x).$

În toate aceste formule, funcţiile ω_i şi α_j sunt continue şi nule în 0.

2). Pentru calculul limitei $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{\sin x - x}$, înlocuim pe $\sin x$ şi e^x cu formulele stabilite mai sus:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{\sin x - x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + x^3\omega_3(x)) - 2 - 2x - x^2}{x - \frac{1}{3!}x^3 + x^3\alpha_3(x) - x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3!}x^3 + 2x^3\omega_3(x)}{-\frac{1}{3!}x^3 + x^3\alpha_3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3!} + 2\omega_3(x)}{-\frac{1}{3!} + \alpha_3(x)} = -2.$$

3). În formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange, expresia restului de ordin n este

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Se vede de aici că dacă f este o funcţie polinomială de grad k şi $n \geq k$, atunci $f^{(n+1)} = 0$ şi ca urmare, $R_n = 0$.

Aşadar, pentru orice funcţie polinomială f de grad k şi $n \geq k$ se poate scrie

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

$a \in \mathbb{R}$ fiind dat, oarecare.

4). Conform unei consecinţe a Teoremei lui Lagrange, din egalitatea $f'''(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ rezultă că f este un polinom de grad cel mult 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Condiţiile din enunţ $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $f''(1) = 2$ ne dau $a + b + c = 1$, $2a + b = 2$ şi $2a = 2$. Rezultă $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$. Aşadar, $f(x) = x^2$ este singura funcţie care verifică cerinţele date.

Altfel, folosind rezultatul de la punctul anterior, avem soluţia

$$f(x) = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 = x^2.$$

5). Pentru $f(x) = x\sin x$ avem $f'(x) = \sin x + x\cos x$ şi $f''(x) = 2\cos x - x\sin x$, de unde $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$.

Formula lui Taylor de ordinul doi pentru funcţie în origine ne dă $f(x) = x^2 + x^2\omega(x)$, unde funcţia ω este continuă şi nulă în 0. Ca urmare, $f(x) = x^2(1 + \omega(x)) \geq 0 = f(0)$, $x \in V_0$, ceea ce arată că originea este punct de minim local pentru funcţia f în cazul $n = 1$.

În cazul $n = 0$, funcţia $f(x) = \sin x$ este strict crescătoare pe intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ca urmare, originea nu este punct de extrem local pentru funcţia f.

În cazul $n = 2$, avem $f(x) = x^2 \sin x$ şi ca urmare

$$f'(x) = 2x\sin x + x^2 \cos x,$$
$$f''(x) = 2\sin x + 4x\cos x - x^2 \sin x,$$
$$f'''(x) = 6\cos x - 6x\sin x - x^2 \cos x.$$

Pentru că $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6$, formula lui Taylor de ordinul trei pentru funcţie în origine ne dă

$$f(x) - f(0) = x^3 (1 + \omega(x)),$$

unde funcţia ω este continuă şi nulă în 0.

Deoarece paranteza este pozitivă pe o vecinătate a lui 0 iar factorul x^3 are semn variabil în jurul lui 0, diferenţa $f(x) - f(0)$ nu are semn constant pe nici o vecinătate a originii. Punctul 0 nu este punct de extrem local pentru funcţia f. ■

Observaţie. Formula lui Taylor se găseşte în §5.4/5.4.1.
Aplicaţii ale formulei lui Taylor:
1°. Formula lui Taylor permite stabilirea unui rezultat privind punctele de extrem ale unei funcţii:
"Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de n ori derivabilă pe o vecinătate V_a a punctului a, interior lui I, $n \geq 2$ şi astfel încât

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \ f^{(n)}(a) \neq 0,$$

Dacă n este număr par, atunci a este punct de extrem local pentru f şi anume maxim, dacă $f^{(n)}(a) < 0$ şi minim dacă $f^{(n)}(a) > 0$.
Dacă n este număr impar, atunci a nu este punct de extrem local pentru f (este punct de inflexiune pentru f)."
Într-adevăr, Formula lui Taylor în punctul a cu restul Peano ne dă

$$f(x) - f(a) = (x - a)^n \left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) + \omega(x)\right),$$

unde funcţia ω este continuă şi nulă în a.
Fie n număr par. Deoarece paranteza are semnul lui $f^{(n)}(a)$, diferenţa $f(x) - f(a)$ are semn constant pe o vecinătate a punctului a. Aceasta arată că acest punct este un punct de extrem local pentru f. Ultima parte a afirmaţiei rezultă imediat.
Dacă n este număr impar, din egalitatea anterioară se deduce că diferenţa $f(x) - f(a)$ are semne diferite la stânga şi la dreapta punctului a. Aceasta arată că acest punct nu este un punct de extrem local pentru f. Ultima parte a afirmaţiei rezultă imediat.
Exemplu. Vezi pct. 5) din Problemă.
2°. Formula lui Taylor permite aproximarea unei funcţii prin polinoame de grad superior.
În general, Formula lui Taylor ne permite să facem aproximarea $f(x) \approx T_n(x)$ în jurul punctului x_0 în care este scris T_n.
Exemplu. Determinăm un polinom P care să aproximeze funcţia $f(x) = e^x$ pe intervalul $[-1,1]$ cu două zecimale exacte.
Căutăm pe P ca un polinom Taylor de anume ordin n. În Formula lui Taylor $e^x = T_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x}$, punem condiţia

$$\left| \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x} \right| < 10^{-2}, \text{ pentru } x \in [-1,1]$$

şi de aici determinăm pe n.
Se observă că pentru $x \in [-1,1]$ avem $\left| \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$.
Inegalitatea $\frac{e}{(n+1)!} < 10^{-2}$ se verifică pentru $n \geq 5$.
Ca urmare, condiţia de mai sus se verifică pentru $n \geq 5$.
Aşadar, avem formula de aproximare

$$e^x \approx 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5, \ x \in [-1,1],$$

eroarea de aproximare fiind mai mică decât $\frac{1}{100}$.
Alte formule de aproximare se pot stabili folosind formulele de la a) şi altele asemănătoare:

$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$

$\ln(1 + x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

Ramâne de stabilit eroarea de aproximare în fiecare formulă.
3°. Formula lui Taylor permite determinarea unui polinom când se cunosc derivatele sale succesive într-un punct dat.
Exemplu. Determinăm un polinom P de grad minim pentru care

$$P(2) = 0,\ P'(2) = 0,\ P''(2) = 0,\ P'''(2) = 1.$$

Din cele spuse la 3), polinomul P căutat este

$$P(x) = P(2) + \frac{P'(2)}{1!}(x-2) + \frac{P''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{P^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3.$$

Efectuând calculele, $P(x) = \frac{1}{3!}(x-2)^3$.

Problema 17

Să se determine punctele de extrem, intervalele de monotonie şi intervalele de convexitate/concavitate ale funcţiilor:

a). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$;

b). $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x} \sin x$

Rezolvare. a). Funcţia f este o compunere de funcţii derivabile: funcţia arccos este derivabilă pe (–1,1) iar funcţia $\frac{2x}{1+x^2}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Deoarece funcţia $\frac{2x}{1+x^2}$ ia valorile ± 1 în punctele ± 1, tragem concluzia că funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Avem

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2\left(1-x^2\right)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2\left(1-x^2\right)}{(1+x^2)^2} = \begin{cases} \frac{-2}{1+x^2}, & \text{dacă } |x| < 1 \\ \frac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } |x| > 1 \end{cases}.$$

Având în vedere o consecinţă a Teoremei lui Lagrange, funcţia f este descrescătoare pe intervalul (–1,1) (deoarece derivata f' este negativă pe acest interval) şi crescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, -1)$ şi $(1, \infty)$ (deoarece derivata f' este pozitivă pe fiecare din aceste intervale). Mai rezultă că punctele ± 1 sunt puncte de extrem (absolut) pentru f: -1 este punct de maxim absolut pentru f, $M = f(-1) = \pi$ fiind marginea superioară a funcţiei iar $+1$ este punct de minim absolut pentru f, $m = f(1) = 0$ fiind marginea inferioară a funcţiei.

Facem precizarea că o altă consecinţă a Teoremei lui Lagrange ne arată că în punctele ± 1 avem

$$f'_s(-1) = 1,\ f'_d(-1) = -1,\ f'_s(+1) = -1,\ f'_d(+1) = 1.$$

Ca urmare, aceste puncte sunt puncte unghiulare pentru funcţia f.

Deoarece derivata f' este funcţie raţională pe fiecare din cele trei intervale deschise menţionate mai sus, rezultă că f este de două ori derivabilă pe aceste intervale şi avem

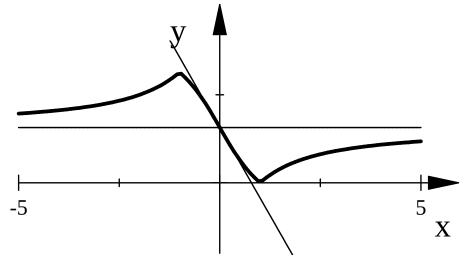
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(1+x^2)^2}, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & \text{dacă } x \in (-1, 1) \\ \frac{-4x}{(1+x^2)^2}, & \text{dacă } x \in (1, \infty) \end{cases}.$$

Se vede de aici că $f''(0) = 0$ şi că derivata secundă f'' are semn constant pe fiecare din intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$. Ca urmare, funcţia f este convexă pe fiecare din intervalele $(-\infty, -1)$ şi $(0, 1)$, (pentru că f'' este pozitivă pe aceste intervale) şi este concavă pe fiecare din intervalele $(-1, 0)$ şi $(1, \infty)$ (pentru că f'' este negativă pe aceste intervale).

Facem precizarea că punctele -1, 0 şi $+1$ sunt, conform Definiţiei, puncte de inflexiune pentru f.

Se observă că punctele ± 1 sunt, fiecare, punct de extrem, punct unghiular şi punct de inflexiune pentru f. Punctul 0 este punct de inflexiune în care tangenta la grafic străbate graficul.

Toate acestea se pot vedea pe graficul funcţiei f:



b). Funcţia g este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}$, fiind un produs a două astfel de funcţii. Se constată cu uşurinţă că

$$g'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x) \text{ şi } g''(x) = -2e^{-x}\cos x.$$

Deoarece $\cos x - \sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) - \sin x = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x)$, zerourile derivatei g' sunt date de ecuaţia trigonometrică $\sin(\frac{\pi}{4} - x) = 0$ şi sunt $x'_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Zerourile derivatei secunde g'' sunt date de ecuaţia trigonometrică $\cos x = 0$ şi sunt $x''_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Dăm, în tabloul de mai jos, semnul derivatelor g' şi g'' pe intervalul $[0,2\pi]$; în restul axei reale, semnul se repetă, deoarece funcţiile trigonometrice sin şi cos sunt 2π - periodice:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g'(x)$	+	+	0	–	–	–	0	+	+	+	+
$g''(x)$	–	–	–	–	0	+	+	+	0	–	–

De aici se pot trage următoarele concluzii:

– pe fiecare din intervalele $[2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{5\pi}{4}]$, $n \in \mathbb{Z}$, funcţia g este descrescătoare,

– pe fiecare din intervalele $[2n\pi - \frac{3\pi}{4}, 2n + \pi + \frac{\pi}{4}]$, $n \in \mathbb{Z}$, funcţia g este crescătoare,

– punctele $x'_{2n} = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, sunt puncte de maxim local pentru funcţia g,

– punctele $x'_{2n+1} = 2n\pi + \frac{5\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, sunt puncte de minim local pentru funcţia g,

– pe fiecare din intervalele $[2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{3\pi}{2}]$, $n \in \mathbb{Z}$, funcţia g este convexă,

– pe fiecare din intervalele $[2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}]$, $n \in \mathbb{Z}$, funcţia g este concavă,

– punctele $x''_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ sunt puncte de inflexiune pentru g în care tangenta la grafic străbate graficul funcţiei. ■

Observaţie. Pentru determinarea intervalelor de monotonie ale unei funcţii se procedează astfel:
1°. se studiază derivabilitatea funcţiei; se stabilesc punctele în care funcţia nu este derivabilă; se calculează derivata;
2°. se determină zerourile derivatei;
3°. se determină semnul derivatei.
4°. se concluzionează:
– pe un interval pe care derivata este pozitivă, funcţia este strict crescătoare;
– pe un interval pe care derivata este negativă, funcţia este strict descrescătoare.
Uneori, rezultatele de la punctele 1° - 3° se aşază într-un tablou cu trei linii: pe prima linie se precizează domeniul de definiţie (o bară verticală sau o zonă haşurată arată că funcţia nu este definită acolo), zerourile derivatei şi punctele în care funcţia nu este derivabilă; pe linia a doua se precizează semnul derivatei (o bară verticală arată că funcţia nu este derivabilă; de-o parte şi de alta a barei se trec derivatele laterale, dacă este cazul); pe linia a treia se pun valorile sau limitele funcţiei şi se indică prin săgeţi monotonia funcţiei.
Exemplu. Tabloul privind monotonia funcţiei g:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
g′(x)	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
g(x)	$\nearrow$	$\nearrow$	$g(\frac{\pi}{4})$	$\searrow$	$g(\frac{5\pi}{4})$	$\nearrow$	$\nearrow$

În legătură cu convexitatea (concavitatea) unei funcţii, amintim următoarele:
O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ este convexă (concavă) pe intervalul $I \subset D$ dacă pentru orice $a, b \in I$, segmentul de dreaptă de capete $(a,f(a))$ şi $(b,f(b))$ se află deasupra porţiunii (sub porţiunea) din graficul funcţiei corespunzătoare intervalului $[a,b]$.
Analitic, aceasta înseamnă că se verifică condiţia

$$\forall a, b \in I, \forall t \in [0,1] \Longrightarrow f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b),$$

respectiv

$$\forall a, b \in I, \forall t \in [0,1] \Longrightarrow f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Caracterizarea convexităţii/concavităţii cu ajutorul derivatelor este dată de următoarele rezultate, a căror demonstraţie este un simplu exerciţiu:
I. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe intervalul I. Atunci, funcţia f este convexă (concavă) pe I dacă şi numai dacă derivata f' este crescătoare (descrescătoare) pe I.
II. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe intervalul I. Atunci, funcţia f este convexă (concavă) pe I dacă şi numai dacă graficul funcţiei se află deasupra (dedesuptul) oricărei tangente la grafic.
III. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe intervalul I. Atunci, funcţia f este convexă (concavă) pe I dacă şi numai dacă $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) pentru orice $x \in I$.
Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe intervalul I. Se spune că un punct a din interiorul intervalului I este punct de inflexiune pentru f dacă există α şi β din I astfel încât $\alpha < a < \beta$ şi f este convexă pe $(\alpha, a]$ şi concavă pe $[a, \beta)$ sau invers (simplu vorbind, la trecerea printr-un punct de inflexiune, funcţia schimbă convexitatea).
În acest caz, punctul $(a, f(a))$ se numeşte punct de inflexiune al graficului funcţiei f.
Caracterizarea punctelor de inflexiune cu ajutorul derivatelor este dată de următoarele rezultate, a căror demonstraţie este un simplu exerciţiu:
IV. Într-un punct de inflexiune în care funcţia este derivabilă, tangenta la grafic străbate graficul.
V. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie care are derivată în a şi este de două ori derivabilă pe V_a, eventual cu excepţia lui a. Atunci;
–. dacă a este punct de inflexiune pentru f, atunci sau f nu este de două ori derivabilă în a sau $f''(a) = 0$;
– dacă f'' schimbă semnul la trecerea prin a, atunci a este punct de inflexiune pentru f.
Pentru determinarea intervalelor de convexitate (concavitate) ale unei funcţii derivabile, se procedează astfel:
1. se studiază derivabilitatea de ordin doi a funcţiei; se stabilesc punctele în care funcţia nu este derivabilă de două ori; se calculează derivata de ordinul doi;
2°. se determină zerourile derivatei de ordinul doi;
3°. se determină semnul derivatei de ordinul doi.
4°. se concluzionează:

– pe un interval pe care derivata a doua este pozitivă, funcţia este (strict) convexă;
– pe un interval pe care derivata a doua este negativă, funcţia este (strict) concavă.
Uneori, rezultatele de la punctele 1° - 3° se aşază într-un tablou asemănător celui de la monotonie (sau se adaugă la acel tablou încă o linie, corespunzătoare derivatei a doua). Semnul $\smile$ ($\frown$) pus pe linia funcţiei arată că funcţia este convexă (concavă) pe intervalul respectiv.
Exemplu. Tabloul privind monotonia şi convexitatea funcţiei g:

x	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{9\pi}{4}$
$g'(x)$	0	−	−	−	0	+	+	+	0
$g''(x)$	−	−	0	+	+	+	0	−	−
$g(x)$	$g(\frac{\pi}{4})$	$\searrow$ $\frown$	$g(\frac{\pi}{2})$	$\searrow$ $\smile$	$g(\frac{5\pi}{4})$	$\nearrow$ $\smile$	$g(\frac{3\pi}{2})$	$\nearrow$ $\frown$	$g(\frac{9\pi}{4})$

Aflăm de aici, de exemplu, că pe intervalul $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, funcţia g descreşte de la $g(\frac{\pi}{4})$ la $g(\frac{\pi}{2})$ şi este concavă. Pe intervalul $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}]$, funcţia g descreşte de la $g(\frac{\pi}{2})$ la $g(\frac{5\pi}{4})$ şi este convexă. Etc.

Problema 18

Se dă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$, unde D este domeniul său maxim de definiţie. Se cere:

i). Să se reprezinte grafic funcţia;

ii). Să se discute după $m \in \mathbb{R}$ natura şi semnele rădăcinilor ecuaţiilor:

ii_1). $x^3 - mx + 2 = 0$;

ii_2). $f(x) = -3\sqrt[3]{2}\left(x + \sqrt[3]{2}\right) + m$.

Rezolvare. i). Avem $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
Limitele la capetele domeniului D sunt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = -\infty, \lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty.$$

De aici, rezultă că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală (de ambele părţi) la graficul lui f şi că graficul funcţiei nu are asimptote orizontale.

Din $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2}{x^2} = \pm\infty$, rezultă că graficul nu are asimptotă oblică la $\pm\infty$. Dar, deoarece

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - x^2\right) = 0,$$

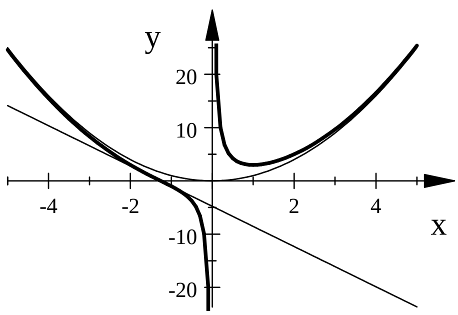
graficul funcţiei are curba asimptotă $y = x^2$, la $\pm\infty$.

Din $f(x) - x^2 = \frac{2}{x}$ se constată că $f(x) > x^2$ pentru $x > 0$ şi $f(x) < x^2$ pentru $x < 0$. Deducem de aici că graficul funcţiei este deasupra curbei asimptotă pentru $x > 0$ şi sub curba asimptotă pentru $x < 0$.

Avem $f'(x) = 2\frac{x^3-1}{x^2}$ şi $f''(x) = 2\frac{x^3+2}{x^3}$, pentru $x \in D$.

Tabelul de variaţie şi graficul funcţiei:

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$\mid$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $\smile$	0	$\searrow$ $\frown$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$ $\smile$	3	$\nearrow$ $\smile$	$+\infty$



Graficul lui f cu tangenta în punctul de inflexiune

ii$_1$). Ecuaţia $x^3 - mx + 2 = 0$ nu are rădăcina $x = 0$ şi ca urmare, este echivalentă cu ecuaţia $\frac{x^3+2}{x} = m$, adică cu ecuaţia f(x) = m. Numărul rădăcinilor reale ale acestei ecuaţii coincide cu numărul soluţiilor reale (x,y) ale sistemului $\begin{cases} y = f(x) \\ y = m \end{cases}$, adică cu numărul punctelor de intersecţie a graficului lui f cu dreapta variabilă y = m.

Având în vedere graficul lui f, obţinem:

– pentru m < 3, ecuaţia dată are o singură rădăcină reală, negativă (pentru că dreapta y = m intersectează doar ramura din stânga a graficului lui f);

– pentru m = 3, ecuaţia dată are trei rădăcini reale, una negativă şi una dublă, egală cu 1 (pentru că dreapta y = 3 intersectează atât ramura din stânga a graficului lui f cât şi ramura din dreapta, aceasta exact în punctul de minim (1,3));

– pentru m > 3, ecuaţia dată are trei rădăcini reale distincte, una negativă şi două pozitive, una subunitară şi cealaltă supraunitară (pentru că dreapta y = m intersectează atât ramura din stânga a graficului lui f cât şi ramura din dreapta, aceasta în două puncte distincte).

ii_2). Ecuaţia se poate scrie $f(x) + 3\sqrt[3]{2}\left(x + \sqrt[3]{2}\right) = m$. Discuţia ecuaţiei se face ca mai sus, folosind însă graficul funcţiei ajutătoare $f(x) + 3\sqrt[3]{2}\left(x + \sqrt[3]{2}\right)$.

Altfel, se observă că $y = -3\sqrt[3]{2}\left(x + \sqrt[3]{2}\right)$ este tangenta în punctul de inflexiune $x = -\sqrt[3]{2}$ al lui f. Ca urmare, $y = -3\sqrt[3]{2}\left(x + \sqrt[3]{2}\right) + m$ este o dreaptă variabilă, paralelă cu tangenta menţionată.

Se impune determinarea tangentei la ramura din dreapta a graficului lui f paralelă cu tangenta menţionată mai sus. Ţinând cont de interpretarea geometrică a derivatei unei funcţii într-un punct, avem de rezolvat ecuaţia $f'(x) = -3\sqrt[3]{2} = f'(-\sqrt[3]{2})$. Este clar că această ecuaţie are o rădăcină (dublă!) egală cu $-\sqrt[3]{2}$. A treia rădăcină este $x_0 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \in (0,1)$, după cum era de aşteptat, conform graficului. Tangenta în x_0 este $y - f(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}) = -3\sqrt[3]{2}\left(x - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)$ adică $y = -3\sqrt[3]{2}x + \frac{15}{4}\sqrt[3]{4}$. Scriem această ecuaţie sub forma ecuaţiei dreptei variabile de mai sus:

$$y = -3\sqrt[3]{2}\left(x + \sqrt[3]{2}\right) + \frac{27}{4}\sqrt[3]{4}.$$

Având în vedere graficul lui f şi semnificaţia lui m din ecuaţia dreptei variabile de mai sus, obţinem:

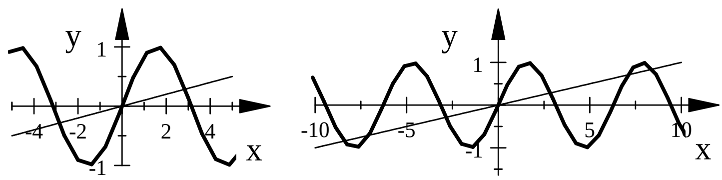
– pentru $m \in (-\infty, \frac{27}{4}\sqrt[3]{4})$, ecuaţia dată are o singură rădăcină reală, negativă (pentru că în acest caz, dreapta $y = -3\sqrt[3]{2}\left(x + \sqrt[3]{2}\right) + m$ intersectează doar ramura din stânga a graficului lui f); De exemplu, pentru $m = 0$, ecuaţia dată are o singură rădăcină reală, $x = -\sqrt[3]{2}$;

– pentru $m = \frac{27}{4}\sqrt[3]{4}$, ecuaţia dată are trei rădăcini reale, una negativă şi una dublă, egală cu $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ (pentru că în acest caz, dreapta variabilă $y = -3\sqrt[3]{2}\left(x + \sqrt[3]{2}\right) + m$ intersectează atât ramura din stânga a graficului lui f cât şi ramura din dreapta, aceasta exact în punctul de tangenţă $(x_0,f(x_0))$);

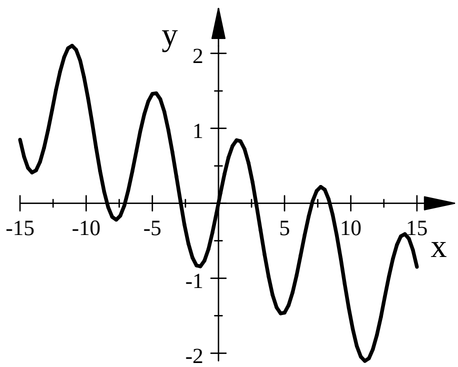
– pentru $m \in (\frac{27}{4}\sqrt[3]{4}, +\infty)$, ecuaţia dată are trei rădăcini reale distincte, una negativă şi două pozitive, una mai mică decât x_0 şi cealaltă mai mare decât x_0 (pentru că în acest caz, dreapta variabilă $y = -3\sqrt[3]{2}\left(x + \sqrt[3]{2}\right) + m$ intersectează atât ramura din stânga a graficului lui f cât şi ramura din dreapta, aceasta în două puncte distincte).

Observaţie. Amintim că graficul funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$ este mulţimea $G_f = \{(x,f(x)) \mid x \in D\}$. Când f este continuă şi G_f se reprezintă într-un plan raportat la un sistem cartezian ortogonal de axe xOy, se obţine o curbă de ecuaţie algebrică $y = f(x)$. Această curbă se numeşte tot graficul lui f (vezi Drumuri şi curbe în 5.9.1/§5.9).
Graficul unei funcţii permite atât ilustrarea proprietăţilor ei locale şi globale, cât şi rezolvarea unor probleme privind, de exemplu, ecuaţii sau inecuaţii.
Reprezentarea grafică a unei funcţii presupune parcurgerea următoarelor etape:
1°. Determinarea domeniului maxim de definiţie;
2°. Calculul limitelor la capetele domeniului de definiţie, determinarea asimptotelor;
3°. Studiul derivatelor f' şi f'';
4°. Tabloul de variaţie;
5°. Trasarea graficului.

Detalii se pot găsi în orice manual de Matematică, cls. a XI - a.
Unele probleme se pot rezolva cu ajutorul graficului unei funcţii. De exemplu:
i). Discuţia ecuaţiei f(x) = m, m parametru real;
ii). Discuţia ecuaţiei f(x) = ax + b, a fiind dat şi b parametru sau invers;
iii). Rezolvarea grafică a unor ecuaţii;
A rezolva grafic ecuaţia f(x) = g(x) revine la determinarea absciselor punctelor de intersecţie ale graficelor funcţiilor f şi g. Evident, graficele trebuie trasate cu precizie (pe hârtie milimetrică şi cu folosirea unor puncte suplimentare pe grafice).
Exemplu. Să determinăm numărul rădăcinilor ecuaţiei $\sin x = \frac{x}{10}$.
Pe acelaşi sistem de axe desenăm graficele funcţiilor f(x) = $\sin x$ şi g(x) = $\frac{x}{10}$, în două situaţii: pentru x ∈ [–5,5] şi pentru x ∈ [–10,10]. Din prima figură nu putem trage nici o concluzie privind numărul rădăcinilor ecuaţiei. În schimb, din a doua figură tragem concluzia că ecuaţia dată are 7 rădăcini şi acestea sunt situate în intervalul [–10,10]. O privire atentă permite să şi localizăm aceste soluţii:



Facem observaţia că ecuaţia f(x) = g(x) se mai poate scrie f(x) – g(x) = 0. Acum, a rezolva grafic ecuaţia h(x) = 0 revine la determinarea absciselor punctelor de intersecţie ale graficului lui h cu axa Ox.
În exemplul considerat, ecuaţia $\sin x = \frac{x}{10}$ se scrie $\sin x - 0.1x = 0$.
Din graficul lui h(x) = $\sin x - 0.1x$ tragem aceleaşi concluzii.
iv). Rezolvarea grafică a unor inecuaţii.
Este clar că soluţia unei inecuaţii f(x) > g(x) este mulţimea valorilor lui x în care graficul lui f este situat deasupra graficului lui g.
Dacă scriem inecuaţia sub forma h(x) = f(x) –g(x) > 0, soluţia inecuaţiei este mulţimea valorilor lui x în care graficul lui h este situat deasupra axei Ox.



Graficul lui h.

De exemplu, din graficul funcţiei f din problemă se vede că

$$f(x) < 0 \iff x \in (-\sqrt[3]{2}, 0).$$

Problema 19

Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiilor

i). $2x^2 + x - 4 - 5\ln \mid x \mid = 0$;

ii). $2x^3 - 3x^2 + 6(m - m^2)x + 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Folosim şirul lui Rolle.

i). Fie funcţia $f(x) = 2x^2 + x - 4 - 5\ln \mid x \mid$, definită pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ecuaţia $f'(x) = 0$ este $4x^2 + x - 5 = 0$ şi are rădăcinile $x_1 = -\frac{5}{4}$, $x_2 = 1$. Avem $f(-\frac{5}{4}) < 0$, $f(1) < 0$ şi apoi $f(0-0) = \infty$, $f(0+0) = \infty$, $f(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $f(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Datele obţinute le organizăm în tabloul

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	0	1	∞
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\frac{5}{4})$	$+\infty \mid +\infty$	$f(1)$	$+\infty$

.

Şirul lui Rolle pentru f este şirul semnelor valorilor din ultima linie, adică +, −, +, −, +. Există patru variaţii de semn, deci ecuaţia dată are patru rădăcini reale, situate în intervalele $(-\infty, -\frac{5}{4})$, $(-\frac{5}{4}, 0)$, (0,1), (1,∞). Aceste intervale corespund în linia lui x din tablou la variaţiile de semn din şirul lui Rolle.

Intervalele ce conţin rădăcinile pot fi micşorate până la lungimea 1. Într-adevăr, din $f(-3) > 0$, $f(-2) < 0$, $f(-1) < 0$, $f(2) > 0$, rezultă că cele patru rădăcini reale sunt situate în intervalele (–3,–2), (–1,0), (0,1), (1,2).

ii). Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6(m - m^2)x + 1.$$

Ecuaţia $g'(x) = 0$ este $x^2 - x + (m - m^2) = 0$ şi are rădăcinile $x_1 = m$ şi $x_2 = 1 - m$. Deoarece x_1 şi x_2 depind de m, se impune o discuţie după valorile lui m, pentru a preciza ordinea lor pe axa reală.

Deoarece $x_1 < x_2 \Longleftrightarrow m < 1 - m \Longleftrightarrow m < \frac{1}{2}$, trebuie considerate trei cazuri:

Cazul 1: $m \in (-\infty, \frac{1}{2})$. Formăm tabloul

x	$-\infty$	m	$1 - m$	$+\infty$
g(x)	$-\infty$	g(m)	$g(1 - m)$	$+\infty$

,

$g(m) = (1-m)(4m^2 + m + 1)$, $g(1-m) = 4m^3 - 9m^2 + 6m$.

Deoarece g(m) şi $g(1 - m)$ au semne variabile, se impune o discuţie după valorile lui m, pentru a preciza şirul lui Rolle. Completăm tabloul de mai sus

x	$-\infty$	m	$1 - m$	$+\infty$
$m \diagdown g(x)$	$-\infty$	g(m)	$g(1 - m)$	$+\infty$
$m \in (-\infty, 0)$	$-\infty$	+	−	$+\infty$
$m = 0$	$-\infty$	+	0	$+\infty$
$m \in (0, \frac{1}{2})$	$-\infty$	+	+	$+\infty$

şi concluzionăm:

– pentru $m \in (-\infty, 0)$, ecuaţia are trei rădăcini reale;

– pentru $m = 0$, ecuaţia are trei rădăcini reale, una dublă (egală cu 1);

– pentru $m \in (0, \frac{1}{2})$, ecuaţia are o singură rădăcină reală.

Cazul 2: $m = \frac{1}{2}$. Acum, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Formăm tabloul

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
g(x)	$-\infty$	$+$	$+\infty$

şi concluzionăm: ecuaţia are o singură rădăcină reală.

Cazul 3: $m \in (\frac{1}{2}, \infty)$. Formăm tabloul

x	$-\infty$	$1 - m$	m	$+\infty$
g(x)	$-\infty$	$g(1 - m)$	g(m)	$+\infty$

.

Din nou se impune o discuţie după valorile lui m, pentru a preciza şirul lui Rolle.

Completăm tabloul de mai sus

x	$-\infty$	$1 - m$	m	$+\infty$
$m \diagdown g(x)$	$-\infty$	$g(1 - m)$	g(m)	$+\infty$
$m \in (\frac{1}{2}, 1)$	$-\infty$	$+$	$+$	$+\infty$
$m = 1$	$-\infty$	$+$	0	$+\infty$
$m \in (1, \infty)$	$-\infty$	$+$	$-$	$+\infty$

şi concluzionăm:

– pentru $m \in (\frac{1}{2}, 1)$, ecuaţia are o singură rădăcină reală;

– pentru $m = 1$, ecuaţia are trei rădăcini reale, una dublă (egală cu $= 1$);

– pentru $m \in (1, \infty)$, ecuaţia are trei rădăcini reale. ■

Observaţii. 1. Şirul lui Rolle este o metodă de aflare a numărului rădăcinilor reale dintr-un interval I ale unei ecuaţii $f(x) = 0$ în care funcţia f este derivabilă. În plus, metoda permite localizarea rădăcinilor în anumite subintervale.
Metoda constă în parcurgerea următoarelor etape:
Etapa 1. Calculul derivatei f', determinarea rădăcinilor consecutive x_1, x_2, $...x_n$ din intervalul (a,b) ale ecuaţiei $f'(x) = 0$ şi trecerea numerelor a, x_1, x_2, $...x_n$, b pe prima linie a unui tablou;

Etapa 2. Calculul valorilor f(a+0), f(x_1), f(x_2), ...f(x_n), f(b–0) şi trecerea lor pe linia a doua a tabloului deschis anterior (f(a+0) sub a, f(x_1) sub x_1 ş.a.m.d.);
Menţionăm faptul că şirul semnelor valorilor f(a+0), f(x_1), f(x_2), ...f(x_n), f(b–0) se numeşte şirul lui Rolle (pentru funcţia f şi intervalul (a,b)).
Etapa 3. Concluzii: Numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei f(x) = 0 din intervalul (a,b) este egal cu numărul variaţiilor (schimbărilor) de semn şi al zerourilor din şirul lui Rolle (nu se iau în considerare zerourile f(a+0) = 0 şi f(b–0) = 0, dacă au loc aceste egalităţi). Precizăm că rădăcina corespunzătoare variaţiei de semn f(x_i), f(x_{i+1}) se află în intervalul (x_i,x_{i+1}).
Facem precizarea că justificarea afirmaţiilor de mai sus este imediată şi se bazează pe o consecinţă a Teoremei lui Rolle - "Între două zerouri consecutive ale derivatei f′ se află cel mult un zero al funcţiei f." - şi pe Teorema de intersecţie a lui Cauchy.
2. Dacă ecuaţia conţine un parametru (sau mai mulţi) şi rădăcinile derivatei depind de el, se face o discuţie după valorile parametrului pentru a se stabili ordinea crescătoare a lor. Apoi, se face o discuţie pentru stabilirea semnelor din şirul lui Rolle.
Exemplele de mai sus sunt edificatoare în acest sens.
3. Astfel de probleme se pot rezolva şi prin metoda grafică.

Problema 20

Să se arate că $\frac{x}{1+x^2} \leq \operatorname{arctg} x$, pentru $x \geq 0$;

Rezolvare. Considerăm funcţia ajutătoare

$$h : [0,+\infty) \to \mathbb{R},\ h(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}.$$

Avem $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$ pentru $x \geq 0$. Aceasta arată că funcţia h este crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$. Ca urmare, pentru $x \geq 0$ avem $h(x) \geq h(0)$ adică $\operatorname{arctg} x \geq \frac{x}{1+x^2}$, ceea ce încheie rezolvarea.

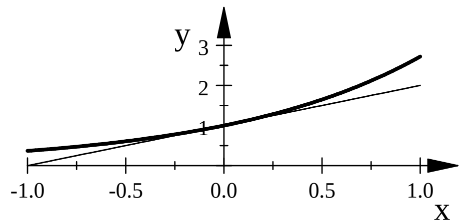
Observaţii. 1. În general, pentru a demonstra că o inegalitate de forma $f(x) \geq g(x)$ este adevărată pentru $x \in I$, se poate proceda astfel:

– se consideră funcţia ajutătoare $h : I \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$;
– se face un sumar tablou de variaţie pentru funcţia h, din care să rezulte semnul său; Tabloul trebuie să conţină derivata h' şi semnul său, monotonia şi câteva valori sau limite ale funcţiei pentru a se putea determina semnul său.
– se trage concluzia: din $h(x) \geq 0$, $\forall$ $x \in I$, rezultă că $f(x) \geq g(x)$, pentru orice $x \in I$.
În fapt, această metodă este aplicarea practică a următorului rezultat general (şi a cărui justificare este imediată):
"Fie f, g : $[a,b) \to \mathbb{R}$, cu $-\infty < a < b \leq +\infty$. Dacă f şi g sunt funcţii derivabile astfel încât $f(a) \geq g(a)$ şi $f'(x) \geq g'(x)$ pentru orice $x \in [a,b)$, atunci $f(x) \geq g(x)$ pentru orice $x \in [a,b)$"
Rezultate asemănătoare au loc şi pentru alte tipuri de intervale.
Interpretând geometric acest rezultat, se poate spune că metoda grafică este o altă posibilitate de abordare a problemei.
2. Facem precizarea că uneori este nevoie să transformăm inegalitatea dată în alta echivalentă cu ea şi pe aceea să o demonstrăm (vezi b)).
3. Unele inegalităţi se pot demonstra cu Teorema lui Lagrange (sau cu Teorema lui Cauchy).
Exemplu. Demonstrăm că $e^x \geq x + 1$, $\forall$ $x \in \mathbb{R}$.
Considerăm funcţia ajutătoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1$, care evident este derivabilă.
Pentru $x > 0$, Teorema lui Lagrange aplicată funcţiei f pe intervalul $[0,x]$ ne dă $f(x) - f(0) = f'(c)x$, unde $c \in (0,x)$. Deoarece $f'(x) = e^x$ şi $f(0) = 0$, avem $f(x) = e^c x > x$.
Am demonstrat că $e^x > x + 1$, $\forall$ $x > 0$.
Analog, pentru $x < 0$, Teorema lui Lagrange aplicată funcţiei f pe intervalul $[x,0]$ ne dă $f(0) - f(x) = -f'(d)x$, unde $d \in (x,0)$. De aici, rezultă că $f(x) = e^d x > x$.
Am demonstrat că $e^x > x + 1$, $\forall$ $x < 0$.
Din cele demonstrate mai sus rezultă imediat că

$$e^x \geq x + 1, \forall\ x \in \mathbb{R},$$

cu egal dacă şi numai dacă $x = 0$.
Facem precizarea că această inegalitate este mai tare decât inegalitatea demonstrată la pct. b). Acolo, condiţia $x > -1$ este impusă pentru inegalitatea din stânga. De altfel, demonstraţia dată acolo

pentru inegalitatea $e^x \geq x + 1$, $x > -1$ se poate adapta imediat pentru a demonstra inegalitatea $e^x \geq x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
4. Încheiem, dând o a treia demonstraţie a inegalităţii anterioare, pentru a pune în evidenţă o altă metodă de demonstrare a unor inegalităţi - metoda funcţiilor convexe.
Astfel, funcţia exponenţială e^x are derivata secundă strict pozitivă pe $\mathbb{R}$, ceea ce arată că funcţia este convexă pe $\mathbb{R}$. Conform unei proprietăţi, graficul exponenţialei este situat deasupra oricărei tangente a sa. Tangenta în punctul (0,1) la graficul exponenţialei are ecuaţia $y - 1 = x$, adică $y = x + 1$.
Aşadar, are loc inegalitatea $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



e^x

Graficul exponenţialei cu tangenta în punctul (0,1)

CAPITOLUL 3
Funcţii Integrabile
Problema 21

Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} |x|(x-2)e^{-x}, & \text{dacă } x < 2, \\ \frac{\ln^2(x-1)}{x-1}, & \text{dacă } x \geq 2 \end{cases}.$$

a). Să se arate că funcţia are primitive pe $\mathbb{R}$ şi să se determine aceste primitive.
b). Să se arate că funcţia este integrabilă Riemann pe $[-1,3]$ şi să se calculeze $\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

Rezolvare. a). Avem în vedere faptul că orice funcţie continuă pe un interval admite primitive (vezi Definiţia 7.2.1) pe acel interval, conform cu Teorema fundamentală a calculului integral (Teorema 7.1.7). De aceea, studiem continuitatea funcţiei f. Cele două ramuri ale funcţiei, $f_1(x) = |x|(x - 2)e^{-x}$ şi $f_2(x) = \frac{\ln^2(x-1)}{x-1}$, sunt continue pe $(-\infty,2)$ respectiv $(2,\infty)$, fiind compuneri de astfel de funcţii (Teorema 4.2.4). Ca urmare, funcţia f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Avem apoi $f(2) = 0$ şi

$$\lim_{x\nearrow 2} f(x) = \lim_{x\nearrow 2} |x|(x-2)e^{-x} = 0,$$
$$\lim_{x\searrow 2} f(x) = \lim_{x\searrow 2} \frac{\ln^2(x-1)}{x-1} = 0.$$

De aici rezultă că f este continuă în punctul $x = 2$ şi deci pe $\mathbb{R}$.

Din cele spuse mai sus, rezultă că funcţia f are primitive pe $\mathbb{R}$. Pentru a determina aceste primitive, determinăm mai întâi primitivele lui f pe intervalele $(-\infty,0)$, $(0,2)$ şi $(2,\infty)$.

i). Pe intervalul $(-\infty,0)$ avem, folosind metoda integrării prin părţi (vezi Teorema 7.2.4 şi Remarca 7.2.8)

$$F_1(x) = \int f(x)dx = \int -x(x-2)e^{-x}dx =$$
$$\int \left(x^2 - 2x\right)\left(e^{-x}\right)' dx = \left(x^2 - 2x\right)e^{-x} - \int (2x-2)e^{-x}dx =$$
$$= \left(x^2 - 2x\right)e^{-x} + \int (2x-2)\left(e^{-x}\right)' dx =$$
$$= \left(x^2 - 2\right)e^{-x} - 2\int e^{-x}dx = x^2e^{-x} + c;$$

ii). Pe intervalul $(0,2)$ avem, folosind aceeaşi metodă,

$$F_2(x) = \int f(x)dx = \int x(x-2)e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + c;$$

iii). Pe intervalul $(2,\infty)$ avem, folosind prima metodă de schimbare de variabilă (vezi Teorema 7.2.5 şi Remarca 7.2.9)

$$F_3(x) = \int f(x)dx = \int \frac{\ln^2(x-1)}{x-1}dx =$$

$$= \int \ln^2(x-1)(\ln(x-1))'dx = \frac{\ln^3(x-1)}{3} + c.$$

Acestea fiind zise, o primitivă F pe $\mathbb{R}$ a lui f este, cu necesitate,

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} x^2e^{-x} + c_1, & \text{dacă } x \in (-\infty,0) \\ -x^2e^{-x} + c_2, & \text{dacă } x \in [0,2] \\ \frac{\ln^3(x-1)}{3} + c_3, & \text{dacă } x \in (2,\infty) \end{cases}$$

unde constantele c_1, c_2, c_3 se determină din condiţiile

j). F este continuă pe $\mathbb{R}$,

jj). F este derivabilă pe $\mathbb{R}$,

jjj). $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Din felul cum a fost construită, funcţia F este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0,2\}$ şi, în plus, pe această mulţime are loc egalitatea $F'(x) = f(x)$.

Condiţia de continuitate a lui F în 0 ne dă $c_1 = c_2$; condiţia de continuitate a lui F în 2 ne dă $c_2 - \frac{4}{e^2} = c_3$. Aşadar, F este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $c_1 = c_2 = c$ şi $c_3 = c - \frac{4}{e^2}$, c fiind o constantă reală ce se va determina.

Cu aceasta, funcţia F devine

$$F(x) = \begin{cases} x^2e^{-x} + c, & \text{dacă } x \in (-\infty,0), \\ -x^2e^{-x} + c, & \text{dacă } x \in [0,2], \\ \frac{\ln^3(x-1)}{3} + c - \frac{4}{e^2}, & \text{dacă } x \in (2,\infty) \end{cases}.$$

Din cele spuse până acum, funcţia F este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0,2\}$ şi $F'(x) = f(x)$ pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$. Având în vedere o consecinţă a Teoremei lui Lagrange şi continuitatea lui f, obţinem

$$F'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0,\ F'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = 0,$$

$$F'_s(2) = \lim_{x \nearrow 2} f(x) = 0,\ F'_d(2) = \lim_{x \searrow 2} f(x) = 0,$$

ceea ce arată că F este derivabilă şi în punctele $x = 0$ şi $x = 2$ şi în aceste puncte se verifică egalitatea $F'(x) = f(x)$, pentru orice $c \in \mathbb{R}$.

Concluzia este una singură: funcţia F de mai sus este primitiva generală (integrala nedefinită) a lui f.

b). Având în vedere faptul că orice funcţie continuă pe un interval compact este integrabilă Riemann (vezi Teorema 7.1.3 sau Teorema 7.1.5 - Criteriul lui Lebesgue), din cele spuse mai sus rezultă că funcţia f este integrabilă Riemann pe $[-1,3]$. Pentru a calcula integrala $\int_{-1}^{3} f(x)dx$, folosim formula lui Leibniz - Newton (vezi Teorema 7.1.8). Acestea fiind zise, avem

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = F(3) - F(-1) = \frac{\ln^3 2}{3} - e - \frac{4}{e^2}. \blacksquare$$

Observaţii. 1. Alte proprietăţi ale integralei Riemann şi în legătură cu primitivele unei funcţii se găsesc în §7.1 respectiv în §7.2.
2. Primitivele unei funcţii continue pe un interval se pot determina şi cu ajutorul integralei Riemann, aplicând ideea din demonstraţia Teoremei 7.1.7: Pentru orice funcţie f, continuă pe un interval $I \subset \mathbb{R}$, funcţia

$$F_0 : I \to \mathbb{R}., F_0(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt,$$

$a \in I$ fiind fixat, dar arbitrar de altfel, este primitivă pe I pentru f, anume primitiva care se anulează în punctul a. Mai precizăm că acest rezultat este un caz particular al Teoremei 7.5.3.
Deoarece ramurile funcţiei f se schimbă în punctele 0 şi 2, este indicat să alegem în rolul lui a un punct situat la stânga lor, de exemplu $a = -2$. Având în vedere Proprietatea de aditivitate a integralei Riemann (vezi Teorema 7.1.6 şi Remarca 7.1.3), avem

$$F_0(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt =$$

$$\begin{cases} \int_{-2}^{x} -t(t-2)e^{-t}dt, & \text{dacă } x \in (-\infty,0], \\ F(0) + \int_{0}^{x} t(t-2)e^{-t}dt, & \text{dacă } x \in (0,2], \\ F(2) + \int_{2}^{x} \frac{\ln^2(t-1)}{t-1}dt, & \text{dacă } x \in (2,\infty) \end{cases}.$$

Pentru calculul celor trei integrale, folosim formula lui Leibniz - Newton, pentru că se cunosc primitivele F_1, F_2, F_3. Calcule simple ne conduc la

$$F_0(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt = \begin{cases} x^2e^{-x} - 4e^2, & \text{dacă } x \in (-\infty,0], \\ -x^2e^{-x} - 4e^2, & \text{dacă } x \in (0,2], \\ \frac{\ln^3(x-1)}{3} - \frac{4}{e^2} - 4e^2, & \text{dacă } x \in (2,\infty) \end{cases}.$$

Adunând la această primitivă a lui f constanta $c + 4e^2$, atunci F_0 devine exact primitiva generală (integrala nedefinită) a lui f determinată mai sus.

Problema 22

Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sqrt{5x^2+1}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}.$$

a). Să se arate că funcţia are primitive pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0]$ şi $(0,\infty)$;
b). Să se determine primitivele de mai sus;
c). Să se arate că funcţia nu are primitive pe $\mathbb{R}$;
d). Să se arate că funcţia este integrabilă Riemann pe orice interval compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$;
e). Să se calculeze $\int_{-1}^{4} f(x)dx$.

Rezolvare. a). Ca şi în Problema anterioară, începem prin a studia continuitatea funcţiei. Cele două ramuri ale sale, $f_1(x) = xe^{-x^2}$ şi $f_2(x) = \sqrt{5x^2 + 1}$, sunt continue pe $(-\infty,0]$ respectiv $(0,\infty)$, fiind compuneri de funcţii continue: funcţia exponenţială, funcţia radical şi funcţii polinomiale (Teorema 4.2.4). Ca urmare, funcţia are primitive pe fiecare din aceste intervale.

b). Pe intervalul $(-\infty,0]$, avem

$$\int xe^{-x^2}dx = -\tfrac{1}{2}\int \left(-x^2\right)' e^{-x^2}dx = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2} + c,$$

conform cu prima metodă de schimbare de variabilă (vezi Teorema 7.2.5 şi Remarca 7.2.9).

Pe intervalul $(0,\infty)$, avem, folosind metoda de integrare prin părţi (vezi Teorema 7.2.4 şi Remarca 7.2.8)

$$\int \sqrt{5x^2 + 1}dx = \int \tfrac{5x^2 + 1}{\sqrt{5x^2 + 1}}dx = \int x\tfrac{10x}{2\sqrt{5x^2 + 1}}dx +$$

$$+\int \tfrac{1}{\sqrt{5x^2 + 1}}dx = \int x\left(\sqrt{5x^2 + 1}\right)'dx + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{5}}}dx =$$

$$= x\sqrt{5x^2 + 1} - \int \sqrt{5x^2 + 1}dx + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{5}}\right),$$

de unde rezultă

$$\int \sqrt{5x^2 + 1}dx =$$

$$= \tfrac{x}{2}\sqrt{5x^2 + 1} + \tfrac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 + 1}\right) + c.$$

c). Procedăm ca în problema anterioară. Căutăm o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$ sub forma

$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c_1$, dacă $x \leq 0$ şi

$F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{5x^2 + 1} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 + 1}\right) + c_2$, dacă $x > 0$,

Constantele c_1 şi c_2 se determină din condiţiile:

j). F este continuă pe $\mathbb{R}$,

jj). F este derivabilă pe $\mathbb{R}$,

jjj). $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Condiţia de continuitate a lui F în 0 este $\lim\limits_{x \nearrow 0} F(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} F(x) = F(0)$ şi ne dă $-\frac{1}{2} + c_1 = c_2$. Aşadar, F este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $c_1 = c + \frac{1}{2}$, $c_2 = c$, c fiind o constantă reală ce se va determina.

Acum, calcule simple ne conduc la

$$F'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 0,$$
$$F'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1,$$

ceea ce arată că funcţia F nu este derivabilă în punctul $x = 0$ pentru nici un $c \in \mathbb{R}$.

Concluzia: funcţia f nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

d). Fie intervalul compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$. El poate fi în una din situaţiile:

i). $a < b \leq 0$ sau $0 < a < b$; funcţia f este continuă pe [a,b] şi ca urmare, integrabilă, conform cu Teorema 7.1.3.

ii). $0 = a < b$; funcţia f este crescătoare pe [a,b] şi ca urmare, integrabilă, conform cu Teorema 7.1.4.

iii). $a < 0 < b$; funcţia f este integrabilă atât pe intervalul [a,0] - cazul i) - cât şi pe intervalul [0,b] - cazul ii). Conform Proprietăţii de aditivitate a integralei Riemann (vezi Teorema 7.1.6), rezultă că funcţia f este integrabilă Riemann pe intervalul compact [a,b].

Aşadar, indiferent de situaţia în care se află intervalul [a,b], funcţia f este integrabilă Riemann pe [a,b].

e). Din cele spuse imediat mai sus, funcţia f este integrabilă Riemann pe intervalul $[-1,4]$ şi aceeaşi Teoremă ne permite să scriem egalitetea

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx.$$

Integrala $\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx$ se poate calcula cu formula lui Leibniz - Newton (vezi Teorema 7.1.8):

$$\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{-1}^{0} = \tfrac{1}{2e} - \tfrac{1}{2}.$$

În schimb, integrala $\int\limits_{0}^{4} f(x)dx$ nu se poate calcula în acelaşi mod. Pentru a o calcula, procedăm astfel: Considerăm funcţia $g : [0,4] \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = \sqrt{5x^2 + 1}$. Se constată că g este continuă şi $f(x) = g(x)$ pentru $x \in (0,4]$. Conform unei Proprietăţi a integralei Riemann (vezi cele spuse după Remarca 7.1.3), avem că f este integrabilă Riemann pe [0,4], - ceea ce se ştia deja - şi, în plus,

$$\int\limits_{0}^{4} f(x)dx = \int\limits_{0}^{4} g(x)dx.$$

Ori, această ultimă integrală se poate calcula cu formula lui Leibniz - Newton (vezi Observaţia de mai jos).

Aşadar,

$$\int\limits_{0}^{4} f(x)dx = \int\limits_{0}^{4} g(x)dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{5x^2 + 1} + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 + 1}\right)\right]\Big|_{0}^{4} =$$

$$= 18 + \tfrac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left(4\sqrt{5} + 9\right)$$

şi în concluzie,

$$\int\limits_{-1}^{4} f(x)dx = \tfrac{1}{2e} + \tfrac{35}{2} + \tfrac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left(4\sqrt{5} + 9\right). \ \blacksquare$$

Observaţii. 1. De reţinut:
• monotonia este o condiţie suficientă de integrabilitate;
Sensul exact al acestei afirmaţii trebuie înţeles ca în Teorema 7.1.3.
• existenţa şi valoarea integralei Riemann $\int_a^b f(x)dx$ nu depinde de valorile funcţiei f într-un număr finit de puncte din intervalul [a,b]. Sensul exact al acestei afirmaţii trebuie înţeles ca în Proprietatea 5 a integralei Riemann, enunţată şi demonstrată după Remarca 7.1.3.
2. Faptul că funcţia nu are primitive pe $\mathbb{R}$ se poate demonstra mai simplu folosind condiţia necesară de existenţă a primitivei unei funcţii. Exact vorbind, funcţia f nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$ pentru că intervalul [0,1] este transformat în

$$f([0,1]) = \{0\} \cup (1,\sqrt{6}],$$

mulţime care nu este interval. Ca urmare, f nu are primitive pe $\mathbb{R}$ (vezi cele spuse în Observaţia din Problema precedentă).
3. La punctul e), funcţia g prelungeşte funcţia f pe intervalul [0,4] prin continuitate, pentru a se putea aplica formula lui Leibniz - Newton. Ar fi (tot) suficient ca g să aibă primitive.

Problema 23

Să se arate că pentru α, β, γ, p, q $\in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, integrala improprie

$$\int_0^\infty x(\alpha \sin px + \beta \cos qx)e^{-\gamma x}dx$$

este absolut convergentă şi să se calculeze.

Rezolvare. Deoarece pentru $x \geq 0$ avem

$$| x(\alpha \sin px + \beta \cos qx)e^{-\gamma x} | \leq xe^{-\gamma x}(| \alpha | + | \beta |)$$

şi integrala improprie $\int_0^\infty xe^{-\gamma x}dx$ este convergentă (pentru că, după o integrare prin părţi, avem $\int_0^\infty xe^{-\gamma x}dx =$

$\left(-\frac{1}{\gamma}x - \frac{1}{\gamma^2}\right)e^{-\gamma x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\gamma^2}$), conform Criteriului de comparaţie (Teorema 7.4.2), integrala improprie

$$\int_0^{\infty} |\ x(\alpha \sin px + \beta \cos qx)e^{-\gamma x}\ |dx$$

este convergentă. Conform cu Definiţia 7.4.7, integrala improprie din enunţ este absolut convergentă.

Integrala o vom calcula prin părţi. Pentru aceasta, determinăm mai întâi o primitivă a funcţiei $f(x) = (\alpha \sin px + \beta \cos qx)e^{-\gamma x}$. Pentru simplificarea calculelor, calculăm separat prin părţi:

$$F_1(x) = \int \sin px\ e^{-\gamma x}dx = \int \sin px \left(-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma x}\right)' dx =$$

$$= -\frac{1}{\gamma}\sin px\ e^{-\gamma x} + \frac{p}{\gamma}\int \cos px\ e^{-\gamma x}dx = -\frac{1}{\gamma}\sin px\ e^{-\gamma x} +$$

$$+ \frac{p}{\gamma}\int \cos px \left(-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma x}\right)' dx = -\frac{1}{\gamma}\sin px\ e^{-\gamma x} +$$

$$+\frac{p}{\gamma}\left[-\frac{1}{\gamma}\cos\ px\ e^{-\gamma x} - \frac{p}{\gamma}\int \sin\ px\ e^{-\gamma x}dx\right] =$$

$$= \left[-\frac{1}{\gamma}\sin\ px - \frac{p}{\gamma^2}\cos\ px\right]e^{-\gamma x} - \frac{p^2}{\gamma^2}\int \sin px\ e^{-\gamma x}dx,$$

de unde rezultă

$$F_1(x) = \int \sin px\ e^{-\gamma x}dx = -\ \frac{\gamma \sin\ px + p \cos\ px}{\gamma^2 + p^2}e^{-\gamma x} + c.$$

Apoi, integrând o dată prin părţi,

$$F_2(x) = \int \cos px\ e^{-\gamma x}dx = \frac{\gamma}{p}\left[F_1(x) + \frac{1}{\gamma}\sin\ px\ e^{-\gamma x}\right] =$$

$$= \frac{p \sin\ px - \gamma \cos\ px}{\gamma^2 + p^2}e^{-\gamma x} + c,$$

pentru a prelua unele din rezultatele obţinute mai sus.

Combinând acum cele două rezultate, obţinem

$$F(x) = \int (\alpha \sin px + \beta \cos qx) e^{-\gamma x} dx =$$
$$= \alpha F_1(x) + \beta F_2(x) =$$
$$= \left[-\alpha \frac{\gamma \sin px + p \cos px}{\gamma^2 + p^2} + \beta \frac{q \sin qx - \gamma \cos qx}{\gamma^2 + q^2} \right] e^{-\gamma x} + c.$$

Acestea fiind zise, trecem la calculul integralei improprii date.

Folosim metoda integrării prin părţi într-o astfel de integrală (vezi Teorema 7.4.7):

$$\int_0^\infty x(\alpha \sin px + \beta \cos qx) e^{-\gamma x} dx = \int_0^\infty x F'(x) dx =$$
$$= xF(x) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty F(x) dx = xF(x) \Big|_0^\infty +$$
$$+ \frac{\alpha\gamma}{\gamma^2 + p^2} \int_0^\infty \sin px \, e^{-\gamma x} dx + \frac{\alpha p}{\gamma^2 + p^2} \int_0^\infty \cos px \, e^{-\gamma x} dx -$$
$$- \frac{\beta q}{\gamma^2 + q^2} \int_0^\infty \sin qx \, e^{-\gamma x} dx + \frac{\beta\gamma}{\gamma^2 + q^2} \int_0^\infty \cos qx \, e^{-\gamma x} dx.$$

Avem, pe de o parte,

$$xF(x) \Big|_0^\infty = \lim_{x \to \infty} xF(x) = 0,$$

pentru că $\lim\limits_{x \to \infty} \sin px \, xe^{-\gamma x} = 0$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} \cos px \, xe^{-\gamma x} = 0$, având în vedere faptul că cele două funcţii trigonometrice sunt mărginite pe $\mathbb{R}$ iar $\lim\limits_{x \to \infty} xe^{-\gamma x} = 0$.

Pe de altă parte, ţinând cont de Formula lui Leibniz-Newton (Teorema 7.4.6) pentru integrale improprii şi cu argumente asemănătoare ca mai sus,

$$\int_0^\infty \sin px \, e^{-\gamma x} dx = - \frac{\gamma \sin px + p \cos px}{\gamma^2 + p^2} e^{-\gamma x} \Big|_0^\infty = \frac{p}{\gamma^2 + p^2},$$

$$\int_0^\infty \cos px\, e^{-\gamma x} dx = \frac{p \sin\ px - \gamma \cos\ px}{\gamma^2 + p^2} e^{-\gamma x} \Big|_0^\infty = \frac{\gamma}{\gamma^2 + p^2}.$$

Obţinem în final,

$$\int_0^\infty x(\alpha \sin px + \beta \cos qx) e^{-\gamma x} dx = \frac{2\alpha\gamma p}{(\gamma^2 + p^2)^2} + \frac{\beta(\gamma^2 - q^2)}{(\gamma^2 + q^2)^2}. \ \blacksquare$$

Observaţie. Teoremele folosite în rezolvarea Problemei se referă la integrale improprii de forma $\int_a^{b-0} f(x)dx$. Adaptate corespunzător, ele sunt valabile şi pentru alte tipuri de integrale improprii.

Problema 24

Să se calculeze aria mulţimii

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 48, y^2 \le 8x, x \ge 0, y \ge 0\right\}.$$

Rezolvare. Mulţimea M este domeniul compact din plan limitat de porţiunea din primul cadran al cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 = 48$, de porţiunea din primul cadran a parabolei $y^2 = 8x$ şi de semiaxa pozitivă $y = 0$:

Pentru a putea aplica formula de calcul a ariei, mai avem nevoie de punctul de intersecţie din primul cadran dintre cerc şi parabolă. Coordonatele lui se află rezolvând sistemul format de ecuaţiile celor două curbe:

$$P : \begin{cases} x^2 + y^2 = 48 \\ y^2 = 8x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + 8x - 48 = 0 \\ y^2 = 8x \end{cases}.$$

Rezultă de aici $P(4,4\sqrt{2})$. Acum, mulţimea M se poate descompune în reuniunea a două subgrafice: M_1 ca subgrafic al funcţiei $f(x) = \sqrt{8x}$, $x \in [0,4]$ şi M_2 ca subgrafic al funcţiei $g(x) = \sqrt{48 - x^2}$, $x \in [4,4\sqrt{3}]$. Cum M_1 şi M_2 au în comun doar un segment de dreaptă (care, evident, are aria nulă), putem scrie (vezi mai jos)

$$\text{Aria M} = \text{Aria M}_1 + \text{Aria M}_2 =$$
$$= \int_0^4 \sqrt{8x}dx + \int_4^{4\sqrt{3}} \sqrt{48 - x^2}dx.$$

Prima integrală se calculează direct:

$$\int_0^4 \sqrt{8x}dx = \sqrt{8}\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{8}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{32}{3}\sqrt{2}.$$

A doua integrală se calculează cu schimbarea de variabilă $x = 4\sqrt{3}\sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (vezi Teorema 7.1.10):

$$\int_4^{4\sqrt{3}} \sqrt{48 - x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{48 - \left(4\sqrt{3}\sin t\right)^2}\, 4\sqrt{3}\cos t dt =$$
$$= 48\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt =$$
$$= 24\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 12\pi.$$

În concluzie, Aria M $= \frac{32}{3}\sqrt{2} + 12\pi = 52{,}784$. ■

Observaţie. Legat de calculul ariei unei mulţimi plane, reamintim următoarele:

1. Aria subgraficului

$$\Gamma_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\right\}$$

al unei funcţii $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continuă şi pozitivă, este dată de formula

$$\text{Aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx.$$

2. Aria intergraficului

$$\Gamma_{f,g} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

al două funcţii f, g : [a,b] $\to \mathbb{R}$, continue şi astfel încât $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$, este dată de formula

$$\text{Aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b (g(x) - f(x))dx.$$

Dacă condiţia "$f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$" nu se verifică, atunci intergraficul lui f şi g trebuie văzut ca fiind domeniul compact plan limitat de curbele $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$. Aria sa este

$$\text{Aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |g(x) - f(x)|dx.$$

Problema 25

Să se calculeze aria şi volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia $f(x) = \sin x$ pe intervalul $[0,\pi]$.

Rezolvare. Volumul corpului este dat de formula (vezi mai jos)

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x)dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Aria corpului este (vezi mai jos)

$$A = 2\pi \int_0^\pi \sin x\sqrt{1 + \cos^2 x}dx = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 + u^2}du =$$

$$= 4\pi \int_0^1 \frac{1 + u^2}{\sqrt{1 + u^2}}du =$$

$$4\pi\left[\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du + \int_0^1 u\left(\sqrt{1+u^2}\right)' du\right] =$$

$$= 4\pi \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\Big|_0^1 + 4\pi u\sqrt{1+u^2}\Big|_0^1 -$$

$$- 4\pi\int_0^1 \sqrt{1+u^2}du = 2\pi\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}\right]. \blacksquare$$

Observaţie. În legătură cu calculul ariei şi volumului unui corp de rotaţie, reamintim următoarele:
Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continuă şi pozitivă. Prin rotirea subgraficului Γ_f al lui f în jurul axei Ox se obţine un corp şi o suprafaţă, notate C_f şi S_f şi numite corpul de rotaţie determinat de f respectiv suprafaţa de rotaţie determinată de f.
1. Corpul C_f are volum, dat de formula

$$\mathrm{Vol}(C_f) = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Facem precizarea că formula rămâne adevărată şi pentru funcţii care nu sunt neapărat pozitive.
2. Dacă, în plus, funcţia f este derivabilă şi cu derivata f' continuă, suprafaţa S_f are arie, dată de formula

$$\mathrm{Aria}(S_f) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx.$$

Facem două precizări. Prima: dacă f nu este pozitivă, formula rămâne adevărată prin $\mathrm{Aria}(S_f) = 2\pi\int_a^b \mid f(x) \mid \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx.$

A doua, este aceea că această arie trebuie văzută ca aria laterală a corpului C_f (asemuit cu un trunchi de con). Aria totală a corpului este $A_t = \mathrm{Aria}(S_f) + \pi\left(f^2(a) + f^2(b)\right)$.

Problema 26

1. Să se calculeze lungimea graficului funcţiei

$$\mathrm{f} : [\text{-a,a}] \to \mathbb{R},\ \mathrm{f(x)} = \ln \cos \mathrm{x},$$

unde $\mathrm{a} \in (0, \frac{\pi}{2})$ este dat.

Rezolvare. Lungimea graficului funcţiei f este (vezi mai jos)

$$\ell(\mathrm{f}) = \int_{-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} \sqrt{1 + (\ln \cos x)'^2}\mathrm{dx} = \int_{-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} \sqrt{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}\mathrm{dx} =$$

$$= \int_{-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} \frac{1}{\cos x}\mathrm{dx} = 2\int_{0}^{\mathrm{a}} \frac{1}{\cos x}\mathrm{dx} = 2\int_{0}^{\mathrm{a}} \frac{(\sin x)'}{\cos^2 x}\mathrm{dx} =$$

$$= 2\int_{0}^{\mathrm{a}} \frac{(\sin x)'}{1 - \sin^2 x}\mathrm{dx} = 2\int_{0}^{\sin \mathrm{a}} \frac{1}{1 - \mathrm{u}^2}\mathrm{du} = \ln \frac{1 + \mathrm{u}}{1 - \mathrm{u}} \Bigg|_{0}^{\sin \mathrm{a}}$$

$$= \ln \frac{1 + \sin \mathrm{a}}{1 - \sin \mathrm{a}}. \blacksquare$$

Observaţie. Reamintim că dacă funcţia $\mathrm{f} : [\mathrm{a,b}] \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi cu derivata f' continuă, atunci graficul său are lungime finită şi lungimea sa $\ell(\mathrm{f})$ este dată de formula $\ell(\mathrm{f}) = \displaystyle\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \sqrt{1 + \left(\mathrm{f}'(\mathrm{x})\right)^2}\mathrm{dx}$.

Problema 27

Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene $\left\{(\mathrm{x,y}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \mathrm{x} \le \frac{\pi}{4},\ \sin \mathrm{x} \le \mathrm{y} \le \cos \mathrm{x}\right\}$.

Rezolvare. 1. Conform cu formulele de mai jos, calculăm

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{x}(\cos \mathrm{x} - \sin \mathrm{x})\ \mathrm{dx} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{x}(\sin x + \cos x)'\mathrm{dx} =$$

$$= [x(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)]\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \tfrac{\pi}{4}\sqrt{2} - 1;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx = (\sin x + \cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = \tfrac{1}{2}\sin 2x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \tfrac{1}{2}.$$

Ca urmare, coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene date sunt

$$x_G = \frac{\frac{\pi}{4}\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\pi\sqrt{2}-4}{4\left(\sqrt{2}-1\right)} = 0,2673034,$$

$$y_G = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)} = 0,6035533. \ \blacksquare$$

Observaţie. În legătură cu centrul de greutate al unei plăci plane, reamintim următoarele:

Fie $\mathcal{P}$ o placă materială plană şi omogenă, de grosime neglijabilă, de forma intergraficului $\Gamma_{f,g}$ al funcţiilor f, g : [a,b] $\to \mathbb{R}$, continue şi astfel încât $f(x) \le g(x)$ pentru orice $x \in$ [a,b].

1. Coordonatele centrului de greutate G al plăcii sunt

$$x_G = \frac{\int_a^b x(g(x) - f(x))dx}{\int_a^b (g(x) - f(x))dx}, \qquad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(g^2(x) - f^2(x)\right)dx}{\int_a^b (g(x) - f(x))dx}.$$

2. În cazul particular f = 0 şi $g(x) \ge 0$, $x \in$ [a,b], atunci

$$x_G = \frac{\int_a^b xg(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}, \qquad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b g^2(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

Problema 28

O picătură de apă având masa iniţială M cade sub acţiunea greutăţii sale şi se evaporă uniform, pierzând prin aceasta în fiecare secundă o masă m. Să se găsească lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate a picăturii, din momentul începerii căderii sale până în momentul evaporării totale. Se neglijează rezistenţa aerului.

Rezolvare. În fiecare moment de timp t ulterior începerii căderii, masa picăturii este $M - mt$. Căderea durează până în momentul evaporării totale, adică până când $M - mt = 0$. Deci, căderea durează $t_0 = \frac{M}{m}$ secunde. Spaţiul parcurs în acest timp de picătură este $x_0 = \frac{gt_0^2}{2} = \frac{M^2 g}{2m^2}$ metri. Aşadar, picătura de apă se deplasează sub acţiunea forţei sale de greutate $G(x) = \left(M - m\sqrt{\frac{2x}{g}}\right)g$ pe porţiunea $[0, x_0]$. Deci, lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate a picăturii, din momentul începerii căderii sale până în momentul evaporării totale este dat de

$$L = \int_0^{x_0} G(x)dx = \int_0^{x_0} \left(M - m\sqrt{\frac{2x}{g}}\right)gdx =$$

$$= g\left[Mx - m\sqrt{\frac{2}{g}}\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]\Big|_0^{x_0} = \frac{M^3 g^2}{6m^2}. \blacksquare$$

Observaţie. Legat de lucrul mecanic efectuat de o forţă, reamintim următoarele:
Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Vedem funcţia f ca o forţă care acţionează în sensul axei Ox, având în fiecare punct $x \in I$ mărimea $f(x)$. Lucrul mecanic efectuat de forţa f pentru deplasarea unei particule din punctul $a \in I$ în punctul $b \in I$ este, prin definiţie, numărul real $L = \int_a^b f(x)dx$.