4. FUNCŢII DIFERENŢIABILE. EXTREME LOCALE.

4.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale.

4.1.1. Diferenţiabilitatea funcţiilor reale de o variabilă reală.

Multe probleme concrete conduc la evaluarea aproximativă a creşterii unei anumite mărimi în raport cu creşterea alteia. Pentru simplitatea ei este preferată aproximarea liniară.

Fiind dată o funcţie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ şi un punct fixat $x_0 \in (a, b)$ se caută o funcţie liniară L_{x_0} astfel încât creşterea funcţiei f în punctul x_0, relativă la creşterea h a argumentului, să poată fi aproximată cu $L_{x_0}(h)$, adică:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx L_{x_0}(h)$$

pentru h suficient de mic. Pentru ca o asemenea formulă aproximativă să poată fi acceptată este necesar ca:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$$

ceea ce asigură că eroarea în formula de aproximare poate fi făcută oricât de mică pentru variaţii din ce în ce mai mici ale argumentului.

Apar în mod natural o serie de probleme, cum ar fi: existenţa şi unicitatea aplicaţiei liniare L_{x_0}, precum şi caracterizarea funcţiilor f pentru care pot fi considerate asemenea aproximări liniare.

Din liceu se ştie că pentru o funcţie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilă în punctul $x_0 \in (a, b)$, poate fi considerată formula de aproximare:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot h$$

pentru h suficient de mic.

Aceste consideraţii conduc, în mod natural, la următoarea definiţie:

Definiţia 4.1.1.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcţia f se numeşte *diferenţiabilă în punctul* x_0 dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$$

Observaţia 4.1.1.1. a) Orice funcţie liniară L: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de forma $L(x) = c \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$, unde $c = L(1)$; reciproc, oricare ar fi $c \in \mathbb{R}$, fixat, egalitatea $L(x) = c \cdot x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, defineşte o funcţie liniară L: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prin urmare, orice aplicaţie liniară de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$ este bine determinată de o constantă reală. Deducem astfel că funcţia f este diferenţiabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă există $c_{x_0} \in \mathbb{R}$, încât:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - c_{x_0}\cdot h}{h} = 0$$

b) Egalitatea $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$ poate fi scrisă echivalent:

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)|}{|h|} = 0$$

Ultima egalitate prezintă avantajul că poate fi uşor transcrisă pentru funcţii de la $\mathbb{R}^p$ la $\mathbb{R}^m$ înlocuind modulul din $\mathbb{R}$ cu norma din $\mathbb{R}^p$, respectiv din $\mathbb{R}^m$.

Teorema următoare stabileşte faptul că o funcţie reală de o variabilă reală este diferenţiabilă într-un punct fixat x_0 dacă şi numai dacă ea este derivabilă în acest punct.

Teorema 4.1.1.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Dacă f este diferenţiabilă în x_0, atunci f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = L_{x_0}(1)$. Dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este diferenţiabilă în x_0 şi $L_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h$.

Observaţia 4.1.1.2. Din această teoremă se deduce imediat că aplicaţia liniară L_{x_0} din definiţia 4.1.1.1. este unic determinată de f şi x_0.

Definiţia 4.1.1.2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară. Dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul fixat $x_0 \in A$, aplicaţia liniară L_{x_0} se numeşte *diferenţiala funcţiei f în punctul x_0* şi se notează df_{x_0}. Funcţia f se numeşte *diferenţiabilă pe mulţimea A* dacă este diferenţiabilă în fiecare punct $x \in A$. În acest caz, notând prin $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$, funcţia $df : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definită prin $(df)(x) = df_x$ se numeşte *diferenţiala funcţiei f pe mulţimea A*.

Observaţia 4.1.1.3. a) Cunoaşterea funcţiei $df : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ revine la cunoaşterea funcţiei $df_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pentru orice $x \in A$. Din teorema 4.1.1.1. deducem că pentru orice $x \in A$ şi orice $h \in \mathbb{R}$ avem:

$$(df)(x)(h) = df_x(h) = f'(x) \cdot h$$

b) Funcţia identitate pe A, $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$ este diferenţiabilă pe A şi diferenţiala sa, *notată cu dx*, este egală, în fiecare punct $x \in A$, cu funcţia identitate pe $\mathbb{R}$. Prin urmare, $dx : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ şi $(dx)(x) = 1_{\mathbb{R}}$ pentru orice $x \in A$, adică, oricare ar fi $x \in A$ şi oricare ar fi $h \in \mathbb{R}$, $(dx)(x)(h) = h$.

c) Cu ajutorul diferenţialei funcţiei identitate pe A putem exprima diferenţiala funcţiei f diferenţiabile pe A, astfel:

$$df = f' \cdot dx$$

Este evident că studiul funcţiilor reale de o variabilă reală, diferenţiabile se reduce la studiul funcţiilor derivabile, cunoscut din liceu.

4.1.2. Diferenţiabilitatea funcţiilor vectoriale de o variabilă reală.

Ţinând seama de observaţia 4.1.1.1. b), definiţia 4.1.1.1. se poate exprima astfel:

Definiţia 4.1.2.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcţie vectorială de o variabilă reală arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcţia f se numeşte *diferenţiabilă în punctul x_0* dacă există o aplicaţie liniară

$L_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ astfel incât:

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{\| f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h) \|}{|h|} = 0$$

(la numărător se consideră norma euclidiană din $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$)

Ţinând seama de faptul că, în $\mathbb{R}^m$, operaţiile algebrice şi trecerea la limită se fac pe componente, rezultă imediat:

Teorema 4.1.2.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcţie vectorială de o variabilă reală, de componente $f_k : A \to \mathbb{R}$ $k = 1, 2, \ldots, m$, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcţia f este diferenţiabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt diferenţiabile în x_0. Ţinând seama de teorema 4.1.1.1. şi de faptul că $L_{x_0}(h) = (c_1 h, c_2 h, \ldots, c_m h)$, unde $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ se obţine $L_{x_0}(h) = (f'_1(x_0) \cdot h, f'_2(x_0) \cdot h, \ldots, f'_m(x_0) \cdot h) = (f'_1(x_0), f'_2(x_0), \ldots, f'_m(x_0)) \cdot h$.

Prin urmare, şi în acest caz, aplicaţia liniară L_{x_0} din definiţie este bine determinată de funcţia f şi punctul x_0, mai exact de vectorul $(f'_1(x_0), f'_2(x_0), \ldots, f'_m(x_0))$ unic determinat de f şi x_0.

Vom nota L_{x_0} cu df_{x_0} şi o vom numi *diferenţiala funcţiei f în punctul x_0*; vom nota:

$$(f'_1(x_0), f'_2(x_0), \ldots, f'_m(x_0)) = f'(x_0)$$

şi vom numi acest vector *derivata funcţiei vectoriale f în punctul x_0*. Atunci, evident $df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h$ pentru orice $h \in \mathbb{R}$.

Să reţinem deci că derivarea şi diferenţierea unei funcţii vectoriale de o variabilă reală se realizează ca şi trecerea la limită sau studiul continuităţii, pe componente.

4.1.3. Derivate parţiale. Diferenţiabilitatea funcţiilor reale de variabilă vectorială. Extreme locale.

Considerăm $\mathbb{R}^p$ înzestrat cu norma euclidiană, $p \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o submulţime deschisă.

Ţinând seama de observaţia 4.1.1.1. b), definiţia 4.1.1.1. se extinde astfel:

Definiţia 4.1.3.1. Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ se numeşte *diferenţiabilă în punctul* $x_0 \in A$ dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)|}{\|h\|} = 0$$

(la numitor se consideră norma euclidiană din $\mathbb{R}^p$, $p \geq 2$)

Observaţia 4.1.3.1. Deoarece aplicaţia L_{x_0} este liniară, pentru orice $h \in \mathbb{R}^p$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$ avem: $L_{x_0}(h) = c_1^0 h_1 + c_2^0 h_2 + \ldots + c_p^0 h_p$, unde $c_i^0 \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$.

În ideea de a stabili legătura între numerele $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_p^0$ şi funcţia f, se poate arăta că, dacă f este diferenţiabilă în x_0, deci aplicaţia L_{x_0} există,

$$c_i^0 = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_p^0) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_p^0)}{h_i}$$

$$i = 1, 2, \ldots, p$$

Prin urmare, şi în acest caz, aplicaţia liniară L_{x_0} din definiţie este unic determinată de funcţia f şi punctul x_0.

Vom nota L_{x_0} cu df_{x_0} şi o vom numi *diferenţiala funcţiei f în punctul* x_0.

Limita de mai sus se numeşte *derivata parţială a funcţiei f în raport cu variabila* x_i *în punctul* x_0 şi se notează $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Deci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_p^0) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_p^0)}{h_i}$$

$$i = 1, 2, \ldots, p$$

Rezultă astfel:

Teorema 4.1.3.1. Dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul x_0 atunci f are derivate parţiale în acest punct în raport cu toate variabilele şi:

$$df_{x_0}(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdot h_2 + \ldots + + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0) \cdot h_p$$

pentru orice $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p) \in \mathbb{R}^p$.

Observaţia 4.1.3.2. a) Rolul derivatei de la funcţii de o variabilă îl joacă vectorul $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0)\right)$ care se numeşte *gradientul funcţiei f în punctul* x_0 şi se notează $(grad\, f)(x_0)$.

Evident, $df_{x_0}(h) = (grad\, f)(x_0) \cdot h$, pentru orice $h \in \mathbb{R}^p$.

b) Dacă f are derivate parţiale în x_0, în raport cu toate variabilele nu rezultă, în general, că f este diferenţiabilă în x_0. De exemplu, dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \text{ si } y \neq 0 \\ 0, x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases}$ atunci există $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, dar f nu este diferenţiabilă în $(0, 0)$. Dacă f ar fi diferenţiabilă în $(0, 0)$ ţinând seama de teorema precedentă, $L_{(0, 0)}(h) = 0$ pentru orice $h \in \mathbb{R}^p$.

Raportul $\frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)-L_{(0,0)}(h_1,h_2)|}{\|h\|} = \frac{1}{\|h\|}$ nu are însă limita zero când $\|h\| \to 0$, deci f nu este diferenţiabilă în $(0, 0)$.

c) Fie $i \in \{1,2,...,p\}$ arbitrar, fixat. Fie $\Pi_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\Pi_i(x_1, x_2, ..., x_p) = x_i$ aplicaţia de proiecţie. Oricare ar fi $x_0 \in \mathbb{R}^p$, Π_i este diferenţiabilă în x_0 şi

$(d\,\Pi_i)_{x0} = \Pi_i$. De obicei se notează $d\,\Pi_i$ cu dx_i. Astfel, $(dx_i)_{x0}(h_1, h_2, ..., h_p) = = \Pi_i(h_1, h_2, ..., h_p) = h_i$. Cu ajutorul diferenţialelor aplicaţiilor de proiecţe, diferenţiala unei funcţii diferenţiabile arbitrare se exprimă astfel:

$$df_{x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\cdot(dx_1)_{x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\cdot(dx_2)_{x_0} + \ldots + + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0)\cdot(dx_p)_{x_0}$$

aceasta fiind o egalitate de aplicaţii din $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

Dacă f este diferenţiabilă în orice punct din A, atunci, evident, obţinem:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}\cdot dx_p$$

aceasta fiind o egalitate de aplicaţii definite pe A cu valori în $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, unde $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ este funcţia care asociază fiecărui punct din A numărul real care este derivata parţială a funcţiei f în raport cu variabila x_i în acest punct.

Definiţia 4.1.3.2. Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ se numeşte *derivabilă parţial pe mulţimea A* dacă are derivate parţiale în raport cu toate variabilele sale în orice punct din A. În acest caz se pot defini p funcţii $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: $A \to \mathbb{R}$, $x \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, 2, ..., p$ numite *derivatele parţiale* ale lui f pe mulţimea A. Funcţia f este de clasă C^1 pe A şi se notează $f \in C^1(A)$ dacă f este derivabilă parţial pe A şi funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2,..., p$ sunt continue pe A.

Teorema 4.1.3.2. Dacă funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este derivabilă parţial pe o vecinătate deschisă V a punctului $x_0 \in A$, iar funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x_i} : V \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., p$ sunt continue în x_0, atunci funcţia f este diferenţiabilă în x_0.

Dacă $f \in C^1(A)$ atunci f este diferenţiabilă pe A.

Observaţia 4.1.3.3. Continuitatea derivatelor parţiale în x_0 este o condiţie suficientă pentru diferenţiabilitatea funcţiei f în acest punct, dar nu neapărat necesară. De exemplu, funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

este diferenţiabilă în origine fără ca derivatele sale parţiale să fie continue în acest punct (vezi exerciţiul 4.3.4.).

Definiţia 4.1.3.3. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o submulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$,

$x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_p^0) \in A$ şi fie $v = (v_1, v_2, \ldots, v_p) \in \mathbb{R}^p$ un versor dat

($\|v\| = 1$). Funcţia f se numeşte *derivabilă în punctul x_0 după versorul v* dacă există în $\mathbb{R}$ $\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$. Notăm această limită cu $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ şi o numim *derivata funcţiei f după versorul* v *în punctul x_0*.

Observaţia 4.1.3.4. a) Notând $x = x_0 + tv$ rezultă că vectorul $x - x_0$ este coliniar cu v, iar t este abscisa punctului x pe dreapta determinată de x_0 şi v, orientată cu ajutorul lui v. Cu această notaţie, putem scrie:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x - x_0 = tv}} \frac{f(x) - f(x_0)}{t}$$

ceea ce justifică terminologia utilizată.

b) Notând cu $v^* = -v$ (versorul opus) se observă imediat că dacă există $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ atunci există $\frac{\partial f}{\partial v^*}(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$; acest fapt justifică de ce derivata $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ este asociată versorului şi nu direcţiei (care admite doi versori)

c) Dacă $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ este baza canonică a lui $\mathbb{R}^p$, atunci derivata funcţiei f după versorul e_k este tocmai derivata parţială în raport cu variabila x_k, adică

$$\frac{\partial f}{\partial e_k}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0),\ k = 1, 2, ..., p$$

Prin urmare, derivatele parţiale ale unei funcţii într-un punct sunt cazuri particulare de derivate după versori în acel punct.

Teorema 4.1.3.3. Dacă funcţia f este diferenţiabilă în x_0, atunci există $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ pentru orice versor $v \in \mathbb{R}^p$ şi $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df_{x_0}(v)$.

Ţinând seama de teorema 4.1.3.1. deducem că:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = (grad\, f)(x_0) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdot v_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0) \cdot v_p$$

Deci, dacă f este diferenţiabilă în x_0, atunci ea are derivată după orice versor în x_0 şi aceasta se poate exprima cu ajutorul derivatelor parţiale în acest punct.

Definiţia 4.1.3.4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o submulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă parţial în raport cu variabila x_k pe o vecinătate V a punctului fixat $x_0 \in A$. Dacă funcţia $\frac{\partial f}{\partial x_k} : V \to \mathbb{R}$ este derivabilă parţial în raport cu variabila x_j, $j \neq k$ în punctul x_0, atunci f se numeşte *de două ori derivabilă parţial* în punctul x_0, în raport cu variabilele x_j şi x_k, iar $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(x_0)$ se notează $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)$ şi se numeşte *derivata parţială mixtă de ordinul doi a funcţiei f în punctul x_0 în raport cu variabilele x_j şi x_k*. Dacă $j = k$, în condiţiile de mai sus, funcţia se numeşte de două ori derivabilă parţial în punctul x_0, în raport cu variabila x_k, iar $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(x_0)$ se notează $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x_0)$ şi se numeşte *derivata parţială de ordinul doi a funcţiei f în punctul x_0 în raport cu variabila x_k.*

Dacă funcţia f este de două ori derivabilă parţial în raport cu variabilele x_j şi x_k în fiecare punct din A, spunem că f este de două ori derivabilă parţial în raport cu variabilele x_j şi x_k pe A, iar aplicaţia

$x \to \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)$ se numeşte *derivata parţială de ordinul doi a funcţiei f în raport cu variabilele x_j şi x_k.*

Evident, j şi k pot lua oricare din valorile $1, 2, ..,p$ deci, pentru o funcţie de p variabile, se pot defini p^2 derivate parţiale de ordinul doi, dintre care $p^2 - p$ sunt mixte.

Funcţia f se numeşte *de clasă C^2* pe mulţimea A, dacă toate derivatele parţiale de ordinul doi există şi sunt continue pe A.

Observaţia 4.1.3.5. Pentru funcţii de două variabile există patru derivate parţiale de ordinul doi: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Pentru unele funcţii derivatele mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sunt egale. În schimb, pentru funcţia

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\qquad , (x, y) = (0,0) \end{cases}$, avem:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$. (vezi exerciţiul 4.3.10.)

Deci, în acest caz, derivatele parţiale mixte în (0, 0) nu sunt egale. Teorema următoare dă condiţii suficiente pentru egalitatea derivatelor parţiale mixte.

Teorema 4.1.3.4. (H.A. Schwarz) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă,

$f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe A. Atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$,

$j, k = 1, 2, \ldots, p$.

Observaţia 4.1.3.6. Continuitatea derivatelor mixte este o condiţie suficientă, dar nu neapărat necesară, pentru egalitatea acestora. De exemplu, pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right), y \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad , y = 0 \end{cases}$ avem

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$, dar funcţia $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nu este continuă în origine. (vezi exerciţiul 4.3.11.)

Definiţia 4.1.3.5. Matricea $H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)\right)$, $j, k = 1, 2, \ldots, p$ se numeşte *hessiana funcţiei f în punctul x_0*.

În cazul în care f este de clasă C^2 matricea $H_f(x_0)$ este o matrice simetrică. În acest caz, forma pătratică determinată de această matrice, adică aplicaţia $\varphi_{x_0} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\varphi_{x_0}(h) = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j$ joacă un rol foarte important în determinarea punctelor de extrem local pentru o funcţie reală de mai multe variabile reale.

Definiţie 4.1.3.6. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară. Un punct $x_0 \in A$ se numeşte *punct de extrem local al funcţiei f* dacă există o vecinătate V a punctului x_0 în care diferenţa $f(x) - f(x_0)$ are semn constant. Mai precis, punctul x_0 se numeşte *punct de maxim* (respectiv de *minim*) *local* al lui f dacă pentru orice $x \in V$ avem $f(x) - f(x_0) \leq 0$ (respectiv $f(x) - f(x_0) \geq 0$). Un punct $x_0 \in A$ se numeşte *punct critic* (sau *staţionar*) pentru funcţia f, dacă f are derivate parţiale de ordinul întâi nule în x_0, adică $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Teorema următoare stabileşte condiţii necesare de extrem.

Teorema 4.1.3.5. (Fermat) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă. Dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ are derivate parţiale de ordinul întâi în punctul $x_0 \in A$ şi x_0 este punct de extrem local al lui f, atunci x_0 este punct critic (staţionar) pentru f.

Observaţia 4.1.3.7. Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă parţial în raport cu toate variabilele pe mulţimea deschisă $A \subseteq \mathbb{R}^p$ atunci punctele de extrem local ale funcţiei f se află printre soluţiile situate în A ale sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_p) = 0, \ i = 1,2,...,p$$

Nu orice soluţie a acestui sistem este un punct de extrem. De exemplu, pentru funcţia $f(x, y) = x^3 - y^3$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, singurul punct critic este (0, 0), dar $f(x, y) - f(0, 0)$ nu păstrează un semn constant în nici o vecinătate a originii. Prin urmare, (0, 0) este punct critic, dar nu este punct de extrem pentru f.

În cele ce urmează, în cazul în care f este de clasă C^2 vom da condiţii suficiente prin utilizarea cărora să se poată decide care din punctele critice ale unei funcţii sunt puncte de extrem.

Teorema 4.1.3.6. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă şi convexă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe A. Fie $x_0 \in A$ un punct critic al funcţiei f şi φ_{x_0} forma pătratică determinată de matricea hessiană $H_f(x_0)$. Dacă forma pătratică φ_{x_0} este pozitiv definită (negativ definită) atunci x_0 este punct de minim (respectiv de maxim) local pentru f.

În demonstraţia acestei teoreme este foarte utilă formula lui Taylor cu restul de ordinul doi:

Dacă , $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^2 pe mulţimea deschisă şi convexă A, iar $x_0 \in A$ este un punct fixat, atunci, pentru orice $x \in A$ există ξ pe segmentul $[x_0, x]$ astfel încât:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

Observaţia 4.1.3.8. a) Dacă f este de clasă C^2 pe A, matricea hessiană în orice punct este o matrice simetrică, deci toate valorile ei proprii sunt reale. Dacă $H_f(x_0)$ are toate valorile proprii strict pozitive (respectiv strict negative) atunci forma pătratică φ_{x_0} este pozitiv definită (respectiv negativ definită) şi deci x_0 este punct de minim (respectiv maxim) local pentru f.

b) Condiţiile lui Sylvester din teoria formelor pătratice aplicate formei φ_{x_0} de mai sus arată că x_0 este punct de minim dacă minorii principali $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$ ai matricii hessiene sunt strict pozitivi; x_0 este punct de maxim dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, …, $(-1)^p \cdot \Delta_p > 0$.

c) Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = 0$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$ atunci se studiază semnul creşterii $f(x) - f(x_0)$ direct sau cu ajutorul formulei lui Taylor scrisă corespunzător (dacă f este de clasă C^n, $n \geq 3$).

4.1.4. Diferenţiabilitatea funcţiilor vectoriale de variabilă vectorială. Matricea jacobiană.

Ţinând seama de observaţia 4.1.1.1. b), definiţia 4.1.1.1. se poate extinde astfel:

Definiţia 4.1.4.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $p \geq 2$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ o funcţie vectorială de variabilă vectorială arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcţia f se numeşte *diferenţiabilă în punctul* x_0 dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ astfel încât:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\| f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h) \|}{\| h \|} = 0$$

(la numărător se consideră norma euclidiană din $\mathbb{R}^m$, iar la numitor, norma euclidiană din $\mathbb{R}^p$)

Ţinând seama de faptul că în $\mathbb{R}^m$ operaţiile algebrice şi trecerea la limită se face pe componente, rezultă ca şi în cazul 4.1.2. :

Teorema 4.1.4.1. Funcţia f este diferenţiabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt diferenţiabile în x_0.

În acest caz L_{x_0} are drept componente diferenţialele df_{1x_0}, df_{2x_0}, …, df_{mx_0} ale componentelor lui f, care sunt aplicaţii liniare de la $\mathbb{R}^p$ la $\mathbb{R}$, exprimate cu ajutorul derivatelor parţiale ca în teorema 4.1.3.1. Prin urmare, şi în acest caz, aplicaţia liniară L_{x_0} din definiţia 4.1.4.1. este bine determinată de funcţia *f* şi punctul x_0, mai precis de matricea:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) ... \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) ... \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(x_0) \\ .... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) ... \frac{\partial f_m}{\partial x_p}(x_0) \end{pmatrix}$$

numită matrice Jacobi (sau matrice jacobiană) a funcţiei *f* în punctul x_0, notată $J_f(x_0)$.

Vom nota L_{x_0} cu df_{x_0} şi o vom numi *diferenţiala funcţiei f în punctul* x_0. Atunci evident, $df_{x_0}(h) = J_f(x_0) \cdot h$, pentru orice $h \in \mathbb{R}^p$.

Dacă $m = p$ matricea Jacobi este o matrice pătrată, iar determinantul ei poartă numele de *jacobian* sau *determinant funcţional* al aplicaţiei *f* în punctul x_0 şi se notează

$$det\, J_f(x_0) = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_p)}{D(x_1, x_2, ..., x_p)}(x_0)$$

Referitor la funcţiile compuse se poate demonstra:

Teorema 4.1.4.2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ mulţimi deschise, $f : A \to B$ o funcţie diferenţiabilă în punctul $x_0 \in A$, $g : B \to \mathbb{R}^m$ o funcţie diferenţiabilă în punctul $f(x_0) \in B$. Atunci funcţia compusă $g \circ f : A \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în punctul x_0 şi :

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$$

Observaţia 4.1.4.1. a) Din această egalitate rezultă diverse reguli de derivare parţială a funcţiilor compuse. De exemplu, dacă $p = n = 2$, $m = 1$, funcţia *f* este de variabile *x* şi *y*, iar *g* este de variabile *u, v* , ambele diferenţiabile, obţinem:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(x, y), f_2(x, y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \\ + \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(x, y), f_2(x, y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(x, y), f_2(x, y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + \\ + \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(x, y), f_2(x, y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)$$

b) Dacă $p = n = m$ se obţine o relaţie importantă între determinanţii funcţionali şi anume:

$$det[J_{g \circ f}(x_0)] = det[J_g(f(x_0))] \cdot det[J_f(x_0)]$$