7. INTEGRALA IMPROPRIE.

7.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 7.2.1. Să se studieze natura următoarelor integrale improprii şi să se determine valorile acestora, în caz de convergenţă:

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\int_{0}^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$

c) $\int_{3/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$ d) $\int_{0}^{\infty} \cos xdx$

e) $\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\sin xbxdx$, a > 0, b$\in$R e) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

Soluţii. a) Funcţia f : (-1, 1) →R , f(x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ este integrabilă pe orice interval compact [a, b] $\subset$(-1, 1), fiind continuă. Deoarece F(x) = arcsin x este o primitivă pentru f, rezultă că

$\int_a^b f(x)dx$ = arcsin b – arcsin a.

Deoarece $\lim\limits_{\substack{b\to 1\\ b<1}}$ arcsin b = $\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{\substack{a\to -1\\ a>-1}}$ arcsin a = - $\frac{\pi}{2}$, rezultă că

$\int_{-1}^{1} f(x)dx$ este convergentă şi valoarea sa este $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ = $\frac{\pi}{2}$ + $\frac{\pi}{2}$ = π.

b) Funcţia f : (0, 1) →R , f(x) = $\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$ este integrabilă pe orice interval compact inclus în (0, 1), fiind continuă. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}$ f(x) = 1, funcţia poate fi prelungită prin continuitate în x = 0, prin urmare integrala este neesenţial improprie la acest capăt. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}$ f(x) = ∞, integrala este improprie în limita superioară. Deoarece F(x) = (arcsin $\sqrt{x}$)^2 este o primitivă a funcţiei f. deducem imediat că integrala este convergentă şi $\int_0^1 f(x)dx$ = $\frac{\pi^2}{4}$.

Cu schimbarea de variabilă arcsin$\sqrt{x}$ = t se poate deduce imediat $\int_0^1 f(x)dx$ = $\int_0^{\pi/2} 2tdt = t^2\Big|_0^{\pi/2}$ = $\frac{\pi^2}{4}$.

c) Cu formula Leubnitz-Newton obţinem imediat:

$$\int_{3/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \cos\frac{1}{x}\Big|_{3/\pi}^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} - \cos\frac{\pi}{3} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

d) $\int_0^\infty \cos x dx$ este divergentă, deoarece primitiva F(x) = sin x nu are limită la ∞.

e) Funcţia f: [0, ∞)→R , f(x) = e^{-ax}•sin bx este continuă pe [0, ∞), deci este integrabilă pe orice interval compact inclus în [0, ∞). Integrând de două ori prin părţi, se obţine primitiva F(x) = - $\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}$•$e^{-ax}$, x∈(0, ∞). Cum a > 0, rezultă că $\lim_{x\to\infty} e^{-ax} = 0$ şi cum

$$\left| -\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2} \right| \le \frac{a+|b|}{a^2+b^2}$$

pentru orice x∈[0, ∞), deducem că $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$. Rezultă că integrala dată este convergentă. Deoarece F(0) = - $\frac{b}{a^2+b^2}$, rezultă

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(0) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

f) Funcţia f: [0, ∞)→R , f(x) = $\frac{1}{1+x^4}$ este continuă pe [0, ∞) deci este integrabilă pe orice interval compact inclus în [0, ∞). Utilizând descompunerea în fracţii simple:

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{1+\sqrt{2}x + x^2} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{1-\sqrt{2}x + x^2}, \ x\in[0, \infty)$$

se obţine primitiva F(x) =

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[arctg\left(\sqrt{2}x+1\right) + arctg\left(\sqrt{2}x-1\right)\right] + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Deoarece $\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ şi F(0) = 0, rezultă că integrala este convergentă şi valoarea sa este $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Exerciţiul 7.2.2. Fie f : (0, ∞) x (0, ∞) →(0, ∞) funcţia definită prin

f(x, t) = $t^{x-1}e^{-t}$. Să se demonstreze că integrala $\int_0^\infty f(x,t)dt$ converge simplu (punctual) pe (0, ∞).

Soluţie. Pentru orice (x, t) ∈(0, ∞) x (0, 1] avem 0 < f(x, t) ≤ t^{x-1}.

Cum $\int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$, rezultă că, pentru fiecare x∈(0, ∞), funcţia t→f(x, t) este impropriu integrabilă pe (0, ∞), deci integrala $\int_0^\infty f(x,t)dt$ este punctual convergentă pe (0, ∞).

Observaţia 7.2.1. Se poate defini funcţia Γ : (0, ∞)→ (0, ∞) prin

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, cunoscută sub numele de *funcţia "gama" a lui Euler*.

Exerciţiul 7.2.3. Fie f : (0, ∞) x (0, ∞) x (0, 1) →(0, ∞) funcţia definitiă prin f(x, y, t) = $t^{x-1}(1 - t)^{y-1}$. Să se demonstreze că integrala $\int_0^1 f(x,y,t)dt$ converge simplu (punctual) pe (0, ∞) x (0, ∞) .

Soluţie. Fie g : (0, ∞) x (0, ∞) x (0, 1) →(0, ∞) funcţia definită prin g(x, y, t) = $t^{x-1} + (1 - t)^{y-1}$. Fie (x, y) $\in$ (0, ∞) x (0, ∞) fixat. Dacă

$t\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$, atunci $(1 - t)^{y-1} \le 2$, deci $t^{x-1}(1 - t)^{y-1} \le 2t^{x-1} \le 2g(x, y, t)$, iar dacă $t \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, atunci $0< t^{x-1} = t^x \frac{1}{t} \le 2$ deci $t^{x-1}(1 - t)^{y-1} \le 2(1-t)^{y-1} \le 2g(x, y, t)$. Deci, pentru orice (x, y) $\in$ (0, ∞) x (0, ∞) şi orice t$\in$(0, 1),
f(x, y, t) $\le$ 2g(x, y, t).

Cum $\int_0^1 g(x,y,t)dt = \int_0^1 t^{x-1}dt + \int_0^1 (1-t)^{y-1}dt = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, rezultă că funcţia t → f(x, y, t) este impropriu integrabilă pe (0, 1), deci integrala $\int_0^1 f(x,y,t)dt$ este punctual convergentă pe (0, ∞) x (0, ∞).

Observaţia 7.2.2. Din exerciţiul 9.3.6. rezultă că se poate defini integrala improprie cu doi parametrii, B : (0, ∞) x (0, ∞) →(0, ∞) prin

$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ cunoscută sub numele de *funcţia "beta" a lui Euler*.

Exerciţiul 7.2.4. Să se demonstreze că integrala $\int_0^\infty \frac{xdt}{1+t^2x^2}$, x$\in\mathbb{R}$ converge punctual, dar nu converge uniform pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. Fie x$\in\mathbb{R}$ fixat şi b < ∞. Evident,

$$\int_0^b \frac{xdt}{1+t^2x^2} = \mathrm{arctg}(tx)\Big|_{t=0}^{t=b} = \mathrm{arctg}\, bx .$$

Deoarece $\lim_{b\to\infty}\int_0^\infty \frac{xdt}{1+t^2x^2} = \lim_{b\to\infty}$ arctg bx = $\begin{cases} \frac{\pi}{2}, \text{ daca } x>0 \\ 0, \text{ daca } x=0 \\ -\frac{\pi}{2}, \text{daca } x<0 \end{cases}$ rezultă că integrala dată converge punctual pe $\mathbb{R}$. Putem defini F :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin:

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{xdt}{1+t^2x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \text{ daca } x > 0 \\ 0, \text{ daca } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, \text{daca } x < 0 \end{cases}$$

Să observăm că funcţia F este discontinuă în x = 0. Funcţia

f : R x (0, ∞) →R , f(x, t) = $\dfrac{x}{1+t^2x^2}$ este, evident,continuă pe Rx(0, ∞)

Dacă integrala ar fi uniform convergentă pe R , aplicând teorema 7.1.15., ar rezulta că F este continuă pe R , ceea ce este fals. Rezultă că integrala dată nu este uniform convergentă pe R .

Exeerciţiul 7.2.5. Să se demonstreze că funcţia Γ : (0, ∞) →(0, ∞) definită prin Γ(x) = $\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ este derivabilă pe (0, ∞) şi

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t} \ln t dt \ .$$

Soluţie. Din exerciţiul 7.3.5. deducem că funcţia Γ este bine definită. Notând f(x, t) = $t^{x-1}e^{-t}$, (x, t) $\in$ (0, ∞) x (0, ∞) rezultă că:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t^{x-1}e^{-t}\ln t, \ (x, t) \in (0, \infty) \text{ x } (0, \infty)$$

şi că $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe (0, ∞) x (0, ∞), fiind produs de funcţii continue.

Fie acum a,b $\in$ (0, ∞) arbitrare, fixate. Demonstrăm că integrala $\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ este uniform convergentă pe (a, b]. Pentru aceasta, este suficient să demonstrăm convergenţa uniformă a integralelor $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t} \ln t dt$ şi $\int_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t} \ln t dt$ pe (a, b]. Dacă x > 1 prima integrală este o integrală simplă. Dacă a < x $\le$ 1, scriem:

$$t^{x-1}e^{-t}\ln t = \frac{t^{x-a}e^{-t}\ln t}{t^{\lambda}}, \text{ unde } \lambda = 1 - a < 1$$

Deoarece , pentru orice x $\in$ (a, 1] şi t$\in$ (0, 1] avem:

$$| t^{x-1}e^{-t}\ln t \ | = - \frac{t^{x-a}e^{-t}\ln t}{t^{\lambda}} < \frac{1}{t^{\lambda}}$$

şi $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\lambda}}$ este convergentă (deoarece λ < 1) deducem că $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t} \ln t dt$ este uniform convergentă. Pentru convergenţa celei de a doua integrale, se observă că:

$$t^{x-1}e^{-t}\ln t = \frac{t^{x+1}e^{-t}\ln t}{t^2} \le M \cdot \frac{1}{t^2} \ ,$$

x$\in$ (a, b), t$\in$ [1, ∞), unde M > 0 este convenabil ales ($t^{x+1}e^{-t}\ln t < t^{b+1}e^{+t}\ln t$ iar $\lim_{t\to\infty} t^{b+1}e^{-t} \ln t = 0$).

Cum $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}$ este convergentă, rezultă că integrala $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ este uniform convergentă pe (a, b).

Prin urmare, integrala $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ este uniform convergentă pe (a, b). Aplicând teorema 7.1.16., deducem că funcţia Γ este derivabilă cu derivata continuă pe (a, b). dar a,b fiind oarecare, deducem că Γ este derivabilă cu derivata continuă pe (0, ∞) şi avem :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t dt,\ x\in(0,\ \infty).$$

Exerciţiul 7.2.6. Folosind funcţiile "beta" şi "gama" , să se calculeze:

a) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx,\ p,q,m>0$

b) $\int_0^\infty x^p e^{-x^q}dx,\ p>-1, q>0$.

Soluţie. a) Cu schimbarea de variabilă $x^m = t$, rezultă:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx = \int_0^1 t^{\frac{p-1}{m}}(1-t)^{q-1}\cdot\frac{1}{m}t^{\frac{1}{m}-1}dt =$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{p}{m}-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{1}{m}B(\frac{p}{m},q).$$

b) Cu schimbarea de variabilă $x^q = t$, obţinem :

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^q}dx = \int_0^\infty t^{\frac{p}{q}}\cdot e^{-t}\cdot\frac{1}{q}\cdot t^{\frac{1}{q}-1}dt = \frac{1}{q}\int_0^\infty t^{\frac{p+1}{q}}\cdot e^{-t}dt = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)$$

Exercițiul 7.3.13. Utilizând teorema 7.1.17., să se calculeze

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} dt .$$

Soluție. Deoarece $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} = 0$, integrala este improprie doar în limita superioară. Deoarece $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} = 0$ rezultă că $\left| \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} \right| \le M \cdot e^{-t}$, cu M > 0 convenabil ales, iar $\int_0^\infty e^{-t} dt$ este convergentă, rezultă că integrala dată este absolut convergentă, deci şi convergentă. Pentru calcul, observăm mai întâi că:

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{t} \Bigg|_{x=b}^{x=a} \cdot e^{-t} dt =$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_b^a -\sin xt dx \right] \cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty \left[\int_a^b e^{-t} \sin xt dx \right] dt =$$

$$= \int_a^b \left[\int_0^\infty e^{-t} \sin xt dt \right] dx .$$

Ultima egalitate a fost obţinută în exerciţiul precedent, utilizând teorema 7.1.17. Pentru x $\in$ [a, b] fixat, calculăm:

$$\int_0^\infty e^{-t} \sin xt dt = -\int_0^\infty (e^{-t})' \sin xt dt = -e^{-t} \sin xt \Big|_{t=0}^\infty + \int_0^\infty e^{-t} (\cos xt) x dt$$

$$= -x \int_0^\infty (e^{-t})' \cos xt dt = -x \left[e^{-t} \cos xt \Big|_{t=0}^\infty - \int_0^\infty e^{-t} (-\sin xt) x dt \right] =$$

$$= -x \left[-1 + x \int_0^\infty e^{-t} \sin xt dt \right] = x - x^2 \int_0^\infty e^{-t} \sin xt dt .$$

Prin urmare, $\int_0^\infty e^{-t} \sin xt dt = \frac{x}{1+x^2}$, x $\in$ [a, b]. Deci,

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} dt = \int_a^b \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_a^b = \frac{1}{2} \ln \frac{1+b^2}{1+a^2}$$

Exercițiul 7.3.14. Fie f:[1, ∞) x [1, ∞) $\to$R funcţia definită prin :

$$f(x, t) = \frac{x-t}{(x+t)^3} .$$

Demonstraţi că : $\int_1^\infty \left[\int_1^\infty f(x,t) dt \right] dx \neq \int_1^\infty \left[\int_1^\infty f(x,t) dx \right] dt$.

Soluție. Deoarece $|f(x,t)| \le \frac{1}{t^2}$, pentru orice $(x,t)\in[1,\infty)\times[1,\infty)$, integrala $\int_1^\infty f(x,t)dt$ este uniform convergentă în raport cu parametrul
$x\in[1,\infty)$.
Prin calcul direct, obţinem:

$$\int_1^\infty f(x,t)dt = -\int_1^\infty \frac{t-x}{(t+x)^3}dt = -\int_1^\infty \frac{dt}{(t+x)^2} + 2x\int_1^\infty \frac{dt}{(t+x)^3} =$$

$$= \left.\frac{1}{t+x}\right|_{t=1}^{\infty} - x\cdot\left.\frac{1}{(t+x)^2}\right|_{t=1}^{\infty} = -\frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

$x\in[1,\infty)$.

Prin urmare,

$$\int_1^\infty\left[\int_1^\infty f(x,t)dt\right]dx = \int_1^\infty \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=1}^{\infty} = -\frac{1}{2}.$$

Deoarece $|f(x,t)| \le \frac{1}{x^2}$ pentru orice $(x,t)\in[1,\infty)\times[1,\infty)$, integrala $\int_1^\infty f(x,t)dt$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t\in[1,\infty)$. Prin calcul direct, obţinem:

$$\int_1^\infty f(x,t)dt = \int_1^\infty \frac{x-t}{(x+t)^3}dx = \int_1^\infty \frac{dx}{(x+t)^2} - 2t\int_1^\infty \frac{dx}{(x+t)^3} =$$

$$= -\left.\frac{1}{x+t}\right|_{x=1}^{\infty} + t\cdot\left.\frac{1}{(x+t)^2}\right|_{x=1}^{\infty} = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2},$$

$t\in[1,\infty)$,

de unde $\int_1^\infty\left[\int_1^\infty f(x,t)dx\right]dt = \int_1^\infty \frac{dt}{(1+t)^2} = -\left.\frac{1}{1+t}\right|_1^{\infty} = \frac{1}{2}$.

Să observăm că funcţia f nu păstrează un semn constant pe
$[1,\infty)\times[1,\infty)$, deci teorema 7.1.18. nu este aplicabilă, chiar dacă toate celelalte ipoteze sunt satisfăcute.

Exerciţiul 7.3.15. Utilizând teorema 7.1.17.,să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}}dx$$

Soluţie. Deoarece $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}} = 1$, integrala este improprie doar în limita superioară.

Deoarece $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, aplicând teorema 7.1.9.., pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ şi $l = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, deducem că integrala este convergentă.

Pentru calcul, observăm mai întâi că:

$$\frac{arctgx}{x} = \int_0^1 \frac{dt}{x^2t^2+1},\ x\in(0,\infty).$$

Prin urmare $\int_0^1 \frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{x^2t^2+1} \right) dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dt}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}} \right] dx$

Deoarece $\frac{1}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pentru orice (x, t)$\in$[0,1)x[0,1) şi $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$, rezultă că $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}}$ este uniform convergentă în raport cu parametrul t. Prin urmare, se poate schimba ordinea de integrare şi obţinem :

$$\int_0^1 \frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dt}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}} \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dx}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}} \right] dt = \int_0^1 \left[\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+t^2\sin^2 u} \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^\infty \frac{dv}{1+(1+t^2)v^2} \right] dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot arctg\left(v \cdot \sqrt{1+t^2} \Big|_0^\infty \right) \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Exerciţiul 7.3.16. Fie f:[0, ∞) x [0, ∞) $\to \mathbb{R}^+$, f(x, t) = $xe^{-x^2(1+t^2)}$.

a) Demonstraţi că $\int_a^\infty \left[\int_0^\infty f(x,t)dt \right] dx = \int_0^\infty \left[\int_a^\infty f(x,t)dx \right] dt$, pentru orice a > 0

b) Deduceţi că $\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(x,t)dt \right] dx = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(x,t)dx \right] dt$

c) Demonstraţi că: $\int_a^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (integrala lui Euler-Poisson)

Soluţie. a) Utilizând teorema 7.1.18. , deoarece f este pozitivă şi satisface condiţiile:

- f este, evident, continuă pe [0, ∞) x [0, ∞) ;
- $\int_0^\infty f(x,t)dt$ este uniform convergentă pe orice interval compact [α, β] $\subset$ [a, b], deoarece f(x, t) $\leq$ β$e^{-\alpha^2(1+t^2)}$, x$\in$[α, β], t$\in$[0, ∞) iar $\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)}dt$ este convergentă
- $\int_a^\infty f(x,t)dt$ este uniform convergentă pe [0, ∞) deoarece f(x, t) $\leq$ xe^{-x^2}, pentru orice x$\in$[a, ∞), t$\in$[0, ∞), iar integrala $\int_a^\infty xe^{-x^2}$ este convergentă;

- $\int_0^{\infty}\left[\int_a^{\infty} f(x,t)dx\right]dt$, a > 0, este convergentă deoarece:

$$\int_0^{\infty}\left[\int_a^{\infty} f(x,t)dx\right]dt = \int_0^{\infty}\frac{1}{2(1+t^2)}\cdot e^{-a^2(1+t^2)}dt,$$

$$\frac{1}{2(1+t^2)}\cdot e^{-a^2(1+t^2)} < \frac{1}{2(1+t^2)},\ t\in[0,\ \infty) \text{ şi}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{2(1+t^2)}dt = \frac{1}{2}arctgt\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Rezultă: $\int_a^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(x,t)dt\right]dx = \int_0^{\infty}\left[\int_a^{\infty} f(x,t)dx\right]dt$ pentru orice a > 0.

b) Deoarece g(a, t) = $\int_a^{\infty} f(x,t)dx = \frac{1}{2(1+t^2)}\cdot e^{-a^2(1+t^2)}$, a∈[0, ∞), t∈[0, ∞) este continuă, iar integrala $\int_0^{\infty} g(a,t)dt$ este uniform convergentă pe [0, ∞), fiind majorată de integrala improprie convergentă $\int_0^{\infty}\frac{dt}{2(1+t^2)}$, rezultă că $\lim_{a\to 0}\int_0^{\infty}\left[\int_a^{\infty} f(x,t)dx\right]dt = \lim_{a\to 0}\int_0^{\infty} g(a,t)dt = \int_0^{\infty} g(0,t)dt =$ $\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(x,t)dx\right]dt$.

Trecând acum la limită când a → 0 în egalitatea stabilită la a) rezultă:

$$\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(x,t)dt\right]dx = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(x,t)dx\right]dt.$$

c) Evaluăm pe rând integralele care apar în egalitatea stabilită la punctul b):

$$\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(x,t)dt\right]dx = \int_0^{\infty}\left[xe^{-x^2}\int_0^{\infty} e^{-x^2t^2}dt\right]dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x^2}\left(\int_0^{\infty} e^{-u^2}du\right)dx = \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2}du\right)\cdot\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right).$$

$$\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(x,t)dx\right]dt = \int_0^{\infty}\frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2}arctgt\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Prin urmare $\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$, de unde rezultă imediat egalitatea cerută.

Exerciţiul 7.3.17. Folosind funcţiile “beta” şi “gama” , să se calculeze:

a) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx,\ p,q,m>0$

b) $\int_0^\infty x^p e^{-x^q} dx, p > -1, q > 0$.

Soluţie. a) Cu schimbarea de variabilă $x^m = t$, rezultă:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx = \int_0^1 t^{\frac{p-1}{m}}(1-t)^{q-1} \cdot \frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} dt =$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{p}{m}-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{1}{m}B(\frac{p}{m}, q).$$

b) Cu schimbarea de variabilă $x^q = t$, obţinem :

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^q} dx = \int_0^\infty t^{\frac{p}{q}} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{q} \cdot t^{\frac{1}{q}-1} dt = \frac{1}{q}\int_0^\infty t^{\frac{p+1}{q}} \cdot e^{-t} dt = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)$$