7. INTEGRALA IMPROPRIE.

7.3. Exerciţii propuse

Exerciţiul 7.3.1. Să se studieze natura următoarelor integrale improprii şi să se determine valorile acestora, în caz de convergenţă:

a) $\int_0^\infty e^{-ax}\cdot\cos bx dx, a>0, b\in\mathbb{R}$ b) $\int_0^{3/\pi}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$

c) $\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^n dx, n\in\mathbb{N}$ d) $\int_0^\infty e^{-x^2}\cdot x^{2n+1}dx, n\in\mathbb{N}$

e) $\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{x^2+x+1}$ f) $\int_0^\infty\frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}dx$

g) $\int_0^{\pi/2}\ln\cos xdx$.

R. a) $\frac{a}{a^2+b^2}$; b) divergentă, deoarece nu există $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\cos\frac{1}{x}$;

c) notând integrala cu I_n, se obţine, integrând prin părţi, $I_n = nI_{n-1}$ de unde $I_n=n!$;

d) cu substituţia $x^2 = t$, utilizând integrala precedentă, se obţine $\frac{n!}{2}$;

e) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; f) - $\frac{1}{8}$;

g) cu substituţia x = $\frac{\pi}{2}-t$, utilizând exerciţiul 9.3.3., se obţine $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Exerciţiul 7.3.2. Să se calculeze:

a) $\int_{-1}^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ b) $\int_2^\infty|x-3|\cdot e^{-x}dx$

c) $\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ d) $\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

R. a) π ; b) $\frac{2}{e^3}$; c) $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$; d) π.

Exerciţiul 7.3.3. Să se demonstreze că următoarele integrale improprii sunt convergente şi să se determine valorile acestora:

a) $\int_0^1\ln xdx$ b) $\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

c) $\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}$ d) $\int_0^\pi x\ln\sin xdx$

R. a) - 1; b) $\frac{\pi}{2}$; c) π ; d) - $\frac{\pi^2}{2}\ln 2$ (se face schimbarea x = π – t şi se ţinea seama de exerciţiul 7.3.3.)

Exerciţiul 7.3.4. Fie Γ : (0, ∞) →(0, ∞), Γ(x) = $\int_1^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$. Demonstraţi că Γ(x+1) = x Γ(x), pentru orice x > 0 şi deduceţi că Γ(n+1) = n!, pentru orice n ∈ ℕ.

Exerciţiul 7.3.5. Fie B: (0, ∞) x(0, ∞)→(0, ∞),

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

(vezi exerciţiul 7.3.6.)

a) Utilizând schimbarea de variabilă t = $\frac{u}{1+u}$, demonstraţi că

B(x, y)= $\int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$;

b) Demonstraţi că B$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)$;

c) Demonstraţi că B$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$ şi deduceţi că $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exerciţiul 7.3.6. Folosind funcţiile B ("beta") şi Γ ("gama"), să se calculeze:

a) $\int_1^{\infty} x^p \ln^q x dx, p, q > -1$

b) $\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx, p, q > -1$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}, m > 0, n \in$ ℕ, n ≥ 2

R. a) $\frac{(-1)^{q+1}}{(p+1)^{q+1}} \cdot \Gamma(q+1)$; b) $\frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$;

c) x = $t^{\frac{1}{m}}$; $\frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}+1\right)$.