3 FUNCTII CONTINUE

3.3. Exerciţii propuse

Exerciţiul 3.3.1. Studiaţi convergenţa următoarelor şiruri din $\mathbb{R}^3$:

a) $x_n = \left(\frac{2n}{3n+1}, \frac{n}{n+1}, \frac{1}{n^2}\right)$

b) $x_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \sqrt[n]{n}, \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right)$

c) $x_n = \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}, \frac{1+1/2+1/3+...+1/n}{n}, \frac{1}{n}\sin n\right)$

d) $x_n = \left(\sin\frac{n\pi}{2}, \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)$

e) $x_n = \left(\frac{1+(-1)^n}{n}, (1+(-1)^n), \frac{1}{n}\right)$

R. a) convergent, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \left(\frac{2}{3}, 1, 0\right)$, b) convergent, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (e, 1, 0)$,

c) convergent $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \left(\frac{1}{e}, 0, 0\right)$, d) divergent, e) divergent.

Exerciţiul 3.3.2. Să se demonstreze că:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 y^3}{(x-1)^2+y^2} = 0$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} y^2 \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) = 0$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\, \sin\frac{1}{xy} = 0$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{xy} = 1$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$ j) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (1+xyz)^{\frac{1}{\sqrt{x+y+z}}} = 1$

Exerciţiul 3.3.3. Să se arate că următoarele funcţii nu au limită în punctele indicate:

a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ în (0, 0) b) $f(x, y) = \frac{1}{x+y}\left(x\sin\frac{1}{x}+y\right)$ în (0, 0)

c) $f(x, y) = \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x\cdot y}$ în (0, 0) d) $f(x, y) = \frac{x-y-1}{x+y-1}$ în (1, 0)

e) $f(x, y) = \frac{xy+x-y-1}{x^2+y^2-2x+2y+2}$ în (1, -1);

f) $f(x, y) = \dfrac{y^2 + 2x - a}{y^2 - 2x + a}$ în $\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$.

Exercițiul 3.3.4. Să se studieze dacă următoarele funcții au limită în origine:

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

b) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

c) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$

d) $f(x, y) = (2x + y)\dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

R. a) nu, b) nu, c) nu, d) da.

Exercițiul 3.3.5. Să se studieze continuitatea funcțiilor:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$

e) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - y} e^{-\frac{1}{x-y}}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

f) $f(x, y) = \begin{cases} (x + y)\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

g) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$

h) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}, & 0 < x^2+y^2 < 1 \\ 0 & , x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

i) $f(x, y) = \begin{cases} y - x^2 & , x^2 < y \\ 0 & , x = y = 0 \\ \dfrac{y^2 - x^2 y}{x^2}, & 0 < y \le x^2 \end{cases}$

j) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} 2(y - x^2)}{y - x^2}, & y - x^2 < 0 \\ 2 & , x^2 = y \\ 2 - \dfrac{2x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & y - x^2 > 0 \end{cases}$

k) $f(x, y, z) = \begin{cases} (1 - x - 2z)\sin \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, & x^2 + y^2 + z^2 \ne 0 \\ 0 & , (x, y, z) = (0,0,0) \end{cases}$

l) $f(x, y, z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}, & x^2 + y^2 + z^2 \ne 0 \\ 3 & , x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$

R. a) continuă pe $\mathbb{R}^2$; b) continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; c) continuă pe $\mathbb{R}^2$; d) continuă pe $\mathbb{R}^2$; e) continuă pe $\mathbb{R}^2$; f) continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, b),\ b \ne 0\}$; g) continuă pe $\mathbb{R}^2$; h) continuă; i) continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; j) continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, a^2),\ a \ne 0\}$; k) continuă pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$;
l) continuă pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$;

Exerciţiul 3.3.6. Să se arate că funcţia $f(x) = x^5 - 2x - 1$ se anulează cel puţin o dată între $x = 1$ şi $x = 2$.

Exerciţiul 3.3.7. Să se studieze dacă următoarele funcţii vectoriale au limită în origine:

a) $f(x, y) = \left(\dfrac{x^2 y^3}{x^2 + y^4}, \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right)$ b) $f(x, y, z) = \left(e^{\frac{1}{x+y+z}}, \dfrac{x + z}{x + y + z} \right)$

R. a) da, b) nu

Exerciţiul 3.3.8. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\ln(1 + x)}{x}, \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \right), & x \ne 0 \\ \left(1, \dfrac{1}{2} \right) & , x = 0 \end{cases}$ **R.** continuă pe $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 3.3.9. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}, \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right), & (x, y) \ne (0,0) \\ (0,0) & , (x, y) = (0,0) \end{cases}$ **R.** continuă pe $\mathbb{R}^2$