3 FUNCTII CONTINUE

3.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 3.2.1. Studiaţi convergenţa următoarelor şiruri din $\mathbb{R}^3$.

a) $x_n = \left(\frac{n}{2n+1}, \frac{n^2}{n^2+1}, \frac{1}{n} \right)$

b) $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 3^{-n}, \cos\frac{1}{n} \right)$

c) $x_n = \left(\frac{1}{2+n}, (-1)^{n+1}, \frac{n+1}{n} \right)$

Soluţii.

a) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ deducem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi limita sa este $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \left(\frac{1}{2}, 1, 0 \right)$.

b) Analog se obţine

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 3^{-n}, \cos\frac{1}{n} \right) = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \lim_{n\to\infty}(3^{-n}), \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right) \right)$$

$$=(1, 0, 1)$$

c) Deoarece a doua componentă a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir divergent rezultă că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

Exerciţiul 3.2.2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{tg}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$

Soluţii.

a) Deoarece $\frac{\mathrm{tg}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\mathrm{tg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}$ şi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{tg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\mathrm{tg}\, t}{t} = 1$,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$ rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{tg}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 \cdot 0 = 0$.

b) $\frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{2\sin^2\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}{x^2+y^2} = 2\cdot\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{4}$,

$(x, y) \neq (0, 0)$.

Deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = 0$ şi $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ deducem că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$.

Exercițiul 3.2.3. Să se demonstreze că următoarele funcții nu au limită în $(0, 0)$.

a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $x + y \neq 0$

b) $f(x, y) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot y}{e^{-\frac{2}{x^2}} + y^2}$, $x \neq 0$

Soluție.

a) Considerăm șirul $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de puncte din $\mathbb{R}^2$, $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{\lambda}{n}$ unde $\lambda \neq -1$ este un parametru real.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$, $f(x_n, y_n) = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$ depinde de parametrul λ. Prin urmare, funcția f nu are limită în $(0, 0)$.

b) Considerăm șirul $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de puncte din $\mathbb{R}^2$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $y_n = \lambda \cdot e^{-\frac{1}{x_n^2}}$, $n \in \mathbb{N}$ unde λ este un parametru real.

Atunci, evident $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, avem

$$f(x_n, y_n) = \frac{\lambda \cdot e^{-\frac{2}{x_n^2}}}{e^{-\frac{2}{x_n^2}} + \lambda^2 e^{-\frac{2}{x_n^2}}} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$ depinde de parametrul λ. Rezultă că funcția f nu are limită în $(0, 0)$.

Exercițiul 3.2.4. Să se demonstreze că următoarele funcții sunt continue în $(0, 0)$.

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0, x \in \mathbb{R} \\ 0, & y = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Soluție.

a) Prin înlocuire directă obținem: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ deci f este continuă în $(0, 0)$.

b) Pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$ avem:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = (x^2 + y^2) \cdot \left|\sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq x^2 + y^2$$

şi, evident, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2 + y^2) = 0$. Ţinând seama de observaţia 3.1.4.1. a) rezultă că funcţia f este continuă în $(0, 0)$.

c) Pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cu $y \neq 0$, avem:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = y^2 ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) \le y^2\cdot\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) = x^2 + y^2$$

de unde, ca mai sus, deducem că f este continuă în $(0, 0)$.

Exercițiul 3.2.5. Să se demonstreze că următoarele funcții nu sunt continue în (*0, 0*):

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}, x+y \neq 0 \\ 0, \quad x+y=0 \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 1, \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$.

Soluție.

a) Funcția *f* nu are limită în (*0, 0*) deci nu este continuă în (*0, 0*).

b) Considerăm șirul $\left(\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in N^*}$ convergent către *(0, 0)*. Pentru fiecare $n \in N^*$, avem $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ = $\dfrac{1}{n^5} \cdot \dfrac{n^2}{2} = \dfrac{1}{2n^3}$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ = *0 ≠ f(0, 0)*. Ținând seama de observația 3.1.4.1. c) deducem că *f* nu este continuă în (*0, 0*). (Se poate arăta că această funcție are limită în (*0, 0*) dar aceasta nu este 1).

Exercițiul 3.2.6. Să se studieze continuitatea funcțiilor:

a) $f : R^2 \to R$, $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ a, \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f : R^3 \to R$, $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}, (x, y, z) \neq (0,0,0) \\ a, \quad (x, y, z) = (0,0,0) \end{cases}$

Soluții.

a) Deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ = 0 rezultă că *f* este continuă în (*0, 0*) dacă și numai dacă *a = 0*. Cum *f* este continuă pe $R^2\setminus\{(0, 0)\}$ pentru orice $a \in R$, fiind compunere de funcții continue rezultă că dacă *a = 0* funcția *f* este continuă pe R^2 iar dacă *a ≠ 0*, ea este continuă pe $R^2\setminus\{(0, 0)\}$.

b) Pentru orice (*x, y, z*) ≠ (*0, 0, 0*) avem:

$$\frac{1-\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{-x^2-y^2-z^2}{(1+\sqrt{1+x^2+y^2+z^2})(x^2+y^2+z^2)} =$$

$$= -\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$$

deci $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = -\dfrac{1}{2}$

Cum pe $\mathbb{R}^3\setminus\{(0, 0, 0)\}$ funcţia este evident continuă, deducem că pentru $a = -\frac{1}{2}$ funcţia este continuă pe $\mathbb{R}^3$ iar pentru $a \neq -\frac{1}{2}$ ea este continuă pe $\mathbb{R}^3\setminus\{(0, 0, 0)\}$.

Exerciţiul 3.2.7. Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + |y^3|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Să se demonstreze că funcţia f este continuă după orice direcţie în origine, dar f nu este continuă în origine.

Soluţie.

Fie *(d)* o dreaptă ce trece prin origine, de ecuaţie $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$. Restricţia funcţiei f la dreapta *(d)* este funcţia $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x, mx) = \begin{cases} \dfrac{m|x|}{|x|^3 + |m|^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Cum $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$ rezultă că g este continuă.

Dacă $m = 0$ dreapta (*d*) reprezintă axa O*x*. În acest caz $g(x) = f(x, 0) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci g este evident continuă în acest caz. În sfârşit, dacă (*d*) este axa O*y* restricţia va fi $h(y) = f(0, y) = 0$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, deci este continuă. Prin urmare, restricţia lui f la orice dreaptă ce trece prin origine este continuă în origine.

Considerăm acum şirul de puncte din $\mathbb{R}^2$, $\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ care converge la $(0, 0)$ şi observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2} = \infty$, deci f nu este continuă în $(0, 0)$.

Exerciţiul 3.2.8. Să se arate că funcţia $f(x) = xa^x - 1$, $a > 1$ se anulează într-un punct $\xi \in (0, 1)$.

Soluţie.

Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ ca funcţie elementară, deci are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. Cum $f(1) = a - 1 > 0$ şi $f(0) = -1 < 0$, rezultă că există $\xi \in (0, 1)$ astfel încât $f(\xi) = 0$.

Exerciţiul 3.2.9. Stabiliţi dacă următoarele funcţii au limită în $x = 0$.

a) $f : (-1, 1)\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \dfrac{e^{3x} - 1}{2x}, \dfrac{1 - \cos x}{x\left(\sqrt{1+x} - 1\right)}\right)$

b) $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}, \dfrac{\sin x}{x}, \sin\dfrac{1}{x}\right)$

Soluţii. a) Fie $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$, $x \in (-1, 1)\setminus\{0\}$. În $x = 0$ suntem în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$.

Deoarece $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \dfrac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ pentru orice $x \in (-1, 1)\setminus\{0\}$ deducem că $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 1$. Notând $f_2(x) = \dfrac{e^{3x}-1}{2x}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, şi încercând să calculăm $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ constatăm că suntem din nou în cazul $\dfrac{0}{0}$.

Vom utiliza următoarea egalitate importantă: $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t} = 1$.

Deoarece $f_2(x) = \dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\dfrac{3}{2}$ pentru orice $x \neq 0$ deducem imediat că $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = \dfrac{3}{2}$.

Fie acum $f_3(x) = \dfrac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$, $x \in (-1, \infty)\setminus\{0\}$. În $x = 0$ suntem, din nou, în cazul $\dfrac{0}{0}$. Deoarece pentru orice $x \in (-1, \infty)\setminus\{0\}$ avem

$$f_3(x) = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x(\sqrt{1+x}-1)} = \frac{2\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x^2} = = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\left(\sqrt{1+x}+1\right)$$

deducem că $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x) = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$.

Deoarece $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ pentru orice $x \in (-1, \infty)\setminus\{0\}$ şi toate componentele f_1, f_2, f_3 au llimită în $x = 0$, deducem că f are limită în

$x = 0$ şi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = (\lim\limits_{x\to 0} f_1(x), \lim\limits_{x\to 0} f_2(x), \lim\limits_{x\to 0} f_3(x)) = \left(1, \dfrac{3}{2}, 1\right)$.

b) Analog, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ unde $f_1(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{x}$,

$f_3(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Evident $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 1$. Componenta f_3 nu are limită în $x = 0$ (este suficient să considerăm $a_n = \dfrac{1}{n\pi}$ şi $b_n = \dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi să observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ dar $\lim\limits_{n\to\infty} f_3(a_n) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$).

Deoarece una dintre componente nu are limită în $x = 0$, deducem că funcţia f nu are limită în $x = 0$.

Exerciţiul 3.2.10. Demonstraţi că funcţia $f : \mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$,

$f(x, y) = \left(\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}, \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$ nu are limită în $(0, 0)$.

Soluţie. Fie $f_1(x, y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$ şi $f_2(x, y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pentru $(x, y) \neq (0, 0)$ componentele funcţiei vectoriale f. Deoarece pentru orice

$(x, y) \neq (0, 0)$ avem $|f_1(x, y)| \leq \dfrac{x^2 |y^3|}{x^2} = |y^3|$ dacă $x \neq 0$ şi $f_1(0, y) = \dfrac{0}{y^2}$ dacă $y \neq 0$ iar $\lim\limits_{y\to 0} |y^3| = 0$ rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x, y) = 0$.

Deoarece $f_2(x, kx) = \dfrac{1-k^2}{1+k^2}$ pentru orice $x \neq 0$ rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} f(x, kx) = = \dfrac{1-k^2}{1+k^2}$ care depinde de k şi funcţia f_2 nu are limită în $(0, 0)$. Deducem de aici că funcţia vectorială f nu are limită în $(0, 0)$.

Exerciţiul 3.2.11. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin 5x}{x}, \dfrac{1-\cos x}{x^2}, \dfrac{e^x - 1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \left(5, \dfrac{1}{2}, 1\right), & x = 0 \end{cases}$$

Soluţie. Fiecare componentă a funcţiei f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, deci f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} = 5$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ şi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \left(5, \dfrac{1}{2}, 1\right) = f(0)$, deci f este continuă şi în $x = 0$. Prin urmare f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 3.2.12. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2}, (1+|xy|)^{\frac{1}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}}, \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right), & (x, y) \neq (0,0) \\ (a, b, c), & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

să fie continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Soluţie. Funcţia vectorială f este continuă pe $\mathbb{R}^2$ dacă şi numai dacă fiecare componentă a sa este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ cele trei componente sunt continue fiind compuneri de funcţii continue. Pentru a studia continuitatea funcţiei vectoriale f în $(0, 0)$ determinăm limita în $(0,0)$ a fiecărei componente.

Deoarece $f_1(x, y) = \dfrac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \dfrac{-x^2-y^2}{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}$ pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$ rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x, y) = -\dfrac{1}{2}$.

$$f_2(x, y) = (1+|xy|)^{\frac{1}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}} = \left[(1+|xy|)^{\frac{1}{|xy|}}\right]^{\frac{|xy|}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}}.$$

Dar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+|xy|)^{\frac{1}{|xy|}}$ = *e* şi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}$ = 0.

Prin urmare $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$ $f_2(x, y) = e^0 = 1$.

Avem şi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ =

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin^2\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\frac{x^2+y^2}{2} \cdot$$

$$\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\frac{x^2+y^2}{2}}{\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$. Cum *f(0, 0) = (a, b, c)* rezultă că *f* este continuă în (*0,0*) dacă şi numai dacă $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 0$.