# 1. ŞIRURI ŞI SERII DE NUMERE REALE

## 1.1.Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale.

### 1.1.1. Şiruri de numere reale.

Presupunem cunoscute noţiunile de bază despre mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi, mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale şi mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale.

Reamintim că pe $\mathbb{R}$ se poate defini o structură algebrică de corp comutativ total ordonat la fel ca în $\mathbb{Q}$ dar cele două mulţimi se deosebesc esenţial prin funcţionarea în $\mathbb{R}$ a axiomei marginii superioare, care constituie punctul de plecare în stabilirea tuturor rezultatelor profunde ale analizei.

Reamintim că definind *modulul* unui număr real $x$ astfel:

$$|x| = max\{x, -x\} = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

se verifică imediat următoarele proprietăţi:

[N$_1$] $|x| \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

[N$_2$] $|x + y| \leq |x| + |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

[N$_3$] $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

De asemenea, definind funcţia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin

$$d(x, y) = |x - y|$$

se verifică imediat, folosind [N$_1$], [N$_2$], [N$_3$], următoarele proprietăţi:

[D$_1$] $d(x, y) \geq 0$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

[D$_2$] $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

[D$_3$] $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$

Numărul real şi pozitiv $d(x, y)$ este numit *distanţa euclidiană* între numerele $x, y$, funcţia $d$ se numeşte metrică, iar ($\mathbb{R}$, $d$) este un spaţiu metric. Utilizând această noţiune se poate exprima cât de “apropiate” sunt două numere reale şi se poate introduce noţiunea de şir convergent de numere reale, cunoscută din liceu, pe care o vom reaminti, precum şi noţiunea de şir fundamental de numere reale pe care o vom prezenta în continuare.

**Definiţia 1.1.1.1.** Se numeşte *şir de numere reale* orice funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este definit un număr real $x_n = f(n)$ numit *termenul de rang n*, sau *termenul general al şirului*; şirul însuşi se notează $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, iar mulţimea $\{x \in \mathbb{R} : \exists\ n \in \mathbb{N},\ x = x_n\}$ se numeşte *mulţimea termenilor şirului*.

**Observaţia 1.1.1.1.** Trebuie făcută distincţia între un şir şi mulţimea termenilor lui, deoarece două şiruri distincte pot avea aceeaşi mulţime de termeni. De exemplu, $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(n) = (-1)^n$ şi $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $g(n) = (-1)^{n+1}$ sunt două şiruri distincte cu aceeaşi mulţime de termeni $\{-1, 1\}$.

**Definiţia 1.1.1.2.** Şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale se numeşte *convergent* dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, încât, oricare ar fi $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$ adică $d(x_n, x) < \varepsilon$. Elementul $x$ se numeşte *punct limită* pentru şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. În caz contrar, şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numeşte *divergent*.

Dacă $x \in \mathbb{R}$ este punct limită pentru şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se mai spune că acest şir *converge la x*, sau că *x este limita şirului* şi se notează $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

**Definiţia 1.1.1.3.** Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$ un şir de numere reale.
Fie $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h(m) = n_m$ un şir strict crescător de numere naturale. Funcţia $\varphi = f \circ h$ se numeşte *subşir* al şirului $f$.

Evident, $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\varphi(m) = f(h(m)) = f(n_m) = x_{n_m}$ iar $n_m \geq m$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

**Definiţia 1.1.1.4.** Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$ un şir de numere reale. Elementul $x \in \mathbb{R}$ se numeşte *punct de acumulare* pentru şirul $f$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $m \in \mathbb{N}$ există $n_m \geq m$ încât $|x_{n_m} - x| < \varepsilon$ adică $d(x_{n_m}, x) < \varepsilon$.

**Observaţia 1.1.1.2.** a) Se poate demonstra că $x \in \mathbb{R}$ este punct de acumulare pentru un şir $f$ de numere reale dacă şi numai dacă există un subşir al acestuia care are limita $x$ (*lema lui Cesaro*). Este evident că orice punct limită pentru un şir este punct de acumulare pentru acesta. Reciproca acestei afirmaţii nu este, în general, adevărată. De exemplu, şirul $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ are două puncte de acumulare (-1 şi 1) dar nu are nici un punct limită.

b) Un şir convergent de numere reale are un singur punct de acumulare (limita şirului); dacă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$ este un şir mărginit de numere reale, iar $\gamma(f)$ este mulţimea punctelor de acumulare ale şirului $f$, se poate demonstra că $\gamma(f) \neq \emptyset$, aceasta fiind consecinţă a axiomei marginii superioare, extrem de importantă în demonstraţia teoremei 1.1.1.1. În $\overline{\mathbb{R}}$, $\gamma(f)$ are întotdeauna margine inferioară şi margine superioară. Se notează $\underline{\lim}\ x_n = \inf \gamma(f)$ şi se numeşte *limita inferioară* a şirului $f$; analog,

$\overline{\lim}\ x_n = \sup \gamma(f)$ se numeşte *limita superioară* a şirului $f$. Se poate arăta că un şir mărginit de numere reale este convergent dacă şi numai dacă

$$\underline{\lim}\ x_n = \overline{\lim}\ x_n$$

c) Proprietăţile specifice legate, fie de structura algebrică a lui $\mathbb{R}$ fie de proprietatea de a fi o mulţime total ordonată sunt cunoscute, în mare parte, din liceu şi au mai mică importanţă pentru demersul nostru. De aceea vom prezenta aici doar proprietăţile şirurilor de numere reale legate de completitudinea lui $\mathbb{R}$, foarte importante în practică şi nestudiate în liceu.

**Definiţia 1.1.1.5.** Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$ un şir de numere reale. Şirul $f$ se numeşte *şir fundamental* (sau şir *Cauchy*) dacă şi numai dacă pentru orice
$\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ încât dacă $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ şi $m \geq n_0$ atunci
$|x_n - x_m| < \varepsilon$ adică $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sau, echivalent, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$ şi orice $p \in \mathbb{N}$.

**Observaţia 1.1.1.3.** În definiţia convergenţei unui şir apare în mod explicit limita şirului, pe când în definiţia unui şir fundamental intervin numai termeni ai şirului, deci aceasta din urmă este o definiţie intrinsecă. Determinarea limitei este dificilă, în multe situaţii imposibilă. Prin urmare, teorema următoare este extrem de importantă:

**Teorema 1.1.1.1.** *(criteriul general de convergenţă al lui Cauchy)*
Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă el este un şir fundamental. (Se spune că $\mathbb{R}$, în raport cu distanţa euclidiană este spaţiu metric complet)

**Observaţia 1.1.1.4.** Având în vedere această teoremă, pentru testarea convergenţei unui şir de numere reale este suficient să se verifice condiţia intrinsecă de a fi şir fundamental. Apoi definiţia 1.1.1.2. arată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$, deci putem aproxima $x \approx x_n$ şi aproximarea este cu atât mai bună cu cât rangul $n$ este mai mare. Referitor la evaluarea erorii cu care se face această aproximare, putem preciza următoarele: dacă $|x_{n+p} - x_n| \leq y_n$ pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este fundamental, deci convergent; dacă $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ se poate arăta că $|x_n - x| \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, inegalitate care poate fi considerată formulă de evaluare a erorii cu care se face aproximarea $x \approx x_n$. Evident, dacă se impune ca eroarea să fie mai mică decât $\varepsilon$ dat, se va determina cea mai mică valoare $n_\varepsilon$ a lui $n$ pentru care $y_n < \varepsilon$ şi se va aproxima $x \approx x_n$.

**Exemplul 1.1.1.1.** Fie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Deoarece

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \geq \underbrace{\frac{1}{n+n} + \ldots + \frac{1}{n+n}}_{\text{de n ori}} = \frac{1}{2}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că şirul $f$ nu este fundamental, deci nici convergent.

**Exemplul 1.1.1.2.** Fie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k!}{k(k+1)}$.

Deoarece $|a_{n+p} - a_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} \frac{\sin k!}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k!}{k(k+1)} \right| =$

$= \left| \sum_{k=n+1}^{k=n+p} \frac{\sin k!}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\sin k!|}{k(k+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} <$

$\frac{1}{n+1}$, pentru orice $n, p \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, deducem că şirul $f$ este şir fundamental, deci convergent.

Prin urmare, există şi este unic $a \in \mathbb{R}$, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, dar $a$ nu se poate determina cu exactitate. Pentru a determina o valoare aproximativă, cu o eroare mai mică decât $10^{-3}$ (de exemplu) observăm că $\frac{1}{n+1} <$

$\frac{1}{10^3} \Leftrightarrow n + 1 > 10^3 \Leftrightarrow n > 10^3 - 1$.

Prin urmare, cel mai mic $n$ pentru care $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^3}$ este $10^3$.Deci $a \approx a_{1000}$

Se poate demonstra că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, intervalele $(-\infty, a]$, $[a, b]$, $[a, \infty)$ sunt spaţii metrice *complete* în raport cu metrica euclidiană.

Fie X unul dintre aceste intervale sau $\mathbb{R}$. Funcţia $f : X \to X$ se numeşte *contracţie* dacă există $c \in [0, 1)$ numit *coeficient de contracţie* astfel încât $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ pentru orice $x, y \in X$.

Utilizând teorema 1.1.1.1. reformulată pentru X se poate demonstra următorul rezultat important cunoscut sub numele de *Teorema de punct fix a lui Banach* sau *Principiul contracţiei* :

**Teorema 1.1.1.2.** Pentru orice contracţie $f : X \to X$ există şi este unic un punct $\xi \in X$ astfel încât $f(\xi) = \xi$. Punctul $\xi$ se numeşte *punct fix* al aplicaţiei *f*. Trebuie reţinută metoda de determinare a punctului fix cunoscută sub numele de metoda aproximaţiilor successive: prima aproximaţie $x_0 \in X$ este aleasă arbitrar, apoi aproximaţiile $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_n = f(x_{n-1})$, ...sunt determinate succesiv folosind $f$; se demonstrează că $|x_n - x_{n+p}| \leq \frac{\delta}{1-c} \cdot c^n$, pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$, unde c este coeficientul de contracţie, $\delta = d(x_0, x_1) = |x_0 - x_1|$; indiferent de alegerea lui $x_0$ şirul de aproximaţii succesive $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge la aceeaşi limită $\xi$. Formula precisă $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ este înlocuită în practică prin formula de aproximare $\xi \approx x_n$. Pentru a evalua eroarea care apare în această aproximare, se poate arăta că $|x_n - \xi| \leq \frac{\delta}{1-c} \cdot c^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi se raţionează apoi ca în observaţia 1.1.1.4.

## 1.1.2. Serii de numere reale.

Noţiunea de serie de numere reale a apărut din necesitatea de a da un sens natural sumei termenilor unui şir de numere reale. Deoarece nu se pot aduna (în sens algebric) o infinitate de numere reale, realizarea acestui scop a fost posibilă numai cu ajutorul noţiunii de limită, numai în anumite cazuri, studiul seriilor îmbinând studiul sumelor finite cu cel al limitelor de şiruri.

## A) Serii convergente. Criterii generale de convergenţă

**Definiţia 1.1.2.1.** Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$ un şir de numere reale.

Fie $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(n) = s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Perechea de şiruri *(f, g)* se numeşte *serie generată de şirul f*. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $s_n$ se numeşte *suma parţială de ordin n* a seriei, iar şirul *g* se numeşte *şirul sumelor parţiale asociat şirului f*. Seria *(f, g)* se numeşte *convergentă* dacă şirul *g* al sumelor parţiale este convergent şi *divergentă* în caz contrar. Dacă seria *(f, g)* este convergentă, se defineşte *suma seriei* ca fiind numărul real $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ şi se notează $s = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$.

**Observaţia 1.1.2.1.** a) Deşi poate crea confuzii, notaţia $\sum_{n\geq 0} x_n$ pentru seria *(f, g)* este frecvent folosită. Trebuie însă mereu făcută distincţia între seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ şi suma sa, $s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, care este un element asociat seriei numai în caz de convergenţă şi care reprezintă suma termenilor şirului dat. În cazul în care seria este divergentă, nu putem atribui nici un sens sumei termenilor şirului care generează seria.
b) În studiul unei serii, rolul principal este jucat de şirul sumelor parţiale, care sunt sume finite. Prin trecerea la limită însă, se pierd o seamă de proprietăţi ale sumelor finite. Astfel, la sumele seriilor nu avem comutativitate, asociativitate, seriile nu pot fi, în general, înmulţite.
c) Dacă se renunţă la un număr finit de termeni ai unei serii (sau dacă se adaugă un număr finit de termeni) seria nou obţinută va avea aceeaşi natură ca şi seria iniţială. În caz de convergenţă, suma se modifică scăzând (sau adăugând) suma finită a termenilor la care se renunţă (respectiv, care se adaugă)
d) Problema principală în studiul unei serii este determinarea naturii şi, în caz de convergenţă, evaluarea exactă sau măcar aproximativă a sumei seriei respective.

**Exemplul 1.1.2.1.** Seria $\sum_{n\geq 0} q^n$, unde $q \in \mathbb{R}$ este fixat, se numeşte *serie geometrică de raţie q*. Sumele parţiale asociate sunt:

$$s_0 = 1,\ s_1 = 1 + q,\ s_2 = 1 + q + q^2,\ \ldots,\ s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n,\ \ldots$$

Se demonstrează prin inducţie că:

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$ dacă şi numai dacă $q \in (-1, 1)$, rezultă că seria geometrică de raţie *q* este convergentă dacă şi numai dacă $|q| < 1$ şi, în acest caz, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

**Exemplul 1.1.2.2.** Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ se numeşte *serie armonică*. Sumele parţiale sunt: $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, …, $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$,… Deoarece $s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (vezi exemplul 1.1.1.1.) rezultă că şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ al sumelor parţiale nu este şir fundamental, deci nici convergent. Rezultă că seria armonică este divergentă.

**Exemplul 1.1.2.3.** Să considerăm acum seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n!}{n(n+1)}$. Şirul sumelor parţiale are în acest caz termenul general $s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k!}{k(k+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Acest şir a fost studiat în exemplul 1.1.1.2 unde s-a arătat că este şir fundamental, deci convergent. Rezultă că seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n!}{n(n+1)}$ este convergentă.

**Observaţia 1.1.2.2.** În exemplul 1.1.2.1. am putut determina natura şi chiar suma seriei considerate exprimând convenabil termenul general al şirului sumelor parţiale. Acest lucru nu este posibil întotdeauna. În exemplul 1.1.2.2. se deduce că seria este divergentă, fără a găsi o formă convenabilă pentru $s_n$. În exemplul 1.1.2.3. se deduce că seria este convergentă, dar nu se poate găsi o expresie convenabilă pentru $s_n$ şi, prin urmare, nu se poate cunoaşte cu exactitate suma seriei.

Este necesară, deci, dezvoltarea unei teorii calitative a seriilor, indicând criterii de convergenţă care ţin cont de forma termenului general al seriei studiate. Pentru o serie care se dovedeşte a fi convergentă (în urma aplicării unui criteriu de convergenţă) se aproximează suma seriei cu o sumă parţială de un ordin convenabil ales (în funcţie de eroarea permisă de problemă)

**Teorema 1.1.2.1.** *(criteriul necesar de convergenţă)*

Dacă seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

**Observaţia 1.1.2.3.** Condiţia din teorema 1.1.2.1. este doar necesară, dar nu şi suficientă pentru convergenţa unei serii. De exemplu, şirul $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(n) = \frac{1}{n}$ este convergent şi are limita zero, dar seria generată de acest şir (seria armonică) nu este convergentă. Din teoremă rezultă imediat că, dacă un şir *f* este divergent sau este convergent cu limita diferită de zero, atunci seria generată de şirul *f* este divergentă. De exemplu, seria $\sum_{n\geq 2}\sqrt[n]{n}$ este divergentă deoarece $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$; seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^n$ este divergentă deoarece şirul $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu are limită.

**Teorema 1.1.2.2.** a) Dacă $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, seria $\sum_{n\geq 0}\lambda x_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n\geq 0} x_n$;

b) Dacă seriile $\sum_{n\geq 0} x_n$, $\sum_{n\geq 0} y_n$ sunt convergente, cu sumele *s*, respectiv σ, atunci seriile $\sum_{n\geq 0}(x_n + y_n)$, $\sum_{n\geq 0}(x_n - y_n)$ sunt convergente, cu sumele $s + \sigma$, respectiv $s - \sigma$.

**Teorema 1.1.2.3.** *(criteriul general de convergenţă al lui Cauchy pentru serii)*

Seria de numere reale $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq n_0$ şi oricare ar fi $p \in \mathrm{N}^*$ să avem:

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon$$

Observând că $x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p} = s_{n+p} - s_n$, esenţa demonstraţiei constă în aplicarea criteriului general de convergenţă al lui Cauchy şirului sumelor parţiale. (vezi şi exemplele 1.1.1.2. şi 1.1.2.3.)

O clasă foarte importantă de serii o constituie seriile absolut convergente.

**Definiţia 1.1.2.2.** Fie $f : \mathrm{N} \to \mathrm{R}$, $f(n) = x_n$. Seria de numere reale $\sum_{n\geq 0} x_n$ se numeşte *absolut convergentă* dacă seria de numere reale pozitive $\sum_{n\geq 0} | x_n |$ este convergentă.

**Teorema 1.1.2.4.** Orice serie absolut convergentă de numere reale este convergentă.

**Observaţia 1.1.2.4.** Reciproca acestei teoreme nu este, în general, adevărată. Există serii convergente care nu sunt absolut convergente. De exemplu, seria $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ numită *serie armonică alternată* , este convergentă (vezi exemplul 1.1.2.5) dar nu este absolut convergentă deoarece $| x_n | = \frac{1}{n}$, $n \in \mathrm{N}^*$ iar $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ este divergentă (vezi exemplul 1.1.2.2.)

**Definiţia 1.1.2.3.** O serie care este convergentă, dar nu este absolut convergentă, se numeşte *semiconvergentă*.

Seria armonică alternată este un exemplu de serie semi-convergentă.

Seriile semiconvergente au o proprietate ce le face puţin utilizabile, cunoscută sub numele de *teorema lui Riemann* : dacă seria de numere reale $(f, g)$, $f : \mathrm{N} \to \mathrm{R}$, $f(n) = x_n$ este semiconvergentă, există o permutare $\sigma$ a mulţimii $\mathrm{N}$, astfel încât seria generată de şirul $f \circ \sigma : \mathrm{N} \to \mathrm{R}$, $(f \circ \sigma)(n) = x_{\sigma(n)}$ să fie divergentă; pentru orice $\alpha \in \mathrm{R}$ există o permutare $\tau$ a lui $\mathrm{N}$ astfel încât seria generată de şirul $f \circ \tau : \mathrm{N} \to \mathrm{R}$, $(f \circ \tau)(n) = x_{\tau(n)}$ să fie convergentă şi să aibă suma $\alpha$.

Rezultă, de aici, că seriile semiconvergente au o comportare foarte diferită de cea a sumelor finite.

Spre deosebire de acestea, dacă într-o serie absolut convergentă modificăm ordinea termenilor, nici natura, nici suma seriei nu se schimbă (*teorema lui Dirichlet*)

Astfel, seriile absolut convergente au o comportare asemănătoare cu cea a sumelor finite; de aceea ele sunt cele mai des utilizate.

Studiul seriilor absolut convergente înseamnă de fapt studiul seriilor *cu termeni pozitivi*. Pentru asemenea serii se pot formula multe criterii care dau condiţii suficiente de convergenţă. Prezentăm în continuare pe cele mai importante.

## B) Serii cu temeni pozitivi. Criterii de convergenţă

**Teorema 1.1.2.5.** O serie de numere reale şi pozitive este convergentă, dacă şi numai dacă, şirul sumelor ei parţiale este mărginit.

**Teorema 1.1.2.6.** *(criteriul comparaţiei)* Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ şi $\sum_{n\geq 0} y_n$ două serii cu termeni pozitivi astfel încât să existe $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

a) dacă $0 < l < \infty$ atunci cele două serii au aceeaşi natură;

b) dacă $l = 0$ şi $\sum_{n\geq 0} y_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă;

c) dacă $l = \infty$ şi $\sum_{n\geq 0} y_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este divergentă.

**Teorema 1.1.2.7.** *(criteriul rădăcinii al lui Cauchy)*

Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $q \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\sqrt[n]{x_n} \leq q$, atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\sqrt[n]{x_n} \geq 1$ pentru o infinitate de indici, atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este divergentă.

**Corolar.** Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

a) Dacă $l < 1$, atunci seria este convergentă.

b) Dacă $l > 1$, atunci seria este divergentă.

**Teorema 1.1.2.8.** *(criteriul raportului, al lui d'Alembert)*

Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $q \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ să avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q$, atunci seria este convergentă.

b) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $q \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ atunci seria este divergentă.

**Corolar.** Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

a) Dacă $l < 1$, atunci seria este convergentă.

b) Dacă $l > 1$, atunci seria este divergentă.

**Observatia 1.1.2.5.** Dacă $l = 1$ în corolarul teoremei 1.1.2.7. (sau 1.1.2.8.) nu se poate trage nici o concluzie asupra naturii seriei. Spre exemplu, să considerăm seriile $\sum_{n\geq1} x_n$, $\sum_{n\geq1} y_n$ unde $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Evident că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1$.

Seria $\sum_{n\geq1} x_n$ este divergentă (vezi exemplul 1.1.2.2.). Seria $\sum_{n\geq1} y_n$ este însă convergentă. (Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ şi, prin urmare, $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$)

În situaţiile în care criteriul raportului nu poate decide natura seriei se poate folosi:

**Teorema 1.1.2.9.** *(criteriul lui Raabe - Duhamel)*

Fie $\sum_{n\geq0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ şi $r > 1$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq r$, atunci seria este convergentă.

b) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, atunci seria este divergentă.

**Corolar.** Fie $\sum_{n\geq0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există

$l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$.

a) Dacă $l > 1$, atunci seria este convergentă.
b) Dacă $l < 1$, atunci seria este divergentă.

**Exemplul 1.1.2.4.** Seria $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$ se numeşte *serie armonică generală*. Este evident că $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ pentru orice $\alpha > 0$, deci natura seriei nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului raportului (şi nici cu criteriul rădăcinii). Dar

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1\right] = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Se ştie din liceu că $\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$. Folosind *criteriul cu şiruri* al limitei unei funcţii (de asemenea, cunoscut din liceu) deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, rezultă că:

$$l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha$$

Rezultă astfel că pentru $\alpha > 1$ seria armonică generală este convergentă, iar pentru $\alpha < 1$ este divergentă. Pentru $\alpha = 1$ se obţine seria armonică despre care s-a arătat anterior (vezi exemplul 1.1.2.2.) că este divergentă.

**Teorema 1.1.2.10.** *(criteriul integral al lui Cauchy)* Fie $f:[0, \infty)\to[0, \infty)$ o funcţie continuă, descrescătoare şi fie $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Seria cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$,

$F(n) = \int_0^n f(x)dx$ este mărginit.

**Observaţia 1.1.2.6.** Teorema rămâne valabilă şi în cazul în care $f: [a, \infty)\to\mathbb{R}^+$, unde $a > 0$.

Cu ajutorul acestui criteriu putem stabili foarte uşor natura seriei armonice generale (studiată în exemplul 1.1.2.4). Este suficient să considerăm funcţia $f: [1, \infty)\to\mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $\alpha>0$ şi să observăm că, pentru $\alpha \neq 1$, $F(n) = \int_1^n \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\alpha>1$, avem: $F(n) = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) < \frac{1}{\alpha-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, şirul $F$ este mărginit, deci seria este convergentă. Dacă $\alpha<1$, avem:

$F(n) = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim_{n\to\infty} F(n) = \infty$ deci şirul $F$ nu este mărginit, deci seria este divergentă.

## C) Serii alternate.

Pentru studiul unei serii care *nu este absolut convergentă* se poate folosi direct criteriul general al lui Cauchy (teorema 1.1.2.3.) sau următoarea teoremă care se demonstrează cu ajutorul acestuia.

**Teorema 1.1.2.11.** *(criteriul lui Abel)* Fie $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de numere reale având şirul sumelor parţiale asociat mărginit. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de numere reale, descrescător şi convergent către zero. Atunci seria $\sum_{n\geq 0} a_n z_n$ este convergentă.

**Corolar.** *(criteriul lui Leibnitz pentru serii alternate)*

Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de numere reale, descrescător şi convergent către zero. Atunci seria $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ este convergentă. (o asemenea serie se numeşte *serie alternată*)

**Exemplul 1.1.2.5.** Seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}$, unde $\alpha > 0$ este convergentă, fără a fi absolut convergentă pentru $0 < \alpha \leq 1$; pentru $\alpha > 1$ această serie este şi convergentă şi absolut convergentă (convergenţa se poate deduce din convergenţa absolută, sau, direct, cu criteriul lui Leibnitz)

## D) Aproximarea sumei

**Observaţia 1.1.2.7.** Pentru o serie care s-a dovedit a fi convergentă, dar nu este posibil să-i determinăm suma, este important să putem evalua eroarea făcută, dacă se aproximează suma seriei cu o sumă parţială. Sunt situaţii în care se poate evalua uşor această eroare şi, prin urmare, se poate obţine suma seriei cu precizia dorită:

a) dacă $| x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p} | \leq y_n$ pentru orice $n, p\in \mathbb{N}$ şi $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ atunci seria este convergentă (rezultă din teorema 1.1.2.3.). Se poate arăta că $| s_n - s |\leq y_n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, inegalitate care poate fi considerată formulă de evaluare a erorii cu care se face aproximarea $s \approx s_n$ (vezi şi observaţia 1.1.1.4.).

b) dacă există $q\in(0, 1)$ şi $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\sqrt[n]{| x_n |}\leq q$, atunci aplicând criteriul rădăcinii seriei $\sum_{n\geq 0}| x_n |$ se deduce că seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este absolut convergentă, deci şi convergentă. Se poate arăta că, pentru orice $n \geq n_0$, $| s_n - s | \leq \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

c) dacă există $q\in(0, 1)$ şi $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\leq q$, atunci aplicând criteriul raportului seriei $\sum_{n\geq 0}| x_n |$ se deduce că seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este absolut convergentă, deci şi convergentă. Se poate arăta că, pentru orice $n \geq n_0$, $| s_n - s | \leq | x_n |\cdot\frac{q}{1-q}$.

d) pentru o serie alternată $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1} a_n$ convergentă se poate arăta că:

$$0 < s_{2n} - s < a_{2n+1},\ 0 < s - s_{2n+1} < a_{2n+2}$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Deci, dacă aproximăm suma $s$ a unei serii alternate ce satisface condiţiile criteriului lui Leibniz cu suma parţială de ordinul $n$, facem o eroare mai mică decât primul termen neglijat; eroarea este prin lipsă dacă $n$ este impar şi prin adaos, dacă $n$ este par.