1. ŞIRURI ŞI SERII DE NUMERE REALE

1.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 1.2.1. Stabiliţi dacă următoarele şiruri sunt fundamentale:

a) $x_n = \dfrac{n+2}{3n+5}$, $n \in \mathbb{N}$

b) $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$

c) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

d) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$, $n \in \mathbb{N}$

e) $x_n = \dfrac{n^2}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

Soluţii

a) $|x_{n+p} - x_n| = \dfrac{p}{(3n+3p+5)(3n+5)} < \dfrac{p}{3p(3n+5)} = \dfrac{1}{3(3n+5)}$ şi majorantul este un şir convergent la 0, al cărui termen general nu depinde de p. Rezultă că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir fundamental.

b) $|x_{n+p} - x_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+p}}$. Observăm că pentru $p = n$ obţinem $x_{2n} - x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}} = \sqrt{\dfrac{n}{2}}$. Rezultă de aici că $|x_{2n} - x_n|$ nu tinde către 0, deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este şir fundamental.

c) $|x_{n+p} - x_n| = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(n+p)^2} < \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \dfrac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+p} < \dfrac{1}{n}$. Cum majorantul este un şir convergent la 0 şi nu depinde de p, rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir fundamental.

d) $|x_{n+p} - x_n| = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n+p} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}\right| \leq$

$\leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

e) Deoarece $x_n = \dfrac{n^2}{n+1} = \dfrac{n^2-1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1} = n - 1 + \dfrac{1}{n+1} > n - 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pentru orice $M>0$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n - 1 > M$ (de exemplu $n = [M] + 2$), prin urmare există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > M$ deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este majorat, deci este nemărginit. Prin urmare, nu este fundamental.

Exerciţiul 1.2.2. Stabiliţi dacă următoarele şiruri sunt convergente:

a) $x_n = \dfrac{n+1}{n^2+2}$, $n \in \mathbb{N}$

b) $x_n = \dfrac{n^2}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

c) $x_n = \dfrac{2n \cdot n!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

d) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

e) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos(k!)}{k(k+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

f) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Soluţii.

a) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit: $0 < \frac{n+1}{n^2+2} < \frac{n+1}{n^2} \le \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \le 1$, pentru orice $n \ge 2$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{2}{3}$, deci $x_n \in (0, 1)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict descrescator:

$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} - \frac{n+1}{n^2+2} = \frac{n+2}{n^2+2n+3} - \frac{n+1}{n^2+2} =$

$= \frac{-n^2-3n+1}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} < 0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

b) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este mărginit (vezi exerciţiul precedent), deci nu este convergent.

c) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit. Într-adevăr, aplicând inegalitatea mediilor pentru numerele *1, 2, ..., n* obţinem $\frac{1+2+3+...+n}{n} > \sqrt[n]{n!}$, adică $\frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{n!}$ sau $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; înmulţind inegalitatea cu $\frac{2^n}{n^n}$, obţinem $x_n < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3$, pentru orice $n \ge 2$. Cum $x_1 = 2 < 3$, rezultă că $x_n < 3$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Evident, $x_n > 0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, deci $x_n \in (0, 3)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Prin urmare, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit.

Deoarece $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!} = \frac{2}{(n+1)^n}\cdot n^n =$

$= 2\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 2\cdot\frac{1}{2} = 1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ deducem că şirul este strict descrescător. Rezultă că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

d) Şirul este fundamental (vezi exerciţiul precedent), iar ($\mathbb{R}$, d) este spaţiu metric complet (vezi teorema 1.1.1.1.), deci şirul este convergent.

Să observăm că $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, deci şirul este strict crescător. Deoarece $1 < 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} = x_n <$

$1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$, adică $x_n\in(1, 2)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că şirul este şi mărginit, deci este convergent.

e) Şirul este fundamental (vezi exerciţiul precedent), iar $\mathbb{R}$ în raport cu distanţa euclidiană este spaţiu metric complet (vezi teorema 1.1.1.1.), deci şirul este convergent.

Să observăm că, spre deosebire de exerciţiul precedent, acest şir nu este monoton, deoarece diferenţa $x_{n+1} - x_n = \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}$ nu păstrează semn constant pe $\mathbb{N}$, deci nu se poate aplica teorema de convergenţă a şirurilor monotone.

f) Şirul nu este fundamental (vezi exerciţiul precedent). Din teorema 1.1.1.1. deducem că acest şir nu este convergent.

Exerciţiul 1.2.3. Aproximaţi limita şirului $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$ cu două zecimale exacte.

Soluţie. Despre acest şir s-a demonstrat că este fundamental, deci este convergent. Am arătat că $|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{n+1}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă notăm $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, atunci $|x - x_n| \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Pentru ca în aproximarea $x \approx x_n$ să avem două zecimale exacte este suficient ca

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^2}$.

Prin urmare x_{100} aproximează pe x cu două zecimale exacte.

Exerciţiul 1.2.4. Folosind principiul contracţiei să se calculeze rădăcina ecuaţiei $x^3 + 4x - 1 = 0$ cu 4 zecimale exacte.

Soluţie. Ecuaţia are o singură rădăcină reală situată în intervalul [0, 1] care este spaţiu metric complet. Ecuaţia se poate scrie sub forma

$$x = \frac{1}{x^2+4} \overset{\text{not}}{=} f(x)$$

Pe această mulţime f este o contracţie cu coeficientul $\frac{1}{8}$ pentru că $|f'(x)| =$

$= \left|\frac{-2x}{(x^2+4)^2}\right| < \frac{2}{4\cdot 4} = \frac{1}{8}$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Alegem $x_0 = 0$. Atunci $x_1 = f(x_0) = \frac{1}{4}$, $\delta = \left|\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{1}{4}$. Rezultă că $\frac{\delta}{1-c}\cdot c^n = \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{8^n} < 10^{-4}$ pentru $n \geq 4$. Deci x_4 este aproximarea rădăcinii cu patru zecimale exacte.

Exerciţiul 1.2.5. Determinaţi limitele extreme ale şirurilor:

a) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $x_n = \frac{n^{2(-1)^n}}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţii. a) Prezenţa lui $(-1)^n$ sugerează considerarea următoarelor două subşiruri:

$$x_{2m} = \frac{1+(-1)^{2m}}{2} + (-1)^{2m} \cdot \frac{2m}{4m+1} = 1 + \frac{2m}{4m+1},\ m \in \mathbb{N}$$

$$x_{2m+1} = \frac{1+(-1)^{2m+1}}{2} + (-1)^{2m+1} \cdot \frac{2m+1}{2(2m+1)+1} = 0 - \frac{2m+1}{4m+3} =$$

$$= -\frac{2m+1}{4m+3},\ m \in \mathbb{N}$$

Evident, $\lim_{m\to\infty} x_{2m} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\lim_{m\to\infty} x_{2m+1} = -\frac{1}{2}$

Prin urmare, mulţimea punctelor de acumulare a acestui şir este $\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$. Deci $\underline{\lim}\, x_n = -\frac{1}{2}$, $\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$.

b) Analog, $x_{2m} = \frac{(2m)^2}{2m} = 2m$, $m \in \mathbb{N}^*$

$$x_{2m+1} = \frac{(2m+1)^{2\cdot(-1)}}{2m+1} = \frac{1}{(2m+1)^3},\ m \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $\lim_{m\to\infty} x_{2m} = \infty$ şi $\lim_{m\to\infty} x_{2m+1} = 0$, deducem că $\underline{\lim}\, x_n = 0$ şi $\overline{\lim}\, x_n = \infty$.

Exerciţiul 1.2.6. Să se studieze natura seriilor următoare şi să se calculeze suma în caz de convergenţă:

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$; b) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{3^n}$; c) $\sum_{n\geq 1} \ln\frac{n+1}{n}$.

Soluţii.

a) $x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Evident, $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Prin urmare, seria dată este convergentă şi suma sa este $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1$

b) $x_n = \dfrac{n}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ deci $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n}$.

$$s_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{3^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}}\right)}_{n-1 \text{ termeni}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{3^n} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right)}_{n \text{ termeni}}.$$

Atunci,

$$s_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{3^n},$$

adică

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{n-k}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \cdot \frac{\frac{1}{3^{n-k}} \cdot \frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}\left(1 - \frac{1}{3^{n-k+1}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \frac{3}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{n+1}}\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{\frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - 1} - \frac{n}{3^{n+1}}\right] \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3^{n+1}} = 0$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{3}{4}$, deci seria dată este convergentă şi suma sa este $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$.

c) $x_n = \ln \dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$.

$s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, deci şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ al sumelor parţiale este divergent.

Rezultă că seria $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$ este divergentă. Să observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ deci această condiţie este necesară dar nu şi suficientă pentru convergenţa unei serii.

Exercițiul 1.2.7. Să se studieze natura seriilor următoare:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$; b) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(1+a+a^2+...+a^n)}$, unde a > 0

c) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot a^n$, unde a > 0; d) $\sum_{n\geq 1}\frac{a^n\cdot n^n}{n!}$, unde a > 0

e) $\sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...(2n)}$

Soluții.

a) Deoarece $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ este convergentă și $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}\cdot\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}=\sqrt{7}$ deducem că seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$ este convergentă (vezi teorema 1.1.2.6)

b) Pentru a > 1, seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{a^n}$ este convergentă (serie geometrică cu rația $\frac{1}{a}$). Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(1+a+a^2+...+a^n)}}{\frac{1}{a^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n\cdot\frac{a^{n+1}-1}{a-1}}=$$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}\cdot\frac{a^n}{a^{n+1}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}\cdot\frac{1}{a-\frac{1}{a^n}}=0$, din teorema 1.1.2.6. deducem că seria dată este convergentă.

Pentru a = 1 seria devine $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ iar aceasta este convergentă (ex. 1.3.6.a)

Pentru 0 < a < 1 se poare folosi ușor teorema 1.1.2.6. folosind ca termen de comparație seria armonică $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ despre care se știe că este divergentă.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(1+a+a^2+...+a^n)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a+a^2+...+a^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a}{1-a^{n+1}}=1-a \text{ (căci } \lim_{n\to\infty}a^{n+1}=0 \text{ deoarece } a\in(0,1))$$

Deoarece 0 < 1 – a < ∞ rezultă că cele două serii au aceeași natură. Rezultă astfel că, pentru $a\in(0,1)$ seria dată este divergentă

c) $x_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot a^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, a > 0. Prezența lui *n* la exponent sugerează aplicarea criteriului rădăcinii:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot a=a\cdot e.$$

Prin urmare, dacă $0 < a < \frac{1}{e}$, avem $a \cdot e < 1$, deci seria este convergentă, iar dacă $a > \frac{1}{e}$, atunci $a \cdot e > 1$, deci seria este divergentă.

Rămâne de studiat cazul $a = \frac{1}{e}$. În acest caz, $x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ rezultă $e^n < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2+n}$, de unde

$x_n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \frac{1}{e} \neq 0$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$ de unde obţinem că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

d) $x_n = \frac{a^n \cdot n^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n \cdot n^n} = a \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a \cdot e$.

Dacă $0 < a < \frac{1}{e}$, avem $a \cdot e < 1$, de unde, cu criteriul raportului, obţinem că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă.

Dacă $a > \frac{1}{e}$, atunci $a \cdot e > 1$ de unde deducem că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

Rămâne de studiat cazul $a = \frac{1}{e}$.

Pentru $a = \frac{1}{e}$ avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind din nou inegalitatea $e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$, valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ obţinem $\frac{x_{n+1}}{x_n} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \frac{n}{n+1}$ adică $(n+1)x_{n+1} > nx_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $nx_n > 1 \cdot x_1$ adică $x_n > x_1 \cdot \frac{1}{n}$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k > x_1 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Cum $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă deducem (vezi teorema 1.1.2.5.) că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

e) Punând $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$ obţinem:

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1$, deci nu putem utiliza criteriul raportului. Deoarece

$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right) = n \cdot \frac{1}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$ < 1, obţinem, cu criteriul Raabe Duhamel, că $\sum_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

Exerciţiul 1.2.8. Să se aproximeze sumele seriilor următoare cu o eroare mai mică decât 10^{-2}:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^n}$, b) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \cdot \frac{1}{n^n}$, c) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n!)^2}$

Soluţii. a) Dacă notăm $x_n = \frac{1}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ atunci $\sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$, pentru orice $n \geq 2$. Atunci rezultă că, pentru orice $n \geq 2$ are loc $|s - s_n| \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$ unde s este suma seriei, iar s_n este suma parţială de ordinul n.

Deci $|s - s_n| \leq \frac{1}{2^n}$ pentru orice $n \geq 2$. Pentru ca s_n să aproximeze s cu o eroare mai mică decât 10^{-2} este suficient să determinăm cel mai mic rang n care satisface inegalitatea $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^2}$.

Se obţine $n = 7$ deci $s \approx s_7 = 1.291285935$ cu două zecimale exacte.

b) Deoarece $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{10^2}$ pentru orice $n \geq 4$ rezultă că

$0 < s - s_3 < \frac{1}{4^4} < \frac{1}{10^2}$, $0 < s_4 - s < \frac{1}{5^5} < \frac{1}{10^2}$. Deci $s_3 = -7870370370$ aproximează pe s prin lipsă, iar $s_4 = -7831307870$ prin adaos, ambele cu o eroare mai mică decât 10^{-2}.

c) Dacă notăm $x_n = \frac{1}{(n!)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ atunci $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{4}$ pentru orice $n \geq 1$ de unde rezultă evaluarea:

$0 < s - s_n \leq \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$, adică $0 < s - s_n \leq \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{3}$, pentru orice $n \geq 1$.

Cum $\frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{3} < 10^{-2}$ pentru orice $n \geq 3$ rezultă că $s \approx s_3 = 1,277777778$.