7. INTEGRALA IMPROPRIE.

7.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale.

Definiţia 7.1.1. Fie funcţia f : I → R unde I este un interval arbitrar cu extremităţile α , β ∈ $\overline{R}$. Funcţia f se numeşte *impropriu integrabilă pe I* dacă este integrabilă pe orice interval compact inclus în I şi, pentru orice c ∈ I, există şi sunt finite limitele: $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ a>\alpha}} \int_a^c f(x)dx$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ b<\beta}} \int_c^b f(x)dx$. Suma acestor limite se numeşte *integrala improprie* a funcţiei f pe intervalul I şi notăm:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\substack{x\to\alpha \\ a>\alpha}} \int_a^c f(x)dx + \lim_{\substack{x\to\beta \\ b<\beta}} \int_c^b f(x)dx$$

Dacă funcţia f este impropriu integrabilă pe I, se mai spune că integrala improprie $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ este *convergentă* . În caz contrar, ea este *divergentă.*

Observaţia 7.1.1. a) Definiţia convergenţei, precum şi valoarea integralei improprii sunt independente de alegerea punctului c ∈ I .
b) Deoarece integrala simplă este funcţie continuă de extremităţile sale de integrare, rezultă că dacă I = [α, β] este un interval compact, integrala improprie a funcţiei f pe intervalul I coincide cu integrala simplă a acestei funcţii pe acest interval. Din acelaşi motiv, integrala funcţiei f pe intervalul [α, β] coincide cu integrala funcţiei f pe fiecare din intervalele: (α, β], [α, β), (α, β). Analog dacă β = ∞, integrala pe [α, ∞) coincide cu integrala pe (α, ∞). Este suficient deci să cunoaştem integralele improprii pe intervale deschise.
c) O integrală improprie poate fi redusă la o integrală improprie doar la unul din capete, scriind :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx$$

De aceea este suficient să ne ocupăm de integrala improprie la unul din capete. Ca şi la integrala simplă, acceptăm şi la integrala improprie că :

$$\int_\beta^\alpha f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Prezentăm în continuare, câteva *proprietăţi ale integralelor improprii* , care se transpun fără dificultate de la integralele simple.

Teorema 7.1.1. *(Proprietatea de liniaritate)*
Dacă funcţiile f_1, f_2 : [α, β) →R sunt impropriu integrabile pe [α, β) atunci, pentru orice $\lambda_1, \lambda_2 \in$ R funcţia $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ este impropriu integrabilă pe [α, β) şi

$$\int_\alpha^\beta (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)dx = \lambda_1 \int_\alpha^\beta f_1(x)dx + \lambda_2 \int_\alpha^\beta f_2(x)dx$$

Teorema 7.1.2. *(Formula Leibnitz-Newton pentru integrala improprie)*
Dacă funcţia f : [α, β) →R este integrabilă pe orice interval compact inclus în [α, β) şi admite o primitivă F pe [α, β), atunci f este impropriu integrabilă pe [α, β), dacă şi numai dacă F are limită finită în β. În acest caz:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\substack{x\to\beta \\ x<\beta}} F(x) - F(\alpha)$$

Teorema 7.1.3. *(Formula de integrare prin părţi)*

Dacă f, g : [α, β) →R sunt funcţii derivabile cu derivate continue pe [α, β), încât f • g are limită în β şi $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$ este convergentă, atunci şi integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$ este convergentă şi are loc egalitatea:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = \lim_{\substack{x\to\beta \\ x<\beta}} f(x)g(x) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$$

(evident că rolul celor două integrale improprii care apar poate fi schimbat)

Teorema 7.1.4. *(Formula schimbării de variabilă)*

Fie f : [α, β) →R , φ : [α', β') →[α, β) încât φ(α') = α, $\lim_{\substack{x\to\beta' \\ x<\beta'}} \varphi(x)=\beta$

Dacă φ este derivabilă, cu derivata continuă pe [α', β') , f este continuă pe [α, β) şi $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ este convergentă, atunci şi integrala $\int_{\alpha'}^{\beta'} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$

este convergentă şi are loc egalitatea:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

Observaţia 7.1.2. Dacă cunoaştem o primitivă a funcţiei f : [α, β) →R , putem stabili natura (convergenţa sau divergenţa) integralei improprii $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. După cum se ştie, nu întotdeauna este posibil să determinăm o primitivă. De aceea este util să cunoaştem criterii de convergenţă, criterii cu ajutorul cărora să putem stabili natura unei integrale improprii, fără a pretinde să-i găsim valoarea exactă.

Teorema 7.1.5. *(Criteriul lui Cauchy)*

Fie f : [α, β) →R o funcţie integrabilă pe orice interval compact inclus în [α, β). Atunci $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă, pentru orice ε > 0 există δ > 0, încât pentru orice b', b'' ∈ (β – δ, β) să avem :

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$