Matematici Speciale

Conf.Dr. Dana Constantinescu
Departamentul de Matematici Aplicate
Universitatea din Craiova

Cuprins

1. ECUAȚII DIFERENȚIALE

Studiul ecuatiilor diferențiale formează obiectul unui capitol foarte important al matematicii, atât datorită rezultatelor teoretice deosebit de interesante cât şi pentru cã ele au nenumãrate aplicații în cele mai diverse domenii.

Ceea ce deosebeşte o ecuație diferențialã de o ecuație algebricã este faptul cã necunoscuta ne este un numãr ci o funcție care satisface o anumiã egalitate şi care trebuie determinate.

Multe fenomene sunt descrise cu ajutorul ecuațiilor diferențiale obținute prin metoda cunoscutã sub numele de “metoda diferențialelor. Aceasta constã în înlocuirea unor relații ce apar între creşterile infinit de mici ale unor cantitãți (care variazã în timp) prin relații între diferențialele (derivatele) lor.

Spre exemplu viteza instantanee $v(t_0)$ de deplasare a unui mobil care la momentul t a parcurs distanța $s(t)$ este $v(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=s'(t_0)$. La rândul sãu accelerația corpului la momentul t_0 este $a(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}=v'(t_0)=s''(t_0)$. In relațiile ce descriu mişcarea viteza se va considera $v(t)=s'(t)$ şi $a(t)=v'(t)$.

Exemplu : Mişcarea unui corp sub acțiunea greutãții sale şi întâmpinând o rezistențã a aerului proporționalã cu viteza sa (acest caz corespunde vitezelor mici) poate fi descrisã cu ajutorul unei ecuații diferențiale.

Se notează $v(t)$ viteza instantanee a corpului la momentul de timp $t>0$. Rezistența aerului va fi $R(t)=kv(t)$. Legea fundamentalã a mecanicii ($\vec{F}=m\vec{a}$) conduce la relația

$$mg-kv(t)=mv'(t)$$

care reprezintã o ecuație diferențialã cu necunoscuta $v=v(t)$. Pentru a determina viteza instantanee a corpului trebuie rezolvatã aceastã ecuație.

Problema fundamentalã a teoriei ecuațiilor (în general) este determinarea soluțiilor lor sau aproximarea lor dacã determinarea analiticã nu este posibilã.

Teoria ecuațiilor diferențiale are mai multe ramuri:

- **teoria cantitativã** se ocupã de rezolvarea analiticã a ecuațiilor. Sunt precizate tipurile de ecuații şi tehnicile de rezolvare a lor.
- **teoria calitativã** încearcã sã deducã proprietãțile soluțiilor, chiar dacã expresia lor analiticã nu poate fi cunoscutã
- **metodele numerice** sunt tehnici prin care valorile soluțiilor ecuației sunt approximate numeric.

Scopul acestui capitol este prezentare celor mai importante elemente ale teoriei cantitative a ecuațiilor diferențiale.

1.1 Considerații generale

Definiția 1 Se numeşte ecuație diferențialã o ecuație în care intervine o variabilã realã independentã x, o funcție necunoscutã $y=y(x)$ depinzând de acea variabilã şi derivatele ei

$y', y'', y^{(n)}$, adicã o egalitate de forma $F\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0$
(1)
unde $F : D \subset R^{n+1} \to R$ este o functie continuã.
Dacã derivata de ordin maxim care apare in ecuație este $y^{(n)}$ spunem ca ecuația are ordinul n.

Definiția 2 Se numeşte soluție a ecuației diferențiale (1) pe intervalul $I \subset R$ orice funcție $\phi : I \to R$, derivabilã de n ori pe I, care verificã ecuația, adicã pentru orice $x \in I$ are loc egalitatea $F\left(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(n)}(x)\right) = 0$.

- **Soluția generalã** a ecuației (1) este soluția care depinde de n constante arbitrare (exact atâtea cât este ordinul ecuației), adicã este de forma $y = \phi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$. Aceasta este forma explicitã a soluției pentru cã se precizeazã modul în care funcția necunoscutã y depinde de variabila independentã x

Uneori soluția generalã este prezentatã în formã implicitã (integrala generala a ecuației) $\Omega(x, y, C_1, ..., C_n) = 0$.
Soluția generalã se poate obține şi sub formã parametricã :
$x = f(t, C_1, ..., C_n)$, $y = g(t, C_1, ..., C_n)$

- Orice soluție care se obține din soluția generalã pentru anumite valori particulare ale constantelor se numeşte **soluție particularã.**
- Soluțiile ecuației care nu se pot obține prin acest procedeu din soluția generalã se numesc **soluții singulare**.

In probleme practice, alãturi de ecuația diferențialã trebuie considerate şi condiții inițiale
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad (2)$$
Problema determinãrii unei soluții a ecuației (1) care sã satisfacã condițiile inițiale (2) se numeşte **problemã Cauchy**.
Soluția unei probleme Cauchy (1)+(2) se obține impunând condițiile inițiale (2) soluției generale a ecuației (1)

Exemple
1. $y' = 3x^2$ este o ecuație diferențialã de ordinul I.

Soluția sa generalã este $y : R \to R$, $y(x) = x^3 + C$. Ea depinde de o singurã constantã.
$y(x) = x^3 + 1$, $y(x) = x^3 - \sqrt{2}$ sunt soluții particulare ale ecuației pentru cã au fost obținute din soluția generalã pentru $C = 1$, respectiv $C = -\sqrt{2}$. Existã o infinitate de soluții particulare
ale ecuației.

2. $y' = \sqrt{1 - y^2}$ este o ecuație diferențialã de ordinul I.

Funcția $y : \left[C - \frac{\pi}{2}, C + \frac{\pi}{2}\right] \to R$, $y(x) = \sin(x - C)$ reprezintã soluția generalã a ecuației.

$y:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to R,\ y(x)=\sin x$ este soluție particularã (obținutã din soluția generalã pentru $C=0$)

$y:[0,\pi]\to R,\ y(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$ este soluție particularã (obținutã din soluția generalã pentru $C=\frac{\pi}{2}$)

Alte soluții particulare se pot obține în acelaşi mod, pentru fiecare domeniul de definiție fiind altul.

Ecuația admite soluțiile singulare $y_1:R\to R,\ y_1(x)=1$ şi $y_2:R\to R,\ y_2(x)=-1$.

3. $y^{(5)}-2y^{(4)}+y^{(3)}-2y^{(2)}=0$ este o ecuație diferențialã de ordinul 5.

Soluția sa generalã este $y:R\to R,\ y(x)=C_1+C_2x+C_3e^{2x}+C_4\cos x+C_5\sin x$.

$y(x)=x,\ y(x)=3-\sin x$ sunt exemple de soluții particulare.

4. Problema Cauchy $\begin{cases} y^{IV}-4y'''+5y''-4y'+4=0 \\ y(0)=5,\ y'(0)=2,\ y''(0)=3,\ y'''(0)=24 \end{cases}$

are soluția $y(x)=2xe^{2x}+5\cos x$. Această soluție se obține din soluția generalã a ecuației diferențiale, anume $y(x)=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+C_3\cos x+C_4\sin x$ determinând constantele din

sistemul $\begin{cases} y(0)=C_1+C_3=5 \\ y'(0)=2C_1+C_2+C_4=2 \\ y''(0)=4C_1+4C_2-C_3=3 \\ y'''(0)=8C_1+12C_2-C_4=24 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} C_1=0 \\ C_2=2 \\ C_3=5 \\ C_4=0 \end{cases}$

O problemã importantã in teoria ecuațiilor diferențiale este determinarea soluției generale a unei ecuații diferențiale date. Acest lucru este posibil numai pentru un numãr restrâns de ecuații. Unele din aceste cazuri sunt prezentate în cele ce urmeazã.

1.2. Ecuații diferențiale de ordinul I

Ecuațiile de ordinul I au forma $F(x,y,y')=0$. Cel mai adesea ele sunt scrise în formã explicitã . Soluția lor generalã depinde de o singurã constantã.

Nu orice ecuație diferențialã de ordinul I poate fi rezolvatã analitic.

Din punctul de vedere al rezolvãrii existã douã categorii importante de ecuații :

- ecuații fundamentale (ecuațiile cu variabile separabile, ecuațiile liniare, ecuații cu diferentiale totale)
- ecuații reductibile la ecuații fundamentale (ecuații omogene si reductibile la ecuații omogene, ecuații care admit factor integrant, ecuații de tip Bernoulli, de tip Riccati, de tip Lagrange, de tip Clairaut etc)

Este foarte importantã cunoaşterea algoritmului de rezolvare a ecuațiilor fundamentale si metodele de reducere a celorlalte ecuații la ecuatiile fundamentale.

1.2.1. Ecuații cu variabile separabile

Forma generalã a ecuației este

$$y' = f(x)\cdot g(y) \qquad (3)$$

unde $f, g : I \to R$ sunt funcții date, continue pe domeniul de definiție.

Soluțiile ecuației $g(y)=0$ sunt soluții, de obicei singulare, ale ecuației (3).

Dacã $g(y)\neq 0$ rezolvarea constã in separarea variabilelor urmatã de integrare.

Metoda de rezolvare:

- se rezolvã ecuația $g(y)=0$ cu soluțiile $y_1, y_2, ..., y_k$
- se scriu soluțiile singulare ale ecuației : $y(x)=y_1,\ y(x)=y_2, ..., y(x)=y_k$.
- se scrie integrala generalã a ecuației : $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$. Se obține astfel forma implicitã a soluției.
- din integrala generalã se calculeazã (dacã este posibil) y şi se obține forma explicitã a soluției
- Soluția perticularã a ecuației (3) care îndeplineşte condiția inițialã $y(x_0)=y_0$ este datã de $\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ sau se obține din soluția explicitã.

O formã particularã a ecuației cu variabile separabile este $y' = f(x)$. Soluția generalã a acestei ecuații este $y(x) = \int f(x)dx$

Exemple : Sã se rezolve

1. $y' = x^2 + \sin x$ (ecuație cu variabile separabile)

Soluția generalã este $y(x) = \int (x^2 + \sin x)dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + C$

2. $y' = \frac{x}{x^2+1}$ (ecuație cu variabile separabile)

Soluția generalã este $y(x) = \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

3. $y' = -\frac{y}{x}$ (ecuație cu variabile separabile)

In acest caz $f(x) = -\frac{1}{x}$ şi $g(y) = y$, deci ecuația $g(y)=0$ are soluția $y=0$ şi funcția $y : R-\{0\} \to R, y(x)=0$ este soluție singularã a ecuației.

Dacã $y\neq 0$ ecuația devine $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$ şi integrala ei generalã este $\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{1}{x}dx$.

Rezultã $\ln|y| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| + C_1 \overset{notatie}{=} \ln\left|\frac{1}{x}\right| + \ln C = \ln C\left|\frac{1}{x}\right|$, adicã $y = \frac{C}{x}$

Soluția generalã a ecuației este deci $y : R - \{0\} \to R,\ y(x) = \frac{C}{x}$

1.2.2. Ecuații liniare

Forma generalã a ecuației liniare este

$$y' = P(x)\cdot y + Q(x) \qquad (4)$$

unde $P, Q : I \to R$ sunt funcții date, continue pe domeniul de definiție.

Aceastã ecuație se rezolvã prin metoda variației constantei.

Metoda de rezolvare

- se rezolvã ecuația omogenã $y' = P(x)\cdot y$ care este o ecuație cu variabile separabile şi se obține soluția nenulã $y = C\cdot f(x)$.
- Se considerã constanta C ca fiind funcție de x, adicã se scrie $y(x) = C(x)\cdot f(x)$
- Se calculeazã $y'(x) = C'(x)f(x) + C(x)f'(x)$ şi se introduce in ecuația (4). Termenii care conțin pe $C(x)$ se reduc şi se obține o ecuație mai simplã de forma $C'(x) = g(x)$.
- se rezolvã ecuația $C'(x) = g(x)$ şi se obține soluția $C(x) = \int g(x)dx + K$
- se introduce expresia lui $C(x)$ în $y(x) = C(x)f(x)$ şi se obține forma explicitã a soluției ecuației (4).

Observație : Forma explicitã a soluției ecuației (4) este

$$y(x) = \left[K + \int_{x_0}^{x}\left(Q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}P(t)dt}\right)ds\right]\cdot e^{\int_{x_0}^{x}P(t)dt}.$$

Aceastã expresie se obține folosind algoritmul anterior dar e dificil de memorat şi de aceea se recomandã folosirea algoritmului pentru rezolvarea fiecãrei ecuații.

Exemplu : Sã se rezolve problema Cauchy $\begin{cases} y' = y\cdot ctgx + 2x\cdot\sin x \\ y(\pi/2) = a \end{cases}$ (ecuație liniarã)

Funcția $ctgx$ nu este definitã in punctele $n\pi,\ n\in N$. Din cauza condiției inițiale se va cãuta soluția generalã a ecuației pe intervalul $(0.\pi)$.

Ecuația omogenã $y' = y\cdot ctgx$ are integrala generalã $\int\frac{dy}{y} = \int\frac{\cos x}{\sin x}dx$.

Rezultã $\ln|y| = \ln|\sin x| + C_1 = \ln(C|\sin x|)$ care dã soluția $y(x) = C\sin x$

Se aplicã variația constantei, adicã se considerã $y(x) = C(x)\sin x$.

Introducând $y'(x) = C'(x)\sin x + C(x)\cos x$ în ecuația neomogenã obținem

$C'(x)\sin x + C(x)\cos x = C(x)\sin x\frac{\cos x}{\sin x} + 2x\sin x$. Termenii conținând factorul $C(x)$ se reduc şi se obține ecuația $C'(x) = 2x$ cu soluția $C(x) = x^2 + K$.

Introducând aceastã expresie în forma lui $y(x)$ obținem soluția generalã a ecuației, anume

$y:(0,\pi)\to R,\ y(x)=\left(x^2+K\right)\sin x$ unde $K\in R$ este o constantã arbitrarã.

Din condiția $y(\pi/2)=a$ rezultã $\left(\frac{\pi^2}{4}+K\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=a$, adicã $K=a-\frac{\pi^2}{4}$. Deci soluția problemei Cauchy este $y:(0,\pi)\to R,\ y(x)=\left(x^2+a-\frac{\pi^2}{4}\right)\sin x$.

1.2.3. Ecuații cu diferențiale totale

Forma generalã a ecuației este

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (5)$$

unde P,Q sunt funcții date, de clasã C^2 pe domeniul $D\subset R^2$ şi satisfac relația $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Rezolvarea ecuației se bazeazã pe faptul cã existã funcții de forma

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt$$

astfel încât $dU_{(x,y)}=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. Soluția ecuației (5) va fi datã în forma explicitã de relația $U(x,y)=C$.

Metodã de rezolvare

- se identificã în ecuație $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ şi se verificã egalitatea $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$
- se determinã funcția U
- se scrie soluția ecuației sub formã implicitã $U(x,y)=0$. Dacã este posibil, din aceastã egalitate se aflã y în funcție de x şi se obține forma explicitã a soluției.

Exemplu : Sã se determine soluția generalã a ecuației $(x+y+1)dx+\left(x-y^2+3\right)dy=0$.

In acest caz $P(x,y)=x+y+1$ şi $Q(x,y)=x-y^2+3$ şi $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1$

$$U(x,y)=\int_0^x P(t,0)dt+\int_0^y Q(x,t)dt=\int_0^x(t+1)dt+\int_0^y\left(x-t^2+3\right)dt=\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y.$$

Soluția generalã a ecuației este datã sub formã implicitã de relația

$$\frac{x^2}{2}+x+3y+xy-\frac{y^3}{3}=C.$$

Aceastã ecuație nu poate fi rezolvatã analitic în raport cu necunoscuta y, deci nu se poate preciza forma explicitã a soluției.

1.2.4. Ecuații reductibile la ecuații fundamentale

Numele Ecuației	Forma generalã	Metoda de reducere la ecuații fundamentale
Omogenã	$y'=f(y/x)$	Prin schimbarea de variabilã $z(x)=\frac{y(x)}{x}$ se obține o ecuație cu variabile separabile

Reductibilã la ecuatie omogena	$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$	- dacã $a/a'\neq b/b'$ se rezolvã sistemul de ecuații $\begin{cases}ax+by+c=0\\a'x+b'y+c'=0\end{cases}$ care are soluția (x_0,y_0) Prin schimbarea de variabile $x=u+x_0$, $y=v+y_0$ se obține o ecuație omogenã cu variabila independentã u şi funcția necunoscutã v. - dacã $a/a'=b/b'$ se foloseşte substituția $z=ax+by$ şi ecuația se transformã într-o ecuație cu variabile separabile
Ecuații ce admit factor integrant	$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ cu $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$ dar pentru care existã factorul $\mu(x,y)$ a.î. $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$	Dacã factorul integrant $\mu(x,y)$ poate fi determinat atunci ecuația $\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)=0$ este o ecuație cu diferențialã totalã - dacã $(\partial P/\partial y-\partial Q/\partial x)/Q$ depinde doar de x atunci $\mu=\mu(x)$ satisface ec. $\mu'=\mu\frac{\partial P/\partial y-\partial Q/\partial x}{Q}$ - dacã $(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y)/P$ depinde doar de y atunci $\mu=\mu(y)$ satisface ec. $\mu'=\mu\frac{\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y}{P}$
Bernoulli	$y'=P(x)\cdot y+Q(x)\cdot y^{\alpha}$	Prin schimbarea de funcție $z=y^{1-\alpha}$ se obține o ecuație liniarã. Soluția ecuației inițiale este $y=z^{\alpha-1}$
Riccati	$y'+P(x)\cdot y^2+Q(x)\cdot y+$ $+R(x)=0$	Aceste ecuații se pot rezolva numai dacã se cunoaşte mãcar o soluție particularã a lor : - dacã se cunoaşte o soluție $y_1(x)$, prin transformarea $y=y_1+1/z$ se obține o ecuație liniarã şi neomogenã - dacã se cunosc douã soluții y_1 şi y_2, prin schimbare de funcție $z=\frac{y-y_1}{y-y_2}$ se obține o ecuație liniarã şi omogenã. - dacã se cunosc trei soluții y_1,y_2,y_3 atucni soluția se obține direct din relația $\frac{y-y_1}{y-y_2}:\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=C$
Lagrange	$y=x\cdot A(y')+B(y')$ unde $A(y')\neq y'$	Se deriveazã ecuația şi se noteazã $y'=p$. Se obține o ecuație liniarãcu funcția necunoscutã x şi variabila independentã p. Aceastã ecuație are solutia de forma $x=x(p)$ iar soluția generalã a ec. Lagrange se dã în formã parametricã $\begin{cases}x=x(p)\\y=x(p)A(p)+B(p)\end{cases}$

Clairaut	$y = xy' + B(y')$	Soluția generalã este $y(x) = Cx + B(C)$. Ecuația admite și soluția (parametricã) singular $\begin{cases} x = -B'(p) \\ y = -B'(p)p + B(p) \end{cases}$

Exemple : Sã se determine soluțiile generale ale urmãtoarelor ecuații :

1. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ (ecuație omogenã)

Pentru $x \neq 0$ ecuația se scrie $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$. Cu schimbarea de variabilã $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, adicã $y(x) = x \cdot z(x)$, ecuația devine $z(x) + xz'(x) = z(x) + \sqrt{1 + z^2(x)}$, care este o ecuație cu variabile separabile, anume $z'(x) = \frac{1}{x}\sqrt{1 + z^2}$. Integrala generalã a ecuației este $\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{1}{x} dx$, adicã $\ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right) = \ln|x| + C_1 = \ln(C|x|)$. Rezultã $z + \sqrt{1+z^2} = Cx$ deci soluția generalã a ecuației este

$$y : R - \{0\} \to R, \quad y(x) = x\frac{C^2x^2 - 1}{2C|x|}$$

2. $(2x + 3y - 1) - (x - y - 3)y' = 0$ (ecuație reductibilã la ecuație omogenã)

Ecuația se scrie sub forma $y' = \frac{2x + 3y - 1}{x - y - 3}$. Sistemul $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ are solutia unicã $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

Se face substituția $\begin{cases} x = u + 2 \\ y = v - 1 \end{cases}$ și se obține ecuația omogenã $(2u + 3v) + (v - u)v' = 0$ cu funcția necunoscutã v. Notând $z = \frac{v}{u}$, adicã $v = zu$ ecuația se reduce la ecuația cu variabile separabile $z' = \frac{1}{u} \cdot \frac{z^2 + 2z + 2}{1 - z}$. Integrala generalã a acestei ecuații este $\int \frac{1 - z}{z^2 + 2z + 2} dz = \int \frac{1}{u} du$.

Calculând cele douã integrale obținem $\frac{\ln\left(z^2 + 2z + 2\right)}{2} - 2arctg(z + 1) = \ln u + C$.

Tinând cont cã $z = \frac{v}{u} = \frac{y+1}{x-2}$ se obține soluția generalã sub formã implicitã

$$\ln\left((y+1)^2 + 2(x-2)(y+1) + 2(x-2)^2\right) - 4arctg\frac{x + y - 1}{x - 2} = 0.$$

Forma explicitã a soluției nu se poate determina.

3. $(4x + 6y + 4) - 3(6x + 9y - 2)y' = 0$ (ecuație reductibilã la ecuație omogenã)

Ecuația se scrie sub forma $y' = \frac{4x + 6y + 4}{3(6x + 9y - 2)}$.Deoarece $\frac{a}{a'} = \frac{4}{18} = \frac{b}{b'} = \frac{6}{27}$ se va folosi substituția $2x + 3y = z$. Din $y = \frac{z - 2x}{3}$ rezultã $y' = \frac{z' - 2}{3}$. Ecuația devine $\frac{z' - 2}{3} = \frac{2z + 4}{9z - 6}$ adicã

$z' = \frac{8z}{3z-2}$. Aceasta este o ecuație cu variabile separabile care se poate scrie sub forma $\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4z}\right) z' = 1$.

Integrala generalã a acestei ecuații conduce la relația $\frac{3}{8} z - \frac{1}{4} \ln z = x + C$. Tinând cont de expresia lui z se obține soluția generalã a ecuației inițiale, soluție scrisã sub formã implicitã :

$$3(2x+3y) - \ln(2x+3y)^2 - 8x = C$$

4. $y' = \frac{4}{x} y + x\sqrt{y}$ (ecuație de tip Bernoulli)

In acest caz $\alpha = 1/2$. Se foloseşte substituția $z = y^{1-1/2} = y^{1/2}$. Rezultã $y = z^2$ şi $y' = 2 \cdot z \cdot z'$.

Ecuația devine $2 \cdot z \cdot z' = \frac{4}{x} z^2 + xz$ adicã $z\left(2z' - \frac{4}{x} z - x\right) = 0$.

Din soluția $z = 0$ rezultã soluția singlarã $y = 0$.

Ecuația liniarã $z' = \frac{2}{x} z + \frac{x}{2}$ are soluția $z(x) = \left(\frac{1}{2} \ln x + K\right) \cdot x^2$ care conduce la $y(x) = \left(\frac{1}{2} \ln x + K\right)^2 \cdot x^4$.

5. $\left(4x + 3y + 3y^2\right)dx + (2xy + x)dy = 0$ (ecuație ce admite factor integrant)

In acest caz $P(x,y) = 4x + 3y + 3y^2$ şi $Q(x,y) = 2xy + x$.

$\frac{\partial P}{\partial y} = 6y + 3$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + 1$. Deoarece $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ ecuația nu are diferențialã totalã. Totuşi $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2}{x}$ depinde numai de x, deci se poate alege un factor integrant de forma $\mu = \mu(x)$. El va satisface ecuația $\mu' = \mu \cdot \frac{2}{x}$ care este o ecuație cu variabile separabile cu soluția $\mu(x) = x^2$. Din înmulțirea cu x^2 a ecuației inițiale se obține ecuația cu diferențialã totalã

$\left(4x^3 + 3x^2y^2 + 3x^2y\right)dx + \left(2x^2y + x^3\right)dy = 0$.

Funcția $U(x,y) = \int_0^x 4t^3 dt + \int_0^y \left(2x^2t + x^3\right)dt = x^4 + x^2y^2 + x^3y$. Soluția ecuației, scrisã sub formã implicitã va fi deci $x^4 + x^2y^2 + x^3y = C$.

6. $y' + \frac{1}{x^3-1} y^2 - \frac{x^2}{x^3-1} y - \frac{2x}{x^3-1} = 0$ (ecuație Riccati)

a) ştiind cã admite soluția $y_1 = -x^2$

b) ştiind cã admite soluțiile $y_1(x) = -x^2$ şi $y_2(x) = -1/x$

c) ştiind cã admite trei soluții $y_1(x) = -x^2$, $y_2(x) = -1/x$ şi $y_3(x) = x + 1$

a) Dacã se cunoaşte numai soluţia y_1 se face schimbarea de variabilã $y=\frac{1}{z}-x^2$ adicã $y'=-\frac{1}{z^2}z'-2x$.

Se obţine ecuaţia $(x^3-1)\left(-\frac{1}{z^2}z'-2x\right)+\left(\frac{1}{z}-x^2\right)^2-x^2\left(\frac{1}{z}-x^2\right)-2x=0$ din care, dupã efectuarea calculelor rezultã ecuaţia liniarã $z'+\frac{3x^2}{x^3-1}z-\frac{1}{x^3-1}=0$ cu soluţia $z=\frac{k+x}{x^3-1}$.

Rezultã $y=\frac{-1-kx^2}{x+k}$.

b) Dacã se cunosc douã soluţii se face substituţia $z=\frac{y+x^2}{y+1/x}$ adicã $y=\frac{z-x^3}{x(1-z)}$ şi $y'=\frac{(z'-3x^2)x(1-z)-(z-x^3)(1-z-xz')}{x^2(1-z)^2}$. Introducând aceste expresii în ecuaţia diferenţialã obţinem (dupã calcule) ecuaţia liniarã $z'=\frac{z}{x}$ care are soluţia $z=cx$. Rezultã $y=\frac{c-x^2}{1-cx}$.
Observãm ca soluţia obţinutã coincide cu cea de la a) dacã considerãm $c=-1/k$.

c) dacã se cunosc y_1, y_2, y_3, soluţia generalã se obţine direct din formula $\frac{y-y_1}{y-y_2}:\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=k$ de unde rezultã $y=\frac{x^2-k}{kx-1}$.

7. $y=x\cdot(y')^2-y'$ (ecuaţie de tip Lagrange)

Prin derivarea ecuaţiei se obţine $y'=(y')^2+2xy'y''-y''$. Se noteazã $y'=p$ şi se ajunge la ecuaţia $p-p^2=(2px-1)p'$ în care p este funcţie de x. Dacã se considerã x ca funcţie de p (se inverseazã aplicaţia p) şi se ţine cont de faptul cã $x'=1/p'$ (din formula de derivare a funcţiei inverse) se obţine ecuaţia liniarã $x'+\frac{2x}{p-1}-\frac{1}{p(p-1)}=0$ pentru $p(p-1)\neq 0$.

Rezultã $x=(C+\ln p)/(p-1)$ şi soluţia ecuaţiei este data parametric prin

$$x=(C+\ln p)/(p-1),\quad y=p^2(C+\ln p)/(p-1)-p$$

Pentru $p=0$ şi $p=1$ se obţin douã soluţii singulare : $y=K$ şi $y=x+L$. Inlocuind aceste funcţii în ecuaţia iniţialã se obţine $K=0$, respectiv $L=-1$. Deci soluţiile particulare vor fi $y=0$ şi $y=x-1$.

8. $y=xy'-(y')^2$ (ecuaţie de tip Clairaut)

Soluția generalã este $y = Cx - C^2$ (vezi tabelul anterior) şi o soluție particularã este datã parametric de $\begin{cases} x = 2p \\ y = xp - p^2 \end{cases}$.

Exerciții propuse

Sã se rezolve urmãtoarele ecuații diferențiale sau probleme Cauchy:

1. $y' - y/x = 0$ (liniarã) **R :** $y = Cx + x^2$

2. $y' - 2y/x = x^3$ (liniarã) **R :** $y = x^4/6 + C/x^2$

3. $xy' + y - e^x = 0,\quad y(a) = b$ (liniarã **R :** $y = e^x/x - \left(ab - e^a\right)/x$

4. $y' - y/\left(1 - x^2\right) - 1 - x = 0,\quad y(0) = 0$ (liniarã) **R :** $y = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right)\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}},\quad x \in (-1, 1)$

5. $y'\cos^2 x + y = tgx,\quad y(0) = 0$ (liniarã) **R :** $y = x/\cos x$, $x \in [0, \pi/2)$

6. $xy' - y = y^3$ (Bernoulli) **R :** $y = Cx/\sqrt{1 - C^2x^2}$

7. $(x - y)y - x^2y' = 0$ (omogenã) **R :** $y = 1/\left(\ln|x| + C\right)$

8. $\left(1 - x^2\right)y' + xy = ax$ (cu var. sep) **R :** $y = a + C\sqrt{x^2 - 1}$

9. $xy' - 2y = x^3/2$ (liniarã) **R :** $y = x^3/2 + Kx^2$

10. $y' - 2xy = x^3$ (liniarã) **R :** $y = \left(x^2 - 1\right)/2 + Ce^{-x^2}$

11. $xy' - y = \ln x$ (liniarã) **R :** $y = -\ln x - 1/(2x) + Cx$

12. $\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2y + 4y^3\right)dy = 0$ (dif. totale **R :** $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 = C$

13. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$ (dif. totale) **R :** $x^2 + 2xy + 2y^2 = C$

14. $xy' = y,\quad y(1) = 0$ (cu var.sep.) **R :** $y = 0$

15. $xy' = y,\quad y(1) = 1$ (cu var.sep.) **R :** $y = x$

1.3 Ecuații diferențiale liniare de ordin superior

O problemã inportantã este rezolvarea ecuațiilor diferențiale de ordin mai mare ca 1. Sunt puține ecuațiile pentru care se poate preciza forma analiticã a soluției. Cel mai frecvent utilizate sunt ecuațiile liniare.

Forma generalã a ecuației liniare de ordin n este

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+....+a_n(x)y=f(x) \qquad (6)$$

Ecuația liniarã omogenã asociatã ecuației (6) este

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+....+a_n(x)y=0 \qquad (7)$$

Teoremã : Soluția generalã a ecuației (6) este suma dintre soluția generalã a ecuației omogene atașatã şi o soluție particularã a ecuației (6).

1.3.1. Ecuații cu coeficienți constanți

Metoda de rezolvare a ecuației liniare cu coeficienți constanți:

- se rezolvã ecuația omogenã şi se obține soluția y_G
- se determinã o solutie y_P a ecuației neomogene
- se scrie soluția generalã a ecuației neomogene $y=y_G+y_P$.

A1)**Rezolvarea ecuației omogene**

Forma generalã a unei ecuații cu coeficienți constanți este

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (8)$$

Teoremã : Dacã n soluții $y_1,...y_n$ formeazã un sistem fundamental de soluții al ecuației (9), atunci soluția generalã a ecuației are forma

$$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n \qquad (9)$$

unde $C_1,C_2,...,C_n\in R$ sunt constante arbitrare.

Problema rezolvãrii ecuației (9) se reduce deci la determinarea unul sistem fundamental de soluții. In cele ce urmeazã prezentãm principalele metode de rezolvare pentru ecuațiile liniare.

O soluție a ecuației se cautã sub forma $y(x)=e^{\lambda x}$, prin analogie cu cazul $n=1$. Prin înlocuire în ecuația (8) se obține, dupã simplificarea cu $e^{\lambda x}$, ecuația caracteristicã

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \qquad (10)$$

Teoremã : Fie $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ soluțiile ecuației (10).

a) **dacã $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n$ sunt reale şi distincte ale ecuației (10), atunci $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x},..., e^{\lambda_n x}$ sunt soluții liniar independente ale ecuației (8).**

b) **Dacã λ_1 este rãdãcinã realã cu ordinul de multiplicitate p pentru ecuația (10), atunci $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$, …, $x^{p-1}e^{\lambda_1 x}$ sunt p soluții liniar independenteale ecuației (8).**

c) Dacã $\lambda_1 = a + ib$ este rãdãcinã complexã de ordinul p a ecuației (10) atunci

$$\begin{array}{ll} e^{ax}\cos(bx), & e^{ax}\sin(bx) \\ xe^{ax}\cos(bx), & x\,e^{ax}\sin(bx) \\ x^2e^{ax}\cos(bx), & x^2e^{ax}\sin(bx) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x^{n-1}e^{ax}\cos(bx), & x^{n-1}e^{ax}\sin(bx) \end{array}$$

sunt soluții liniar independente ale ecuației (8).

Sistemul fundamental de soluții se obține prin reunirea soluțiilor liniar independente corespunzãtoare tuturor rãdãcinilor ecuației (10), iar soluția generalã a ecuației (8) se obține folosind formula (9) .

Exemple : Sã se determine soluția generalã a urmãtoarelor ecuații :

1. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

Ecuația caracteristicã este $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ şi are soluțiile $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, Se aplicã a) din Teoremã şi se obține sistemul fundamental de (trei) soluții format din $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$. Soluția generalã este

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$$

2. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

Ecuația caracteristicã este $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ şi are soluțiile $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Se aplicã b) din Teoremã pentru $p = 3$. Sistemul fundamental de (trei) soluții este format din $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2e^x$, iar soluția generalã este

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$$

3. $y'' + 4y' + 5y = 0$

Ecuația caracteristicã este $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ şi are soluțiile $\lambda_1 = -2 + i$ şi $\lambda_2 = -2 - i$ deci se aplicã c) din Teoremã pentru $a = -2, b = 1, p = 1$. Sistemul fundamental de (douã) soluții este format din soluțiile $y_1 = e^{-2x}\cos x$ şi $y_2 = e^{-2x}\sin x$ iar soluția generalã este

$$y(x) = C_1e^{-2x}\cos x + C_2e^{-2x}\sin x$$

4. $y^{IV} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$

Ecuația caracteristicã este $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ cu soluțiile $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = i$ şi $\lambda_4 = -i$. Soluția generalã este

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3\cos x + C_4\sin x$$

A2) Determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene

Forma generalã a ecuației neomogene cu coeficienți constanți este

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x).$$

Nu existã metode generale de determinare a unei soluții particulare dar, în unele cazuri simple, se pot folosi rezultatele următoare :

a) Dacã $f(x)=P(x)$ este un polinom de grad k atunci soluția particularã este un polinom de acelaşi grad, cu coeficienți necunoscuți care se vor determina prin înlocuirea în ecuație.

b) Dacã $f(x)=e^{ax}P(x)$ unde $P(x)$ este un polinom de grad k existã douã situații

- Dacã a nu este rãdãcinã a ecuației caracteristice soluția particularã se cautã sub foema $y_P=e^{ax}Q(x)$, unde Q este un polinom de grad k cu coeficienți necunoscuți
- Dacã a exte rãdãcinã de ordin r a ecuației caracteristice atunci soluția particularã se cautã sub forma $y_P=x^r e^{ax}Q(x)$, unde Q este un polinom de grad k cu coeficienți necunoscuți

c) Dacã $f(x)=e^{ax}\left(P(x)\cos(bx)+Q(x)\sin(bx)\right)$ atunci existã de asemeni douã situații

- Dacã $z=a+bi$ nu este soluție a ecuației caracteristice soluția particularã se cautã sub forma $y_p(x)=e^{ax}\left(S(x)\cos(bx)+T(x)\sin(bx)\right)$, unde $R(x)$ şi $S(x)$ sunt polinoame cu coeficienți necunoscuți avand drept grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q
- Dacã $z=a+bi$ este soluție de ordin r a ecuației caracteristice soluția particularã se cautã sub forma $y_p(x)=x^r e^{ax}\left(S(x)\cos(bx)+T(x)\sin(bx)\right)$, unde $R(x)$ şi $S(x)$ sunt polinoame cu coeficienți necunoscuți avand drept grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q.

Exemple : Sã se determine câte o soluție particularã pentru următoarelor ecuații :

5. $y''-2y'+y=x$

Funcția $f(x)$ este un polinom de gradul I, deci soluția particularã se cautã sub forma $y_P(x)=ax+b$. Atunci $y'(x)=a$ şi $y''(x)=0$. Introducând în ecuație obținem $0-2a+ax+b=x$ şi din identificarea coeficienților rezultã $a=1$ şi, adicã $b=2$. Soluția particularã este $y_P(x)=x+2$.

Soluția generalã a ecuației este $y(x)=C_1e^x+C_2xe^x+x+2$

6. $y''-2y'+y=xe^x$

Deoarece $f(x)=xe^x=e^{1\cdot x}P(x)$ se încadreazã la b) pentru $a=1$, $P(x)=x$ şi $a=1$ este rãdãcinã dublã a ecuației caracteristice , soluția particularã se va cãuta sub forma $y_P(x)=x^2e^x(Ax+B)$.

Atunci $y'(x)=e^x\left(Ax^3+Bx^2+3Ax^2+2x\right)$ şi $y''(x)=e^x\left(Ax^3+Bx^2+6Ax^2+4Bx+6Ax+2B\right)$.

Introducând în ecuație obținem $e^x(6Ax+2B)=xe^x$. Din identificarea coeficienților se obține $A=1/6$ şi $B=0$.

Soluția particularã este deci $y_P=x^3e^x/6$.

Soluția generalã a ecuației este $y(x)=C_1e^x+C_2xe^x+x^3e^x/6$.

7, $y''+y=x\sin x$

Funcția $f(x)=x\sin x=e^{0x}(0\cdot\cos x+x\sin x)$ se incadrează la c) pentru $a=0, b=1, P(x)=0$ şi $Q(x)=x$. Deoarece $z=0+i$ este soluție a ecuației caracteristice $\lambda^2+1=0$, soluția particulară se va căuta sub forma $y_P=xe^{0x}\left[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x\right]$. Inlocuin în ecuație şi identificând coeficienții se obține sistemul

$$2A+2D=0,\ 4C=0,\ -2B+2C=0,\ -4A=1$$

cu soluția $A=1/4,\ B=0,\ C=0,\ D=1/4$. Soluția perticulară este deci $-x^2\cos x/4+x\sin x/4$.
Soluția generală a ecuației este $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-x^2\cos x/4+x\sin x/4$

1.3.2. Ecuații cu coeficienți variabili

Pentru determinarea soluției generale a ecuației omogene cu coeficienți variabili nu exista metode generale. Dacă însă această soluție poate fi precizată, pentru determinarea unei soluții particlare se poate folosi metoda variației constantelor.

Teoremă: Fie $C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$ soluția generală a ecuației omogene

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0.$$

Dacă $C_1(x),C_2(x),...,C_n(x)$ satisfac sistemul

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2+....+C_n'(x)y_n=0 \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'+....+C_n'(x)y_n'=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}+C_2'(x)y_2^{(n-2)}+....+C_n'(x)y_n^{(n-2)}=0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+C_2'(x)y_2^{(n-1)}+....+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x) \end{cases}$$

atunci $y(x)=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+...+C_n(x)y_n$ este soluție a ecuației (7)

Exemplu : Să se determine soluția generalâ a ecuației $xy''+y'=x,\ \ x>0$

Se notează $y'=z$. Ecuația omogenă asociată este $xz'+z=0$ .Rezultă $z=C_1\dfrac{1}{x}$ adică $y=C_1\ln(x)+C_2$ Se foloseşte metoda variației constantelor pentru $y_1(x)=\ln x$ şi $y_2(x)=1$.
Sistemul devine

$$\begin{cases} C_1'(x)\ln x+C_2'=0 \\ C_1'(x)\dfrac{1}{x}+C_2'\cdot 0=x \end{cases} \text{ cu soluțiile } \begin{cases} C_1(x)=x^2 \\ C_2(x)=-x^2\ln x \end{cases}. \text{ Rezultă } \begin{cases} C_1(x)=\dfrac{x^3}{3}+A \\ C_2(x)=-\dfrac{x^3}{3}\ln x+\dfrac{x^3}{9}+B \end{cases}.$$

Soluția generală a ecuației este $y(x)=\dfrac{x^3}{9}+A\ln x+B$.

Observație: Metoda variației constantelor poate fi folosită si pentru determinarea soluțiilor particulare ale ecuațiilor omogene cu coeficienți constanți atunci când funcția $f(x)$ nu se încadrează în situațiile prezentate anterior. In acest caz soluția generală a ecuației omogene se obține prin procedeul cunoscut.

Exemplu: Sã se determine soluția generalã a ecuației $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$**,** $x>0$**.**

Soluția generalã a ecuației omogene este $y_G(x)=C_1e^x+C_2xe^x$. Se aplicã variația constantelor pentru $y_1(x)=e^x$ şi $y_2(x)=xe^x$.

Sistemul obținut este $\begin{cases} C_1'e^x+C_2'xe^x=0 \\ C_1'e^x+C_2'\left(e^x+xe^x\right)=\dfrac{e^x}{x} \end{cases}$ cu soluțiile $\begin{cases} C_1(x)=-x+A \\ C_2(x)=\ln x+B \end{cases}$.

Soluția generalã a ecuației este $y(x)=(-x+A)e^x+xe^x(\ln x+B)$.

Exerciții propuse : Determinați soluțiile generale ale urmãtoarelor ecuații :

1. $y''-4y'+4y=x^2$ **R :** $y(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{6}\left(2x^2+4x+3\right)$

2. $y''-y'+y=x^2+6$ **R :** $y(x)=e^{x/2}\left(C_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+x^2+2x+6$

3. $y''+2y'+y=e^{2x}$ **R :** $y(x)=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{9}e^{2x}$

4 $y''-8y'+7y=14$ **R :** $y(x)=C_1e^x+C_2e^{7x}+2$

5. $y''-y'=e^x$ **R :** $y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{x}{2}e^x$

6. $y''+y'-6y=xe^{2x}$ **R :** $y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x\left(\frac{x}{10}-\frac{1}{25}\right)e^{2x}$

7. $y''+y=\cos x$ **R :** $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$

8. $y''+y=\sin^2 x$ **R :** $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{6}\cos(2x)$

9. $y'''-13y''+12y=0$ **R :** $y(x)=C_1+C_2e^x+C_3e^{12x}$

10. $y'''-y=0$ **R :** $y(x)=C_1e^x+e^{-x/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+C_3\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$

11. $y^{IV}+4y=0$ **R :** $y(x)=e^x\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+e^{-x}\left(C_3\cos x+C_4\sin x\right)$

12. $y^{IV}-2y'''+y''=e^x$ **R :** $y(x)=C_1+C_2x+\left(C_3+C_4x+\frac{x^2}{2}\right)e^x$

13. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x}$**,** $x>0$ **R :** $y(x)=(C_1+xC_2)e^{-x}+xe^{-x}\ln x$

14. $x^2y''-2xy'+2y=2+2x^3\sin 2x$ **R :** ec. omogenã are soluția $y(x)=C_1x+C_2x^2$

$y(x)=1+C_1x+C_2x^2-x\sin 2x/2-x^2\cos 2x$

15. $x^2y''+4xy'+2y=\ln(1+x)$ **R:** ec omogenã are soluția $y(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$

$$y(x)=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\frac{(1+x)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\frac{3}{2x}-\frac{3}{4}$$

1.4. Sisteme de ecuații diferențiale

Forma generalã a unui sistem de ecuații diferențiale este

$$\begin{cases} y_1'=f_1(x,y_1,y_2,...,y_n) \\ y_2'=f_2(x,y_1,y_2,...,y_n) \\ .... \\ y_n'=f_n(x,y_1,y_2,...,y_n) \end{cases} \qquad (11)$$

unde $f_1, f_2, ..., f_n$ sunt funcții date, continue pe un domeniu din R^{n+1}.
O problemã Cauchy este formatã dintr-un sistem de ecuații diferențiale şi un set de condiții inițiale,

$$y_1(x_0)=a_1,\ y_2(x_0)=a_2,...,y_n(x_0)=a_n \qquad (12)$$

O soluție a sistemului (11) este formatã din funcțiile $y_1, y_2, ..., y_n$ care verificã sistemul.

Se poate arãta cã orice sistem de n ecuații diferențiale este echivalent cu o ecuație diferențialã de ordin n, deci soluția sa poate fi gãsitã rezolvând ecuația de ordin n ataşatã prin metoda substituției (se deriveazã una din ecuațiile sistemului de $n-1$ ori, celelalte de $n-2$ ori şi se eleiminaa $n-1$ funcții necunoscute).

Exemplu : Sã se rezolve sistemul $\begin{cases} y'=z \\ z'=-y \end{cases}$**.**

Derivând prima ecuație obținem $y''=z'$. Inlocuind aici $z'=-y$ (din a doua ecuație a sistemului) onținem ecuația de ordinul II $y''+y=0$ cu soluția $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$. Rezultã $z(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x$.

1.4.1 Sisteme liniare şi omogene de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți

Forma generalã a sistemului este

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}y_1+a_{12}y_2+...+a_{1n}y_n \\ y_2'=a_{21}y_1+a_{22}y_2+...+a_{2n}y_n \\ .... \\ y_n'=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+...+a_{nn}y_n \end{cases} \qquad (12)$$

Sistemului (12) i se asociazã matricea coeficienților, anume $A=(a_{ij})$.

Dacã notãm $Y=(y_1,y_2,...,y_n)^{\tau}$ şi $Y'=(y_1',y_2',...,y_n')^{\tau}$ atunci sistemul se scrie în forma matricealã
$Y'=A\cdot Y$ şi rezultatele prezentate la ecuații diferențiale (care reprezintã un sistem de o singurã ecuație cu o singurã necunoscutã, adicã $n=1$)se generalizeazã pentru n arbitrar.

Soluțiile fundamentale ale sistemului vor fi cãutate sub forma $Y_i = (\alpha_{1i}\, \alpha_{2i} \ldots \alpha_{ni})^\tau e^{\lambda_i x}$ unde λ_i sunt valori proprii a matricii A, adicã soluțiile ecuației caracteristice a sistemului :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

.

iar constantele α_{ij} trebuiesc determinate din sistem. Soluția generalã a sistemului este

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \ldots + C_n Y_n \qquad (14)$$

Existã urmãtoarele situații importante :

- Dacã ecuația caracteristicã (13) are soluțiile reale şi distincte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ şi $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sunt vectorii corespunzãtori acestor valori atunci soluția sistemului este
$$Y(x) = C_1 V_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 V_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n V_n e^{\lambda_n x}$$
- Dacã ecuația caracteristicã (13) are soluții multiple (reale sau complexe), fiecare soluție λ cu ordinul de multiplicitate p contribuie în suma (14) cu termenii
$$Y_1 = V_1 e^{\lambda x},\ Y_2 = e^{\lambda x}\left(\frac{x}{1!}V_1 + V_2\right),\ \ldots,\ Y_p = e^{\lambda x}\left(\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}V_1 + \frac{x^{p-2}}{(p-2)!}V_2 + \ldots + \frac{x}{1!}V_{p-1} + V_p\right)$$

unde $V_1, V_2, \ldots V_p$ sunt vestorii proprii principali corespunzãtori valorii proprii λ

Problema rezolvãrii sistemului (13) se reduce deci la determinarea valorilor proprii ai matricii A şi a vectorilor proprii corespunzãtori acestor valori.

Metoda de rezolvare :

a) Se scrie matricea A a sistemului.
b) Se determinã valorile proprii ale matricii rezolvand ecuația (13)
c) Pentru fiecare valoare proprie λ_i se determinã vectorii proprii (atâția cât e ordinul de multiplicitate al lui λ_i şi se scriu soluțiile corespunzãtoare lui λ_i
d) Se scrie sistemul fundamental de soluții al sistemului
e) Se scrie soluția generalã

Exemple : Sã se determine soluția generalã a sistemelor urmãtoare

1. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases}$

a) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) Valorile proprii ale matricii A sunt soluțiile ecuației $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ adicã $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ şi $\lambda_3 = 6$.

c) Valoarea λ_1 are ordinul de multiplicitate 1, deci va avea un singur vector propriu principal, $V_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ care verificã ecuatia $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$.

Din rezolvarea sistemului compatibil nederminat cu un grad de libertate

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 2\alpha_1 \\ -\alpha_1 + 5\alpha_2 - 3\alpha_3 = 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 2\alpha_3 \end{cases}$$

ee obține soluția $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$. Se dã lui α o valoare particularã, de exemplu $\alpha = 1$ şi obținem $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. In mod asemãnãtor obținem $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ corespunzãtor valorilor λ_2 şi λ_3.

d) Sistemul fundamental de soluții este $Y_1 = e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ -e^{2x} \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$, $Y_3 = \begin{pmatrix} e^{6x} \\ -2e^{6x} \\ e^{6x} \end{pmatrix}$.

e) Soluția generalã este $\begin{cases} y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x} \\ y_2 = \qquad\quad C_2e^{3x} - 2C_3e^{6x} \\ y_3 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x} \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_3 + y_1 \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{cases}$.

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ecuația caracteristicã , $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$ are rãdãcinile $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Un vector propriu al lui λ_1 este $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Subspațiul valorii proprii

$\lambda_2 = \lambda_3$ are dimensiunea 2. Vectorii proprii satisfac ecuația $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, adicã

sistemul cu douã grade de nedeterminare $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$. Alegând $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 0$ se obține $\alpha_3{}^* = 1$ şi pentru $\alpha_1{}^* = 0, \alpha_2{}^* = 1$ se obține $\alpha_3{}^* = -1$. Cei doi vectori proprii principali vor fi $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soluția generalã a sistemului este $Y = C_1 V_1 e^{2x} + C_2 V_2 e^{-x} + C_3 (x V_2 + V_3) e^{-x}$ adicã

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} - C_3 x e^{-x} \\ y_2 = C_1 e^{2x} \qquad\qquad + C_3 e^{-x} \\ y_3 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 (x-1) e^{-x} \end{cases}.$$

1.4.2. Sisteme liniare neomogene

Forma generalã este $\qquad Y'(x) = A \cdot Y(x) + F(x) \qquad (14)$

Ca şi în cazul ecuațiilor liniare neomogene, soluția generalã a sistemului neomogen este suma dintre soluția generalã a sistemului omogen si o soluție particularã a sistemului neomogen.

Pentru determinarea soluției particulare se poate folosi metoda variației constantelor.

Teoremã :Dacã $Y = C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n$ este soluția sistemului omogen asociat lui (14) atunci o soluție particularã a acestuia este $Y_P = C_1(x) Y_1 + \ldots + C_n(x) Y_n$ unde funcțiile $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ satisfac ecuația

$$C_1'(x) Y_1 + C_2'(x)(Y_2) + \ldots + C_n'(x) Y_n = F(x) \qquad (15)$$

Din ecuația (15) se calculeazã $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$ şi apoi, prin integrare se obțin $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Exerciții propuse

1 Sã se rezolve sistemele urmãtoare :

1. $\begin{cases} y' + 2y + 4z = 1 + 4x \\ z' + y - z = 3x^2/2 \end{cases}$ **R :** $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x^2 + x$ **,** $z = -C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}/4 - x^2/2$

2. $\begin{cases} y' + 2y + z = \sin x \\ z' - 4y - 2z = \cos x \end{cases}$ **R :** $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \frac{3}{8}\cos x - \frac{1}{8}\sin x,\ z(x) = \sin x - y' - 2y$

3. $\begin{cases} y' = z \\ z' = u \\ u' = y \end{cases}$ **R :** $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x/2} \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_3 e^{-x/2} \sin\frac{x\sqrt{3}}{2}$

$z(x) = y'(x)$

$u(x) = z'(x)$

4. $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ **R :** $\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t} \\ y(t) &= C_1 e^{t} - C_2 e^{-3t} \end{aligned}$

5. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y + t \end{cases}$ **R :** $\begin{aligned} x(t) &= C_1 + C_2 e^{2t} - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \\ y(t) &= -C_1 + C_2 e^{2t} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \end{aligned}$

6. $\begin{cases} y' = z + u \\ z' = y + u \\ u' = y + z \end{cases}$ **R :** $\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \\ z(x) &= C_1 e^{2x} + C_3 e^{-x} \\ u(x) &= C_1 e^{2x} - (C_2 + C_3) e^{-x} \end{aligned}$

1.5. Elemente de calcul operațional şi aplicații în teoria ecuațiilor diferențiale

Calculul operațional se ocupã cu studiul transformãrilor integrale. Acestea, numite şi "operatori integrali". transformã derivarea şi integrarea în operații algebrice. Ecuațiilor diferențiale şi integrale le corespund ecuații algebrice. Pentru a rezolva o ecuație diferențialã este sufficient sã se rezolve ecuația algebricã şi sã se aplice transformarea Laplace inverse soluției obținute. Cele mai directe aplicații în studiul ecuațiilor diferențiale îl are transformata Laplace

1.5.1. Transformata Laplace

Transformata Laplace este un operator între douã spații de funcții, operator care transformã derivarea şi integrarea în operații algebrice.
Notãm $F_R = \{f : R \to R\}$.
Definiție: Funcția $f \in F_R$ **este un original dacã satisface condițiile urmãtoare:**
a) $f(t) = 0$ **pentru orice** $t < 0$
b) f **e derivabilã pe porțiuni**
c) existã $M > 0$ **şi** $s > 0$ **astfel încât** $|f(t)| < M \cdot e^{st}$ **pentru orice** $t > 0$**.**
Numãrul pozitiv $s_0 = \min\{s \mid |f(t)| < M \cdot e^{st},\ \forall t > 0\}$ **se numeşte indice de creştere (sau abscisã de convergențã).**
Mulțimea funcțiilor original se noteazã O_R**.**
Exemple: Urmãtoarele funcții sunt funcții original:

a) $f(t) = \begin{cases} e^{kt}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ $(M = 1,\ s_0 = k)$

b) $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ $(M = 1,\ s_0 = 0)$

Aceastã funcție se numeşte "treapta lui Heaviside" .

c) Dacã funcția f satisface condițiile b) şi c) din definiția precedentã atunci $\phi(t)=\sigma(t)\cdot f(t)$ este un original.

Definiție : Aplicația $L: O_R \to R$ definitã de

$$(Lf)(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

se numeşte transformata Laplace.
Funcția $Lf:(s_0,\infty)\to R$ este imaginea lui f prin transformata Laplace.

Prin calcul direct se pot obține transformatele Laplace pentru multe funcții elementare.

Exemple : Sã se calculeze transformatele Laplace ale funcțiilor
1) $f(t)=\sigma(t)\cdot e^{kt}$.

$$(Lf)(p)=\int_0^{\infty} e^{kt}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^{\infty} e^{(k-p)t}dt=\frac{1}{k-p}e^{(k-p)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty}=\frac{1}{p-k}.$$

2) $f(t)=\sigma(t)\sin t$

$$(Lf)(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}\sin t dt=-e^{-pt}\cos t\,|_{t=0}^{t=\infty}-\int_0^{\infty} pe^{-pt}\cos t dt=1-p\left(e^{-pt}\sin t\,|_{t=0}^{t=\infty}+\int_0^{\infty} pe^{-pt}\sin t dt\right)$$ **. Rezultã**

$$(Lf)(p)=\frac{1}{p^2+1}$$

Principalele proprietãți ale transformatei Laplace sunt listate în tabelul urmãtor.

Numele proprietãții	Formula
1. Definiție	$Lf(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$
2. Teorema omotetiei	$L(f(\lambda t))(p)=\frac{1}{\lambda}(Lf)\left(\frac{p}{\lambda}\right)$
3. Derivarea originalului	$(Lf')(p)=p\cdot(Lf)(p)-f(0)$ $(Lf'')(p)=p^2\cdot(Lf)(p)-p\cdot f(0)-f'(0)$ .... $\left(Lf^{(n)}\right)(p)=p^n(Lf)(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-...-f^{(n-1)}(0)$
4. Derivarea imaginii	$(Lf)^{(n)}=\int_0^{\infty}(-t)^n f(t)e^{-pt}dt$
5. Integrarea originalului	$\left(L\int_0^t f(\tau)d\tau\right)=\frac{(Lf)(p)}{p}$

6. Integrarea imaginii	$\int_p^\infty (Lf)(q)dq = \left(L\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right)(p)$ **pentru** $p=0$ $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty (Lf)(p)dp$
7. Teorema translației	$L\left(e^{p_0 t} f(t)\right)(p) = (Lf)(p-p_0)$
8. Teorema întârzierii	$L\left(f(t-\tau)\right)(p) = e^{-pt}(Lf)(p)$
9. Imaginea produsului de convoluție	$L\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)dt\right)(p) = (Lf)(p)\cdot(Lg)(p)$

Folosind formulele din tabelul de mai sus (toate formulele se demonstrează prin calcul direct) se pot calcula transformatele Laplace ale multor funcții elementare.

Exemple : Găsiți imaginile următoarelor funcții original :

1. $f(t) = \sigma(t)\cdot\sin(\lambda t)$

Se foloseşte teorema de omotetie şi rezultă $(Lf)(p) = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{(p^2/\lambda^2+1)} = \frac{\lambda}{p^2+\lambda^2}$ **.**

2. $f(t) = \sigma(t)\sin^2 t$

Se foloseşte derivarea originalului. Din $f'(t) = \sigma(t)2\sin t\cos t = \sigma(t)\sin(2t)$ **şi**

$(Lf')(p) = p(Lf)(p) - f(0)$ **rezultă** $(Lf)(p) = \frac{2}{p(p^2+4)}$ **.**

3. $g(t) = t^2e^t$

Se foloseşte derivarea imaginii pentru $f(t) = e^t$ **şi** $n=2$ **. Rezultă**

$$\left(L\left((-t)^2 e^t\right)\right)(p) = (Lf)''(p) = \left(\frac{1}{p-1}\right)'' = \frac{2}{(p-1)^2}$$

4. $h(t) = \frac{\sin t}{t}$

Se foloseşte integrarea imaginii : $L\left(\frac{\sin t}{t}\right)(p) = \int_p^\infty (Lf)(q)dq = \int_p^\infty \frac{1}{q^2+1}dq = arctgq\,|_{q=p}^{q=\infty} = \frac{\pi}{2} = arctgp$

Imaginile celor mai importante funcții elementare sunt conținute în tabelul următor :

Originalul	Imaginea
1	$\frac{1}{p}$
$t^n \quad , \; n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

$t^n \cdot e^{\lambda t}$	$\dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\dfrac{1}{p-\lambda}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$sh(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$ch(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{\lambda t}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda t}\cos \omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$t\sin \omega t$	$\dfrac{2p\omega}{p^2+\omega^2}$
$t\cos \omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
$\sin(t-\tau)$	$\dfrac{e^{-p\tau}}{p^2+1}$
$\cos(t-\tau)$	$\dfrac{pe^{-p\tau}}{p^2+1}$
$\ln t$	$\dfrac{1}{p}\left(\ln\dfrac{1}{p}-\gamma\right)$ **cu** $\gamma \approx 0.57722$

1.5.2. Inversa transformatei Laplace

Prin transformata Laplace L definitã pe O_R se calculeazã imaginile funcțiilor original $f \in O_R$. Prin transformata Laplace inversã L^{-1} se regãseşte funcția original care corespunde unei imagini date.

Principalele cazuri în care funcția original poate fi determinatã analitic sunt prezentate în cele ce urmeazã.

1. **Dacã** $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ **este o fracție raționalã atunci ea se descompune în fracții simple şi se gãseşte originalul fiecãrei fracții folosind tabelul anterior.**

Exemple : Sã se determine originalul urmãtoarelor funcții

a) $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)\left(p^2+4\right)}$

Se observã cã $\dfrac{1}{p(p-1)\left(p^2+4\right)}=-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{1}{20}\dfrac{p}{p^2+4}$. Originalul lui $\dfrac{1}{p}$ este 1 (în tabelul transformatelor Laplace pe coloana din stânga corespunzãtoare lui $1/p$ este scrisã funcția "1", originalul lui $\dfrac{1}{p-1}$ eate e^t, originalul lui $\dfrac{p}{p^2+4}$ este $\cos 2t$ iar originalul lui $\dfrac{1}{p^2+4}$ este $\dfrac{1}{2}\sin 2t$.

Rezultã cã originalul lui $F(p)$ este $f(t)=-\dfrac{1}{4}\cdot 1+\dfrac{1}{5}e^t+\dfrac{1}{20}\cos 2t-\dfrac{1}{10}\sin 2t$.

b) $F(p)=\dfrac{1}{\left(p^2+1\right)^2}$

Se observã cã $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$ este imaginea unui produs de convoluție, adicã

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}=L\left(\int_0^t \sin\tau\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau\right)(p)=(Lf)(p).$$

Rezultã cã $f(t)=\displaystyle\int_0^t \sin\tau\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t \frac{\cos(t-2\tau)-\cos t}{2}\,d\tau=\frac{1}{2}t\cos t-\frac{1}{2}\sin t$.

2. Dacã $F(p)=\dfrac{Q(p)}{(p-p_1)^{n_1}\cdot\left(p-p^2\right)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(p-p_k)^{n_k}}$ **este o fracție în care** $n_1,n_2,\ldots,n_k\geq 2$ **atunci descompunerea în fracții simple este dificilã şi se poate folosi direct formula**

$$f(t)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(n_i-1)!}\cdot\lim_{p\to p_1}\left(F(p)\cdot e^{pt}\cdot(p-p_i)^{n_i}\right)^{(n_i-1)}$$

unde exponentul (n_i-1) **aratã cã expresia din parantezã se deriveazã de** (n_i-1) **ori.**

Exemplu : Sã se determine originalul lui $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2-1\right)^2}$

Deoarece $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+1)^2}$ se foloseşte formula anterioarã pentru $p_1=1,\ p_2=-1,\ n_1=n_2=2$.

Deci

$$f(t)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to 1}\left(\frac{p}{(p+1)^2}e^{pt}\right)'+\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to -1}\left(\frac{p}{(p-1)^2}e^{pt}\right)'=$$

$$=\lim_{p\to 1}\left(e^{pt}\left(\frac{p^2}{(p+1)^2}+\frac{(p+1)^2-2p(p+1)}{(p+1)^4}\right)\right)+\lim_{p\to -1}\left(e^{pt}\left(\frac{p^2}{(p-1)^2}+\frac{(p-1)^2-2p(p-1)}{(p-1)^4}\right)\right)=\frac{1}{4}t(e^t+e^{-t})=\frac{1}{2}t\cdot sht$$

3. Dacã funcția $F(p)$ **conține factorul** $e^{-\lambda p}$ **se foloseşte teorema întârzierii.**

Exemplu : Sã se determine originalul funcției $F(p)=\frac{2e^{-p}}{p^2}$.

Deoarece $F(p)=e^{-p}\frac{2!}{p^2}=e^{-p}(Lt^2)(p)=\left(L(t-1)^2\right)(p)$, ceea ce s-a obținut aplicând teorema întârzierii pentru $\tau=1$ şi $t=t^2$, rezultã cã $f(t)=(t-1)^2\cdot\sigma(t-1)$. Inmulțirea cu $\sigma(t-1)$ este necesarã pentru ca f sã fie o funcție original.

1.5.3. Calcul operațional

Calculul operațional, numit şi calcul simbolic, a fost introdus la sfârşitul secolului XIX de fizicianul englez O. Heaviside. Acesta a pus în evidențã (fãrã nici o justificare matematicã) faptul cã este posibilã rezolvarea rapidã a unor ecuații folosind un operator simbolic, evitând astfel calcule lungi ce apar în rezolvarea clasicã. Aceastã metodã se justificã parțial folosinf Transformata Laplace care transformã derivarea în înmulțire cu variabila p şi integrarea în împãrțire la aceeaşi variabilã.

Pentru rezolvarea anumitor tipuri de ecuații (E) folosind transformata Laplace se parcurg următoarele etape :

a) **Se formeazã ecuația operaționalã (EO) prin aplicarea transformatei Laplace celor doi membri ai ecuației.**

Ecuație operaționalã este o ecuație algebricã de gradul I având drept necunoscutã imaginea (prin transformata Laplace) a necunoscutei ecuației.

b) **Se rezolvã ecuația operaționalã**

Soluția (unicã) a ecuației este imaginea necunoscutei din ecuația inițialã

c) **Se determinã originalul funcției soluție de la b). Acesta reprezintã soluția ecuației inițiale.**

Principalele aplicații ale calcului operațional sunt :

- calculul inegralelor improprii
- rezolvare ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți
- rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți
- rezolvarea unor ecuații integrale
- rezolvarea unor ecuații integro-diferențiale
- rezolvarea ecuațiilor cu argument întârziat
- rezolvarea unor ecuații cu derivate partiale

1.5.31 Rezolvarea ecuațiilor liniare cu coeficienți constanți şi a problemelor Cauchy ataşate

Problema Cauchy având necunoscuta $y=y(t)$ are forma

$$\begin{cases} a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_0 y=f(t) \\ y(0)=y_{00},\, y'(0)=_{01},\,\ldots,\, y^{(n-1)}(0)=y_{0n-1} \end{cases} \quad \text{(E).}$$

Aplicând transformata Laplace ecuației (E) se obține ecuația operaționalã

$$a_n(Ly^{(n)})(p)+a_{n-1}(Ly^{(n-1)})(p)+\ldots+a_0(Ly)(p)=(Lf)(p).$$

Se notează $(Ly)(p)=Y(p)$, se foloseşte teorema de derivare a originalului şi se obține ecuația operațională

$$a_n\left(p^nY(p)+p^{n-1}y(0)+...y^{(n-1)}(0)\right)+...+a_1\left(pY(p)-y(0)\right)+a_0Y(p)=F(p) \qquad \text{(EO).}$$

Se aplică apoi algoritmul de rezolvare prezentat anterior.
Metoda se poate folosi şi pentru determinarea soluției generale a ecuației diferențiale. In acest caz valorile $y(0),\ y'(0).\ ...,\ y^{(n-1)}(0)$ reprezintă cele n constante ce apar în soluția generală.

Exemple : 1. Să se determine soluția generală a ecuației $y''-3y-+2y=e^{-t}$

a) Ecuația operațională este $\left(p^2-3p+2\right)Y(p)-py(0)-y'(0)+3y(0)=\dfrac{1}{p+1}$.

b) Soluția ecuației operaționale este

$$Y(p)=\frac{1}{(p-1)(p+1)(p-2)}+y(0)\frac{p}{(p-1)(p-2)}+(y'(0)+3y(0))\frac{1}{(p-1)(p-2)}.$$

După descompunerea în fracții simple rezultă

$$Y(p)=\left(-\frac{1}{2}+2y(0)+y'(0)\right)\frac{1}{p-1}+\frac{1}{6}\frac{1}{p+1}+\left(\frac{1}{3}+5y(0)+3y'(0)\right)\frac{1}{p-2}=C_1\frac{1}{p-1}+C_2\frac{1}{p-2}+\frac{1}{6}\frac{1}{p+1}$$

.

c) Originalul lui $Y(p)$ este $y(t)=C_1e^t+C_2e^{2t}+\frac{1}{6}e^{-t}$. Aceasta este soluția generală a ecuației liniare.
In această situație aplicarea transformatei Laplace pentru rezolvarea ecuației nu uşurează calculele. Aplicarea ei este justificată mai ales în rezolvarea problemelor Cauchy.

2. Să se rezolve problema Cauchy $\begin{cases} y''+y=2\cos t \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$

a) Ecuația operațională este $p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+Y(p)=\dfrac{2p}{p^2+1}$.

b) Soluția ecuației operaționale este $Y(p)=\dfrac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}+\dfrac{1}{p^2+1}$. Pentru a nu efectua operații aritmetice inutile este recomandabil să nu se aducă fracțiile la acelaşi numitor.

c) Originalul clui $Y(p)$ este $y(t)=\sigma(t)(t\sin t+\sin t)$.

Soluția problemei Cauchy este $y(t)=(t+1)\sin t$.

1.5.3.2. Rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți

Pentru a rezolva astfel de sisteme se obține sistemul de ecuații operaționale aplicând transformata Laplace tuturor ecuațiilor sistemului.

Soluțiile sistemului sunt imaginile funcțiilor necunoscute ale sistemului inițial. Prin aplicarea transformatei Laplace inversă se obțin soluțiile căutate.

Exemplu : Sã se rezolve problema Cauchy $\begin{cases} x''+x+y''-y'=e^t \\ x'+2x-y'+y=e^{-t} \\ x(0)=y(0)=y'(0)=0,\ x'(0)=1 \end{cases}$.

Sistemul operațional este $\begin{cases} p^2X(p)-1+pX(p)+p^2Y(p)-Y(p)=\dfrac{1}{p-1} \\ pX(p)+2X(p)-pY(p)+Y(p)=\dfrac{1}{p+1} \end{cases}$. El este un sistem de ecuații liniare cu necunoscutele $X(p)$ și $Y(p)$.

Soluția sistemului este $\begin{cases} X(p)=\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{(p+1)^2}-\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{p+1} \\ Y(p)=\dfrac{3p}{3(p^2-1)^2} \end{cases}$.

Soluția sistemului este $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{4}\cdot sht+\dfrac{3}{4}te^{-t} \\ y(t)=\dfrac{3}{4}t\cdot sht \end{cases}$.

Exerciții propuse : Aplicând metodele calculului operațional sã se rezolve urmãtoarele probleme Cauchy :

1. $y''+20y=0,\ \ y(0)=0.5,\ \ y'(0)=4$ **R :** $y(t)=\frac{1}{2}\cos\left(2t\sqrt{5}\right)$

2. $x'+x=e^{-t},\ \ x(0)=1$ **R :** $x(t)=(t+1)e^{-t}$

3. $x'-x=1,\ x(0)=-1$ **R :** $x(t)=-1$

4. $x'+2x=\sin t,\ x(0)=0$ **R :** $x(t)=\frac{1}{5}\left(e^{-2t}-\cos t+2\sin t\right)$

5. $x''=1,\ x(0)=0,\ x'(0)=1$ **R :** $x(t)=t+\frac{1}{2}t^2$

6. $x''+x'=1,\ x(0)=0,\ x'(0)=1$ **R :** $x(t)=t$

7. $x''+3x'=e^t,\ x(0)=0,\ x'(0)=-1$ **R :** $x(t)=\frac{1}{4}e^t+\frac{5}{12}e^{-3t}-\frac{2}{3}$

8. $x'''+x'=1,\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ **R :** $x(t)=t-\sin t$

9. $x'''+x'=t,\ x(0)=0,\ x'(0)=-1,\ x''(0)=0$ **R :** $x(t)=\frac{1}{2}t^2-1+\cos t-\sin t$

10. $x'''-x''=\sin t,\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ **R :** $x(t)=\frac{1}{2}e^t-t-1$

11. $x''-2x'=e^{2t},\ \ x(0)=x'(0)=0$ **R :** $x(t)=\frac{1}{4}\left(1-e^{2t}+2te^{3t}\right)$

12. $x'''+x''=\sin t,\ \ x(0)=-1,\ x'(0)=2,\ x''(0)=0$ **R :** $x(t)=\frac{3}{5}e^{-t}\sin 2t-\frac{4}{5}e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{5}$

13. $x'''+x''=\sin t,\ x(0)=x'(0)=1,\ x''(0)=0$ **R :** $x(t)=2t+\frac{1}{2}\left(e^{-t}+\cos t-\sin t\right)$

14. $x''+x=\cos t,\ x(0)=-1,\ x'(0)=1$ **R :** $x(t)=\frac{1}{2}\left(t\sin t-\cos t+\sin t\right)$

15. $x''+2x'+x=t^2,\ x(0)=1,\ x'(0)=0$ **R :** $x(t)=t^2-4t+6-5e^{-t}-te^{-t}$

1.6. Aplicaţii ale ecuaţiilor diferenţiale în studiul circuitelor electrice

1.6 .1. Descãrcarea unui condensator printr-o rezistenţã

Fenomenul este important pentru cã apare în circuitele folosite la transmisiunile radio, de televiziune, la radare etc.

Problema : Se considerã un circuit electric format dintr-un condensator cu capacitatea C **şi o rezistenţã** R**. Se cere intensitatea curentului,** $i(t)$ **şi diferenţa de potenţial** $v(t)$ **la bornele condensatorului în funcţie de momentul** t **la care se face mãsurarea dacã sarcina iniţialã este** Q**.**

Rezolvare : Considerãm funcţiile $i,q,v:[0,+\infty)\to R$ cate indicaa intensitatea, sarcina si diferenţa de potenţial la bornele condensatorului.

Intre ele existã relaţia $q(t)=Cv(t)$.

Intensitatea curentului electric la descãrcare este $i(t)=-q'(t)$ şi la bornele rezistenţei ea satisface relaţia $i=\frac{v}{R}$ (legea lui Ohm).

Relaţiile anterioare aratã cã acest circuit este caracterizat de problema Cauchy

$$\begin{cases} q'(t)=-\dfrac{q(t)}{C\cdot R} \\ q(0)=Q \end{cases} \qquad \text{(CR)}$$

în care $q=q(t)$ este funcţia necunoscutã iar C şi R sunt constante date în problemã.

Ecuaţia diferenţialã poate fi consideratã ca o ecuaţie cu variabile separabile sau ca o ecuaţie liniarã şi omogenã de ordinul I. Soluţia problemei Cauchy este

$$q(t)=Qe^{-\frac{1}{CR}}.$$

Intensitatea curentului (la descãrcare) este $i(t)=-q'(t)=\frac{Q}{CR}e^{\frac{-t}{CR}}=I_0e^{-t/(CR)}$ iar $v(t)=R\cdot i(t)=\frac{Q}{C}e^{\frac{-t}{CR}}$.

Momentul începând de la care descãrcarea este practic terminatã se considerã a fi τ pentru care $i(\tau)=\frac{I_0}{100}$. Se obţine $e^{\frac{-\tau}{CR}}=\frac{1}{100}$ adicã $\tau=2\cdot C\cdot R\cdot\ln 10\approx 4,6\cdot C\cdot R$

1.6.2. Incãrcarea unui condensator printr-o rezistenţã în prezenţa unei surse de curent continuu

Problemã : Se considerã un circuit alcãtuit dintr-un condensator cu capacitatea C, o rezistențã R şi o sursã de curent continuu având forța electromotoare constantã E. Se cere sã se determine intensitatea curentului şi diferența de potențial la bornele condensatorului în funcție de momentul la care se face mãsurarea.

Rezolvare : Se considerã funcțiile $i,q,v:[0,+\infty)\to R$ care reprezintã intensitatea curentului, sarcina condensatorului şi diferența de potențial la bornele acestuia.

La încãrcarea condensatorului $i(t)=q'(t)$ iar $v(t)=\dfrac{q(t)}{C}$.

Legea lui Kirchoff aratã cã $i(t)=\dfrac{E-v(t)}{R}$, deci problema Cauchy ce caracterizeazã circuitul este

$$\begin{cases} R\cdot q'(t)+\dfrac{q(t)}{C}=E \\ q(0)=0 \end{cases}.$$

Soluția generalã a ecuației (liniarã şi neomogenã de ordinul I) este $q(t)=CE+Ke^{-\frac{t}{CR}}$ iar soluția problemei Cauchy este

$$q(t)=C\cdot E\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right).$$

Rezultã imediat $v(t)=\dfrac{q(t)}{C}=E\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right)$ şi $i(t)=q'(t)=\dfrac{E}{R}e^{-\frac{t}{CR}}$.

Momentul în care condensatorul este practic încãrcat este cel la care diferența de potențial este $v(\tau)=\dfrac{99}{100}E$. Din $\dfrac{99}{100}E=E\left(1-e^{-\frac{\tau}{CR}}\right)$ rezultã $\tau=C\cdot R\cdot\ln 100\approx 4{,}6\cdot C\cdot R$

1.6.3. Formula fundamentalã a curentului alternativ

Problemã : Se considerã un circuit în care acționeazã o forțã electromotoare datoratã unei variații de flux şi conținân o rezistența R şi o bobinã cu inductanța proprie L montate în serie. Sã se determine intensitatea curentului electric din circuit.

Rezolvare : Pentru a obține o variație a fluxului electric $\Phi(t)$ se considerã un cadru cu n spire de arie S mişcându-se într-un camp magnetic cu inducția B, cadru închis printr0un circuit exterior. Acest cadru se roteşte uniform cu viteza unghularã ω.

Fluxul captat $\Phi(t)$ se descompune în douã pãrți :

- Fluxul $\Phi_1(t)=n\cdot B\cdot S\cdot\sin\omega t$ provenind de la polul nord al câmpului magnetic
- Fluxul $\Phi_2(t)=L\cdot i(t)$ generat de cadrul parcurs de curentul electric

Din relația (dată în problemă) $E(t) = -\Phi'(t)$ și ținând cont de faptul că $i(t) = \frac{E(t)}{R}$ se obține ecuația $i(t) = -\frac{n \cdot B \cdot S \cdot \omega}{R} \cos \omega t - \frac{L}{R} \cdot i'(t)$. Ea se scrie sub forma

$$L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = -n \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \cos \omega t = E_0 \cos \omega t$$

Pentru rezolvarea acestei ecuații se poate folosi calculul operațional.
Ecuația operațională corespunzătoare este (pentru $i(0) = 0$)

$$L \cdot \left(p \cdot I(p) - 0 \right) + R \cdot I(p) = E_0 \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

din care rezultă (notând $k = R/L$)

$$I(p) = E_0 \frac{p}{(p^2 + \omega^2) \cdot (Lp + R)} = \frac{E_0}{L} \cdot \frac{p}{\left(p^2 + \omega^2\right)\left(p + k\right)} = \frac{E_0}{L\left(k^2 + \omega^2\right)} \left(-k \cdot \frac{1}{p + k} + k \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \omega^2 \cdot \frac{1}{p^2 + \omega^2} \right)$$

.
Intensitatea curentului electric este originalul lui $I(p)$ adică

$$i(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2 \omega^2} \left(R \cos \omega t + L\omega \sin \omega t - Re^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Aceasta are o componentă periodică dominantă (anume $R \cos \omega t + L\omega \sin \omega t$) şi o componentă neglijabilă (anume $Re^{-\frac{R}{L}t}$) atunci când timpul t este mare. Din acest motiv curentul obținut se numeşte current alternative.

2. ANALIZA COMPLEXA

2.1. Mulțimea numerelor complexe

2.1.1. Definiție şi structură algebrică

In mulțimea $R^2 = \{(x, y) \mid x \in R,\ y \in R\}$ se definesc două operații (legi de compoziție internă)

- adunarea $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- înmulțirea $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$

în raport cu care R^2 este corp comutativ.

Mulțimea numerelor complexe este mulțimea R^2 dotată cu aceste două operații. Se notează C.

Obiecțul $z = (x, y) \in C$ se numeşte numaar complex. x este partea reală a lui z şi se notează
$\operatorname{Re} z$, iar y este partea sa imaginară şi se notează $\operatorname{Im} z$.

- Două numere complexe sunt egale dacă au aceeaşi parte reală şi aceeaşi parte imaginară.

Numerele complexe $(x,0)$, care au partea imaginarã 0, se numesc numere reale şi se notează x.
Se notează $i=(0,1)$. O proprietate importantă a lui i este $i^2=-1$.

Se poate arãta cã $i^n = \begin{cases} 1 & daca\ n=4k \\ i & daca\ n=4k+1 \\ -1 & daca\ n=4k+2 \\ -i & daca\ n=4k+3 \end{cases}$

Numerele complexe $(0,y)=iy$,cu partea realã 0, se numesc pur imaginare.

- Se scrie $z=x+iy$ deoarece $z=(x,y)=(x,0)+(0,1)\cdot(y,0)=x+iy$. Aceasta este **forma algebricã** a unui număr complex.

  Complex conjugatul numãrului $z=x+iy$ este numãrul $\bar{z}=x-iy$.

  Mulțimea numerelor complexe se identificã cu planul geometric R^2. Numãrul $z=x+iy$ eate asociat punctului $A(x,y)$ care se numeşte afixul lui z.

- Modulul numãrului complex $z=x+iy$ este $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

  Modulul lui $z=x+iy$ reprezintã distanța de la punctul $A(x,y)$ la punctul $O(0,0)$, originea axelor de coordonate în planul complex.

  Propoziție : Modulul are urmãtoarele proprietãți

  1. $|z|\geq 0$ oricare ar fi $z\in C$

  2. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ oricare ar fi $z_1,z_2\in C$. Rezultã $|z^n|=|z|^n$

  3. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ oricare ar fi $z_1,z_2\in C$.

  4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ oricare ar fi $z_1,z_2\in C$, $z_2\neq 0$.

  5. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ oricare ar fi $z\in C$

- Argumentul redus al numãrului complex $z=x+iy$ este unghiul pe care segmentul OA îl face cu sensul pozitiv al axei Ox. Se notează $\arg z$ şi se calculează folosind urmãtoarea formulã

  $\arg z=\phi=\begin{cases} arctg(y/x) & daca\ \ x>0,\ y>0 \\ \pi/2 & daca\ \ x=0,\ y>0 \\ \pi+arctg(y/x) & daca\ \ x<0 \\ 3\pi/2 & daca\ \ x=0,\ y<0 \\ 2\pi+arctg(y/x) & daca\ \ x>0,\ y<0 \end{cases}$. Au loc relațiile $\begin{cases} x=|z|\cdot\cos\phi \\ y=|z|\sin\phi \end{cases}$

- Forma trigonometricã a numãrului complex $z=x+iy$ este $z=|z|(\cos\phi+i\sin\phi)$.

  Ea este utilã pentru efectuarea operațiilor cu numere complexe

  $z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|(\cos(\phi_1+\phi_2)+i\sin(\phi_1+\phi_2))$

  $\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\phi_1-\phi_2)+i\sin(\phi_1-\phi_2))$

  $z=|z|^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)$

- Rãdãcina de ordin n a numãrului $z=|z|(\cos\phi+i\sin\phi)$ este formatã din n numere complexe calculate prin $z_k=(|z|)^{1/n}\left(\cos\frac{\phi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)$, cu $k\in\{1,2,...,n\}$.

Exerciții rezolvate

1. Sã se detrmine partea realã şi partea imaginarã a numerelor complexe urmãtoare
- $z=1+3i$. $\operatorname{Re} z=1$ şi $\operatorname{Im} z=3$
- $z=\frac{1}{1-i}$. Se scrie $z=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{1-i^2}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$ deci $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}$ şi $\operatorname{Im} z=\frac{1}{2}$

2. Sã se determine modulul şi argumentul urmãtoarelor numere complexe
- $z=i$. Deoarece $z=0+1i$ rezultã cã $|z|=\sqrt{0^2+1^2}=1$ şi $\arg z=\pi/2$
- $z=-3$. Deoarece $z=-3+0i$ rezultã cã $|z|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=3$ şi $\arg z=\pi+arctg0=\pi$
- $z=1+i^{223}$. Deoarece $223=4\cdot 55+3=4k+3$ rezultã cã $i^{223}=-i$ deci $z=1-i$.

  Atunci $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ şi $\arg z=arctg\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}$.
- $z=\frac{1-i}{1+i}$. Deoarece $z=\frac{(1-i)^2}{(1-i^2)}=\frac{1-2i+i^2}{1+1}=\frac{-2i}{2}=-i$ rezultã cã $|z|=\sqrt{0+(-1)^2}=1$ şi

$\arg z=3\pi/2$.

2.1.2. Structurã topologicã

Structura topologicã (geometricã) este legatã de noțiunea de distanță. Aceastã structurã este necesarã pentru dezvoltarea teoriei funcțiilor complexe.

Distanța între douã numere complexe $z_1=x_1+iy_1$ şi $z_2=x_2+iy_2$ este

$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Cercul $C(z_0,r)$ cu centrul în z_0 şi raza r este este dat de ecuația $|z-z_0|=r$.

Discul deschis cu centrul în z_0 şi raza r , notat $D(z_0,r)$ este interiorul cercului $C(z_0,r)$ şi este descris de ecuația $|z-z_0|<r$.

Vecinãtãțile numãrului $z_0\in C$ sunt mulțimi care conțin un disc centrat în z_0 . Topologia lui C este de fapt topologia lui R^2 .

Exerciții rezolvate : 1. Sã se calculeze distanța între $z_1=i$ şi $z_2=1-i$.

$d(z_1,z_2)=\sqrt{(0-1)^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$

2. Care este interpretarea geometricã a urmãtoarelor mulțimi ?
- $A=\{z\in C \mid \operatorname{Re} z>0\}$ R: semiplanul format din cadranele I şi IV
- $A=\{z\in C \mid |\operatorname{Im} z|<1\}$ R: Porțiunea din plan cuprinsã între dreptele $y=-1$ şi $y=1$.
- $A=\{z\in C \mid |z|<1\}$ R: înteriorul cercului cu centrul in origine şi raza 1
- $A=\{z\in C \mid |z-i|>2\}$ R: exteriorul cercului cu centrul în i şi raza 2
- $A=\{z\in C \mid 1<|z|<3\}$ R : coroana circularã dintre cercurile cu centrul în origine cu razele 1şi 3

- $A=\{z\in C \mid |z-1|=|z+i|\}$ R : mediatoarea segmentului ce uneşte afixele numerelor $z_1=1$ şi $z_2=-i$

2.1.3. Mulțimea extinsã a numerelor complexe

Mulțimea extinsã a numerelor complexe este $\overline{C}=C\cup\{\infty\}$. Obiectul "$\infty$" , care completează mulțimea numerelor complexe are următoarele proprietăţi:

- $|\infty|=+\infty\in\overline{R}$
- $\infty\cdot\infty=\infty$
- $a\cdot\infty=\infty$ pentru orice $a\in C-\{0\}$
- $\frac{a}{0}=\infty$ pentru orice $a\in C-\{0\}$
- $\frac{\infty}{a}=0$ pentru orice $a\in C-\{0\}$
- $\frac{a}{\infty}=0$ pentru orice $a\in C$

Nu sunt definite operațiile $\frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty$.
Mulțimea extinsã a numerelor complexe nu are structurã algebricã.
Vecinãtãțile lui ∞ conțin exteriorul unui disc cu centrul în origine.
Mulțimea $\{z\in C \mid |z-1>1|\}$ este vecinãtate a lui ∞ dar mulțimea $\{z\in C \mid \operatorname{Re} z>1\}$ nu e vecinãtate a lui ∞.

2.2 Funcții complexe elementare

Se numeşte funcție complexã de variabilã complexã o funcție definitã pe o submulțime D a muțimii numerelor complexe C cu valori în C. Se noteazã $f:D\to C$.
Pentru $z=x+iy$ se scrie $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+v(x,y)$.
Funcția $u:D\to R$ se numeşte partea realã a lui f şi se noteazã $\operatorname{Re} f(x,y)=u(x,y)$.
Funcția $v:D\to R$ se numeşte partea imaginarã a lui f şi se noteazã $\operatorname{Im} f(x,y)=v(x,y)$.
Exemple: 1. Sã se determine partea realã şi partea imaginarã a urmãtoarelor funcții
1. $f:C\to C$, $f(z)=z^2$
Putem scrie $f(z)=f(x,y)=(x+iy)^2=x^2+2ixy-y^2=\left(x^2-y^2\right)+2xyi$. Rezultã cã $\operatorname{Re} f(x,y)=x^2-y^2$ şi $\operatorname{Im} f(x,y)=2xy$.
2. $f:C\to C$, $f(z)=|z|$
Putem scrie $f(z)=f(x+iy)=\sqrt{x^2+y^2}$. Rezultã $\operatorname{Re} f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ şi $\operatorname{Im} f(x,y)=0$.

Printre funcțiile complexe existã unele mai importante, cu ajutorul cãrora se obțin alte funcții complexe. Ele se numesc funcții elementare şi sunt descrise în cele ce urmeazã

2.2.1. Funcțiile algebrice

Funcțiile algebrice sunt

- polinoamele $f:C\to C$, $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$. Toate rezultatele legate de polinoamele reale
se extind pentru polinoame complexe. Operațiile cu polinoame complexe (adunarea, înmulțirea şi împãrțirea) se definesc ca şi cele pentru polinoame reale.
- funcțiile raționale $f:C-\{z_1,z_2,...,z_h\}\to C$, $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, unde P,Q sunt polinoame complexe şi $z_1,z_2,...,z_h$ sunt numerele complexe pentru care se anulează numitorul fracției.

Un caz important îl reprezintã funcțiile omografice $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$

2.2.2. Funcția exponențialã

Funcția exponențialã este $f:C\to C$, $f(z)=e^z$ definitã prin

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Deoarece $e^x>0$ pentru orice $x\in R$ şi $\cos y+i\sin y\neq 0$ pentru oeice $y\in R$ rezultã cã funcția exponențialã nu poate avea valoarea 0.

Sunt importante urmãtoarele proprietãți ale funcției exponențiale :

- $e^z=1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}+...+\dfrac{z^n}{n!}+...$
- $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$
- $e^{-z}=\dfrac{1}{e^z}$
- $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$

Dacã $z=x+0i$ este numãr real atunci $e^z=e^x(\cos 0+i\sin 0)=e^x$, deci exponențiala complexã este o extindere a exponențialei reale.

2.2.3. Functiile hiperbolice

Funcțiile hiperbolice complexe sunt definite în mod asemãnãtor cu cele reale.

- sinusul hiperbolic este $shz=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$
- cosinusul hiperbolic este $chz=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$

Aceste funcții au urmãtoarele proprietãți (analoge funcțiilor hiperbolice reale):

- $ch^2z-sh^2z=1$
- $ch(z_1+z_2)=chz_1\cdot chz_2+shz_1\cdot shz_2$
- $sh(z_1+z_2)=shz_1\cdot chz_2+chz_1\cdot shz_2$

2.2.4. Funcțiile trigonometrice

Funcțiile trigonometrice complexe se definesc cu ajutorul funcției exponențiale :

- sinusul este $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

- cosinusul este $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

- tangenta este $tgz = \dfrac{\sin z}{\cos z}$

Aceste funcții au proprietățile cunoscute ale funcțiilor trigonometrice reale :

- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
- $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$
- $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2$

Intre funcțiile hiperbolice şi cele trigonometrice există următoarele relații :

$\cos z = ch(iz)$, $\quad i \cdot \sin z = sh(iz)$, $\quad i \cdot tgz = th(iz)$, $\quad chz = \cos(iz)$, $\quad i \cdot shz = \sin(iz)$, $\quad i \cdot thz = tg(iz)$

2.2.5. Funcții multivoce

Funcțiile multivoce (numite şi funcții multiforme) fac să corespundă fiecărui element din domeniul de definiție mai multe valori.

- Funcția Argument este $Arg : C \to P(C)$, $Argz = \{\arg z + 2k\pi,\ k \in Z\}$

Această definiție este justificată de faptul că, pentru orice $\phi_k = \arg z + 2k\pi \in Argz$ are loc relația $z = |z| \cdot (\cos\phi_k + i\sin\phi_k) = |z| e^{i\cdot\phi_k}$, deci există mai multe valori ce pot înlocui argumentul lui z în forma sa trigonometrică.

Se scrie $z = |z| e^{i\cdot Argz}$

- Funcția radical $f(z) = z^{\frac{1}{n}}$ asociază lui z mulțimea de valori $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$, unde $z_k = |z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)$. Toate aceste valori satisfac $z_k{}^n = z$.

- Funcția logaritmică $f(z) = Lnz$ este dată de $Lnz = \{\ln|z| + i \cdot Argz\} = \{\ln|z| + i \cdot (argz + 2k\pi), k \in Z\}$.

Ea poate fi interpretată ca fiind inversa funcției exponențiale în sensul că $e^{Lnz} = z$.

- Funcția putere $f(z) = z^A$, unde $A \in C$ este definită prin $z^A = e^{A\cdot Lnz}$.

Se definesc de asemenea inversele funcțiilor trigonometrice şi ale funcțiilor hiperbolice, dar ele sunt mai rar folosite în calcule.

Exerciții : 1. Să se calculeze : e^i, $e^{1+\pi i}$, $e^{k\frac{\pi}{2}i}$, $\cos(i)$, $\sin\dfrac{\pi}{2}i$, $tg(1+\pi i)$

- $e^i = e^{0+1\cdot i} = e^0(\cos 1 + i\sin 1)$. In această expresie numărul 1 reprezintă un radian, adică $\dfrac{360}{2\pi} \approx 57,32$ grade.
- $e^{1+\pi i} = e^1(\cos\pi + i\sin\pi) = e$
- $e^{k\frac{\pi}{2}i} = e^0(\cos k\dfrac{\pi}{2} + i\sin k\dfrac{\pi}{2})$ şi valorile depend de k
- $\cos(i) = \dfrac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2} = \dfrac{e^{-1} + e^1}{2} = \dfrac{e^2 + 1}{2}$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2}i\right)=\frac{e^{i\cdot\frac{\pi}{2}i}-e^{i\cdot\frac{\pi}{2}i}}{2i}=\frac{e^{-\pi/2}-e^{\pi/2}}{2i}=i\frac{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}{2}$

- $tg\left(\pi+i\right)=\frac{\sin\left(\pi+i\right)}{\cos\left(\pi+i\right)}=\frac{\left(e^{i(\pi+i)}-e^{-i(\pi+i)}\right)}{i\left(e^{i(\pi+i)}+e^{-i(\pi+i)}\right)}=\frac{e^{-1+\pi i}-e^{1-\pi i}}{i\left(e^{-1+\pi i}+e^{1-\pi i}\right)}=\frac{e^{-1}(-1)-e^{1}\left(-1\right)}{i\left(e^{-1}(-1)+e^{1}\left(-1\right)\right)}=\frac{e-1/e}{\left(e+1/e\right)}\cdot i$ **.**

2. Sã se rezolve urmãtoarele ecuații: $chz=0$**,** $\sin z=3$**,** $e^{z}=1+i$

- din $chz=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}=0$ rezultã $e^{z}+\frac{1}{e^{z}}=0$ **adicã** $e^{2z}=e^{2(x+iy)}=e^{2x}\left(\cos 2y+i\sin 2y\right)=-1$**.**

Din sistemul $\begin{cases}e^{2x}\cos 2y=-1\\ e^{2x}\sin 2y=0\end{cases}$ rezultã $\begin{cases}\sin 2y=0\\ \cos 2y=-1\\ e^{2x}=1\end{cases}$ adicã $\begin{cases}x=0\\ y=\left(2k+1\right)\pi\end{cases}$. Soluțiile ecuației sunt numerele complexe $z_k=i\left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}$.

- în ecuația $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=3$ notãm $t=e^{iz}$; rezultã $t^2-6it-1=0$ adicã $t_{1,2}=3\pm 2\sqrt{2}$

Din $e^{iz}=e^{i(x+iy)}=e^{-y+ix}=e^{-y}\left(\cos x+i\sin x\right)=3+2\sqrt{2}$ rezultã, prin identificarea pãrților reale și imaginare, $\cos x=0$, $\sin x=1$, $e^{-y}=3\pm 2\sqrt{2}$. Soluțiile ecuației sunt

$z_k=\ln\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{4k+1}{2}\pi+i\sin\frac{4k+1}{2}\pi\right),\ k\in Z$

- $e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}\left(\cos y+i\sin y\right)=1+i$ aratã cã $\begin{cases}e^{x}\cos y=1\\ e^{x}\sin y=1\end{cases}$. Din împãrțirea ecuațiilor rezultã $tgy=1$, adicã $y=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ (deoarece $\cos y>0$ și $\sin y>0$). Atunci $e^{x}=1/\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=2/\sqrt{2}$ și $x=\ln\sqrt{2}$.

Soluțiile ecuației sunt $z_k=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$.

2.3 Elemente de calcul diferențial

Calculul diferențial opereazã cu noțiunea de funcție derivabilã.

Funcția f **este derivabilã** în punctual z_0 dacã $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f\left(z\right)-f\left(z_0\right)}{z-z_0}=f'\left(z_0\right)$ existã și este finitã.

O funcție derivabilã în toate punctele unei multimi se numește **funcție olomorfã** pe mulțimea respectivã

Definiția este analogul complex al definiției derivatei unei funcții reale. In legãturã cu derivabilitatea unei funcții într-un punct dat existã un rezultat important, Teorema Cauchy-Riemann

Teoremã (Cauchy-Riemann) Dacã funcția $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ este derivabilã în $z_0=x_0+iy_0$ atunci u şi v sunt derivabile în (x_0,y_0) şi derivatele lor satisfac condițiile (numite condițiile Cauchy-Riemann) $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\end{cases}$.

In cazul în care funcțiile u şi v au derivate parțiale <u>continue</u> în (x_0,y_0) şi acestea satisfac condițiile Cauchy-Riemann, funcția f este derivabilã în z_0.
In punctele în care f este derivabilã, derivata ei se calculeazã folosind formula

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Exercițiu : Sã se determine punctele în care funcția $f(z)=z^2+\bar{z}\cdot z$ este derivabilã şi sã se calculeze derivata ei în aceste puncte.

Funcția f se scrie $f(z)=f(x+iy)=(x+iy)^2+(x+iy)(x-iy)=2x^2+2xyi$. Rezultã $u(x,y)=2x^2$ şi $v(x,y)=2xy$. Cele douã funcții au derivate parțiale continue, deci condiția necesarã şi suficientã pentru ca f sã fie derivabilã în (x,y) este datã de condițiile Cauchy-Riemann.

$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$ conduc la $\begin{cases}4x=2x\\0=2y\end{cases}$ cu soluția $\begin{cases}x_0=0\\y_0=0\end{cases}$. Rezultã cã singurul punct în care f este derivabilã este $z_0=0+0i=0$. Derivata funcției este $f'(0)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0)+i\dfrac{\partial v}{\partial x}(0,0)=0+i0=0$.

Teorema este verificatã de toate funcțiile elementare definite în paragraful anterior în toate punctele domeniului de definiție. Rezultã cã aceste funcții sunt derivabile pe domeniul lor de definiție, adicã sunt olomorfe pe domeniul de definiție.

Pentru calculul derivatelor funcțiilor elementare se pot folosi regulile de derivare şi principalele derivate cunoscute din liceu pentru funcțiile reale.

Exercițiu : Sã se determine mulțimile pe care funcțiile urmãtoare sunt olomorfe şi sã se calculeze derivata lor :

1. $f(z)=1+3z+9z^5$; Funcția este definitã pe C, deci este olomorfã pe C, iar derivata este $f'(z)=3+9\cdot 5z^4=3+45z^4$

2. $f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$; Funcția este definitã pe $C-\{1\}$, deci este olomorfã pe $C-\{1\}$. Derivata ei este $f'(z)=\dfrac{(1+z)'(1-z)-(1-z)'(1+z)}{(1-z)^2}=\dfrac{1-z+1+z}{(1-z)^2}=\dfrac{2}{(1-z)^2}$

3. $f(z)=\dfrac{e^z-1}{e^z+1}$. Domeniul de definiție al lui f este mulțimea punctelor pentru care $e^z+1\neq 0$. Ecuația $e^z+1=0$ are soluțiile $z_k=(2k+1)\pi i$, deci $f:C-\{(2k+1)\pi i\ ,\ k\in Z\}$ şi este olomorfã pe

aceastaa mulțime. Derivata sa este

$$f'(z)=\frac{\left(e^z+1\right)'\left(e^z-1\right)-\left(e^z-1\right)'\left(e^z+1\right)}{\left(e^z-1\right)^2}=\frac{e^z\left(e^z-1\right)-e^z\left(e^z+1\right)}{\left(e^z-1\right)^2}=\frac{-2e^z}{\left(e^z-1\right)^2}.$$

2.4. Elemente de calcul integral

Funcțiile complexe $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ sunt în esență funcții definite pe o submulțime a lui R^2 cu valori în R^2. Pentru astfel de funcții se poate calcula integrala curbilinie de al doilea tip pe o curbã γ netedă pe proțiuni şi orientatã. De aceea integrala complexã este de fapt o integralã curbilinie "mascatã" de formalismul complex.

2.4.1. Integrala curbilinie complexã

Dacă $\gamma:[a,b]\to C,\ \gamma(t)=x(t)+iy(t)$ este o curbã netedã pe porțiuni (are tangentã în toate punctele sale, cu excepția unui num finit dintre ele) şi funcția $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ este continuã pe γ atunci integrala curbilinie complexã este definitã prin

$$\int_\gamma f(z)dz\overset{not}{=}\int_\gamma\left(u(x,y)+iv(x,y)\right)\left(dx+idy\right)=\int_\gamma\left(u(x,y)dx-v(x,y)dy\right)+i\int_\gamma\left(u(x,y)dy+v(x,y)dx\right).$$

In practicã se poate folosi direct urmãtoarea formulã

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b\left[u\left(x(t),y(t)\right)+iv\left(x(t),y(t)\right)\right]\cdot\left[x'(y)+iy'(t)\right]dt.$$

Exerciții : Sã se calculeze urmãtoarele integrale curbilinii complexe

1. $\int_\gamma \bar{z}dz$ pe curba $\gamma:[0,1]\to C,\gamma(t)=\left(t,t^2\right)$.

$$\int_\gamma \bar{z}dz=\int_\gamma(x-iy)(dx+idy)=\int_0^1\left(t-it^2\right)(1+i2t)dt=\int_0^1\left(t-it^2+i2t^2-i^2 2t^3\right)dt=$$

$$=\int_0^1\left(t+2t^3\right)dt+i\int_0^1 t^2dt=\left(\frac{t^2}{2}+2\frac{t^4}{4}+i\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{t=0}^{t=1}=1+i\frac{1}{3}$$

2. $\int_\gamma z^2dz$ pe $\gamma:[0,1]\to C,\ \gamma(t)=t+it^2$

$$\int_\gamma z^2dz=\int_\gamma\left(x^2-y^2+2xyi\right)(dx+idy)=\int_\gamma\left(x^2-y^2\right)dx-2xydy+i\int_\gamma 2xydx+\left(x^2+y^2\right)dy=$$

$$=\int_0^1(\left(t^2-t^4\right)1-2t^3 2t)dt+i\int_0^1\left(2t\cdot t^2\cdot 1+\left(t^2-t^4\right)2t\right)dt=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}-4\frac{t^5}{5}\right)\Big|_{t=0}^{t=1}+i\left(2\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Big|_{t=0}^{t=1}=-\frac{2}{3}+i\frac{19}{30}$$

2.4.2. Integrala definitã

Dacã funcția f este olomorfã pe un domeniu care conține curba γ atunci integrala curbilinie complexã a lui f pe γ nu depinde de expresia analiticã a lui γ ci numai de

extremitățile sale. In acest caz se poate construi o teorie a integralelor analogã cu teoria cunoscutã de la funcții reale.
Primitiva funcției f pe domeniul D este funcția $F : D \to C$, olomorfã pe D care satisface

$$F'(z) = f(z) \text{ pentru } \forall z \in D.$$

Dacã $f : D \to C$ este olomorfã pe D atunci, pentru orice $z_0 \in D$ funcția $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z) dz$ este o primitivã a lui f.
Dacã D este un domeniu simplu conex, $f : D \to C$ este olomorfã pe D, F este o primitivã a sa, atunci şi $z_1, z_2 \in D$ atunci

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Formula anterioarã este analogul complex al formulei Leibnitz-Newton de la funcții reale.
Pentru calculul primitivelor funcțiilor elementare se pot folosi formulele cunoscute din liceu.
De exemplu, o primitivã a funcției $f(z) = z^2$ este $F(z) = \dfrac{z^3}{3}$.
De asemenea, metodele de calcul pentru primitive (integrarea prin pãrți şi schimbarea de variabilã) pot fi folosite dupã modelul funcțiilor reale.
Exerciții : Sã se calculeze urmãtoarele integrale definite

1. $\int_0^{\pi i} e^z dz = e^z |_{z=0}^{z=\pi i} = e^{\pi i} - e^0 = \cos\pi + i\sin\pi - 1 = -2$

2. $\int_0^i z\sin z dz = \int_0^i z(-\cos z)' dz = -z\cos z |_{z=0}^{z=i} + \int_0^i \cos z dz = -i\cos i + \sin i = -i(\frac{e^{-1}+e^1}{2} + \frac{e^{-1}-e^1}{2i})$

3. $\int_0^i \frac{1+tgz}{\cos^2 z} dz = \int_0^i (1+tgz)(1+tgz)' dz = \frac{(1+tgz)^2}{2} |_{z=0}^{z=i} = \frac{(1+tgi)^2}{2} - \frac{1}{2}$

2.4.3. Integralele lui Cauchy

Integralele lui Cauchy sunt integrale pentru funcții cu expresia analiticã specialã.
Teoremã (Cauchy) Fie $f : D \to C$ o funcție olomorfã pe domeniul D şi continuã pe domeniul D reunit cu frontiera sa. Atunci f este indefinit derivabilã pe D şi derivata sa de ordinul n în punctul $z_0 \in D$ este datã de formula

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{FrD} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

Integralele din membrul drept al egalitãții de mai sus se numesc integralele lui Cauchy.
Formula este de obicei folositã pentru calculul integralelor, dar poate fi folositã şi pentru calculul derivatei de ordinul n. Se observã cã valoarea acestor derivate este obținutã doar cu ajutorul valorilor lui f pe frontiera domeniului.

Metoda de calcul

- se identificã numerele complexe z care anuleazã numitorul şi care sunt în interiorul domeniului
- se identificã funcția f şi numãrul n
- se aplicã formula de calcul

Exerciții : Sã se calculeze urmaatoarele integrale

1. $I_1 = \int\limits_{|z|=2} \frac{ch(iz)}{z^2+4z+3} dz$. Se descompune în factori numitorul şi se obține

$$I_1 = \int\limits_{|z|=2} \frac{ch(iz)}{(z+1)(z+3)} dz$$

Numitorul se anuleazã în $z_1 = -1$ şi $z_2 = -3$.
Deoarece $|z_1| = 1 < 2$ rezultã cã z_1 este în interiorul domeniului mãrginit de cercul $|z| = 2$.
Deoarece $|z_2| = 3 > 2$ rezultã cã z_2 este în exteriorul domeniului mãrginit de cercul $|z| = 2$.

Integrala se scrie $I_1 = \int\limits_{|z|=2} \frac{\frac{ch(iz)}{(z+3)}}{(z+1)} dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\frac{ch(iz)}{(z+3)}}{(z-(-1))} dz$. In aceastã situație $f(z) = \frac{ch(iz)}{z+3}$, $z_0 = -1$ şi $n+1 = 1$ deci $n = 0$.

Din teorema lui Cauchy rezultã $I_1 = 2\pi i \cdot f(-1) = 2\pi i \frac{ch(-i)}{2}$.

2. $I_2 = \int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{(z^2-6z)} dz$. In acest caz numitorul se anuleazã în punctele $z_1 = 0$ şi $z_2 = 6$.

Deoarece $|z_1 - 2| = 2 < 5$ şi $|z_2 - 2| = 4 < 5$ rezultã cã amândouã punctele sunt în interiorul curbei $|z-2| = 5$. Formula din teoremã nu se poate aplica direct, de aceea se deacompune integrala şi se plicã formula pentru fiecare termen.

$$I_2 = \int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{6}\left(\frac{1}{z-6} - \frac{1}{z}\right) dz = \frac{1}{6} \int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z-6} dz - \frac{1}{6} \int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z} dz .$$

Pentru prima integralã $f(z) = e^{z^2}$, $z_0 = 6$ şi $n = 0$ iar pentru a doua integralã $f(z) = e^{z^2}$, $z_0 = 0$ şi $n = 1$.

$$I_2 = 2\pi i\left(\frac{1}{6}e^{36} - \frac{1}{6}e^0\right)$$

2.4.4. Teorema reziduurilor şi aplicații

Prin teorema reziduurilor sunt precizate metode de calcul mai simple prntru unele integrale complexe. Aceastã teoremã poate fi folositã şi în calculul unor integrale reale.

Teorema se bazeazã pe calculul ”reziduurilor ” ataşate punctelor în care funcția de integrat nu este definitã, aşa numitele puncte ”singulare ” identificate şi clasificate cu ajutorul dezvoltãrii în serie a funcției de integrat.

- **Seriile Taylor** au forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + ... + a_n(z-z_0)^n + ...$

Domeniul de convergență al seriei este discul $D(z_0,R)$, unde raza de convergență R se calculează prin $R=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$

Teoremă : Dacă funcția f este olomorfă pe discul $D(z_0,r)$ atunci pentru orice $z\in D(z_0,r)$ are loc relația

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+...\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+...$$

Aceasta este **dezvoltarea funcției în serie Taylor.**

Următoarele dezvoltări în serie Taylor sunt foarte importante:

a) $e^z=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+...+\frac{1}{n!}z^n+...$ pentru orice $z\in C$

b) $\sin z=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+...$ pentru orice $z\in C$

c) $\cos z=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+...$ pentru orice $z\in C$

d) $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+...+z^n+...$ pentru orice $z\in C$ cu $|z|<1$

Exerciții: Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctelor indicate următoarele funcții:

1. $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$**.** Se scrie $f(z)=\frac{1}{1-(-z^2)}$ şi se aplică dezvoltarea d).

Rezultă $f(z)=1-z^2+z^4-z^6+...$, egalitate ce are loc pentru orice z cu proprietatea că $|z^2|<1$.

2. $f(z)=shz$. Deoarece $shz=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$ rezultă $f(z)=\frac{\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}...\right)+\left(1-\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+...\right)}{2}$,

adică $f(z)=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+...$. Egaliatea are loc pentru orice $z\in C$

3. $f(z)=\sin(2z+1)$. Se aplică dezvoltarea b). Rezultă $f(z)=\frac{(2z+1)}{1!}-\frac{(2z+1)^3}{3!}+\frac{(2z+1)^5}{5!}-....$

4. $f(z)=\frac{1}{3z+1}$. Se scrie $f=\frac{1}{1-(-3z)}=1-3z+3^2z^2-3^3z^3+...$. Egalitatea are loc pentru orice z cu proprietatea că $|z|<1/3$.

- **Seriile Laurent** au forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=...+a_{-n}(z-z_0)^{-n}+...+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)^2+...+a_n(z-z_0)^n+...$$

Expresia $\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+...+\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+...$ se numeşte **partea principală** a seriei.f

Expresia $a_0+a_1(z-z_0)+...+a_n(z-z_0)^n+...$ este **partea întreagă** a seriei.

Domeniul de convergență al seriei este coroana circulară $U(z_0,r,R)=\{z\in C \mid r<|z-z_0|<R\}$ unde $r=\overline{\lim_{n\to-\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ şi $R=\dfrac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Teoremă : Dacă funcția f este olomorfă pe o coroană circulară $U(z_0,r,R)$, atunci f este suma seriei Laurent $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(z-z_0)^n$, unde $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ şi γ este un cerc centrat în z_0 conținut în coroana U.

Pentru realizarea dezvoltării în serie Laurent se calculează coeficienții a_n folosind formula din teorema anterioară (ceea ce e dificil) sau se folosesc dezvoltări (în serie Taylor) cunoscute deja

Exerciții : Să se dezvolte în serie Laurent, în vecinătatea lui $z_0=0$ următoarele funcții :

1. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$. Folosind dezvoltarea funcției $\sin z$ obținem $f(z)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{z}{3!}+\dfrac{z^3}{5!}-\dfrac{z^5}{7!}+...$
2. $g(z)=e^{1/z}$. Din dezvoltarea în serie Taylor a lui e^z rezultă
$g(z)=1+\dfrac{1}{1!z}+\dfrac{1}{2!z^2}+...+\dfrac{1}{n!z^n}+....$
3. $h(z)=z^4\cos\dfrac{1}{z}$. Avem $h(z)=z^4\left(1-\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{4!z^4}-\dfrac{1}{6!z^6}+...\right)=z^4-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{6!z^2}+...$

- **Un punct z_0 se numeşte punct singular izolat pentru funcția f dacă f este olomorfă pe un disc centrat în z_0, dar nu şi în z_0.**

Spre exemplu $z=2$ este punct singular izolat pentru $f(z)=\dfrac{3}{z-2}$.
De obicei funcția f nici nu e definită în punctele sale singulare.
Pentru a clasifica punctele singulare considerăm dezvoltarea lui f în serie Laurent în jurul lui z_0

$$f(z)=...+\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+...+\frac{b_1}{(z-z_0)}+a_0+a_1(z-z_0)+...+a_n(z-z_0)^n+...$$

Punctele singulare se clasifică astfel :

- **punct eliminabil**, dacă $b_n=0$ pentru orice $n\in N$. In această situație $\lim_{z\to z_0} f(z)$ există şi e finită.
- **pol de ordin** n dacă $b_n\neq 0$ şi $b_p=0$ pentru orice $p>n$.

In acest caz $f(z)=\dfrac{b_n}{(z-z_0)^n}+...\dfrac{b_1}{(z-z_0)}+a_0+...$ şi $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)=b_n\neq 0$

-**esențial**, dacă există o infinitate de termeni în partea principală a dezvoltării.

Exemple : 1. $z=1$ este punct singular eliminabil pentru $f(z)=\frac{e^z-1}{z}$ deoarece f are dezvoltarea $f(z)=\frac{1+z/1!+z^2/2!+...+z^n/n!+...-1}{z}=\frac{1}{1!}+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+...+\frac{z^{n-1}}{n!}+...$, deci nu există termeni la partea principală a dezvoltării.

2. $z_1=-1$ este pol de ordinul 2 şi $z_2=1$ este pol de ordinul 1 pentru $f(z)=\frac{\sin z}{(z^3+z^2-z-1)}$ deoarece $f(z)=\frac{\sin z}{(x-1)(x+1)^2}$ şi $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{\sin z}{(x+1)^2}=\frac{\sin 1}{4}\neq 0$ şi

$\lim_{z\to -1}(z+1)^2 f(z)=\lim_{z\to -1}\frac{\sin z}{(x-1)}=\frac{\sin 1}{2}\neq 0$.

In majoritatea cazurilor ordinul polului este exponentul cu care expresia $(z-z_0)$ apare la numitorul funcției studiate.

3. $z=0$ este punct singular esențial pentru $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ pentru că f are dezvoltarea $f(z)=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{n!z^n}+...$, deci în partea principală a dezvoltării apare o infinitate de termini.

- **Reziduul funcției f în punctul singular izolat z_0 este** $\operatorname{Rez}_f(z_0)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}f(z)dz$ **.**

Se poate arăta că $\operatorname{Rez}_f(z_0)=b_1$, unde b_1 este coeficientul fracției $\frac{1}{(z-z_0)}$ din dezvoltarea în serie Laurent a funcției f în jurul lui z_0.

Practic el se calculează folosind urmăroarele formule:

- dacă z_0 este punct singular eliminabil atunci $\operatorname{Rez}_f(z_0)=0$.
- Dacă z_0 este pol de prdinul n atunci $\operatorname{Rez}_f(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)}\ |(z_0)$

  In această formula exponentul $(n-1)$ arată că expresia din paranteză se derivează de $n-1$ ori iar simbolul $|(z_0)$ arată că expresia care îl precede se calculează în $z=z_0$.

  Formula este uşor de folosit în cazul $n=1$ şi $n=2$. Dacă $n>2$ e preferabil saa se realizeze dezvoltarea în serie Laurent şi să se identifice coeficientul b_1.

  Dacă z_0 este pol de ordinul I atunci $\operatorname{Rez}_f(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

  Dacă z_0 este pol de ordinul 2 atunci $\operatorname{Rez}_f(z_0)=\left[(z-z_0)^2 f(z)\right]'\ |(z_0)$
- Dacă z_0 este punct singular esențial atunci se foloseşte $\operatorname{Rez}_f(z_0)=b_1$.

Exerciții : Să se calculeze reziduurile funcțiilor următoare în punctele indicate.

1. $f(z)=\frac{e^z-1}{z}$ în $z_0=0$. Deoarece $z_0=0$ este punct singular eliminabil rezultă $\operatorname{Rez}_f(0)=0$

2. $f(z)=\dfrac{\sin z}{(x-1)(x+1)^2}$ în $z_1=-1$ şi în $z_2=1$.

$z_1=-1$ este pol de ordinul 2 deci

$$\operatorname{Re}z_f(-1)=\left[(z+1)^2\frac{\sin z}{(z-1)(z+1)^2}\right]'|(-1)=\left(\frac{\sin z}{(z-1)}\right)'|(-1)=\frac{(z-1)\cos z-\sin z}{(z-1)^2}|(-1)=\frac{\sin 1-2\cos 1}{4}$$

$z_2=1$ este pol de ordinul 1 deci $\operatorname{Re}z_f(1)=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\dfrac{\sin z}{(z-1)(z+1)^2}=\dfrac{\sin 1}{4}$

3. $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ în $z_0=0$. Deoarece $f(z)=1+\dfrac{1}{1!z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{n!z^n}+...$ rezultã cã $z_0=0$ este punct singular esenţial şi $Rez_f(z_0)=\dfrac{1}{1!}=1$.

Teorema reziduurilor: Dacã $f:D\to C$ este o funcţie olomorfã pe D, iar $\gamma\subset D$ este o curbã simplã, închisã, netedã pe porţiuni, care are în interiorul ei un numãr finit de puncte singulare $z_1,z_2,...,z_n$ ale lui f, atunci

$$\int_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}z_f(z_k)$$

Exerciţiu: Sã se calculeze $I=\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)(z^2+1)}$.

Numitorul fracţiei se anuleazã în punctele $z_1=1$, $z_2=i$ şi $z_3=-i$

Deoarece $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1<2$ rezultã cã cele trei puncte sunt în interiorul curbei pe care se calculeazã integrala.

$z_1=1$ este pol de ordinul 1 şi $\operatorname{Re}z_f(1)=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\dfrac{1}{(z-1)(z^2+1)}=\dfrac{1}{2}$

$z_2=i$ este pol de ordinul 1 şi

$$\operatorname{Re}z_f(i)=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-1)(z^2+1)}=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)(z+i)}=\frac{i}{(i-1)2i}=\frac{i+1}{-4i}=\frac{i-1}{4}$$

$z_3=-i$ este pol de ordinul 3 şi

$$\operatorname{Re}z_f(-i)=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{(z-1)(z^2+1)}=\lim_{z\to -i}\frac{1}{(z-1)(z-i)}=\frac{i}{(i+1)2i}=\frac{i-1}{-4i}=\frac{i+1}{4}$$

Atunci $I=2\pi i\left(\operatorname{Re}z_f(z_1)+\operatorname{Re}z_f(z_2)+\operatorname{Re}z_f(z_3)\right)=2\pi i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i-1}{4}+\dfrac{i+1}{4}\right)=(1+2i)\pi i$.

Existã trei clase de integrale reale calculabile cu reziduuri :

I) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$**, unde** P **şi** Q **sunt polinoame, cu** $grad(Q) \geq grad(P)+2$ **iar** Q **nu are rãdãcini reale.**

Dacã $z_1, z_2, ..., z_k$ sunt polii lui $\frac{P(z)}{Q(z)}$ ce au partea imaginarã pozitivã, atunci

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{p=1}^{k} \operatorname{Re} z_{\frac{P}{Q}}(z_p)$.

II) $\int\limits_{0}^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$. Pentru calcul se folosesc formulele $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ şi $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ şi se noteazã $z = e^{ix}$. Atunci $x = \frac{1}{i}\ln z$ şi $dx = \frac{1}{iz}dz$. Avem şi $|e^{ix}| = |z| = 1$.

Integrala devine

$\int\limits_{0}^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$ iar inegrala complexã se calculeazã cu teorema reziduurilor.

III $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(\mu x)dx$ **şi** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(\mu x)dx$**, unde** $R(x)$ **este o funcție rațională şi** $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$**.**

Cele douã integrale se calculeazã înpreunã

2. ANALIZA FOURIER

Analiza Fourier este un instrument important în studiul semnalelor cu grad mare de complexitate (semnale sonore, semnale electrice, unde seismice, etc.)

Problemele fundamentale ce se rezolvã cu ajutorul dezvoltãrii în serie Fourier sunt

- **analiza unui semnal periodic**, adicã stabilirea semnalelor armonice fundamentale care îl compun. Din punct de vedere mathematic aceasta înseamnã determinarea coeficienților Fourier în seria corespunzãtoare funcției ce descrie semnalul.
- **sinteza unui semnal periodic**, adicã stabilirea combinației de armonici fundamentale prin suprapunerea cãrora se obține semnalul dorit. Din punct de vedere mathematic aceasta înseamnã studiul convergenței seriei Fourier atașatã armonicilor fundamentale considerate

Tratarea semnalelor neperiodice se face cu ajutorul integralei şi a transformatei Fourier ataşatã funcției ce descrie semnalul.

Pentru prelucrarea numericã a semnalelor se foloseşte transformata Fourier discretã şi varianta ei mai economicã din punct de vedere al timpului de lucru, transformata Fourier rapidã.

In acest capitol sunt prezentate rezultate de bazã legate de aceste obiecte şi tehnici matematice

3.1.Serii Fourier

O funcție $f:D\to C$ este periodicã cu perioada T dacã $f(x+T)=f(x)$ pentru orice $x\in A$

Exemple :

1. Funcțiile $f,g:R\to R$, $f(x)=\sin\omega x$ şi $g(x)=\cos\omega x$ sunt periodice cu perioada $2\pi/\omega$.
2. Funcția armonicã $f:R\to C,\ f(t)=e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t$ este periodicã cu perioada $2\pi/\omega$.
3. Suma unor funcții periodice nu este neapãrat o funcție periodicã. Funcția $f(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k(\cos\omega_k t+i\sin\omega_k t)$ este periodicã doar dacã raportul $\frac{\omega_i}{\omega_j}$ este numãr rațional pentru orice $i,j\in\{1,2,...,n\}$. Dacã mãcar unul dintre rapoarte este irațional funcția obținutã este foarte complicate.

Se considerã mulțimea de funcții $L^2([-l,l])=\{f:[-l,l]\to R\ \mid\ f^2\ este\ \text{int}egrabila\}$.

Teoremã : Orice funcție $f \in L^2([-l,l])$ este suma unei serii trigonometrice , adicã existã numerele reale $a_0, a_1, \ldots$ şi $b_1, b_2, \ldots$ astfel încât

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right) \text{ pentru orice } x \in [-l,l]. \quad (1)$$

Coeficienții seriei sunt

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \quad (2)$$

Seria (1), cu coeficienții (2) este seria Fourier asociatã fucnției f pe intervalul $[-l,l]$.

In punctele în care f este continuã are loc relația

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

Observații: 1. Dacã funcția f este parã atunci $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$ şi $b_n = 0$, $\forall n \in N$

2. Dacã funcția f este imparã atunci $a_n = 0$, $\forall n \in N$ şi $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$.

Exemple: Sã se dezvolte în serie Fourier urmãtoarele funcții, pe intervalele indicate:

1. $f : [-\pi,\pi] \to C,\ f(x) = x$.

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$. Folosind formula (2) rezultã $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx = 0$.

Aceste calcule pot fi evitate observând cã f este o funcție imparã şi folosind observația 1.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^n \sin\frac{n\pi x}{\pi}\,dx = \frac{2(-1)^n}{n}.$$

Deci $f(x) = x = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0\cdot\cos n\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n}\cdot\sin n\pi = 2\left(\sin x - \sin\frac{2x}{2} + \sin\frac{3x}{3} - \sin\frac{4x}{4} + \ldots\right)$.

Deoarece funcția este continuã pe $[-\pi,\pi]$, egalitatea are loc pentru orice $x \in [-\pi,\pi]$

2. $f(x) = \begin{cases} x, & daca\ \ 0 \le x \le \pi \\ 0, & daca\ -\pi \le x < 0 \end{cases}$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$; $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi}{\pi}\,dx = \int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$;

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n\pi\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Rezultã cã

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{-2}{\pi}\cos x + \sin x\right) - \sin 2x + \left(-\frac{2}{9\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots$$

Pentru $x=0$ din formula de mai sus obținem $0=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{(2n+1)^2}+...\right]$,

adicã

$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{(2n+1)^2}+...$, ceea ce conduce la o aproximare a lui $\frac{\pi^2}{8}$. In multe ocazii dezvoltãrile în serie sunt folosite pentru aproximarea unor numere reale.

Observație : Deoarece $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$**, rezultã cã funcția** f **poate fi aproximatã folosind primii termeni ai seriei Fourier ataşate, restul termenilor avãnd o contrbuție redusã. De obicei se folosesc primii 32 de termeni.**

Seria (1), cu coeficienții Fourier (2) poate fi scrisã sub formã complexã astfel :

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{l}},$$

unde $c_k=\frac{1}{2}(a_k-ib_k)$**,** $c_{-k}=\frac{1}{2}(a_k+ib_k)$ **pentru** $k>0$ **şi** $c_0=\frac{a_0}{2}$

Forma spectralã a seriei (1) este

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}+\phi_k\right)$$

unde $A_k=\sqrt{a_k^{\ 2}+b_k^{\ 2}}$ **şi** ϕ_k **este arcul pentru care** $\cos\phi_k=\frac{a_k}{\sqrt{a_k^{\ 2}+b_k^{\ 2}}}$ **şi** $\sin\phi_k=\frac{b_k}{\sqrt{a_k^{\ 2}+b_k^{\ 2}}}$.

A_k **se numeşte amplitudinea armonicii de ordinul** k **iar** ϕ_k **este defazajul acestei armonici.**

3.2. Formula integralã Fourier

O funcție $f:R\to K$ (unde $K=R$ sau $K=C$) este **derivabilã pe porțiuni** dacã în orice interval $[a,b]$ existã o mulțime finitã de puncte, $x_1,x_2,...,x_n$ astfel încat

- f este derivabilã pe $[a,b]$ cu excepția punctelor $x_1,x_2,..,x_n$
- în fiecare din punctele $x_1,x_2,..,x_n$ funcțiile f şi f' au limite laterale.

Teoremã (formula integralã Fourier): Dacã $f:R\to K$ **este o funcție derivabilã pe porțiuni şi absolut integrabilã pe** R **(adicã integrala improprie** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **este convergentã, atunci are loc relația**

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\lambda(t-\tau)\,d\tau\right)d\lambda. \qquad \textbf{(3)}$$

Observații : 1. Formula (3) poate fi scrisã sub următoarele forme :

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{i\lambda(t-\tau)}d\tau\right)d\lambda$$

sau $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\lambda\tau}d\tau\right)d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\lambda\tau}d\tau\right)d\lambda$.

2. Dacã f este o funcție parã atunci formula (3) devine $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\lambda t\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\lambda\tau\,d\tau\right)d\lambda$

3. Dacã f este o funcție imparã atunci formula (3) devine $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda t\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\lambda\tau\,d\tau\right)d\lambda$

3.3. Transformata Fourier (integralã)

Transformata Fourier integralã a funcției f satisfaacând condițiile din teorema anterioarã este

$$F(f):R\to K,\ F(f)(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt.$$

Funcția F se numeşte imaginea lui f prin operatorul de transformare Fourier iar f se numeşte originalul lui F. Intre f şi F existã următoarele formule de legãturã :

Caz general	$F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt$	$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$
Pentru functii pare	$F(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt$	$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F(\lambda)\cos\lambda t\,d\lambda$
Pentru funcții impare	$F(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt$	$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F(\lambda)\sin\lambda t\,d\lambda$

Principalele proprietãți ale transformatei Fourier sunt prezentate în tabelul următor :

Denumirea proprietãții	Formula
Liniaritata	$F(\alpha f+\beta g)=\alpha F(f)+\beta F(g)$
Omotetia	$F(f(at))(\lambda)=\frac{1}{\lvert a\rvert}F(f)\left(\frac{\lambda}{a}\right)$
Translația	$F(f(t+a))(\lambda)=e^{i\lambda a}F(f)(\lambda)$
Derivarea originalului	$F\left(f^{(n)}\right)(\lambda)=(i\lambda)^n F(f)(\lambda)$

Derivarea imaginii	$\left(F(f)\right)^{(n)}(\lambda)=i^{n+2}F\left(t^n f(t)\right)(\lambda)$
Produsul de convoluție	$F(f*g)(\lambda)=\sqrt{2\pi}F(\lambda)G(\lambda)$

In ulima proprietate produsul de convoluție a douã funcții f şi g este definit prin

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau .$$

Cu ajutorul transformatei Fourier se pot rezolva unele ecuații integrale, numite ecuații de tip Fourier :

a) Ecuația $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda t}dt=g(\lambda),\ \lambda\in R$ are soluția $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$, $t\in R$

b) Ecuația $\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt=g(\lambda),\ \lambda\in R$ are soluția $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} g(\lambda)\cos\lambda t d\lambda$, $t\in R$

c) Ecuația $\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt=g(\lambda),\ \lambda\in R$ are soluția $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} g(\lambda)\sin\lambda t d\lambda$, $t\in R$

Exerciții: Sã se resolve urmãtoarele ecuații funcționale (cu necunoscuta f):

1. $\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\lambda t dt=e^{-\lambda}$**.** Notând $g(\lambda)=e^{-\lambda}$ şi aplicând formula c) obținem $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda}\sin\lambda t d\lambda=\frac{2t}{\pi\left(t^2+1\right)}$ (se integreazã de douã ori prin pãrți)

2. $\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\lambda t dt=\frac{1}{\lambda^2+1}$. Notând $g(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2+1}$ şi folosind fromula b) obținem $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2+1}\cos\lambda t dt$. Aceastã integralã se calculeazã folosind teorema reziduurilor (de la funcții complexe). Se noteazã $g(z)=\frac{e^{itz}}{1+z^2}dz$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itz}}{1+z^2}=2\pi i\cdot \operatorname{Re}z_g(i)=2\pi i\cdot\lim_{z\to i}\frac{e^{itz}}{\left(1+z^2\right)}(z-i)=2\pi i\cdot\lim_{z\to i}\frac{e^{itz}}{(z+i)}=2\pi i\frac{e^{-t}}{2i}=\frac{\pi}{e^t} .$$

Din $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itz}}{1+z^2}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tz}{1+z^2}dz+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin tz}{1+z^2}dz=\frac{\pi}{e^t}+0\cdot i$ rezultã $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tz}{1+z^2}dz=\frac{\pi}{e^t}$, deci $f(t)=\frac{1}{e^t}$

3.4. Transformata Fourier discretã

Aceastã transformatã se foloseşte pentru analizarea unor semnale discrete, adicã ale unor funcții x definite pe mulțimea numerelor întregi. Valoarea $x(n)$ poate fi interpretatã ca rezultat al unor mãsurãtori realizate la momentul de timp n .

Fie N un numãr natural dat şi $x : Z \to C$ o funcție periodicã cu perioada N, adicã $x(n+N) = x(n)$ pentru orice numãr natural n. Transformata Fourier discretã a funției x este

$$X : Z \to C,\ X(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left(\cos\frac{2\pi mn}{N} - i\sin\frac{2\pi mn}{N}\right). \qquad \textbf{(4)}$$

Analogia cu transformata Fourier integralã este evidentã.

Observații : 1. Funcția X este şi ea periodicã de perioadã N, prin urmare atât x cât şi X sunt perfect determinate dacã se cunosc valorile lor în punctele $1,2,...,N$.
2. In practicã semnalele nu sunt periodice, dar masurãtorile se realizeazã într-un interval finit de timp $[0, N]$. Pentru a folosi transformata Fourier discretã se considerã semnalul $x : \{1,2,...,N\} \to C$ prelungit prin periodicitate la mulțimea Z. Adicã $x(n+kN) = x(n)$ pentru orice $k \in Z$

Transformata Fourier discretã inversã a semnalului $X : Z \to C$, periodic cu perioada N este

$$x : Z \to C,\ x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} X(m)\left(\cos\frac{2\pi mn}{N} + i\sin\frac{2\pi mn}{N}\right). \qquad (5)$$

Formula (4) permite descompunerea semnalului discret într-o sumă de semnale discrete fundamentale iar formula (5) reconstruieşte un semnal discret atucni când se cunosc semnalele fundamentale care îl compun.

Exercițiu : Sã se calculeze transformata Fourier discretã a semnalului $x(n) = a^n$, $a > 0$ definit pe $\{0,1,...,N-1\}$ şi prelungit prin continuitate pe Z.

$$X(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} a^n \cdot \left(\cos\frac{2\pi mn}{N} - i\sin\frac{2\pi mn}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(aw^{-m}\right)^n = \frac{1-a^N w^{-mN}}{1-aw^{-m}},$$ pentru

$m \in \{1,2,...,N-1\}$ şi dacã $w^m - a \neq 0$.
Dacã $w^m = a$ atunci se poate arãta cã $X(m) = 1$.
Pentru $m = 0$ se obține $X(0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} w^0 = 1$

3.5. Transformata Fourier rapidã

Transformata Fourier rapidã este o variantă a transformãrii Fourier discrete, caz în care numãrul de operații aritmetice efectuat pentru a calcula expresiile din formulele (4) şi (5) este minim.

Algoritmul " Fast Fourier transform " (transformata Fourier rapidã) a fost propus de J. W. Cooley şi J. W. Tuckey în 1965. El este acum folosit cu predilecție pentru calcului transformatei Fourier discrete din acuza economiei de timp de calcul.

Formulele (4) şi (5) se pot scrie sub formã complexã astfel :

$$X(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, w^{-mn} \qquad (4')$$

$$x(n)=\sum_{m=0}^{\infty} X(m)\, w^{mn} \qquad (5')$$

unde $w=e^{\frac{2\pi i}{N}}$ este un numãr complex cu modulul egal cu 1.

Formulele (4') şi (5') necesitã realizarea a N^2 înmulțiri de numere complexe, deoarece m şi n iau toate valorile din $\{0,1,2,...,N-1\}$.

Folosind numere naturale de forma $N=2^k$ şi un procedeu special de calcul se realizeazã $N\log_2 N = k\cdot 2^k$ înmulțiri în loc de 2^{2k} înmulțiri. Aceastã metodã produce o reducere semnificativã a volumului de calcul. Spre exemplu, pentru $N=2^5=32$, în mod normal ar trebui executate $32^2=1024$ înmulțiri, în timp ce transformata Fourier rapidã necesitã doar 160 de înmulțiri.

Calculul transformatelor Fourier discrete, chiar in varianta lor rapidã, nu poate fi imaginat fãrã ajutorul unor maşini performante de calcul.

4. Transformata Z

Transformata Z este analogul discret al transformatei Laplace.
Ea se foloseşte pentru analiza semnalelor discrete neperiodice.
Principala aplicație a transformatei Z este rezolvarea unor ecuații (algebrice) recurente.

4.1. Transformata Z directã

O funcție $f: Z \to C$ va fi identificatã cu şirul valorilor sale $(f_n)_{n\in Z}$.
Un şir $(f_n)_{n\in Z}$ se numeşte şir original sau semnal discret dacã îndeplineşte urmãtoarele condiții

- $f_n = 0$ pentru $n<0$
- existã $c>0$ şi $a\geq 0$ astfel încât $|f_n| \leq c\cdot a^n$ pentru orice $n>0$

Mulțimea şirurilor admisibile se noteazã Q' şi $(f_n)\in Q'$ aratã cã (f_n) este un şir original.
Cu şiruri original se pot face adunãri, înmulțiri cu scalari şi produse de convoluție.
Produsul de convoluție a douã semnal discrete (f_n) şi (g_n) este şirul (h_n) unde

$$h_n=\begin{cases} 0 & ,\ daca\ n<0 \\ \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} & ,\ daca\ n>0 \end{cases}.$$

Existã douã semnale discrete fundamentale :

- şirul treaptã unitate $\sigma_n=\begin{cases} 0\ , & n<0 \\ 1\ , & n\geq 0 \end{cases}$

- şirul semnal impuls la momentul k , $\delta_{kn} = \begin{cases} 1 \ , \ n = k \\ 0 \ , \ n \neq k \end{cases}$

Fie (f_n) un şir admisibil şi $E_a = \{z \in C \mid |z| > a\}$ (aici a este numărul ce apare în definiția şirului admisibil.Se numeşte transformata (în) Z a acestui şir funcția

$$Z(f_n): E_a \to C \ , \ Z(f_n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \ .$$

Principalele proprietăţi ale transformatei Z sunt prezentate în tabelul următor :

Denumirea	Formula
Teorema întârzierii (translația la dreapta)	$Z(f_{n-k})(z) = z^{-k} Z(f_n)$
Teorema depăşirii (translația la stânga)	$Z(f_{n+k}) = z^k \left(Z(f_n)(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f_n z^{-n} \right)$
Teorema amortizării	$Z\left(f_n e^{-an}\right)(z) = Z(f_n)\left(za^n\right)$
Imaginea diferenței	$Z(f_{n+1} - f_n)(z) = (z-1) Z(f_n)(z) - f_0 \cdot z$
Imaginea sumei	$Z\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)(z) = \frac{z}{z-1} Z(f_n)(z)$
Derivarea imaginii	$Z'(f_n)(z) = -\frac{1}{z} Z(nf_n)(z)$
Imaginea produsului de convoluție	$Z(f_n * g_n) = Z(f_n) \cdot Z(g_n)$

Ca şi în cazul transformatei Laplace este utilă cunoaşterea transformatei Z pentru semnalele discrete uzuale. Cele mai importante valori sunt prezentate mai jos :

Semnalul discret (f_n)	Transformata Z $F(z) = Z(f_n)(z)$	Domeniul de definiție al lui F
δ_k	z^k	C
$\sigma_n = 1$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\| > 1$
a^{n-1}	$\frac{1}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
na^{n-1}	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$(n-1)a^{n-2}$	$\frac{1}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{(n-1)!} a^{n-k+1}$	$\frac{1}{(z-a)^k}$	$\|z\| > \|a\|$

$\sin an$	$\dfrac{z\sin a}{z^2-2z\cos a+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$\cos an$	$\dfrac{z(z-\cos a)}{z^2-2z\cos a+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$sh(an)$	$\dfrac{z\cdot sh(a)}{z^2-2z\cdot ch(a)+1}$	$\lvert z\rvert>\lvert e^a\rvert$
$ch(an)$	$\dfrac{z(z-ch(a))}{z^2-2z\cdot ch(a)+1}$	$\lvert z\rvert>\lvert e^a\rvert$
$\dfrac{1}{n!}$	$e^{\frac{1}{z}}$	$z\neq 0$

Exemplu : Sã se calculeze transformata Z a şirului $(n^2)_{n\geq 0}$

Se aplicã teorema de derivare a imaginii pentru şirul $f_n = n$.

$$Z(n^2)(z)=Z(n\cdot n)(z)=-z\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)'=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

4.2. Transformata Z inversã

Transformata Z inversã a funcției $F:E_a\to C$ este şirul definit prin

$$f_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)z^{n-1}dz$$

unde γ este o curbã închisã ce conține toate punctele singulare ale funcției F .

Deoarece acest calcul poate fi complicat, dacã $F(z)$ este o fracție, ea se descompune în fracții simple şi se foloseşte tabelul anterior.

Exemplu : Sã se determine transformata Z inversã a funcției $F(z)=\dfrac{z(z^2-5)}{(z-3)(z-1)^2}$ **.**

Se descompune F în fracții simple $F(z)=z\left(\dfrac{1}{z-3}+\dfrac{2}{(z-1)^2}\right)$. Folosind tabelul transformatei Z rezultã $f_n=3^n+2\cdot n\cdot 2^{n-1}=3^n+n\cdot 2^n$.

4.3. Rezolvarea ecuațiilor recurente liniare cu ajutorul transformatei Z

Tehnica rezolvãrii acestor ecuații este similarã cu cea aplicatã pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale liniare cu ajutorul transformatei Laplace :

- se obține ecuația operaționala aplicând transformata Z în ambii membrii ai ecuației
- se rezolvã ecuația operationalã şi se obține imaginea $F(z)$
- se aplicã transformata Z inversã şi se obține şirul sãu original, care este soluția ecuației recurente.

Exemplu : Sã se determine şirul $\left(y_n\right)_{n\in N}$ care satisface relațiile

$y_{n+2}-4y_{n+1}+4y_n=3^n$, $y_0=0,\ y_1=2$

Ecuația operaționalã este $Z\left(y_{n+2}-4y_{n+1}+4y_n\right)(z)=Z\left(3^n\right)(z)$ adicã

$Z\left(y_{n+2}\right)(z)-4Z\left(y_{n+1}\right)(z)+4Z\left(y_n\right)(z)=\dfrac{z}{z-3}$ adicã

$z^2\left[Y(z)-y_0-y_1z^{-1}\right]-4z\left[Y(z)-y_0\right]+4Y(z)=\dfrac{z}{z-3}$, din care rezultã $Y(z)=\dfrac{2z^2-5z}{(z-3)(z-2)^2}$. Pentru a calcula originalul lui $Y(z)$ se descompune acesta în fracții simple.

$Y(z)=3\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z-2}+2\dfrac{1}{(z-2)^2}$. Folosind tabelul transformatei Z obținem

$y_n=3\cdot3^{n-1}-2^{n-1}+2(n-1)2^{n-2}$

BIBLIOGRAFIE

1. Bãlan T., Sterbeți C :*Analizã complexã*, Editura MTM, Craiova, 2003
2. Bãlan T., Sterbeți C :*Analizã Fourier*, Editura SITECH, Craiova, 2001
3. Bânzaru T., Lãzureanu C. :*Analizã matematicã şi ecuații diferențiale*, Editura Politehnica, Timişoara, 1997
4. Brânzãnescu V., Stãnãşilã O. :*Matematici Speciale, teorie, exemple, aplicații*. Editura All, Bucureşti, 1998
5. Constantinescu D. :*Equations differentielles*, Editura Universitaria, Craiova, 2003
6. Corduneanu A. :*Ecuații diferențiale-aplicații în electrotehnocã*, Editura Facla, Timisoara, 1981
7. Demidovitch B : *Recqueil d'exercices et problemes d'analyse mathematique*, Editura Mir, Moscova, 1972
8. Kessler P. : *Curs de matematici superioare*, Reprografia Univ. Craiova, 1976
9. Nãslãu P, Negrea R., Cãdaru L :*Matematici asistate de calculator*, Editura Politehnica, Timişoara,2005
10. Predoi M : *Analizã matematicã*, Editura Universitaria, Craiova, 1994
11. Teodorescu N., Olariu V. : *Ecuații diferențiale şi cu derivate parțiale*, Editura Tehnicã, Bucureşti, 1979
12. Tudosie C : *Probleme de ecuații diferențiale,* Editura Dacia, 1990
13. Turcitu G., Sterbeti C. : *Analizã complexã şi ecuații diferențiale*, Editura Radical, Craiova, 2001