6. INTEGRALA SIMPLĂ. INTEGRALA SIMPLĂ CU PARAMETRU

6.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

6.1.1. Metoda lui Darboux de a defini integrala simplă

Fie [a, b] un interval. Descompunem intervalul [a, b] într-un număr oarecare de segmente, de lungimi arbitrare, prin punctele:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < x_p = b$$

Notăm cu *d* această descompunere şi o numim *diviziunea intervalului* [a, b].

Definiţia 6.1.1.1. Fie *d* o diviziune a intervalului [a, b] determinată de punctele $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < x_p = b$.

Se numeşte *norma diviziunii d* numărul :

$$\| d \| = \max \{x_i - x_{i-1} \,;\, i = 1, 2, \ldots, p\}$$

Dacă *d'* este o altă diviziune a intervalului [a, b], spunem că *d'* este mai fină decât *d* şi o notăm *d'>d* dacă mulţimea punctelor care determină diviziunea *d* este inclusă în mulţimea punctelor care determină diviziunea *d'*.

Definiţia 6.1.1.2. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită pe [a, b] şi fie *d* o diviziune a intervalului [a, b] determinată de punctele :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < x_p = b$$

Pentru fiecare i = 1, 2, …, p, fie $m_i = \inf \{f(x);\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ şi $M_i = \sup \{f(x);\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Formăm sumele:

$$s(d) = \sum_{i=1}^{p} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S(d) = \sum_{i=1}^{p} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Suma s(d) se numeşte *suma inferioară Darboux*, iar S(d) se numeşte *suma superioară Darboux*, ataşată funcţiei f pe intervalul [a, b], corespunzătoare diviziunii *d* a intervalului.

Definiţia 6.1.1.3. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Se numeşte *integrala inferioară Darboux* a funcţiei f pe intervalul [a, b] numărul:

$$\underline{I} = \sup \{s(d) \mid d \in \mathcal{D}\}$$

Se numeşte *integrala superioară Darboux* a funcţiei f pe intervalul [a, b] numărul:

$$\overline{I} = \inf \{S(d) \mid d \in \mathcal{D}\}$$

($\mathcal{D}$ este mulţimea tuturor diviziunilor posibile ale intervalului [a, b]).

Definiţia 6.1.1.4. Funcţia mărginită $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numeşte integrabilă pe [a, b], dacă integrala inferioară Darboux coincide cu integrala superioară Darboux pe acest interval. Valoarea lor comună se numeşte *integrala simplă* a funcţiei f pe intervalul [a, b], *în sens Darboux*. Se notează :

$$I = \underline{I} = \overline{I} = \int_a^b f(x)dx$$

Teorema 6.1.1.1. *(Criteriul lui Darboux de integrabilitate)*

Fie f : [a, b] → $\mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Funcţia f este integrabilă pe [a, b], dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$, încât pentru orice $d \in \mathcal{D}$ cu $\| d \| < \eta$ avem $S(d) - s(d) < \varepsilon$.

6.1.2. Metoda lui Riemann de a defini integrala simplă

Definiţia 6.1.2.1. Fie f : [a, b] → $\mathbb{R}$ o funcţie arbitrară şi fie d o diviziune a intervalului [a, b] determinată de punctele $a= x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < x_p= b$

Pentru fiecare i = 1, 2, …, p alegem $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Notăm $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p)$.

Suma $\sigma(d, \zeta) = \sum_{i=1}^{p} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$ se numeşte *sumă Riemann* sau sumă integrală a funcţiei f pe intervalul [a, b] corespunzătoare diviziunii d şi alegerii punctelor intermediare ζ.

Definiţia 6.1.2.2. Funcţia f : [a, b] → $\mathbb{R}$ se numeşte *integrabilă în sens Riemann* pe [a, b], dacă există un număr real I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$, astfel încât oricare ar fi diviziunea d cu $\| d \| < \eta$ şi oricare ar fi punctele intermediare $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p)$ să aibă loc inegalitatea $| \sigma(d, \zeta) - I | < \varepsilon$.

Prin urmare funcţia f este integrabilă Riemann pe [a, b] dacă există în $\mathbb{R}$ $\lim_{\|d\| \to 0} \sigma(d, \zeta)$ şi această limită nu depinde de alegerea ζ a punctelor intermediare.

Numărul real I, a cărui unicitate se poate deduce uşor, se numeşte *integrala în sens Riemann* a funcţiei f pe intervalul [a, b].

Teorema 6.1.2.1. Dacă funcţia f : [a, b] → $\mathbb{R}$ este integrabilă în sens Riemann pe [a, b], atunci f este mărginită.

Prin urmare, dacă f este *nemărginită* pe [a, b], atunci f *nu este integrabilă* în sens Riemann pe [a, b].

Teorema 6.1.2.2. Fie f : [a, b] → $\mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Atunci funcţia f este integrabilă în sens Darboux pe [a, b], dacă şi numai dacă f este integrabilă în sens Riemann pe [a, b]. Integrala în sens Darboux a funcţiei f pe [a, b] coincide cu integrala în sens Riemann a lui f pe [a, b].

6.1.3. Clase de funcţii integrale

Teorema 6.1.3.1. Fie f : [a, b] → $\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe [a, b]. Atunci f este integrabilă pe [a, b].

Teorema 6.1.3.2. Fie f : [a, b] → $\mathbb{R}$ o funcţie monotonă. Atunci f este integrabilă pe [a, b].

Teorema 6.1.3.3. Fie f : [a, b] → $\mathbb{R}$ o funcţie mărginită care are un număr finit de puncte de discontinuitate. Atunci f este integrabilă pe [a, b].

6.1.4. Proprietăţi ale funcţiilor integrabile şi ale integralei

Teorema 6.1.4.1. Fie f : [a, b] → $\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe [a, b]. Atunci f este integrabilă pe orice interval $[c, d] \subset [a, b]$.

Teorema 6.1.4.2. *(Proprietatea de aditivitate a integralei faţă de interval).*

Fie f : [a, b] → $\mathbb{R}$ o funcţie arbitrară şi $c \in (a, b)$. Atunci f este integrabilă pe [a, b], dacă şi numai dacă f este integrabilă pe [a,c] şi pe [c,b].

În acest caz avem $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Teorema 6.1.4.3. *(Proprietatea de liniaritate a integralei față de funcție).*

Fie f, g : [a, b] → ℝ două funcţii integrabile pe [a, b], α, β∈ℝ arbitrare. Atunci funcţia αf + βg este integrabilă pe [a, b] şi

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Teorema 6.1.4.4. Fie f, g : [a, b] → ℝ două funcţii integrabile pe [a, b]. Atunci funcţia f •g este integrabilă pe [a, b].

Teorema 6.1.4.5. *(Proprietatea de monotonie a integralei)*

Fie f, g : [a, b] → ℝ două funcţii integrabile pe [a, b], astfel incât f(x) ≤ g(x) pentru orice x∈[a, b]. Atunci avem :

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

În particular, dacă f(x) ≥ 0, pentru orice x∈[a, b], atunci

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0 .$$

Teorema 6.1.4.6. Fie f : [a, b] → ℝ o funcţie integrabilă pe [a, b]. Atunci
| f | este o funcţie integrabilă şi avem :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx .$$

Observaţia 6.1.4.1. Există funcţii care nu sunt integrabile, dar au modulul integrabil : funcţia f : [0, 1] → ℝ definită prin f(x) = 1, dacă x∈[0, 1] ∩ ℚ şi f(x) = -1 , dacă x∈[0, 1] \ ℚ nu este integrabilă pe [0, 1], dar, evident, | f | este funcţie integrabilă pe [0, 1].

Teorema 6.1.4.7. *(Teorema de medie)*

Dacă f : [a, b] → ℝ este o funcţie integrabilă pe [a, b], a < b,
m = {f(x); x∈[a, b]}, M = sup {f(x); x∈[a, b]} atunci există μ ∈[m, M] astfel încât $\int_a^b f(x)dx$ = μ (b - a).

Dacă f este continuă pe [a, b], atunci există ζ ∈[a, b] astfel încât
μ = f(ζ) şi formula de medie devine :

$$\int_a^b f(x)dx = f(\zeta)(b - a)$$

6.1.5. Metode de calcul al integralei simple

Metodele de calcul exact al integralei simple au la bază două teoreme fundamentale ale calculului integral, care stabilesc legătura dintre integrala simplă şi primitiva unei funcţii.

Definiţia 6.1.5.1. Dacă $J \subset \mathbb{R}$ este un interval, funcţia $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ *admite primitivă* pe J, dacă există o funcţie $F : J \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă pe J, încât F' = f.
Funcţia F se numeşte, în acest caz, *primitivă* a funcţiei f.

Observaţia 6.1.5.1. O condiţie necesară ca funcţia f să admită primitivă pe J este ca f să aibă proprietatea lui Darboux. Prin urmare, dacă f *nu are proprietatea lui Darboux* pe J, atunci f *nu admite primitivă* pe J. Mai general, o funcţie care are un punct de discontinuitate de speţa întâi pe J, nu admite primitivă pe J.

Teorema 6.1.5.1. Fie $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe orice interval compact inclus în J; fie $a \in J$ fixat şi fie funcţia $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Atunci :

1) Funcţia F este continuă pe J;
2) Funcţia F este derivabilă în orice punct $x_0 \in J$ în care funcţia f este continuă şi $F'(x_0) = f(x_0)$
   Prin urmare, dacă f este *continuă* pe J, atunci F este *o primitivă*

pentru f pe intervalul J.

Teorema 6.1.5.2. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă care admite primitive. Atunci, oricare ar fi F, o primitivă a lui f pe intervalul [a, b], avem:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ (formula Leibnitz-Newton)}$$

Observaţia 6.1.5.2. Formula Leibnitz-Newton reduce calculul integralei funcţiei f pe intervalul [a, b] la determinarea unei primitive F a funcţiei f pe acest interval. Cum pentru o clasă destul de largă de funcţii se poate determina primitive, rezultă că pentru o clasă destul de largă de funcţii putem calcula exact integrala.

Cu ajutorul formulei Leibnitz-Newton se pot demonstra formula de integrare prin părţi şi formula schimbării de variabilă care, în anumite condiţii, reduce calculul unor integrale la calculul altora, mai uşor de calculat.

Teorema 6.1.5.3. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcţii derivabile cu derivate integrabile. Atunci :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

(formula de integrare prin părţi)

Observaţia 6.1.5.3. Formula se aplică în cazul când integrala

$\int_z^b f'(x)g(x)dx$ este mai uşor de calculat decât $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ iar f' şi g se deduc şi ele uşor.

Teorema 6.1.5.4. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ o funcţie derivabilă, cu φ' integrabilă pe $[\alpha, \beta]$, în particular, φ de clasă C^1 pe $[\alpha, \beta]$. Atunci :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt$$

(prima formulă de schimbare de variabilă)

Observaţia 6.1.5.4. Prima formulă de schimbare de variabilă reduce calculul integralei funcţiei $(f \circ \varphi) \bullet \varphi'$ la calculul integralei funcţiei f, în cazul când acesta din urmă este mai uşor. Funcţia φ realizează

“schimbarea de la variabila x la variabila t ”. În mod practic, dacă avem de calculat $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se caută mai întâi f şi φ care să satisfacă condiţiile teoremei şi astfel încât g(x) = f(φ(x))• φ’(x), apoi se aplică direct formula de mai sus. În unele probleme însă, funcţia g de integrat poate fi pusă sub forma g(x) = f(φ(x)).
În acest caz, evident că formula schimbării de variabilă de mai sus nu poate fi aplicată direct. Totuşi, în anumite condiţii mai restrictive, impuse funcţiei φ, se poate aplica indirect această formulă. Mai precis, are loc următoarea:

Teorema 6.1.5.5. Fie f : [a, b] ∈ R o funcţie continuă, φ : [α, β] →[a, b] o funcţie bijectivă, astfel încât inversa sa φ^{-1} : [a, b] →[α, β] este derivabilă, iar derivata $(\varphi^{-1})'$ este integrabilă pe [a, b]; toate aceste condiţii sunt îndeplinite, dacă φ este de clasă C^1 pe [α, β] şi φ’(x) ≠ 0, pentru orice
x ∈ [α, β]. Atunci:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\cdot(\varphi^{-1})'(t)dt$$

(a doua formulă de schimbare de variabilă)

Observaţia 6.1.5.5. Nu se poate da o indicaţie general valabilă, totuşi, pentru anumite tipuri de funcţii se pot da metode standard de alegere a funcţiei φ.

Exemplul 6.1.5.1. Dacă g(x) $= R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p}\right)$, x ∈ [α, β], unde R(u, v) este o funcţie raţională, atunci alegând φ(x) $= \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, integrala $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se reduce la o integrală dintr-o funcţie raţională.

Exemplul 6.1.5.2. Dacă g(x) $= R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, x ∈ [α, β], a ≠ 0, unde R(u, v) este o funcţie raţională, atunci integrala $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se poate reduce la o integrală dintr-o funcţie raţională, folosind *substituţiile lui Euler*. Se deosebesc trei cazuri:

a) dacă a > 0 , se recomandă schimbarea determinată de $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x + t$
b) dacă c > 0 , se recomandă schimbarea determinată de $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$
c) dacă $b^2 - 4ac > 0$, se recomandă schimbarea determinată de $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1)$

unde x_1 este una dintre rădăcinile trinomului $ax^2 + bx + c$ (se presupune, evident, că $ax^2 + bx + c \geq 0$ pe intervalul [α, β]).

Exemplul 6.1.5.3. Dacă g(x) = R(sin x, cos x), x ∈ [α, β], unde R(u, v) este o funcţie raţională, folosind funcţia φ(x) $= tg\,\frac{x}{2}$, integrala $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se reduce la o integrală dintr-o funcţie raţională.

Exemplul 6.1.5.4. Dacă $g(x) = x^m(ax^n + b)^p$, x ∈ [α, β], unde a, b ∈ R,
m, n, p ∈ Q, $ax^n + b \geq 0$ pentru orice x ∈ [α, β], atunci $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se numeşte *integrală binomă* (Cebîşev) şi se poate calcula elementar numai în următoarele trei cazuri:

a) p ∈ Z ; se foloseşte funcţia $\varphi(x)=x^{1/r}$, unde r este numitorul comun al numerelor raţionale m şi n.

b) $p \notin \mathbb{Z}$, dar $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$; se foloseşte funcţia φ(x)=$(ax^n+b)^{1/s}$, unde s este numitorul lui p.

c) $p \notin \mathbb{Z}$, $\dfrac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$ dar p + $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$; în acest caz se foloseşte funcţia φ(x)=$(a + bx^{-n})^{1/s}$, unde s este, de asemenea, numitorul lui p. În toate cele trei cazuri, integrala binomă se transformă într-o integrală dintr-o funcţie raţională.

Observaţia 6.1.5.6. Dacă în calculul integralei $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ alegem pentru schimbarea de variabilă o funcţie φ astfel încât g(x) = f(φ(x)), dar φ nu este inversabilă pe [α, β], atunci se descompune intervalul [α, β] într-un număr finit de subintervale, încât pe fiecare subinterval funcţia φ să aibă o restricţie inversabilă, se aplică a doua formulă de schimbare de variabilă pe fiecare subinterval, apoi se foloseşte proprietatea de aditivitate a integralei faţă de interval.

Observaţia 6.1.5.7. Metodele de calcul exact expuse mai sus presupun cunoscute primitivele anumitor funcţii. Există însă cazuri simple, când există primitivele, dar acestea nu pot fi exprimate cu ajutorul funcţiilor elementare: $\dfrac{\sin x}{x}, \dfrac{\cos x}{x}, \dfrac{e^x}{x}, \dfrac{1}{\ln x}, e^{x^2}$, sin x^2, cos x^2 etc. au primitive pe domeniul lor de definiţie (fiind continue), care însă nu pot fi determinate prin nici una din metodele elementare. De aceea sunt prezentate în continuare şi câteva *metode de calcul aproximativ al integralei simple*. Ideea acestor metode este sugerată de însăşi definiţia integralei : dacă
f : [a, b] → $\mathbb{R}$ este integrabilă, considerând un şir arbitrar $(d_n)_{n\in N}$ de diviziuni ale intervalului [a, b] cu $\lim_{n\to\infty}\|d_n\| = 0$ şi fixând pentru fiecare diviziune d_n o alegere a punctelor intermediare ζ^n, atunci şirul numeric $(\sigma_n)_{n\in N}$, unde σ_n = σ (d_n, ζ^n), converge la $\int_a^b f(x)dx$. Prin urmare, pentru a aproxima integrala, cu o anumită eroare, este suficient, să calculăm un anumit termen al şirului $(\sigma_n)_{n\in N}$. Particularizând modul de alegere al diviziunilor şi al punctelor intermediare, se obţin diferite metode de calcul aproximativ al integralelor.

Teorema 6.1.5.6. *(Metoda dreptunghiurilor)*

Fie f : [a, b] → $\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă. Considerăm o diviziune d a intervalului [a, b], determinată de punctele :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < x_p = b$$

cu $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$, i = 1, 2, …, n, iar ca puncte intermediare alegem
$\zeta_i = x_{i-1}$ sau $\zeta_i^* = x_i$, i = 1, 2, …, n. Atunci:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sigma_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

sau
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sigma_n^* = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Dacă funcţia f este derivabilă, cu derivata mărginită pe [a, b], atunci

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sigma_n\right|\le A\cdot\frac{(b-a)^2}{n}$$

unde A = sup {| f '(x) |; x ∈ [a, b]}.

Observaţia 6.1.5.8. Dacă funcţia f este crescătoare pe [a, b], atunci σ_n aproximează integrala prin lipsă, iar σ_n^* prin adaos, de aceea media lor aritmetică constituie o aproximare mai bună.

Teorema 6.1.5.7. *(Metoda trapezelor)*

În condiţiile teoremei precedente, avem:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{\sigma_n+\sigma_n^*}{2}=\frac{b-a}{2n}[f(a)+2f(x_1)+...+2f(x_{n-1})+f(b)]$$

Dacă funcţia f are derivata de ordinul doi mărginită pe [a,b], atunci

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{\sigma_n+\sigma_n^*}{2}\right|\le B\cdot\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

unde B = sup {| f''(x) |; x ∈ [a, b]}.

Teorema 6.1.5.8. *(Metoda tangentelor)*

În condiţiile teoremei 6.1.5.6., luând n=2m, avem:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{m}\sum_{i=1}^{m}f(x_{2i-1})$$

Teorema 6.1.5.9. *(Metoda lui Simpson)*

În condiţiile teoremei 6.1.5.6., luând n = 2m, t_n valoarea aproximativă a integralei obţinută prin metoda trapezelor, T_n cea obţinută prin metoda tangentelor avem :

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{2t_n+T_n}{3}=\frac{b-a}{6m}[f(a)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+$$

$$...+2f(x_{2m-2})+4f(x_{2m-1})+f(b)]$$

Dacă f are derivată de ordinul patru mărginită pe [a, b], atunci

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{2t_n+T_n}{3}\right|\le M\cdot\frac{(b-a)^5}{2880m^4},$$

unde M = sup {| $f^{(4)}(x)$ |; x ∈ [a, b]}.

Observaţia 6.1.5.9. O altă metodă de aproximare a integralei simple este metoda de integrare prin dezvoltarea în serie de puteri. Această metodă, furnizată de teorema de integrare termen cu termen a unei serii de puteri constă în dezvoltarea funcţiei f în serie de puteri, integrarea termen cu termen a acestei serii, obţinerea integralei $\int_a^b f(x)dx$ ca sumă a unei serii numerice şi aproximarea acesteia cu o sumă parţială convenabilă .

6.1.6. Aplicaţii ale integralei simple

Fie f : [a, b] → R o funcţie continuă pe [a, b]. Atunci *aria domeniului* $D\subset R^2$, mărginit de graficul funcţiei f, axa ox şi dreptele de ecuaţii x = a şi x = b, este dată de

$$a(D) = \int_a^b |f(x)|dx \qquad (6.1.6.1)$$

Volumul corpului $\Omega \subset R^3$ obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox este dat de :

$$v(\Omega) = \pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (6.1.6.2)$$

Dacă funcţia f are derivate continuă pe [a, b], atunci *lungimea arcului de curbă* (γ) $\subset R^2$, care are ecuaţia y = f(x), $x \in$ [a, b] este dată de :

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)dx} \qquad (6.1.6.3)$$

6.1.7 Integrala simplă cu parametru.

Definiţia 6.1.7.1. Fie $A \subset R$, J = [a, b] $\subset R$ şi f : A x J→ R o funcţie cu proprietatea că pentru fiecare $x \in A$, funcţia t → f(x, t) este integrabilă pe

[a, b]. Funcţia F : A → R definită prin F(x) = $\int_a^b f(x,t)dt$ se numeşte *integrală cu parametru* (cu "limite fixe". Parametrul este x).

Definiţia 6.1.7.2. Fie φ, ψ : A → [a, b] două funcţii, astfel încât φ(x) ≤ ψ(x), pentru orice $x \in A$, iar pentru orice $x \in A$ funcţia t → f(x, t) este integrabilă pe intervalul [φ(x), ψ(x)]. Funcţia $\widetilde{F}$: A → R definită prin

$\widetilde{F}$ (x) = $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ se numeşte, de asemenea, *integrală cu parametru* (cu "limite variabile". Parametrul este x).

Teorema 6.1.7.1. Fie $A \subset R$ un interval nu neapărat compact,
J = [a, b] $\subset R$. Dacă funcţia f : A x J → R este continuă pe A x J, atunci funcţia F : A → R, F(x) = $\int_a^b f(x,t)dt$ este continuă pe A.

Teorema 6.1.7.2. Fie $A \subset R$ un interval nu neapărat compact,
J = [a, b] $\subset R$. Fie φ, ψ : A → [a, b] două funcţii continue pe A şi
f : A x J → R continuă pe A x J. Atunci funcţia $\widetilde{F}$: A → R
$\widetilde{F}$ (x) = $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ este continuă pe A.

Teorema 6.1.7.3. Fie $A \subset R$, A interval arbitrar, J = [a, b] $\subset R$ şi funcţia
f : A x J → R. Dacă f este continuă pe A x J, are derivată parţială în raport cu x, continuă pe A x J, atunci funcţia F: A → R, F(x) = $\int_a^b f(x,t)dt$ este derivabilă pe A şi, pentru orice $x \in A$, avem:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

În plus, funcţia F' este continuă pe A.

Teorema 6.1.7.4. Fie $A \subset \mathbb{R}$, A interval arbitrar, J = [a, b] $\subset \mathbb{R}$.
Fie φ, ψ : A → J două funcţii arbitrare de clasă C^1 pe A, f : A x J → $\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe A x J. Atunci funcţia $\widetilde{F}$: A → $\mathbb{R}$

$\widetilde{F}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ este derivabilă pe A şi pentru orice $x \in A$, avem:

$$\widetilde{F}'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt + f(x,\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Teorema 6.1.7.5. Fie $A \subset \mathbb{R}$, A interval arbitrar, J = [a, b] $\subset \mathbb{R}$. Fie
f : A x J → $\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe A x J. Atunci funcţia ,

$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ este integrabilă pe orice interval compact [α, β] ⊂ A şi are loc egalitatea

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x,t)dx \right] dt$$

Observaţia 6.1.7.1. Egalitatea din concluzia teoremei precedente se poate scrie:

$$\int_\alpha^\beta \left[\int_a^b f(x,t)dt \right] dx = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x,t)dx \right] dt$$

Această formulă arată că, în condiţiile teoremei, putem schimba ordinea de integrare.

Observaţia 6.1.7.2. Pentru integralele cu parametru cu limite variabile nu putem da în mod direct o asemenea formulă. Putem însă, prin schimbarea de variabilă:

$$t = \varphi(x) + z[\psi(x) - \varphi(x)],$$

să reducem integrala cu limite variabile la o integrală cu limite fixe, şi apoi să schimbăm ordinea de integrare. Prin urmare, dacă φ, ψ : A → [a, b] sunt continue pe A, iar f : A x J → $\mathbb{R}$ este continuă pe A x J, atunci funcţia

$\widetilde{F}$: A → $\mathbb{R}$ $\widetilde{F}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ este integrabilă pe orice interval compact [α, β] ⊂ A şi avem:

$$\int_\alpha^\beta \widetilde{F}(x)dx = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt \right] dx = \int_\alpha^\beta \left[\int_0^1 g(x,z)dz \right] dx = \int_0^1 \left[\int_\alpha^\beta g(x,z)dx \right] dz$$

unde g este funcţia g : A x [0, 1] → $\mathbb{R}$ definită prin:

$$g(x, z) = f(x, \varphi(x) + z[\psi(x) - \varphi(x)]) \cdot [\psi(x) - \varphi(x)],$$

care este evident continuă pe A x [0, 1] , ceea ce justifică ultima egalitate.