10. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE PRIMUL TIP

10.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 10.2.1. Să se calculeze $\iint_S z^2 dS$, unde S este dată parametric prin: x = u cos v, y = u sin v, z = hu, u$\in$[0, a], v$\in$[0, 2π].

Soluţie. Deoarece S este dată parametric se aplică direct formula din teorema 10.1.3.1. Calculăm mai întâi:

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ h & 0 \end{vmatrix} = -\text{hu cos v}$$

$$B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h & 0 \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -\text{hu sin v}$$

$$C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = \text{u}\cos^2\text{v} + + \text{u}\sin^2\text{v} = \text{u}$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = h^2u^2\cos^2 v + h^2u^2\sin^2 v + u^2 =$$
$$= h^2u^2 + u^2 = (h^2+1)\,u^2$$

Deci $\sqrt{A^2+B^2+C^2} = u\sqrt{h^2+1}$.

Notând D = [0, a] x [0, 2π], cu formula din teorema 10.1.3.1. obţinem:

$$\iint_S z^2 dS = h^2\sqrt{h^2+1}\iint_D u^3 du dv = h^2\sqrt{h^2+1}\cdot 2\pi\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4 h^2\sqrt{h^2+1}}{2}$$

Exerciţiul 10.2.2. Să se calculeze $\iint_S (xy+yz+zx)dS$, unde S este porţiunea suprafeţei conice z = $\sqrt{x^2+y^2}$ decupată de suprafaţa $x^2 + y^2 = 2ax$.

Soluţie. Suprafaţa fiind dată explicit, aplicăm formula din observaţia 10.1.3.2.Notând f(x, y) = $\sqrt{x^2+y^2}$ şi D$\subset\mathbb{R}^2$ discul limitat de cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 2ax$, rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}, \text{ deci}$$

$$\iint_S (xy+yz+zx)dS = \sqrt{2}\iint_D (xy + y\sqrt{x^2+y^2} + x\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

Trecând la coordonate polare, integrala devine:

$$\sqrt{2}\iint_{D^*} (r^2\sin t\cos t + r^2\sin t + r^2\cos t) r dr dt =$$
$$= \sqrt{2}\iint_{D^*} r^3(\sin t\cos t + \sin t + \cos t) dr dt$$

unde $D^* = \{(r, t): 0 \le r \le 2a\cos t, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\}$.

Prin urmare,

$$\iint_S (xy + yz + zx)dS = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\left(\sin t\cos t + \sin t + \cos t\right)\int_0^{2a\cos t} r^3 dr\right]dt$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\left(\sin t\cos t + \sin t + \cos t\right)\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{2a\cos t}\right]dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 16a^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin t\cos t + \sin t + \cos t)\cos^4 t dt =$$

$$= 4\sqrt{2}a^4\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin t\cos^5 t dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin t\cos^4 t dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5 t dt\right]$$

$$= 4\sqrt{2}a^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5 t dt = 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\pi/2}\cos^5 t dt =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\pi/2}(1 - \sin^2 t)^2\cos t dt = = 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\pi/2}(1 - 2\sin^2 t + \sin^4 t)(\sin t)' dt =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\left(\sin t - 2\cdot\frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

Exercițiul 10.2.3. Să se calculeze $\iint_S (x + y + z)dS$ unde S este emisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$.

Soluție. Ecuațiile parametrice ale emisferei S sunt:

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta\cos\varphi \\ y = 2\sin\theta\cos\varphi, \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \varphi \in [0, 2\pi] \\ z = 2\cos\theta \end{cases}$$

Calculăm :

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta\sin\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi \\ -2\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = 4\sin^2\theta\cos\varphi$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\sin\theta & 0 \\ 2\cos\theta\cos\varphi & -2\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = 4\sin^2\theta\cos\varphi$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta\cos\varphi & -2\sin\theta\sin\varphi \\ 2\cos\theta\sin\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = =4\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + 4\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi =$$

$$4\sin\theta\cos\theta$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = 16\sin^4\theta\cos^2\varphi + 16\sin^4\theta\sin^2\varphi + 16\sin^2\theta\cos^2\theta = 16\sin^4\theta + +16\sin^2\theta\cos^2\theta = 16\sin^2\theta$$

Deci $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 4\sin\theta$

Aplicând acum formula din teorema 10.1.3.1., notând D = $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$x[0, 2π], obţinem :

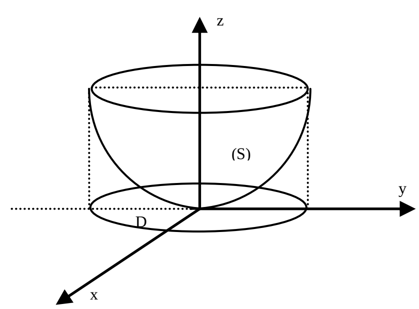
$$\iint_S (x+y+z)dS = \iint_D (2\sin\theta\cos\varphi + 2\sin\theta\sin\varphi + 2\cos\theta)\cdot 4\sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= 8\iint_D (\sin^2\theta\cos\varphi + \sin^2\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\theta)d\theta d\varphi =$$

$$8\left[\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\cdot\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\cdot\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi + 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\right] = 8\pi$$

Exerciţiul 10.2.4. Să se calculeze aria porţiunii din paraboloidul $x^2+y^2 = 3z$ mărginită de planul z = 3.
Soluţie. Deoarece suprafaţa este definită explicit în raport cu variabila z, utilizăm formula:

$$a(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$



Deoarece f(x, y) = $\frac{1}{3}(x^2+y^2)$ şi D = {(x, y)∈ℝ²: $x^2 + y^2 \le 9$} obţinem a(S) = $\iint_D \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}y^2}\, dxdy$.

Trecând la coordonate polare: x = r cos t, y = r sin t, r∈ [0, 3], t ∈ [0, 2π],
$\frac{D(x,y)}{D(r,t)}$ = r. Notând D^* = [0, 3] x [0, 2 π], obţinem:

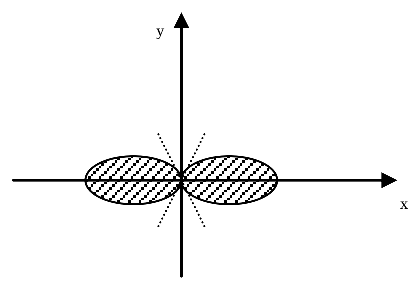
$$\text{a(S)} = \iint_{D^*} \sqrt{1+\frac{4}{9}r^2}\cdot \text{rdrdt} = 2\pi\frac{9}{8}\int_0^3\left(1+\frac{4}{9}r^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{4}{9}r^2\right)' \text{dr} =$$

$$= \frac{9\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{4}{9}r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^3 = \frac{3\pi}{2}\left[\left(1+\frac{4}{9}\cdot 9\right)^{\frac{3}{2}}-1\right] = \frac{3\pi}{2}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

Exercițiul 10.2.5. Să se determine aria porțiunii din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, decupată de cilindrul $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, situată în semispațiul $z \geq 0$.
Soluție. Ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu condiția $z \geq 0$ se poate explicita
$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.
Cilindrul are generatoarele paralele cu Oz și are directoare în planul xOy lemiscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, prin urmare:

$$\text{a(S)} = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy\,,$$

unde D este domeniul mărginit de lemniscată.



Trecând la coordonate polare și notând

$$D^* = \left\{(r,t) : 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2t}, t \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\right\},$$

obținem $\text{a(S)} = a\iint_{D^*}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,drdt = 4a\int_0^{\pi/4}\left[\int_0^{a\sqrt{\cos 2t}}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\right]dt =$

$$= 4a\int_0^{\pi/4}(a - a\sqrt{2}\sin t)dt = 4a\left(\frac{\pi}{4}a + a\sqrt{2}\cos t\Big|_0^{\pi/4}\right) =$$

$$= 4a^2\left[\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\right] = 4a^2\left(\frac{\pi}{4}+1-\sqrt{2}\right) = a^2(\pi+4-4\sqrt{2})$$

Exercițiul 10.2.6. Să se determine masa suprafeței materiale (S) dată prin
$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq 1$, dacă densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = z$.

Soluție. Proiecția porțiunii din paraboloidul $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ corespunzătoare condiției $z \leq 1$ este: $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Punând f(x, y) = $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, obţinem:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}\,.$$

Aplicăm acum formula 10.1.4.1. obţinem:

$$m(S) = \iint_S \rho(x,y,z)dS = \iint_S z dS = \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

Trecând la coordonate polare, notând $D^* = [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi]$, obţinem:

$$m = \frac{1}{2}\iint_{D^*} r^2\sqrt{1+r^2}\,rdrdt = \frac{1}{2}\iint_{D^*} r^3\sqrt{1+r^2}\,drdt = \pi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr$$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{r^3(1+r^2)}{\sqrt{1+r^2}}dr = \pi\int_0^{\sqrt{2}} r^2(\sqrt{1+r^2})'dr + \pi\int_0^{\sqrt{2}} r^4(\sqrt{1+r^2})'dr =$$

$$= \pi\left[r^2\sqrt{1+r^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} 2r\sqrt{1+r^2}\,dr + r^4\sqrt{1+r^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} - \right.$$

$$\left. -4\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr \right] = \pi\left[2\sqrt{3} - \frac{2}{3}(1+r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} + 4\sqrt{3} - \right.$$

$$\left. -4\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr \right] = \left(4\sqrt{3}+\frac{2}{3}\right)\pi - 4\pi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr =$$

$$= 2\pi\left(2\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right) - 4m.$$

Rezultă $5m = \frac{2\pi}{3}(1+6\sqrt{3})$, deci $m = \frac{2\pi}{15}(1+6\sqrt{3})$.

Exerciţiul 10.2.7. Să se determine coordonatele centrului de greutate al emisferei materiale S dată prin $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, ştiind că densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Soluţie. Vom folosi formulele 10.1.4.2. Determinăm mai întâi masa emisferei $m = \iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$.

Ecuaţiile parametrice ale emisferei S sunt $x = a\sin\theta\cos\varphi$, $y = a\sin\theta\sin\varphi$,

$z = a\cos\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ca în exerciţiul 10.3.3. obţinem $\sqrt{A^2+B^2+C^2} = a^2\sin\theta$ şi m =

$$\iint_D \sqrt{a^2\sin^2\theta}\cdot a^2\sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= a^3\iint_D \sin^2\theta d\theta d\varphi = 2\pi a^3\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \pi a^3\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}a^3$$

Determinăm acum coordonatele centrului de greutate:

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x,y,z)dS = \frac{2}{\pi^2 a^3}\iint_S x\sqrt{x^2+y^2}\,dS =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 a^3}\iint_S a^4 \sin^3\theta\cos\varphi d\theta d\varphi = \frac{2a}{\pi^2}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\right) = 0$$

$$y_G = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x,y,z)dS = \frac{2}{\pi^2 a^3}\iint_S y\sqrt{x^2+y^2}dS =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 a^3}\iint_S a^4 \sin^3\theta\sin\varphi d\theta d\varphi = \frac{2a}{\pi^2}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\right) = 0$$

$$z_G = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x,y,z)dS = \frac{2}{\pi^2 a^3}\iint_S z\sqrt{x^2+y^2}dS =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 a^3}\iint_S a^4 \sin^3\theta\cos\theta d\theta d\varphi = \frac{2a}{\pi^2}\cdot 2\pi\cdot\left.\frac{\sin^3\theta}{3}\right|_0^{\pi/2} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Exercițiul 10.2.8. Să se determine momentul de inerție, în raport cu planul xOy al porțiunii de suprafață $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$, știind că densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = 1 + xy$.

Soluție. Momentul de inerție, în raport cu planul xOy este:

$$I_{xOy} = \iint_S z^2\rho(x,y,z)dS = \iint_S z^2(1+xy)dS =$$

$$= \iint_D (x^2+y^2)(1+xy)\sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)(1+xy)dxdy,$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$

Trecând la coordonate polare, notând $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ obținem:

$$I_{xOy} = \sqrt{2}\iint_{D^*} r^2(1+r^2\sin\theta\cos\theta)\cdot r dr d\theta =$$

$$= \sqrt{2}\iint_{D^*} r^3(1+r^2\sin\theta\cos\theta)drd\theta = \sqrt{2}\iint_{D^*} r^3 drd\theta +$$

$$+ \sqrt{2}\iint_{D^*} r^5\sin\theta\cos\theta drd\theta =$$

$$= \sqrt{2}\cdot 2\pi\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 + \left(\int_0^1 r^5 dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$