5. FUNCŢII IMPLICITE. EXTREME CONDIŢIONATE.

5.1. Noţiuni teoretice. Rezultate fundamentale.

5.1.1. Funcţii implicite.

În capitolele precedente am studiat funcţii de una sau mai multe variabile date sub formă explicită, adică de forma $y = f(x)$, unde f ne arată concret cum depinde y de x . Sunt situaţii însă când legătura între mărimile x şi y este dată implicit de o ecuaţie de forma $F(x, y) = 0$, explicitarea în raport cu y, de exemplu, nefiind posibilă întotdeauna în mod univoc.

În cele ce urmează vom arăta când este posibilă explicitarea unei ecuaţii $F(x, y) = 0$ şi ce proprietăţi putem deduce pentru explicitarea f (a cărei expresie analitică nu poate fi găsită în general) din proprietăţile funcţiei F.

Definiţia 5.1.1.1. Fie ecuaţia $F(x, y) = 0$ unde $F : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie dată, definită pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Fie D_x proiecţia lui D pe axa Ox şi fie $A \subseteq D_x$.

O funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte *soluţie* sau *explicitare* (în raport cu y) a ecuaţiei $F(x, y) = 0$ pe mulţimea A, dacă pentru orice $x \in A$, $F(x, f(x)) = 0$. Dacă există o singură explicitare f pentru ecuaţia $F(x, y) = 0$, funcţia f se numeşte *funcţie definită implicit* de ecuaţia $F(x, y)= 0$ sau, pe scurt, *funcţie implicită (de o variabilă)*

Teorema 5.1.1.1. Fie ecuaţia $F(x, y) = 0$ unde $F : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie dată, definită pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Fie $(x_0, y_0) \in D$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

1. $F(x_0, y_0) = 0;$
2. F este de clasă C^1 pe o vecinătate a punctului $(x_0, y_0);$
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$

atunci

a) există $U \in \mathcal{V}(x_0)$, $V \in \mathcal{V}(y_0)$ şi o explicitare unică $f : U \to V$ (în raport cu y) a ecuaţiei $F(x, y) = 0$ astfel încât $f(x_0) = y_0$;

b) explicitarea f este de clasă C^1 pe U şi pentru orice $x \in U$,

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

Această teoremă poate fi extinsă uşor la funcţii implicite de mai multe variabile.

Definiţia 5.1.1.2. Fie ecuaţia $F(x_1, x_2, ..., x_p; y) = 0$, unde $F : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie dată, definită pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime cu proprietatea că pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in A$ există $y \in \mathbb{R}$ încât $(x, y) \in D$. O funcţie $f: A \to \mathbb{R}$ se numeşte *soluţie* sau *explicitare* (în raport cu y) a ecuaţiei $F(x_1, x_2, ..., x_p; y) = 0$ pe mulţimea A, dacă pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in A$ avem: $F(x_1, x_2, ..., x_p; f(x_1, x_2, ..., x_p)) = 0$. Dacă există o singură explicitare f a ecuaţiei date, funcţia f se numeşte *funcţie definită implicit* de ecuaţia $F(x_1, x_2, ..., x_p; y) = 0$ sau, pe scurt, *funcţie implicită* (de variabilele reale $x_1, x_2, ..., x_p$)

Observaţia 5.1.1.1. Dacă notăm $x=(x_1,x_2, ...,x_p)$ ecuaţia $F(x_1,x_2, ..., x_p; y)=0$ se poate scrie $F(x, y) = 0$ iar soluţia $y = f(x_1, x_2, ..., x_p)$ se scrie $y = f(x)$. Deci, putem considera numai ecuaţii de forma $F(x, y) = 0$ în care x este variabilă reală sau vectorială.

Teorema 5.1.1.2. Fie ecuaţia $F(x, y) = 0$, unde $F : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie dată, definită pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$.

Fie $(x_0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, ..., x_p^0; y_0) \in D$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

1) $F(x_0, y_0) = 0;$
2) F este de clasă C^1 pe o vecinătate a punctului (x_0, y_0) ;
3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$

atunci:

a) există $U\in\mathcal{V}(x_0)$, $V\in\mathcal{V}(y_0)$ şi o explicitare unică $f:U\to V$ a ecuaţiei $F(x, y) = 0$ (în raport cu y) încât $f(x_0) = y_0$;
b) explicitarea f este de clasă C^1 pe U şi pentru orice $x\in U$ şi orice $j = 1, 2, \dots, p$ avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Să considerăm acum problema funcţiilor definite implicit prin sisteme de ecuaţii.

Definiţia 5.1.1.3. Fie $F_i:D\to\mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ funcţii date, definite pe mulţimea deschisă $D\subseteq\mathbb{R}^{p+m}$. Fie $A\subseteq\mathbb{R}^p$ o mulţime cu proprietatea că pentru orice $x = (x_1, \dots, x_p)$ există $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)\in\mathbb{R}^m$ astfel încât $(x, y)\in D$. Un sistem de funcţii $\{f_i:A\to\mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m\}$ se numeşte *soluţie* sau *explicitare* (în raport cu variabilele $y_1, y_2, \dots, y_m$) pe mulţimea A a sistemului de ecuaţii $F_i(x, y) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ dacă $F_i(x, f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) = 0$ pentru orice $i = 1, 2, \dots, m$ şi orice $x\in A$.

Dacă sistemul de ecuaţii dat are pe mulţimea A o singură soluţie $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, spunem că funcţiile $f_1, f_2, \dots, f_m$ sunt *definite implicit de sistemul de ecuaţii* dat sau, pe scurt, sistemul de funcţii $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ este un *sistem de funcţii implicite* (de variabilele $x_1, x_2, \dots, x_p$)

Observaţia 5.1.1.2. Dacă pentru simplificarea scrierii, se notează $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, atunci F este o funcţie vectorială definită pe mulţimea deschisă $D\subseteq\mathbb{R}^{p+m}$ cu valori în $\mathbb{R}^m$, iar sistemul se scrie mai simplu:

$$F(x, y) = \theta_{\mathbb{R}^m}$$

Dacă se notează $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ atunci f este o funcţie vectorială definită pe mulţimea deschisă $A\subseteq\mathbb{R}^p$ cu valori în $\mathbb{R}^m$. A spune că sistemul de funcţii $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ este o soluţie a sistemului de ecuaţii dat revine la a spune că funcţia vectorială f este o soluţie a ecuaţiei vectoriale

$$F(x, y) = \theta_{\mathbb{R}^m}$$

adică $F(x, f(x)) = \theta_{\mathbb{R}^m}$ pentru orice $x\in A$. În acest fel, un sistem de m funcţii implicite reale, definite de un sistem de m ecuaţii, este echivalent cu o singură funcţie implicită vectorială, definită de o ecuaţie vectorială. Se poate extinde acum uşor, teorema de explicitare de la ecuaţii la sisteme.

Teorema 5.1.1.3. Fie sistemul:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_p; y_1, y_2, \dots, y_m) = 0,\ i = 1, 2, \dots, m$$

unde $F_i : D\to\mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ sunt funcţii date, definite pe mulţimea deschisă $D\subseteq\mathbb{R}^{p+m}$. Fie $(x_0, y_0) = (x_1^0, \dots, x_p^0; y_1^0, \dots, y_m^0)\in D$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

1) $F_i(x_0, y_0) = 0, i = 1, 2, \dots, m$;
2) Funcţiile F_i, $i = 1, 2, \dots, m$ sunt de clasă C^1 pe o vecinătate a punctului (x_0, y_0);
3) $\dfrac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}(x_0, y_0) \neq 0$,

atunci

a) există $U\in\mathcal{V}(x_0)$, $V\in\mathcal{V}(y_0)$ şi o explicitare unică $f:U\to V$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ a sistemului dat astfel încât $f(x_0) = y_0$;
b) funcţiile reale $f_1, f_2, \dots, f_m$ sunt de clasă C^1 pe U şi

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{D(F_1, \dots, F_i, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, x_j, \dots, y_m)}(x, f(x))}{\frac{D(F_1, \dots, F_i, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_i, \dots, y_m)}(x, f(x))}$$

pentru orice $x\in U$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, p$.

(determinantul de la numărător se obţine din jacobianul de la numitor prin înlocuirea coloanei derivatelor în raport cu y_i cu coloana derivatelor în raport cu x_j).

Observaţia 5.1.1.3. a) Oricare dintre cele trei teoreme anterioare reprezintă o teoremă de existenţă a funcţiei implicite f (scalare sau vectoriale, de una sau mai multe variabile); sunt date condiţii suficiente care

asigură existenţa funcţiei implicite, de clasă C^1, fără a da o metodă efectivă de explicitare, acest lucru nefiind, în general, posibil.
b) Punctele critice ale funcţiei $y = y(x)$ definită implicit de ecuaţia $F(x,y)= 0$ se determină punând condiţia necesară $y' = 0$, adică rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0 \end{cases}$$

Pentru precizarea punctelor de extrem se află semnul lui y'' în fiecare din punctele critice.

c) Dacă $F : D\to\mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^2 pe mulţimea deschisă $D\subseteq\mathbb{R}^3$ ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ defineşte local, în condiţiile teoremei 5.1.1.2., o funcţie $z = z(x, y)$, astfel încât să aibă loc identitatea $F(x, y; z(x, y)) = 0$; deşi, în general, această funcţie nu se poate explicita efectiv, se pot calcula derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi ale lui z, iar pentru a determina extremele locale ale funcţiei z, se determină mai întâi punctele critice, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\neq 0 \end{cases}$$

Se determină apoi semnul expresiei $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$ în fiecare dintre punctele critice, apoi semnul lui $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ în fiecare dintre punctele în care această expresie este strict pozitivă.

5.1.2. Transformări punctuale în $\mathbb{R}^p$. Schimbări de coordonate.

Se ştie că o funcţie reală de o variabilă reală f este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă, iar, în anumite condiţii, unele proprietăţi ale funcţiei f se transmit funcţiei inverse f^{-1}. A determina f^{-1} este echivalent cu a explicita, în raport cu x, ecuaţia $f(x) - y = 0$.

Pentru funcţii de mai multe variabile, problema inversării este mai complicată. Dacă $A\subseteq\mathbb{R}^p$ şi $f : A \to \mathbb{R}^m$ este o funcţie vectorială de componente $f_1, f_2, \ldots, f_m$, ecuaţia vectorială $f(x) - y = \theta_{\mathbb{R}^m}$ este echivalentă cu sistemul

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) - y_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

iar determinarea inversei (atunci când există) revine la explicitarea sistemului în raport cu variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Conform celor prezentate în teorema 5.1.1.3., numărul variabilelor ce pot fi explicitate coincide cu numărul de ecuaţii; prin urmare, trebuie ca $m = p$, iar pentru a putea utiliza teorema 5.1.1.3. trebuie considerate funcţii de clasă C^1. De aceea, în cele ce urmează, considerăm $A\subseteq\mathbb{R}^p$ mulţime deschisă, $T : A \to \mathbb{R}^p$ de clasă C^1 pe A şi căutăm condiţii care să asigure existenţa inversei $T^{-1}: B \to A$, unde
$B = T(A)$, precum şi diferenţiabilitatea lui T^{-1}.

Definiţia 5.1.2.1. Fie $A\subseteq\mathbb{R}^p$, $B\subseteq\mathbb{R}^p$ mulţimi deschise.
O aplicaţie $T:A \to B$ de clasă C^1 pe A se numeşte *transformare punctuală* de la A la B.

Prin aplicaţia T,de componente $f_1, f_2, ..., f_p$,oricărui punct $x=(x_1, x_2, ..., x_p) \in A$ îi corespunde un punct bine determinat $y = (y_1, y_2, ..., y_p) \in B$ unde $y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_p), ..., y_p = f_p(x_1, ..., x_p)$ ceea ce justifică denumirea de transformare punctuală.

Definiţia 5.1.2.2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $B \subseteq \mathbb{R}^p$ mulţimi deschise. O transformare punctuală $T:A \to B$ se numeşte *difeomorfism* (sau *transformare regulată*) dacă T este bijectivă şi inversa ei $T^{-1}: B \to A$ este o transformare punctuală de la B la A.

Aplicând teorema 5.1.1.3. pentru sistemul $f_i(x_1, ..., x_p) - y_i = 0$, $i = 1, 2, ..., p$, în teorema următoare sunt date condiţii suficiente pentru ca transformarea punctuală T, de componente $f_1, f_2, ..., f_p$ să aibă o restricţie inversabilă, iar inversa să fie tot o transformare punctuală, adică, local, să fie difeomorfism.

Teorema 5.1.2.1. (de inversiune locală) Fie $T : A \to \mathbb{R}^p$ o transformare punctuală, de componente $f_1, f_2, ..., f_p$, pe mulţimea deschisă $A \subseteq \mathbb{R}^p$ şi fie $x_0 \in A$ un punct astfel încât

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_p)}{D(x_1, x_2, ..., x_p)}(x_0) \neq 0$$

Atunci există o vecinătate deschisă U_0 a punctului x_0 şi o vecinătate deschisă V_0 a punctului $y_0 = T(x_0)$, astfel ca T să fie difeomorfism de la U_0 la V_0.

Observaţia 5.1.2.1. a) Dacă $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ sunt componentele transformării inverse T^{-1}, ţinând seama de observaţia 4.1.4.1. b), avem:

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_p)}{D(x_1, x_2, ..., x_p)}(x_0) \cdot \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)}{D(y_1, y_2, ..., y_p)}(T(x_0)) = 1 ,$$

adică :

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)}{D(y_1, y_2, ..., y_p)}(T(x_0)) = \left[\frac{D(f_1, f_2, ..., f_p)}{D(x_1, x_2, ..., x_p)}(x_0)\right]^{-1}$$

Această egalitate corespunde formulei care dă derivata funcţiei inverse a unei funcţii derivabile de o variabilă. Deci, din acest punct de vedere, în cazul transformărilor punctuale, rolul derivatei îl joacă jacobianul transformării.

b) Rezultatul stabilit în teorema 5.1.2.1. are un caracter local, chiar dacă jacobianul transformării este nenul în orice punct din A. De exemplu, dacă $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este transformarea dată prin $x(r, \theta) = r\cos \theta$, $y(r, \theta) = r\sin \theta$ jacobianul transformării T este $\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = r$; conform teoremei 5.1.2.1., orice punct (r, θ) cu $r \neq 0$ are o vecinătate în care transformarea T este bijectivă, dar T nu este bijectivă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ din cauza periodicităţii funcţiilor *sin* şi *cos*, imaginile punctelor diferite (r, θ), $(r, \theta + 2\pi)$ coincid, deci T nu este injectivă.

Definiţia 5.1.2.3. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă. O transformare punctuală injectivă $T : A \to \mathbb{R}^p$ care stabileşte un difeomorfism de la A la $B = T(A)$ se numeşte *schimbare de coordonate* în A. Dacă $f_1, f_2, ..., f_p$ sunt componentele lui T, atunci pentru orice $x \in A$, numerele $f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)$ se numesc *coordonatele lui x în sistemul de coordonate T.*

Exemplul 5.1.2.1. Fie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ şi } y > 0\}$.

Aplicaţia $T : A \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (r, \theta)$ unde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = arctg \frac{y}{x}$ este o schimbare de coordonate, numită trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare în A.

Observaţia 5.1.2.2. Teorema 5.1.2.1. afirmă că, dacă T este o transformare punctuală cu jacobianul nenul într-un punct x_0, atunci, local, (într-o vecinătate a lui x_0) T este o schimbare de coordonate.

5.1.3. Extreme condiţionate. Puncte de extrem global.

Ne punem mai întâi problema determinării extremelor unei funcţii luând în considerare valorile acesteia doar în punctele care îndeplinesc anumite condiţii suplimentare date. De exemplu, dacă se cere să se determine acel punct al planului $x + y + z = 1$ care se află la cea mai mică distanţă faţă de origine, trebuie să determinăm, evident, minimul funcţiei $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ luând în considerare doar tripletele (x, y, z) care îndeplinesc condiţia $x + y + z = 1$. Aceasta este o problemă simplă de extrem condiţionat. O cale naturală de rezolvare este următoarea: se explicitează ecuaţia dată în raport cu z, de exemplu, se introduce z în expresia funcţiei şi se obţine o problemă de extrem obişnuit pentru funcţia de două variabile obţinută (care reprezintă restricţia funcţiei d la planul considerat). Deoarece practic această explicitare, în general, nu este realizabilă, se recurge la o metodă indirectă, bazată pe teorema funcţiilor implicite, pe care o vom prezenta în continuare.

Definiţia 5.1.3.1. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^{p+m}$ o mulţime deschisă , $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe D. Presupunem că între variabilele $x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m$ există m condiţii (restricţii, legături): $g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0, i = 1, 2, ..., m$, unde $g_i : D \to \mathbb{R}, i = 1, ..., m$ sunt de clasă C^1 pe D. Fie

$$M = \{(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) \in D: g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0,\ i = 1, 2, ..., m\}$$

Se numeşte *punct de extrem local al funcţiei f condiţionat de* $g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0, i = 1, 2, ..., m$ orice punct $(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0) \in M$ pentru care există o vecinătate $V \subseteq D$, încât diferenţa $f(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) - f(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0)$ să aibă semn constant pe $M \cap V$.

Utilizând teorema 5.1.1.3. pentru sistemul $g_i(x_1,..., x_p;y_1, ..., y_m) = 0$, $i = 1, 2, ..., m$, teorema care urmează dă condiţii necesare ca un punct să fie punct de extrem local condiţionat pentru o funcţie dată.

Teorema 5.1.3.1. (Lagrange) Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^{p+m}$. Fie $(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0) \in D$ un punct de extrem local al funcţiei f, condiţionat de legăturile $g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0$, $i = 1, 2, ..., m$ unde funcţiile $g_i : D \to \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., m$ sunt de clasă C^1 pe D şi

$$\frac{D(g_1, g_2, ..., g_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)}(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0) \neq 0$$

Atunci există m numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ astfel încât punctul $(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0)$ să fie punct critic pentru funcţia

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + ... + \lambda_m g_m$$

(Numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ se numesc *multiplicatori Lagrange*, iar funcţia F se numeşte *funcţie Lagrange*)

Observaţia 5.1.3.1. Dacă

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_p) = f(x_1, ..., x_p; y_1(x_1, ..., x_p), ..., y_m(x_1, ..., x_p))$$

unde $y_1 = y_1(x_1, ..., x_p), y_2 = y_2(x_1, ..., x_p), ..., y_m = y_m((x_1, ..., x_p))$ sunt explicitări locale ale sistemului $g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0$, $i = 1, 2, ..., m$ atunci funcţia Φ reprezintă restricţia funcţiei f la mulţimea M şi, evident, $(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0)$ este punct de extrem local pentru f, condiţionat de $g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0$, $i = 1, 2, ..., m$ dacă şi numai dacă $(x_1^0, ..., x_p^0)$ este punct de extrem local pentru funcţia Φ. Prin urmare, în practică, teorema 5.1.3.1. se aplică astfel: fiind date funcţia f şi legăturile $g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0$, $i = 1, 2, ..., m$ se consideră funcţia Lagrange $F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + ... + \lambda_m g_m$ cu numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ nedetrminate; se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0, j = 1, 2, ..., p \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_i}(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0, i = 1, 2, ..., m \\ g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m \end{cases}$$

Acest sistem are $p + 2m$ ecuaţii şi $p + 2m$ necunoscute. Dacă $x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$ este o soluţie a acestui sistem, atunci $(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0)$ este punct critic pentru funcţia Lagrange F corespunzătoare multiplicatorilor $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$. Pentru a vedea dacă $(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0)$ este punct de extrem condiţionat pentru f este suficient să verificăm dacă $(x_1^0, ..., x_p^0)$ este punct de extrem local pentru funcţia Φ; dacă f şi g_i, $i = 1, 2, ..., m$ sunt funcţii de clasă C^2 putem studia hessiana funcţiei Φ în punctul $(x_1^0, ..., x_p^0)$.

Definiţia 5.1.3.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară $x_0 \in A$. Punctul x_0 se numeşte *punct de extrem global* al funcţiei *f* dacă diferenţa $f(x) - f(x_0)$ are semn constant pe *A*. Mai precis, punctul x_0 se numeşte *punct de maxim* (respectiv *minim*) *global* al lui *f* dacă pentru orice $x \in A$ avem $f(x) - f(x_0) \leq 0$ (respectiv $f(x) - f(x_0) \geq 0$)

Observaţia 5.1.3.2. Dacă *f* este de clasă C^1 pe *A* atunci *f* este diferenţiabilă şi, prin urmare, continuă pe *A*. Ţinând seama de teorema 3.1.5.4., dacă *A* este compactă atunci *f* este mărginită şi îşi atinge marginile pe *A*. Prin urmare, există $x_*, x^* \in A$ astfel încât $f(x_*) = \inf f(A)$, $f(x^*) = \sup f(A)$. Evident, x_* este punct de minim global, iar x^* este punct de maxim global pentru funcţia *f*. Dacă $Int(A)$ reprezintă interiorul mulţimii *A*, iar $Fr(A)$ reprezintă frontiera mulţimii *A*, atunci:

$$Int(A) = \{ x \in A : \exists V \in \mathcal{V}(x), V \subset A \}$$

$$Fr(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \forall\ V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset \text{ şi } V \cap CA \neq \emptyset \}$$

Deoarece *A* este compactă (deci mărginită şi închisă) avem:

$A = Int(A) \cup Fr(A)$.

Deoarece $x_* \in A$ deducem că $x_* \in Int(A)$ sau $x_* \in Fr(A)$.

Dacă $x_* \in Int(A)$, atunci x_* este punct de minim local pentru *f*, iar dacă $x_* \in Fr(A)$, presupunând că $Fr(A)$ poate fi definită prin ecuaţii carteziene, atunci x_* este punct de minim pentru *f*, condiţionat de aceste ecuaţii. O discuţie asemănătoare are loc pentru x^*.

Astfel, dacă se cer marginile unei funcţii de clasă C^1 pe o mulţime compactă *A* (punctele de extrem global) se aplică teorema lui Fermat pentru a determina punctele de extrem local situate în interiorul mulţimii compacte şi teorema lui Lagrange pentru cele care se află pe frontieră. Având asigurată existenţa punctelor x_*, x^* (prin teorema 3.1.5.4.) este suficient să calculăm valorile funcţiei *f* în toate punctele staţionare determinate şi să reţinem valorile extreme.