3 FUNCTII CONTINUE

3.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale.

3.1.1. Spaţiul euclidian $\mathbb{R}^p$

Pentru $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$ fixat, se defineşte

$$\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{de p ori}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) : x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}\}$$

De exemplu, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z): x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Mulţimea $\mathbb{R}^p$ poate fi înzestrată cu o structură algebrică de *spaţiu vectorial real*, definind adunarea şi înmulţirea cu scalari prin:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) + (y_1, y_2, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p)$$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_p) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_p)$$

pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_p), (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$.

În timp ce mulţimea numerelor reale este total ordonată, între elementele mulţimii $\mathbb{R}^p$ nu poate fi definită o relaţie de ordine totală compatibilă cu structura algebrică, de aceea unele proprietăţi ale funcţiilor reale de o variabilă reală (legate de monotonie, spre exemplu) nu se pot enunţa în cazul funcţiilor reale de mai multe variabile reale (funcţii definite pe o parte $A \subseteq \mathbb{R}^p$ cu valori în $\mathbb{R}$).

Structura de bază însă cu care trebuie să fie dotate mulţimile pentru studiul caracteristic analizei matematice, bazat pe noţiunea de limită, este cea de spaţiu topologic, în care se poate exprima faptul că două elemente sunt sau nu *apropiate*, cu ajutorul noţiunii de vecinătate, în cazul general, sau cu ajutorul noţiunii de metrică (sau distanţă) în cazurile uzuale.

Definiţia 3.1.1.1. Dacă X este o mulţime nevidă astfel încât, pentru fiecare $x \in X$, să poată fi evidenţiată o familie $\mathcal{V}(x)$ de submulţimi ale lui X cu proprietăţile:

[V_1] oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$;

[V_2] dacă $U, V \in \mathcal{V}(x)$ atunci $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$;

[V_3] dacă $V \in \mathcal{V}(x)$ şi $V \subseteq A$ atunci $A \in \mathcal{V}(x)$;

[V_4] oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$ există $W \in \mathcal{V}(x)$ încât $V \in \mathcal{V}(y)$ pentru orice $y \in W$,

atunci se spune că pe X este definită o *structură topologică (sau o topologie)* . Mulţimea X se numeşte în acest caz *spaţiu topologic*, iar familia $\mathcal{V}(x)$ se numeşte *sistem de vecinătăţi ale punctului x*.

Definiţia 3.1.1.2. Fie X o mulţime nevidă, arbitrară. Funcţia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfăcând proprietăţile:

[D_1] $d(x, y) \geq 0$ pentru orice $x, y \in X$; $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$

[D_2] $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$

[D_3] $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in X$

se numeşte *metrică* (distanţă) pe X, iar perechea (X, d) se numeşte *spaţiu metric*.

Dacă (X, d) este un spaţiu metric, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r>0$, atunci mulţimea:

$$S(x, r) = \{y \in X: d(y, x) < r\}$$

se numeşte *sferă deschisă cu centrul în x şi raza r.*

Teorema 3.1.1.1. Dacă (X, d) este un spaţiu metric, pentru fiecare $x \in X$, familia $\mathcal{V}(x) = \{V \subset X: \exists\ r>0, S(x, r) \subset V\}$ formează un sistem de vecinătăţi ale punctului x; deci orice spaţiu metric este în mod natural un spaţiu topologic.

În plus, pentru orice $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ are două proprietăţi remarcabile:

1) Dacă $x, y \in X$, $x \neq y$ atunci există $U \in \mathcal{V}(x)$, $V \in \mathcal{V}(y)$ astfel încât $U \cap V = \emptyset$ (proprietatea de separare)
2) Există $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{V}(x)$ astfel încât:

- oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$ există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ încât $V_{n_0} \subset V$
- dacă $n, m \in \mathbb{N}^*$, $n \leq m$ atunci $V_n \supset V_m$ (această proprietate este cunoscută sun numele de *prima axiomă a numărabilităţii*)

Aceste proprietăţi permit rezolvarea unor probleme mari (unicitatea limitei, caracterizarea limitei şi continuităţii unei funcţii cu ajutorul şirurilor, etc) la nivelul spaţiilor metrice, la fel ca în cazul axei reale.

Observaţia 3.1.1.1. Structura de spaţiu metric pe X **nu** presupune existenţa unei structuri algebrice pe X.

Revenind la $\mathbb{R}^p$ care este înzestrat cu o structură algebrică pe spaţiu vectorial real, putem defini în mod natural o structură de spaţiu metric (deci o structură topologică) utilizând două noţiuni particulare importante, produsul scalar şi norma, care se definesc numai în spaţii vectoriale.

Definiţia 3.1.1.3. *Produsul scalar euclidian* între elementele lui $\mathbb{R}^p$ este definit prin:

$$<x, y> = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_py_p$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$.

Norma euclidiană pe $\mathbb{R}^p$ este generată de produsul euclidian:

$$\|x\| = \sqrt{<x, x>} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.

Distanţa euclidiană este generată de norma euclidiană:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_p - y_p)^2}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$.

Se demonstrează uşor că d satisface proprietăţile [D_1], [D_2], [D_3] din definiţia 3.1.1.2., deci ($\mathbb{R}^p$, d) este spaţiu metric şi, prin urmare, spaţiu topologic; sistemul de vecinătăţi ale fiecărui punct din $\mathbb{R}^p$ se defineşte ca în teorema 3.1.1.1.

Observaţia 3.1.1.2. a) Pentru $p = 1$ avem $\|x\| = |x|$, distanţa euclidiană este $d(x, y) = | x – y |$, iar pentru $\varepsilon > 0$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}, | x – x_0 | < \varepsilon\} = (x_0 – \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

b) Pentru $p = 2$, dacă $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, avem $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ care reprezintă lungimea segmentului ce uneşte punctele $O(0, 0)$ şi $A(x, y)$; distanţa euclidiană este:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_2)^2}$$

iar pentru $\varepsilon > 0$ şi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixat,

$$S((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x – x_0)^2 + (y – y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

este interiorul cercului cu centrul în (x_0, y_0) şi raza ε, adică discul cu centrul în (x_0, y_0) şi raza ε.

c) Pentru $p = 3$, avem $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, iar distanţa euclidiană este:

$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

pentru $\varepsilon > 0$ şi $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ fixat,

$$S((x_0, y_0, z_0), \varepsilon) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x – x_0)^2 + (y – y_0)^2 + (z – z_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

este interiorul sferei geometrice cu centrul în (x_0, y_0, z_0) şi raza ε.

3.1.2. Şiruri în $\mathbb{R}^p$.

Definiţia 3.1.2.1. Se numeşte *şir de elemente din* $\mathbb{R}^p$ orice funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^p$; pentru orice $n \in \mathbb{N}$, termenul de rang n, $x_n = f(n) \in \mathbb{R}^p$, deci este de forma $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^p)$ unde $x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^p \in \mathbb{R}$. Pentru fiecare $k = 1, 2, ..p$ fie $f_k: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f_k(n) = x_n^k$. Şirurile $f_1, f_2, \ldots, f_p$ de numere reale se numesc *şiruri componente ale şirului f.*

Considerând $\mathbb{R}^p$ înzestrat cu metrica euclidiană, se pot defini, la fel ca pentru şirurile de numere reale, noţiunile de punct limită, punct de acumulare, şir convergent, şir fundamental.

Definiţia 3.1.2.2. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^p$; $f(n) = x_n$ un şir de elemente din $\mathbb{R}^p$. Şirul f se numeşte *convergent* dacă există $x \in \mathbb{R}^p$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ încât, oricare ar fi $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \varepsilon$. Elementul x se numeşte *punct limită* pentru şirul f. În caz contrar, şirul f se numeşte *divergent*. Şirul f se numeşte *şir fundamental* (sau şir Cauchy) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ încât, dacă $n, m \in \mathbb{N}$ $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ atunci $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sau, echivalent, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$ şi orice $p \in \mathbb{N}$.

Teorema următoare stabileşte faptul că studiul şirurilor din $\mathbb{R}^p$, $p>1$ se reduce la studiul şirurilor din $\mathbb{R}$ şi că $\mathbb{R}^p$ înzestrat cu distanţa euclidiană este un spaţiu metric complet.

Teorema 3.1.2.1. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^p$, $f(n) = x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p)$ un şir de elemente din $\mathbb{R}^p$. Pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots, p$ fie $f_k: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f_k(n) = x_n^k$.

a) Şirul f este convergent şi are limita $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p) \in \mathbb{R}^p$ dacă şi numai dacă şirurile componente $f_1, f_2, \ldots f_p$ sunt convergente şi $x^k = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^k$, $k = 1,2,\ldots,p$

b) Şirul f este şir fundamental dacă şi numai dacă toate şirurile componente sunt şiruri fundamentale.

c) Şirul f este convergent dacă şi numai dacă el este şir fundamental, deci $\mathbb{R}^p$ în raport cu distanţa euclidiană este spaţiu metric complet.

Observaţia 3.1.2.1. a) Din această teoremă deducem că limita unui şir convergent din $\mathbb{R}^p$ se calculează pe componente.

De exemplu, şirul $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^2$, $f(n) = \left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{n+1}{n+2}\right)$ converge către (0, 1).

b) În $\mathbb{R}^p$, $p \geq 2$ nu se pot defini convenabil şiruri monotone, ca în cazul şirurilor de numere reale, deoarece în $\mathbb{R}^p$, $p \geq 2$ nu se poate introduce o relaţie de ordine totală compatibilă cu structura algebrică.

3.1.3. Limita unei funcţii de mai multe variabile

Este cunoscută, din liceu, noţiunea de limită a unei funcţii reale de o variabilă reală într-un punct de acumulare al domeniului său de definiţie. Prezentăm acum această noţiune pentru funcţii definite pe o parte $A \subseteq \mathbb{R}^p$ cu valori în $\mathbb{R}$. Este necesar să precizăm, mai întâi, noţiunea de punct de acumulare al unei mulţimi $A \subseteq \mathbb{R}^p$. Acest lucru este posibil la fel ca în
$A \subseteq \mathbb{R}$ deoarece cunoaştem sistemul de vecinătăţi ale fiecărui punct din $\mathbb{R}^p$.

Definiţia 3.1.3.1. Considerăm $\mathbb{R}^p$ înzestrat cu metrica euclidiană.
Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $x \in \mathbb{R}^p$ arbitrare. Elementul x se numeşte *punct de acumulare* pentru mulţimea A, dacă oricare ar fi $U \in \mathcal{V}(x)$ avem $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale mulţimii A se notează A'.

Definiţia 3.1.3.2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară, $l \in \mathbb{R}$, $a \in A'$. Elementul l se numeşte *limita funcţiei f în punctul a* dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât oricare ar fi $x \in (U \setminus \{a\}) \cap A$ avem $f(x) \in V$. Se notează $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Observaţia 3.1.3.1. a) Deoarece $a \in A'$, $(U \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ oricare ar fi $U \in \mathcal{V}(a)$. Deoarece există elemente ale mulţimii A oricât de „aproape” de a, iar funcţia f ia în acestea valori oricât de „aproape” de l. De aceea, spunem că l este limita funcţiei f când x „tinde” la a, „se apropie” oricât de mult de a. Este evident că nu are sens să ne punem problema limitei unei funcţii într-un punct care nu este punct de acumulare pentru domeniul său de definiţie.

b) Definiţia punctului de acumulare al unei mulţimi, precum şi definiţia limitei unei funcţii într-un punct pot fi extinse, cu aceeaşi formulare, la cazul spaţiilor topologice oarecare deoarece utilizează doar noţiunea de vecinătate. Considerarea spaţiilor metrice concrete (care sunt spaţii topologice particulare) prezintă unele avantaje cum ar fi unicitatea limitei, caracterizarea ei cu şiruri, care nu se regăsesc în cazul general.

Teorema 3.1.3.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară, $a \in A'$. Dacă funcţia f are limită în punctul a, atunci aceasta este unică.

Teorema 3.1.3.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $l \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$;

b) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in A$ cu $0 < d(x, a) < \delta$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$;

c) oricare ar fi şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din mulţimea $A \setminus \{a\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Observaţia 3.1.3.2. a) Dacă $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $l \in \mathbb{R}$ dacă există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \setminus \{a\}) \cap A$ avem $|f(x) - l| \leq g(x)$ şi dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ atunci, evident $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

b) Dacă $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p)$, $a = (a^1, a^2, \ldots, a^p)$ atunci

$$d(x, a) = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} (x^k - a^k)^2}$$

ţinând cont de dubla inegalitate evidentă:

$$|x^i - a^i| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{p}(x^k - a^k)^2} \le \sum_{k=1}^{p}|x^k - a^k|,\ i = 1, 2, \ldots, p$$

rezultă imediat că $l = \lim_{x\to a} f(x)$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ încât pentru orice $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p) \in A$ cu $0 < |x^i - a^i| < \delta$, $i=1, 2, \ldots, p$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

c) Dacă există două şiruri $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in \mathbb{N}}$ de elemente din $A\setminus\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \ne \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ atunci, evident, funcţia f nu are limită în punctul a.

Pentru o funcţie reală de p variabile reale putem defini o noţiune particulară de limită, şi anume, limita după o direcţie.

Definiţia 3.1.3.3. Dacă $f : A\subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a\in A'$, atunci pentru orice vector $v \ne 0$ din $\mathbb{R}^p$, se numeşte *limita funcţiei f în punctul a după direcţia lui v* (atunci când există) numărul $\lim_{t\to 0} f(a + tv)$

Observaţia 3.1.3.3. a) Evident, punctele $x = a + tv$ au proprietatea că vectorul $x - a$ este coliniar cu v ceea ce justifică terminologia.

b) Dacă există $l = \lim_{x\to a} f(x)$ atunci există şi limita funcţiei f în punctul a, după direcţia lui v şi este egală cu l.

Reciproca acestei afirmaţii este falsă. Funcţia $f(x, y) = \dfrac{y^2 - 2x}{y^2 + 2x}$, $y^2 + 2x \ne 0$ are limita -1 în $(0, 0)$ pe orice direcţie dar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ nu există, aşa cum se constată considerând şiruri $\left(\left(\dfrac{\lambda}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in N^*}$ cu λ parametru real.

3.1.4. Funcţii reale de mai multe variabile continue într-un punct.

Definiţia 3.1.4.1. Fie $f : A\subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a\in A \cap A'$. Funcţia f se numeşte *continuă în punctul a* dacă există $\lim_{x\to a} f(x)$ şi $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Dacă funcţia f nu este continuă în punctul a, spunem că f este discontinuă în acest punct.

Folosind definiţia 3.1.3.2. a limitei unei funcţii într-un punct, precum şi teorema 3.1.3.2. pentru $l = f(a)$ rezultă imediat:

Teorema 3.1.4.1. Fie $f : A\subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a\in A \cap A'$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f este continuă în punctul a;
b) pentru orice vecinătate $V\in \mathcal{V}(f(a))$ există o vecinătate $U\in \mathcal{V}(a)$ astfel încât oricare ar fi $x\in U \cap A$ avem $f(x) \in V$;
c) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x\in A$ cu $d(x, a) < \delta$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
d) pentru orice şir $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ de elemente din mulţimea A cu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ avem $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

Ţinând seama de observaţia 3.1.3.2. obţinem:

Observaţia 3.1.4.1. a) Dacă $f, g: A\subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a\in A \cap A'$ dacă există $U\in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x\in U\cap A$ avem $|f(x) - f(a)| \le g(x)$ şi dacă $\lim_{x\to a} g(x)= 0$ atunci, evident, f este continuă în punctul a.

b) Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a = (a^1, a^2, \ldots, a^p) \in A \cap A'$, f este continuă în punctul a dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ încât pentru orice $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p) \in A$ cu $|x^i - a^i| < \delta$, $i = 1,2, \ldots, p$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

c) Dacă există un şir $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ de elemente din A cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \ne f(a)$ atunci, evident, funcţia f nu este continuă în punctul a .

Folosind noţiunea de limită după o direcţie introdusă în definiţia 3.1.3.3. obţinem:

Definiţia 3.1.4.2. Funcţia $f:A\subseteq \mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ este *continuă în punctul* $a\in A\cap A'$ *după direcţia vectorului* $v \neq 0$ dacă $\lim\limits_{t\to 0} f(a + tv) = f(a)$.

În particular, dacă vectorul v are toate componentele nule, cu excepţia componentei a i-a şi funcţia f este continuă după direcţia lui v în punctul a, spunem că f este *continuă parţial în raport cu variabila* x^i în punctul a. Evident, i poate lua oricare dintre valorile $1, 2, ..., p$. Având în vedere observaţia 3.1.3.3. b) rezultă că dacă f este continuă în punctul a atunci ea este continuă după orice direcţie în acest punct; în particular, ea este continuă parţial în raport cu fiecare variabilă $x^1, x^2, ..., x^p$ separat în punctul a, reciproca nefiind, în general, adevărată.

3.1.5. Funcţii vectoriale de variabilă vectorială continue într-un punct.

Fie $A\subseteq \mathbb{R}^p$ şi $f : A\to\mathbb{R}^m$, $p \geq 2,\ m \geq 2$. O asemenea funcţie se numeşte *funcţie vectorială de variabilă vectorială* sau funcţie vectorială de p variabile reale, deoarece pentru orice $x\in A$, $x = (x^1, x^2, ..., x^p)$ cu $x^i\in\mathbb{R}$,
$i = 1, 2, ..., p, f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^p) = y = (y^1, y^2, ..., y^m) \in \mathbb{R}^m$.

Funcţiile $f_k :A\to\mathbb{R}$, $f_k(x) = y^k$, $k=1, 2, ..., m$ sunt, evident, funcţii reale de p variabile reale şi se numesc *componentele funcţiei* f.

Considerând pe $\mathbb{R}^p$ şi $\mathbb{R}^m$ metrica euclidiană, dacă $a \in A'$ şi
$l = (l^1, l^2, ..., l^m) \in \mathbb{R}^m$, prin analogie cu definiţia 3.1.3.2. putem enunţa:

Definiţia 3.1.5.1. Elementul l se numeşte *limita funcţiei f în punctul a* dacă pentru orice $V\in \mathcal{V}(l)$ există $U\in \mathcal{V}(a)$ astfel încât oricare ar fi $x\in (U|\{a\})\cap A$ avem $f(x) \in V$.

Se poate demonstra:

Teorema 3.1.5.1. Elementul l este limita funcţiei f în punctul a dacă şi numai dacă oricare ar fi şirul de elemente din $A|\{a\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Ţinând seama de teorema 3.1.2.1. referitoare la limita unui şir convergent din $\mathbb{R}^m$, deducem imediat:

Teorema 3.1.5.2. Funcţia vectorială $f : A\subseteq \mathbb{R}^p \to\mathbb{R}^m$ are limită în punctul $a\in A'$ dacă şi numai dacă toate componentele sale au limită în acest punct. Trecerea la limită se face pe componente, adică

$$\lim_{x\to a} f(x) =(\lim_{x\to a} f_1(x),\ \lim_{x\to a} f_2(x),\ ...,\ \lim_{x\to a} f_m(x)).$$

Studiul funcţiei f se reduce la studiul celor m componente ale sale care sunt funcţii reale de p variabile reale.

Prin analogie cu definiţia 3.1.4.1. putem enunţa:

Definiţia 3.1.5.2. Fie $f : A\subseteq \mathbb{R}^p \to\mathbb{R}^m$ $p \geq 2, m \geq 2,\ a\in A \cap A'$. Funcţia f se numeşte *continuă în punctul a* dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ţinând seama de teorema 3.1.6.2. rezultă imediat:

Teorema 3.1.5.3. Funcţia vectorială $f : A\subseteq \mathbb{R}^p \to\mathbb{R}^m$ este continuă în punctul $a\in A \cap A'$ dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt continue în acest punct.