Metode Numerice – Notiţe de laborator*

Autori:

Maria-Magdalena Boureanu şi Laurenţiu Temereancă

*Notă: Algoritmii Pseudocod au fost preluaţi în cea mai mare parte din cartea "Metode Numerice în Pseudocod. Aplicatii", M. Popa, R. Militaru, ed. SITECH, Craiova 2012

1 Noţiuni introductive

Fie matricea cu m linii şi n coloane

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}.$$

Citirea matricei în C:

```
// declarăm variabilele
int n, m, i, j;
float a[10][10];
printf("Dati numarul de linii m=");
scanf("%d",&m);
printf("Dati numarul de coloane n=");
scanf("%d",&n);
// citim elementele matricei A
for(i=1;i<=m;i++)
for(j=1;j<=n;j++)
{
printf("\n a[%d][%d]=",i,j);
scanf("%f",&a[i][j]);
}
```

Afişarea matricei in C:

```
for(i=1;i<=m;i++)
{
for(j=1;j<=n;j++)
printf("%f", a[i][j]);
printf("\n");
}
```

Suma şi diferenţa a două matrice

Exerciţiul 1: Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculaţi $A + B$, $A - B$ şi $B - A$.

Algoritmul Pseudocod pentru A+B

// Citim m, n, numarul liniilor şi coloanelor corespunzatoarea lui A şi B, şi elementele lui A şi B

1. citeste m, n, a_{ij}, b_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$
2. pentru $i = 1, 2, ..., m$ execută
   2.1. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută
   //Calculăm elementele matricei C=A+B
   2.1.1 $c_{ij} \leftarrow a_{ij} + b_{ij}$
3. afişăm matricea $C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$.

Înmulţirea a două matrice

Fie matricele

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \quad \text{şi} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}).$$

Atunci matricea produs $A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{R})$, unde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \forall 1 \le i \le m, \forall 1 \le j \le p. \tag{1}$$

Exerciţiul 2: Calculaţi $A \cdot B$ dacă

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Algoritmul Pseudocod pentru AB

1. citeste m, n, p, a_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n, b_{ij}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le p$
2. pentru $i = 1, 2, ..., m$ execută
 2.1. pentru $j = 1, 2, ..., p$ execută
 2.1.1 $c_{ij} \leftarrow 0$
 2.1.2 pentru $k = 1, 2, ..., n$ execută
 2.1.2.1 $c_{ij} \leftarrow c_{ij} + a_{ik} \cdot b_{kj}$
3. afişăm matricea $C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le p}}$.

Schimbarea a două linii într-o matrice

Exerciţiul 3: Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Schimbaţi linia 2 cu linia 3 în matricea de mai sus si afişaţi-o.

Algoritmul Pseudocod

1. citeste m, n, a_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$
2. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută
 2.1. $aux \leftarrow a_{2j}$
 2.2. $a_{2j} \leftarrow a_{3j}$
 2.3. $a_{3j} \leftarrow aux$
3. afişăm matricea $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$.

Exerciţiul 4: Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculaţi $A - 2B$, A^2, BA, AB, $B + 2I_3$;
b) Schimbaţi linia 3 cu linia 1 în matricea B şi afişaţi-o;
c) Calculaţi suma elementelor de pe diagonala principală a matricei AB (adică urma matricei AB, Tr(AB)).

Maximul şi minimul dintr-un vector

Exerciţiul 5: Fie vectorul

$$v = \left(2,\, -2,\, 3,\, \frac{1}{3},\, -0.5\right).$$

Să se găsească minimul şi maximul dintre elementele vectorului v.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, v_i, $1 \leq i \leq n$
2. $max \leftarrow v[1]$
3. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
   3.1. dacă $max < v[i]$ atunci
      3.1.1 $max \leftarrow v[i]$
4. afişăm max

2 Metoda de eliminare Gaussiană

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{2}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este matricea sistemului (2) şi $b \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (2). Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (2).

Prezentarea Metodei:

Considerăm matricea extinsă $(A\,|\,b) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n+1}}$, unde $a_{i,n+1} = b_i$, $1 \leq i \leq n$.

Metoda Gauss constă în prelucrarea matricei extinse $(A\,|\,b)$ astfel încât in $n-1$ paşi, matricea A devine superior triunghiulară:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \dots & a_{1,n-1}^{(n)} & a_{1,n}^{(n)} & a_{1,n+1}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & \dots & a_{2,n-1}^{(n)} & a_{2,n}^{(n)} & a_{2,n+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1}^{(n)} & a_{n-1,n}^{(n)} & a_{n-1,n+1}^{(n)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right) = A^{(n)}, \quad \text{unde } A^{(1)} = (A\,|\,b). \tag{3}$$

Presupunând că $a_{kk}^{(k)} \neq 0, 1 \leq k \leq n-1$, unde elementul $a_{kk}^{(k)}$ se numeşte **pivot**, pentru a obţine matricea (3) aplicăm următorul algoritm

- primele k linii se copiază;

- pe coloana "k", sub pivot, elementele vor fi nule;
- restul elementelor, sub linia "k", la dreapta coloanei "k", se vor calcula cu regula dreptunghiului:

$$\begin{array}{cccccc} & & \vdots & & \vdots & \\ \text{linia } k & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots\cdots\cdots & a_{kj}^{(k)} & \ldots \\ & & \vdots & & \vdots & \\ \text{linia } i & \cdots & a_{ik}^{(k)} & \cdots\cdots\cdots & a_{ij}^{(k)} & \ldots \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & \text{coloana } k & & \text{coloana } j & \end{array} \Rightarrow a_{ij}^{(k+1)} = \frac{a_{kk}^{(k)} a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

Prin urmare, pentru $1 \leq k \leq n-1$, obţinem următoarele formule:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & 1 \leq i \leq k, \ i \leq j \leq n+1 \\ 0 & 1 \leq j \leq k, \ j+1 \leq i \leq n \\ a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)} & k+1 \leq i \leq n, \ k+1 \leq j \leq n+1. \end{cases} \tag{4}$$

Componentele soluţiei sistemului (2) se obţin direct, prin substituţie inversă:

$$x_n = a_{n,n+1}^{(n)} / a_{nn}^{(n)}, \qquad \text{dacă } a_{nn}^{(n)} \neq 0, \tag{5}$$

pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$

$$x_i = \left(a_{i,n+1}^{(n)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n)} \cdot x_j \right) / a_{ii}^{(n)}. \tag{6}$$

Algoritmul Pseudocod

// Citim n, dimensiunea matricei A şi matricea extinsă $(A\,|\,b)$

1. citeste n, a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$

2. pentru $k = 1, 2, ..., n-1$ execută

2.1. dacă $a_{kk} \neq 0$ atunci

//Aplicăm formulele din metoda Gauss (regula dreptunghiului) si anume ultima formula din (3)

2.1.1. pentru $i = k+1, k+2, ..., n$ execută

2.1.1.1. $a_{ik} \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$

2.1.1.2. pentru $j = k+1, k+2, ..., n+1$ execută

2.1.1.2.1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}$

2.2. altfel *ieşire*

3. dacă $a_{nn} = 0$ atunci

3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*

3.2. *ieşire*

//Determinăm x_n aplicând formula (4)

4. $a_{n,n+1} \leftarrow a_{n,n+1}/a_{nn}$

//Determinăm $x_i, n-1 \geq i \geq 1$, aplicând formulele (5)

5. pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$ execută

5.1. $S \leftarrow 0$

5.2. pentru $j = i+1, i+2, ..., n$ execută

5.2.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot a_{j,n+1}$

5.3. $a_{i,n+1} \leftarrow (a_{i,n+1} - S)/a_{ii}$

6. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

6.1. scrie $'x_i =', a_{i,n+1}$

Observatie: Dacă pivotul $a_{kk} = 0$, în locul instructiunii 2.2. se pune următorul bloc de instructiuni

pentru $lin = k+1, k+2, ..., n$ caută $a_{lin,k} \neq 0$

schimbă între ele liniile lin şi k:

2.2. altfel

2.2.1. $lin \leftarrow k$

2.2.2. repetă

2.2.2.1. $lin \leftarrow lin + 1$

până când $a_{lin,k} \neq 0$ sau $lin > n$

2.2.3. dacă $lin > n$ atunci

2.2.3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*

2.2.3.2. *ieşire*

2.2.4. pentru $j = k, k+1, ..., n+1$ execută

2.2.4.1. $aux \leftarrow a_{kj}$

2.2.4.2. $a_{kj} \leftarrow a_{lin,j}$

2.2.4.3. $a_{lin,j} \leftarrow aux$

Exemplul 1. Rezolvaţi următorul sistem cu ajutorul **metodei de eliminare Gaussiană**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Soluţie: Matricea corespunzătoare sistemului şi termenul liber sunt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matricea extinsă corespunzătoare sistemului este

$$A^{(1)} = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

Pasul 1. Pentru a obţine matricea $A^{(2)}$ alegem $a_{11}^{(1)} = 1 \neq 0$ pivot. Păstrăm linia 1 din matricea $A^{(1)}$. În prima coloană, sub pivotul $a_{11}^{(1)} = 1$, elementele vor fi nule, iar restul elementelor se calculează cu "regula dreptunghiului" :

$$a_{22}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1 \cdot 3 - 2 \cdot 2}{1} = -1, \quad a_{23}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{23}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 4}{1} = -7,$$

$$a_{24}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{24}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \cdot a_{14}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1 \cdot 6 - 2 \cdot 7}{1} = -8, \quad a_{32}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{32}^{(1)} - a_{31}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2}{1} = 1,$$

$$a_{33}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{33}^{(1)} - a_{31}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1 \cdot 2 - (-1) \cdot 4}{1} = 6, \quad a_{34}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{34}^{(1)} - a_{31}^{(1)} \cdot a_{14}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1 \cdot 0 - (-1) \cdot 7}{1} = 7.$$

Obţinem matricea

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & \boxed{-1} & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \end{array} \right).$$

Pasul 2. Alegem $a_{22}^{(2)} = -1 \neq 0$ pivot şi păstrăm liniile 1 şi 2 din matricea $A^{(2)}$. În coloana a doua, sub pivotul $a_{22}^{(2)} = -1$, elementele vor fi nule, iar restul elementelor se calculează cu "regula dreptunghiului":

$$a_{33}^{(3)} = \frac{a_{22}^{(2)} \cdot a_{33}^{(2)} - a_{32}^{(2)} \cdot a_{23}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-1 \cdot 6 - 1 \cdot (-7)}{-1} = -1,$$

$$a_{34}^{(3)} = \frac{a_{22}^{(2)} \cdot a_{34}^{(2)} - a_{32}^{(2)} \cdot a_{24}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-1 \cdot 7 - 1 \cdot (-8)}{-1} = -1.$$

Obţinem matricea

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Sistemul corespunzător matricei $A^{(3)}$ este

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ -x_2 - 7x_3 = -8 \\ -x_3 = -1. \end{cases}$$

Sistemul de mai sus are aceeaşi soluţie cu sistemul iniţial, dar acest sistem are formă triunghiulară. Soluţia sistemului se determina direct prin substituţie inversă:

$$\begin{cases} x_3 = -1/(-1) = 1 \\ x_2 = (-8 + 7x_3)/(-1) = (-8 + 7 \cdot 1)/(-1) = 1 \\ x_1 = (7 - 4x_3 - 2x_2)/1 = (7 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1)/1 = 1 \end{cases}$$

şi prin urmare, soluţia este

$$(x_1, x_2, x_3)^t = (1, 1, 1)^t .$$

Exemple: Rezolvaţi următoarele sisteme cu ajutorul metodei de eliminare Gaussiană

$a)$ $\begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$ $b)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ $c)$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -2 \\ 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 - 10x_4 = -6 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 9 \\ -3x_1 - 5x_2 + 15x_4 = 13. \end{cases}$

3 Metoda Gauss, cu pivotare parţială la fiecare etapă, pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{7}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este matricea sistemului (7) şi $b \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (7).
Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (7).

Prezentarea Metodei:
Considerăm matricea extinsă $(A\,|\,b) = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n+1}}$, unde $a_{i,n+1} = b_i$, $1 \le i \le n$.
Metoda Gauss constă în prelucrarea matricei extinse $(A\,|\,b)$ astfel încât în $n-1$ paşi, matricea A devine superior triunghiulară:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & ... & a_{1,n-1}^{(n)} & a_{1,n}^{(n)} & a_{1,n+1}^{(n)}\\
0 & a_{22}^{(n)} & ... & a_{2,n-1}^{(n)} & a_{2,n}^{(n)} & a_{2,n+1}^{(n)}\\
\vdots & \vdots & ... & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & ... & a_{n-1,n-1}^{(n)} & a_{n-1,n}^{(n)} & a_{n-1,n+1}^{(n)}\\
0 & 0 & ... & 0 & a_{n,n}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)}
\end{array}\right) = A^{(n)}, \quad \text{unde } A^{(1)} = (A\,|\,b). \tag{8}$$

Presupunând că $a_{kk}^{(k)} \ne 0, 1 \le k \le n-1$, unde elementul $a_{kk}^{(k)}$ se numeşte **pivot**, pentru a obţine matricea (8) aplicăm următorul algoritm

- primele k linii se copiază;
- pe coloana "k", sub pivot, elementele vor fi nule;
- restul elementelor, sub linia "k", la dreapta coloanei "k", se vor calcula cu regula dreptunghiului:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \vdots & & \vdots & \\
\text{linia } k & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots\cdots\cdots & a_{kj}^{(k)} & ...\\
 & & \vdots & & \vdots & \\
\text{linia } i & \cdots & a_{ik}^{(k)} & \cdots\cdots\cdots & a_{ij}^{(k)} & ...\\
 & & \vdots & & \vdots & \\
 & & \text{coloana } k & & \text{coloana } j &
\end{array}
\Rightarrow a_{ij}^{(k+1)} = \frac{a_{kk}^{(k)}a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)}a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

Prin urmare, pentru $1 \le k \le n-1$, obţinem următoarele formule:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & 1 \le i \le k,\ i \le j \le n+1\\ 0 & 1 \le j \le k,\ j+1 \le i \le n\\ a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)} & k+1 \le i \le n,\ k+1 \le j \le n+1. \end{cases} \tag{9}$$

Componentele soluţiei sistemului (7) se obţin direct, prin substituţie inversă:

$$x_n = a_{n,n+1}^{(n)}/a_{nn}^{(n)}, \quad \text{dacă } a_{nn}^{(n)} \ne 0, \tag{10}$$

pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$

(11) $$x_i = \left(a_{i,n+1}^{(n)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n)} \cdot x_j \right) / a_{ii}^{(n)}.$$

În această metodă, la fiecare pas k, pentru $1 \le k \le n-1$, se alege ca pivot elementul $a_{i_k,k}^{(k)}$, $k \le i_k \le n$, cu proprietatea

$$\left| a_{i_k k}^{(k)} \right| = \max_{k \le i \le n} \left| a_{ik}^{(k)} \right|.$$

Observaţii:

1) Dacă $a_{i_k,k}^{(k)} = 0$, atunci sistemul (7) nu are soluţie unică.

2) Dacă $a_{i_k,k}^{(k)} \neq 0$ şi $i_k \neq k$ atunci se permută liniile k şi i_k în matricea $A^{(k)}$ după care se aplică formulele (9) şi, în final (10).

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$
2. pentru $k = 1, 2, ..., n-1$ execută
   2.1. $piv \leftarrow |a_{kk}|$
   2.2. $lin \leftarrow k$
   2.3. pentru $i = k+1, k+2, ..., n$ execută
      2.3.1. dacă $piv < |a_{ik}|$ atunci
         2.3.1.1. $piv \leftarrow |a_{ik}|$
         2.3.1.2. $lin \leftarrow i$
   2.4. dacă $piv = 0$ atunci
      2.4.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
      2.4.2. *ieşire*
   2.5. dacă $lin \neq k$ atunci
      2.5.1. pentru $j = k, k+1, ..., n+1$ execută
         2.5.1.1. $aux \leftarrow a_{kj}$
         2.5.1.2. $a_{kj} \leftarrow a_{lin,j}$
         2.5.1.3. $a_{lin,j} \leftarrow aux$
   2.6. pentru $i = k+1, k+2, ..., n$ execută
      2.6.1. $a_{ik} \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$
      2.6.2. pentru $j = k+1, k+2, ..., n+1$ execută
         2.6.2.1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}$
3. dacă $a_{nn} = 0$ atunci
   3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
   3.2. *ieşire*
4. $a_{n,n+1} \leftarrow a_{n,n+1}/a_{nn}$
5. pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$ execută
   5.1. $S \leftarrow 0$
   5.2. pentru $j = i+1, i+2, ..., n$ execută
      5.2.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot a_{j,n+1}$

5.3. $a_{i,n+1} \leftarrow (a_{i,n+1} - S)/a_{ii}$
6. scrie $'x_i ='$, $a_{i,n+1}$, $1 \le i \le n$.

Exemple: Folosind metoda lui Gauss cu pivotare partială la fiecare etapă rezolvaţi următoarele siteme de ecuaţii lineare

$$a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2 \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x - 2y + z = 6 \\ -x - 12y + 5z = 10. \end{cases}$$

4 Metoda Gauss, cu pivotare totală la fiecare etapă, pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{12}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este matricea sistemului (12) şi $b \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (12). Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (12).

Prezentarea Metodei:

Considerăm matricea extinsă $(A\,|\,b) = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n+1}}$, unde $a_{i,n+1} = b_i$, $1 \le i \le n$.

Metoda Gauss constă în prelucrarea matricei extinse $(A\,|\,b)$ astfel încât in $n-1$ paşi matricea A devine superior triunghiulară:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & ... & a_{1,n-1}^{(n)} & a_{1,n}^{(n)} & a_{1,n+1}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & ... & a_{2,n-1}^{(n)} & a_{2,n}^{(n)} & a_{2,n+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{n-1,n-1}^{(n)} & a_{n-1,n}^{(n)} & a_{n-1,n+1}^{(n)} \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{n,n}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right) = A^{(n)}, \quad \text{unde} \;\; A^{(1)} = (A\,|\,b). \tag{13}$$

Presupunând că $a_{kk}^{(k)} \neq 0, 1 \le k \le n-1$, unde elementul $a_{kk}^{(k)}$ se numeşte pivot, pentru a obţine matricea (13) aplicăm următoarele formule

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & 1 \le i \le k,\ i \le j \le n+1 \\ 0 & 1 \le j \le k,\ j+1 \le i \le n \\ a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)} & k+1 \le i \le n,\ k+1 \le j \le n+1. \end{cases} \tag{14}$$

Componentele soluţiei sistemului (12) se obţin direct, prin substituţie inversă:

$$x_n = a_{n,n+1}^{(n)}/a_{nn}^{(n)}, \quad \text{dacă} \;\; a_{nn}^{(n)} \neq 0, \tag{15}$$

pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$

(16) $$x_i = \left(a_{i,n+1}^{(n)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n)} \cdot x_j \right) / a_{ii}^{(n)}.$$

★La fiecare pas k se caută acel elemet $a_{i_k,j_k}^{(k)}$, $k \le i_k \le n$, $k \le j_k \le n$, care are proprietatea

$$\left| a_{i_k j_k}^{(k)} \right| = \max_{\substack{k \le i \le n \\ k \le j \le n}} \left| a_{ij}^{(k)} \right|.$$

Observaţii:

1) Dacă $a_{i_k,j_k}^{(k)} = 0$, $\forall k \le i_k, j_k \le n$, atunci sistemul (2) nu are soluţie unică.

2) Dacă $a_{i_k,j_k}^{(k)} \ne 0$ şi $i_k \ne k$ sau $j_k \ne k$ atunci se permută liniile k şi i_k, eventual apoi se permută coloanele k şi j_k în matricea $A^{(k)}$, după care se aplică formulele (14) şi, în final (5).

3) Dacă s-au realizat permutări de coloane, atunci acestea vor influenţa obţinerea soluţiei sistemului (2). Astfel după aplicarea formulelor (15), se permută componentele soluţiei, corespunzător permutărilor de coloane, de la ultima realizată până la prima.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte ε, n, a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$
2. $npc \leftarrow 0$
3. pentru $k = 1, 2, ..., n-1$ execută
   3.1. $piv \leftarrow |a_{kk}|$
   3.2. $lin \leftarrow k$
   3.3. $col \leftarrow k$
   3.4. pentru $j = k, k+1, ..., n$ execută
      3.4.1. pentru $i = k, k+1, ..., n$ execută
         3.4.1.1. dacă $piv < |a_{ij}|$ atunci
            3.4.1.1.1. $piv \leftarrow |a_{ij}|$
            3.4.1.1.2. $lin \leftarrow i$
            3.4.1.1.3. $col \leftarrow j$
   3.5. dacă $piv \le \varepsilon$ atunci
      3.5.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
      3.5.2. *ieşire*
   3.6. dacă $lin \ne k$ atunci
      3.6.1. pentru $j = k, k+1, ..., n+1$ execută
         3.6.1.1. $aux \leftarrow a_{kj}$
         3.6.1.2. $a_{kj} \leftarrow a_{lin,j}$
         3.6.1.3. $a_{lin,j} \leftarrow aux$
   3.7. dacă $col \ne k$ atunci
      3.7.1. $npc \leftarrow npc + 1$
      3.7.2. $c[npc, 1] \leftarrow k$
      3.7.3. $c[npc, 2] \leftarrow col$
      3.7.4. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
         3.7.4.1. $aux \leftarrow a_{ik}$

3.7.4.2. $a_{ik} \leftarrow a_{i,col}$

3.7.4.3. $a_{i,col} \leftarrow aux$

3.8. pentru $i = k+1, k+2, ..., n$ execută

3.8.1. $a_{ik} \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$

3.8.2. pentru $j = k+1, k+2, ..., n+1$ execută

3.8.2.1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}$

4. dacă $|a_{nn}| \leq \varepsilon$ atunci

4.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*

4.2. *ieşire*

5. $a_{n,n+1} \leftarrow a_{n,n+1}/a_{nn}$

6. pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$ execută

6.1. $S \leftarrow 0$

6.2. pentru $j = i+1, i+2, ..., n$ execută

6.2.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot a_{j,n+1}$

6.3. $a_{i,n+1} \leftarrow (a_{i,n+1} - S)/a_{ii}$

7. dacă $npc \neq 0$ atunci

7.1. pentru $i = npc, npc-1, ..., 1$ execută

7.1.1. $aux \leftarrow a_{c[i,1],n+1}$

7.1.2. $a_{c[i,1],n+1} \leftarrow a_{c[i,2],n+1}$

7.1.3. $a_{c[i,2],n+1} \leftarrow aux$

8. scrie $'x_i =', \ a_{i,n+1}, \ 1 \leq i \leq n.$

Exerciţii: Folosind metoda lui Gauss cu pivotare totală la fiecare etapă rezolvaţi următoarele sitemele de ecuaţii lineare

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_4 = -2 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x - 2y + z = 6 \\ -x - 12y + 5z = 10. \end{cases}$

Exemple

1. Folosind metoda lui **Gauss cu pivotare partială la fiecare etapă** rezolvaţi următorul sistem

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Soluţie: Matricea extinsă corespunzătaoare sistemului dat este

$$A^{(1)} = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Căutăm elementul cu valoarea cea mai mare în modul din coloana 1 a matricei $A^{(1)}$, i.e

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \left| a_{i1}^{(1)} \right| = \max \left\{ \left| a_{11}^{(1)} \right|, \left| a_{21}^{(1)} \right|, \left| a_{31}^{(1)} \right|, \left| a_{41}^{(1)} \right| \right\} = \left| a_{21}^{(1)} \right| = 3.$$

Schimbăm linia 1 cu linia 2 în $A^{(1)}$ şi obţinem

$$A^{(1)} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Alegem $a_{11}^{(1)} = 3 \neq 0$ pivot şi păstrăm linia 1 din matricea $A^{(1)}$. In prima coloană, sub pivot, elementele vor fi nule iar restul elementelor se calculează cu "regula dreptunghiului":

$$a_{22}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3 \cdot 2 - 2 \cdot 3}{3} = 0, \qquad a_{23}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{23}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3 \cdot 3 - 2 \cdot 2}{3} = \frac{5}{3},$$

$$a_{24}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{24}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \cdot a_{14}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{3} = \frac{1}{3}, \qquad a_{25}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{25}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \cdot a_{15}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3 \cdot 6 - 2 \cdot 2}{3} = \frac{14}{3},$$

$$a_{32}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{32}^{(1)} - a_{31}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3 \cdot 0 - 1 \cdot 3}{3} = -1, \qquad a_{33}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{33}^{(1)} - a_{31}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3 \cdot 0 - 1 \cdot 2}{3} = -\frac{2}{3},$$

$$a_{34}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{34}^{(1)} - a_{31}^{(1)} \cdot a_{14}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3}, \qquad a_{35}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{35}^{(1)} - a_{31}^{(1)} \cdot a_{15}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3 \cdot 0 - 1 \cdot 2}{3} = -\frac{2}{3},$$

$$a_{42}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{42}^{(1)} - a_{41}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3 \cdot 1 - 1 \cdot 3}{3} = 0, \qquad a_{43}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{43}^{(1)} - a_{41}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$a_{44}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{44}^{(1)} - a_{41}^{(1)} \cdot a_{14}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3 \cdot 0 - 1 \cdot 1}{1} = \frac{1}{3}, \qquad a_{45}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{45}^{(1)} - a_{41}^{(1)} \cdot a_{15}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Prin urmare, obţinem matricea

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array} \right).$$

Căutăm elementul cu valoarea maximă în modul

$$\max_{2 \le i \le 4} \left| a_{i2}^{(2)} \right| = \max \left\{ \left| a_{22}^{(2)} \right|, \left| a_{32}^{(2)} \right|, \left| a_{42}^{(2)} \right| \right\} = \left| a_{32}^{(2)} \right| = |-1|.$$

Schimbăm linia 2 cu linia 3 în $A^{(2)}$ şi obţinem

$$A^{(2)} \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array} \right).$$

Observăm că pe coloana 2 sub pivotul $a_{22}^{(2)} = -1$ toate elementle sunt nule şi astfel

$$A^{(3)} = A^{(2)}.$$

Căutăm

$$\max_{3 \le i \le 4} \left| a_{i3}^{(3)} \right| = \max \left\{ \left| a_{33}^{(3)} \right|, \left| a_{43}^{(3)} \right| \right\} = \left| a_{33}^{(3)} \right| = \left| \frac{5}{3} \right|.$$

Aici nu sunt necesare schimbari de linii, deoarece elementul cu valoarea cea mai mare în modul este pe poziţia 3×3.

Alegem $a_{33}^{(3)} = \frac{5}{3}$ pivot şi păstrăm liniile 1, 2 şi 3 neschimbate din $A^{(3)}$. În coloana 3, sub pivot, elementele vor fi nule, iar restul elementelor se calculează cu "regula dreptunghiului":

$$a_{44}^{(4)} = \frac{a_{33}^{(3)} \cdot a_{44}^{(3)} - a_{43}^{(3)} \cdot a_{34}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{2}{5},$$

$$a_{45}^{(4)} = \frac{a_{33}^{(3)} \cdot a_{45}^{(3)} - a_{43}^{(3)} \cdot a_{35}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{14}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5}.$$

Obţinem

$$A^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right).$$

Sistemul corespunzător matricei $A^{(4)}$ este

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{14}{3} \\ -\frac{2}{5}x_4 = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Soluţia sistemului se obţine direct prin substituţie inversă:

$$\begin{cases} x_4 = \frac{2}{5}/\left(-\frac{2}{5}\right) = -1 \\ x_3 = \left(\frac{14}{3} - \frac{1}{3}x_4\right)/\frac{5}{3} = \left(\frac{14}{3} - \frac{1}{3} \cdot (-1)\right)/\frac{5}{3} = 3 \\ x_2 = (-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_3)/(-1) = (-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{2}{3} \cdot 3)/(-1) = -2 \\ x_1 = (2 - x_4 - 2x_3 - 3x_2)/3 = (2 - (-1) - 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-2))/3 = 1, \end{cases}$$

şi prin urmare, soluţia este

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 2. a) Folosind metoda lui Gauss cu pivotare totală la fiecare etapă rezolvaţi următoarele siteme de ecuaţii lineare

$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - 3x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

b) Determinaţi valoarea determinantului matricei A, corespunzătoare sistemului de mai sus.

Sol: a) Matricea extinsă corespunzătoare sistemului

$$A^{(1)} = \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Căutăm elementul cu proprietatea

$$\left|piv^{(1)}\right| = \max_{1\le i,j\le 4}\left|a_{ij}^{(1)}\right| = \left|a_{22}^{(1)}\right| = 4.$$

Pivotul $piv^{(1)}$ va fi $a_{22}^{(1)} = 4$.

Prima oară schimbăm linia 1 cu linia 2 (şi am observat că acest lucru nu modifică soluţia sistemului), apoi schimbăm coloana 1 cu coloana 2 în $A^{(1)}$,dar acest lucru înseamnă schimbarea lui x_1 cu x_2, deci acest lucru va trebui reamintit la sfârşit! Obţinem matricea

$$A^{(1)} \overset{L_1\leftrightarrow L_2}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\boxed{C_1\leftrightarrow C_2}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{4} & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Alegem $a_{11}^{(1)} = 4 \neq 0$ pivot şi observăm că

$$A^{(2)} = A^{(1)}.$$

Căutăm elementul cu proprietatea

$$\left|piv^{(2)}\right| = \max_{2\le i,j\le 4}\left|a_{ij}^{(2)}\right| = \left|a_{34}^{(2)}\right| = |-3|.$$

Schimbăm linia 2 cu linia 3 şi coloana 2 cu coloana 4 în $A^{(2)}$, şi obţinem

$$A^{(2)} \overset{L_2\leftrightarrow L_3}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\boxed{C_2\leftrightarrow C_4}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{-3} & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Alegem $a_{22}^{(2)} = -3 \neq 0$ pivot şi păstrăm liniile 1 şi 2 din $A^{(2)}$. În a doua coloană, sub pivot elementele vor fi zero, iar restul elementelor se determină cu "regula dreptunghiului". Obţinem matricea:

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right).$$

Căutăm elementul cu proprietatea

$$\left|piv^{(3)}\right| = \max_{3\le i,j\le 4}\left|a_{ij}^{(3)}\right| = \left|a_{34}^{(3)}\right| = \left|-2\right|.$$

Schimbăm coloana 3 cu coloana 4 în $A^{(3)}$ şi obţinem

$$A^{(3)} \overset{\boxed{C_3\leftrightarrow C_4}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Alegem $a_{33}^{(3)} = -2 \neq 0$ pivot şi oţinem

$$A^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Deducem soluţia intermediară

$$\begin{cases} x_4 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = -1, \end{cases}$$

şi schimbăm componentele în următoarea ordine

$$\begin{cases} \text{componenta } 3 \leftrightarrow \text{componenta } 4 \text{ (since } C_3 \leftrightarrow C_4) \\ \text{componenta } 2 \leftrightarrow \text{componenta } 4 \text{ (since } C_2 \leftrightarrow C_4) \\ \text{componenta } 1 \leftrightarrow \text{componenta } 2 \text{ (since } C_1 \leftrightarrow C_2). \end{cases}$$

Mai precis, avem că

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \overset{C_3 \leftrightarrow C_4}{\Longrightarrow} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \overset{C_2 \leftrightarrow C_4}{\Longrightarrow} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases} \overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Deci, soluţia sistemului este

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

b) $det(A) = (-1)^{2+3} a_{11}^{(4)} \cdot a_{22}^{(4)} \cdot a_{33}^{(4)} \cdot a_{44}^{(4)} = -4 \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{3} = -8$

5 Factorizarea LR Doolittle a matricelor aplicată la rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{17}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este matricea sistemului (17) şi $b \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (17). Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (17).

Prezentarea Metodei:

Metoda facotrizarii LR Doolittle constă în descomunerea matricei A în forma

$$A = L \cdot R, \text{unde}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & 1 \end{pmatrix} \text{-matrice inferior triunghiulară;} \qquad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & ... & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & ... & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & r_{nn} \end{pmatrix} \text{-matrice superior triunghiulară.}$$

Elementele matricelor L şi R se determină aplicând următoarele formule

$$(18) \qquad \begin{cases} r_{1j} = a_{1j}, & 1 \le j \le n \\ l_{i1} = a_{i1}/r_{11}, & 2 \le i \le n \\ r_{kj} = a_{kj} - \displaystyle\sum_{h=1}^{k-1} l_{kh} \cdot r_{hj}, & 2 \le k \le n, \quad k \le j \le n. \\ l_{ik} = \left(a_{ik} - \displaystyle\sum_{h=1}^{k-1} l_{ih} \cdot r_{hk} \right) / r_{kk}, & 2 \le k \le n, \quad k+1 \le i \le n. \end{cases}$$

Observaţii:

1) Orice matrice A nesingulară admite o factorizare LR, eventual după permutări convenabile ale liniilor.

2) Ordinea în care sunt calculate elementele matricelor L şi R, în formulele (18), este: prima linie din R, prima coloană din L, a doua linie din R, a doua coloană din L, etc.

Aplicând metoda Doolittle (formulele (18)) matricei sistemului (17), obţinem

$$A \cdot x = b \Longleftrightarrow L \cdot \underbrace{R \cdot x}_{=y} = b.$$

Pentru determinarea soluţiei x se rezolvă succesiv sistemele

$$\begin{cases} L \cdot y = b \\ R \cdot x = y. \end{cases}$$

Componentele soluţiei intermediare sistemului inferior triunghiular $L \cdot y = b$ se obţin prin substituţie directă:

$$(19) \qquad \begin{cases} y_1 = b_1, \\ y_i = b_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot y_k, \quad i = 2, 3, ..., n. \end{cases}$$

Sistemul superior triunghiular $R \cdot x = y$ se rezolvă prin substituţie inversă:

$$(20) \qquad \begin{cases} x_n = y_n / r_{nn}, \\ x_i = \left(y_i - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} r_{ik} \cdot x_k \right) / r_{ii}, \quad i = n-1, n-2, ..., 1. \end{cases}$$

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$

2. dacă $a_{11} = 0$ atunci

2.1. $i \leftarrow 1$

2.2. repetă

2.2.1. $i \leftarrow i+1$

până când $a_{i1} \neq 0$ sau $i > n$

2.3. dacă $i > n$ atunci

2.3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*

2.3.2. ieşire

2.4. pentru $j = 1, 2, ..., n+1$ execută

2.4.1. $aux \leftarrow a_{1j}$

2.4.2. $a_{1j} \leftarrow a_{ij}$

2.4.3. $a_{ij} \leftarrow aux$

3. pentru $i = 2, 3, ..., n$ execută

3.1. $a_{i1} \leftarrow a_{i1}/a_{11}$

4. pentru $k = 2, 3, ..., n$ execută

4.1. $i \leftarrow k$

4.2. repetă

4.2.1. $S \leftarrow 0$; $piv \leftarrow 0$

4.2.2. pentru $h = 1, 2, ..., k-1$ execută

4.2.2.1. $S \leftarrow S + a_{ih} \cdot a_{hk}$

4.2.3. $piv \leftarrow a_{ik} - S$

4.2.4. $i \leftarrow i+1$

până când $piv \neq 0$ sau $i > n$

4.3. dacă $piv = 0$ atunci

4.3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*

4.3.2. *ieşire*

4.4. dacă $i \neq k+1$ atunci

4.4.1. pentru $j = 1, 2, ...n+1$ execută

4.4.1.1. $aux \leftarrow a_{kj}$

4.4.1.2. $a_{kj} \leftarrow a_{i-1,j}$

4.4.1.3. $a_{i-1,j} \leftarrow aux$

4.5. pentru $j = k, k+1, ..., n$ execută

4.5.1. $S \leftarrow 0$

4.5.2. pentru $h = 1, 2, ..., k-1$ execută

4.5.2.1. $S \leftarrow S + a_{kh} \cdot a_{hj}$

4.5.3. $a_{kj} \leftarrow a_{kj} - S$

4.6. pentru $i = k+1, k+2, ..., n$ execută

4.6.1. $S \leftarrow 0$

4.6.2. pentru $h = 1, 2, ..., k-1$ execută

4.6.2.1. $S \leftarrow S + a_{ih} \cdot a_{hk}$

4.6.3. $a_{ik} \leftarrow (a_{ik} - S)/a_{kk}$

5. pentru $i = 2, 3, ..., n$ execută

5.1. $S \leftarrow 0$

5.2. pentru $k = 1, 2, ..., i-1$ execută

5.2.1. $S \leftarrow S + a_{ik} \cdot a_{k,n+1}$

5.3. $a_{i,n+1} \leftarrow a_{i,n+1} - S$

6. $a_{n,n+1} \leftarrow a_{n,n+1}/a_{nn}$

7. pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$ execută

7.1. $S \leftarrow 0$

7.2. pentru $j = i+1, i+2, ..., n$ execută

7.2.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot a_{j,n+1}$

7.3. $a_{i,n+1} \leftarrow (a_{i,n+1} - S)/a_{ii}$

8. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

8.1. scrie $'x_i =', a_{i,n+1}$.

Exerciţiu: Să se completeze algoritmul de mai sus astfel încât să se afişeze matricele L şi R ce constituie factorizarea lui A, precum şi permutările de linii efectuate (dacă este cazul).

Examplu: Rezolvaţi următorul sistem cu ajutorul metodei de factorizare LR

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -8 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 + 6x_2 + 6x_3 = -14. \end{cases}$$

Proof. Matricea extinsă este

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & -14 \end{array} \right).$$

Verificăm dacă determinanţii din colţ ai matricei A sunt nenuli.
$\Delta_1 = -1 \neq 0$,
$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$
Deoarece determinantul $\Delta_2 = 0$, interschimbăm linia 2 cu linia 3 în matricea extinsă $\overline{A}$, şi obţinem

$$\overline{A} \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -8 \\ -2 & 6 & 6 & -14 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{array} \right).$$

Avem
$\Delta_1 = -1 \neq 0$,
$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,
$\Delta_3 = \det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$

Deoarece $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \neq 0$, matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ admite o factorizare LR. Mai precis, căutăm două matrice

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix},$$

astfel încât $L \cdot R = A$.

În continuare, când înmulţim linia i din matricea L cu coloana j din matricea R, vom nota $L_i(L) \times C_j(R)$.

Determinăm elementele primei linii din matricea R:
$L_1(L) \times C_1(R) \Rightarrow r_{11} = a_{11} = -1.$
$L_1(L) \times C_2(R) \Rightarrow r_{12} = a_{12} = 2.$
$L_1(L) \times C_3(R) \Rightarrow r_{13} = a_{13} = 3.$

Determinăm elementele primei coloane din matricea L:
$L_2(L) \times C_1(R) \Rightarrow l_{21}r_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{r_{11}} = \frac{-2}{-1} = 2.$
$L_3(L) \times C_1(R) \Rightarrow l_{31}r_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{r_{11}} = \frac{1}{-1} = -1.$

Determinăm elementele celei de-a doua linii din matricea R:
$L_2(L) \times C_2(R) \Rightarrow l_{21}r_{12} + r_{22} = a_{22} \Rightarrow r_{22} = a_{22} - l_{21}r_{12} = 6 - 2 \cdot 2 = 2.$
$L_2(L) \times C_3(R) \Rightarrow l_{21}r_{13} + r_{23} = a_{23} \Rightarrow r_{23} = a_{23} - l_{21}r_{13} = 6 - 2 \cdot 3 = 0.$

Determinăm elementele celei de-a doua coloane din matricea L:
$L_3(L) \times C_2(R) \Rightarrow l_{31}r_{12} + l_{32}r_{22} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{31}r_{12})/r_{22} = (-2 - (-1) \cdot 2)/2 = 0.$
Determinăm elementele liniei 3 din matricea R:
$L_3(L) \times C_3(R) \Rightarrow l_{31}r_{13} + l_{32}r_{23} + r_{33} = a_{33} \Rightarrow r_{33} = a_{33} - l_{31}r_{13} - l_{32}r_{23} = -1 - (-1) \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 2.$

Deci,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sistemul nostru $Ax = b$ este echivalent cu

$$L \cdot R \cdot x = b.$$

Dacă notăm $R \cdot x = y$, unde $y \in \mathbb{R}^3$, pentru a găsi soluţia $x \in \mathbb{R}^3$, trebuie să rezolvăm următoarele două sisteme triunghiulare :
$(S1) L \cdot y = b,$
$(S2) R \cdot x = y.$

Sistemul inferior triunghiular $(S1)$ este echivalent cu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Observăm că termenul liber b este ales din matricea extinsă $\overline{A}$ în care s-au interschimbat linii. Soluţia y se obţine prin substituţie directă

$$\begin{cases} y_1 = -8 \\ y_2 = -14 - 2y_1 = 2 \\ y_3 = 4 + y_1 - 0y_2 = -4. \end{cases}$$

Sistemul superior triunghiular $(S2)$ este echivalent cu

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Soluţia x se obţine prin substituţie inversă

$$\begin{cases} x_3 = -4/2 = -2 \\ x_2 = (2 - 0 \cdot x_3)/2 = 1 \\ x_1 = (-8 - 3x_3 - 2x_2)/(-1) = 4. \end{cases}$$

Deci,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ □

Exemple: Folosind metoda factorizarii LR Doolitle rezolvaţi următoarele sisteme

$a)\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y + z = -2 \\ x = -1. \end{cases}$ $b)\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 6 \\ -5x_3 - 7x_4 = -8 \end{cases}$ $c)\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + \frac{9}{2}x_3 + x_4 = \frac{7}{2} \\ x_1 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

6 Factorizarea LR pentru matrice tridiagonale cu aplicare la rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

(21) $$A \cdot x = t,$$

unde $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ este o matrice tridiagonală şi $t \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (21).

Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (21).

Prezentarea Metodei:

Căutăm două matrice

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & l_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$ -matrice inferior triunghiulară, cu elementele de pe diagonala principală egale cu 1 $R = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & r_2 & s_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & s_3 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & s_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & r_n \end{pmatrix}$ -matrice superior triunghiulară,

cu proprietatea $A = L \cdot R$. Pentru a determina elementele matricelor L şi R aplicăm următoarele formule

(22)
$$\begin{cases} r_1 = a_1, & \\ s_i = b_i, & 1 \le i \le n-1 \\ l_i = c_i/r_i, & 1 \le i \le n-1 \\ r_{i+1} = a_{i+1} - l_i \cdot s_i, & 1 \le i \le n-1. \end{cases}$$

Sistemul (21) este echivalent cu

$$L \cdot \underbrace{R \cdot x}_{=y} = t.$$

Pentru determinarea soluţiei x se rezolvă succesiv sistemele

$$\begin{cases} L \cdot y = t \\ R \cdot x = y. \end{cases}$$

Avem următoarele formule

(23)
$$\begin{cases} y_1 = t_1, \\ y_i = t_i - l_{i-1} \cdot y_{i-1}, \quad i = 2, 3, ..., n. \end{cases}$$

respectiv

(24)
$$\begin{cases} x_n = y_n/r_n, \\ x_i = (y_i - s_i \cdot x_{i+1})/r_i, \quad i = n-1, n-2, ..., 1. \end{cases}$$

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_i, $1 \le i \le n$, b_i, $1 \le i \le n-1$, c_i, $1 \le i \le n-1$, t_i, $1 \le i \le n$
2. pentru $i = 1, 2, ..., n-1$ execută
   2.1. dacă $a_i = 0$ atunci
   2.1.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică deoarece avem elementul diagonal nul în linia'*, i
   2.1.2. *ieşire*
   2.2. $c_i \leftarrow c_i/a_i$
   2.3. $a_{i+1} \leftarrow a_{i+1} - b_i \cdot c_i$
3. pentru $i = 2, 3, ..., n$ execută
   3.1. $t_i \leftarrow t_i - c_{i-1} \cdot t_{i-1}$
4. dacă $a_n = 0$ atunci
   4.1. scrie *'Sist. nu are soluţie unică deoarece avem elementul diagonal nul în linia'*, n
   4.2. *ieşire*
5. $t_n \leftarrow t_n/a_n$
6. pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$ execută
   6.1. $t_i \leftarrow (t_i - b_i \cdot t_{i+1})/a_i$
7. scrie $'x_i='$, t_i, $1 \le i \le n$.

Exemple: Folosind factorizarea LR rezolvaţi următoarele sisteme tridiagonale

$$a) \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ -x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \quad b) \begin{cases} -2x_1 + \frac{11}{10}x_2 = -\frac{1}{16} \\ \frac{11}{12}x_1 - 2x_2 + \frac{13}{12}x_3 = -\frac{1}{16} \\ \frac{13}{14}x_2 - 2x_3 = -\frac{1}{16} \end{cases}.$$

a) **Sol:** Matricea asociată sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observăm că A este o matrice tridiagonală.

Verificăm dacă minorii principali ai matricei A sunt nenuli

$$\Delta_1 = -2 \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -21 \neq 0,$$

$$\Delta_3 = \det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -19 \neq 0.$$

Deoarece $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \neq 0$, matricea A admite o factorizare LR. Mai precis, căutăm două matrice

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ 0 & l_2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 & 0 \\ 0 & r_2 & s_2 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix},$$

astfel încât $L \cdot R = A$.

Păstrăm cele trei diagonale cu elemente nenule din matricea A în trei vectori:

$$a = (a_1, a_2, a_3) = (-2, 3, 1), \quad b = (b_1, b_2) = (3, -1), \quad c = (c_1, c_2) = (5, -1),$$

unde a este diagonala principală, b este diagonala de deasupra lui a, şi c este diagonala de sub a.
Aplicăm formulele (22) pentru $n = 3$ pentru a determina

$$l = (l_1, l_2), \quad r = (r_1, r_2, r_3), \quad s = (s_1, s_2),$$

şi apoi găsim matricele L şi R. Avem că

$$r_1 = -2,$$

şi cum $s_i = b_i$, pentru $1 \leq i \leq 2$ obţinem

$$s = (3, -1).$$

Apoi,

$$l_1 = \frac{c_1}{r_1} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}, \quad r_2 = a_2 - l_1 s_1 = 3 - \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 3 = \frac{21}{2},$$

$$l_2 = \frac{c_2}{r_2} = -\frac{2}{21}, \quad r_3 = a_3 - l_2 s_2 = 1 - \left(-\frac{2}{21}\right) \cdot (-1) = \frac{19}{21}.$$

Avem că

$$l = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{2}{21}\right), \quad r = \left(-2, \frac{21}{2}, \frac{19}{21}\right),$$

deci,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{21} & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{21}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{19}{21} \end{pmatrix}.$$

Deoarce $A = LR$, rezolvând sistemul scris in forma matriceală, $Ax = t$, unde $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, este echivalent cu a rezolva $L(Rx) = t$. Notăm $Rx = y$ şi vom avea de rezolvat două sisteme triunghiulare:

$$\begin{cases} Ly = t, \\ Rx = y. \end{cases}$$

Ecuaţia matriceală $Ly = t$ este

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{21} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix},$$

şi obţinem sistemul

$$\begin{cases} y_1 = 1, \\ -\frac{5}{2}y_1 + y_2 = 7 \\ -\frac{2}{21}y_2 + y_3 = 0, \end{cases}$$

Introducem $y_1 = 1$ în a doua ecuaţie a sitemului şi obţinem $y_2 = \frac{19}{2}$. Introducem $y_2 = \frac{19}{2}$ în a treia ecuaţie a sitemului şi obţinem $y_3 = \frac{19}{21}$. Deci,

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{19}{2} \\ \frac{19}{21} \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia $Rx = y$ este

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{21}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{19}{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{19}{2} \\ \frac{19}{21} \end{pmatrix}.$$

Obţinem

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 1, \\ \frac{21}{2}x_2 - x_3 = \frac{19}{2} \\ \frac{19}{21}x_3 = \frac{19}{21}, \end{cases}$$

Din ultima ecuaţie a sistemului găsim, $x_3 = 1$. Introducem $x_3 = 1$ în a doua ecuaţie a sitemului şi obţinem $x_2 = 1$. Introducem $x_2 = 1$ şi $x_3 = 1$ în a prima ecuaţie a sitemului şi obţinem $x_1 = 1$. Prin urmare, soluţia sitemului este:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7 Condensarea pivotală pentru calculul determinanţilor (Metoda lui Chio)

Prezentarea Problemei: Considerăm matricea $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ şi ne propunem să calculăm $\det(A)$.

Prezentarea Metodei: Aplicăm formula

$$\det(A) = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}, \tag{25}$$

unde $a_{11} \neq 0$, şi în continuare se reia formula (25) pentru $n-1, n-2, ...$ până când se obţine un determinant de ordin 2.

Observatii:

1.Dacă $a_{11} = 0$ şi există $2 \leq i \leq n$ pentru care $a_{i1} \neq 0$, atunci se permută în A liniile a şi i, iar $\det(A)$ îsi schimba semnul.

2. Dacă $a_{11} = 0$, $\forall 2 \leq i \leq n$, avem $a_{i1} = 0$, atunci $\det(A) = 0$.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_{ij}, $1 \leq i,j \leq n$
2. $det \leftarrow 1$
3. repetă
3.1. dacă $a_{11} = 0$ atunci
3.1.1. $i \leftarrow 2$
3.1.2. cât timp $(i \leq n)$ şi $(a_{i1} = 0)$ execută
3.1.2.1. $i \leftarrow i+1$
3.1.3. dacă $i > n$ atunci
3.1.3.1. scrie $'det(A) = 0'$
3.1.3.2. *ieşire*
3.1.4. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută
3.1.4.1. $aux \leftarrow a_{1j}$
3.1.4.2. $a_{1j} \leftarrow a_{ij}$
3.1.4.3. $a_{ij} \leftarrow aux$
3.1.5. $det \leftarrow -det$
3.2. pentru $i = 1, 2, ..., n-2$ execută // calculăm produsul valorilor a_{11}^{n-2}
3.2.1. $det \leftarrow det \cdot a_{11}$
3.3. pentru $i = 2, 3, ..., n$ execută // aplicăm $a_{ij} \leftarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$, $2 \leq i,j \leq n$
3.3.1. pentru $j = 2, 3, ..., n$ execută

3.3.1.1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} \cdot a_{11} - a_{i1} \cdot a_{1j}$
3.4. $n \leftarrow n - 1$
3.5. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
3.5.1. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută
3.5.1.1. $a_{ij} \leftarrow a_{i+1,j+1}$
până când $(n = 1)$
4. $det \leftarrow a_{11}/det$
5. scrie $'det(A) =', det.$

Examplu: Calculaţi determinanţii următoarelor matrice utilizând metoda Chio:

$$a)\, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b)\, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proof. a) Aplicăm formula (25) pentru calculul determinantului matricei A de ordin n.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{4-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Aplicând formula (25) am redus problema la a calcula un determinat de ordin 3, în locul unui determinat de ordin 4. Observăm ca elementul a_{11} din determinantul de ordin 3 este 0, astfel vom schimba primele două linii ale determinatului. Prin urmare,

$$\det(A) = \frac{-1}{4} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -8 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Aplicăm din nou formula (25):

$$\det(A) = \frac{-1}{4 \cdot 3^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1}{12 \begin{vmatrix} 12 & -24 \\ -14 & 16 \end{vmatrix} = 12.}$$

b) Deoarece primul element al matricei B este $b_{11} = 0$, vom schimba primele două linii ale determinatului şi vom schimba şi semnul determinantului, apoi aplicăm formula (25) pentru $n = 4$:

$$\det(B) = -\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{5^{4-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1}{25} \begin{vmatrix} -10 & 5 & 0 \\ 6 & 14 & 13 \\ -1 & -9 & -23 \end{vmatrix}.$$

Aplicăm din nou formula (25) şi obţinem

$$\det(B) = \frac{-1}{25} \cdot \frac{1}{(-10)^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -10 & 5 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -10 & 5 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ -1 & -23 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

=

$$= \frac{1}{250} \begin{vmatrix} -170 & -130 \\ 95 & 230 \end{vmatrix} = \frac{-39100 + 12350}{250} = -107.$$

□

Exemple: Calculaţi determinanţii următoarelor matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

8 Metoda Jacobi pentru rezolvarea iterativă a sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

(26) $$A \cdot x = b,$$

unde $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n$ este matricea sistemului (26) şi $b = (b_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (26).

Ne propunem să aproximăm $x \in \mathbb{R}^n$ soluţia unică a sistemului (26) cu o precizie dată ε.

Prezentarea Metodei: Pentru $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ aproximaţia iniţială a soluţiei sitemului (26), ales arbitrar (de exemplu vectorul nul), calculăm

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}, 1 \le i \le n,\ k \ge 0,$$

până când este îndeplinită condiţia

$$\max_{1\le i\le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon,$$

unde ε reprezintă precizia cu care dorim să obţinem soluţia sistemului. Atunci $x \backsimeq x^{(k+1)}$.

Definiţie: Matricea A este dominant diagonală pe linii dacă

$$|a_{ii}| \ge \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{pentru orice } \ 1 \le i \le n.$$

Matricea A este dominant diagonală pe coloane dacă

$$|a_{jj}| \ge \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{pentru orice } \ 1 \le j \le n.$$

Observatie: O condiţie suficientă pentru obţinerea soluţiei sitemului (26), cu precizia ε, este ca matricea A să fie strict dominant diagonală pe linii sau coloane.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_{ij}, $1 \le i,j \le n$, b_i, $1 \le i \le n$, ε, $itmax$, x_i, $1 \le i \le n$
2. $it \leftarrow 0$
3. repetă
   - 3.1. $max \leftarrow 0$
   - 3.2. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
     - 3.2.1. $S \leftarrow 0$
     - 3.2.2. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută
       - 3.2.2.1. dacă $j \neq i$ atunci
         - 3.2.2.1.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot x_j$
     - 3.2.3. $y_i \leftarrow (b_i - S)/a_{ii}$
     - 3.2.4. dacă $max < |y_i - x_i|$ atunci
       - 3.2.4.1. $max \leftarrow |y_i - x_i|$
   - 3.3. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
     - 3.3.1. $x_i \leftarrow y_i$
   - 3.4. $it \leftarrow it + 1$

   până când $(max \le \varepsilon)$ sau $(it > itmax)$
4. dacă $it > itmax$ atunci

4.1. scrie *'Nu se poate obţine soluţia în',* itmax, *'iteraţii, cu precizia',* ε

4.2. *ieşire*

5. scrie (*'Soluţia obţinută în* ',it, *'iterţii cu precizia'*,ε, 'este', x_i, $1 \le i \le n$)

Observaţii:

1. *it* este o variabilă ce numără iteraţiile; ea nu poate depăşi valoare *itmax* care reprezintă numărul maxim de iteraţii în care dorim să obţinem soluţia (de exemplu $itmax = 100$).
2. În vectorul x se stochează iniţial aproximţia iniţială a soluţiei, apoi iteraţia veche, cea nouă şi soluţia finală.
3. În vectorul y se stochează iteraţia nouă.

Exemplul Utilizând metoda lui Jacobi, să se determine soluţia următorului sistem cu precizia $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -3. \end{cases}$$

Sol: Avem că

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Verificăm dacă matricea A este dominant diagonală pe linii:

$$\left.\begin{array}{l} |a_{11}| = 5 \\ |a_{12}| + |a_{13}| = |-3| + |-1| = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$

$$\left.\begin{array}{l} |a_{22}| = 4 \\ |a_{21}| + |a_{23}| = |-2| + |1| = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$

$$\left.\begin{array}{l} |a_{33}| = 5 \\ |a_{31}| + |a_{33}| = |2| + |-2| = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow |a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|.$$

Deci, matricea A este strict dominant diagonală pe linii şi putem aplica metoda Jacobi. Observăm că matricea A nu ete dominant diagonală pe coloane.

Scriem sistemul iniţial în forma echivalentă

$$\begin{cases} x_1 = (5 + 3x_2 + x_3)/5 \\ x_2 = (2x_1 - x_3)/4 \\ x_3 = (-3 - 2x_1 + 2x_2)/(-5). \end{cases}$$

Alegem arbitrar $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aproximaţie iniţială şi considerăm recurenţa

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(5 + 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right)/5 \\ x_2^{(k+1)} = \left(2x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right)/4 \\ x_3^{(k+1)} = \left(-3 - 2x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)}\right)/(-5). \end{cases}$$

Pentru $k=0$ obţinem

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \left(5+3x_2^{(0)}+x_3^{(0)}\right)/5 = (5+3\cdot 0+0)/5 = 1 \\ x_2^{(1)} = \left(2x_1^{(0)}-x_3^{(0)}\right)/4 = (2\cdot 0-0)/4 = 0 \\ x_3^{(1)} = \left(-3-2x_1^{(0)}+2x_2^{(0)}\right)/(-5) = (-3-2\cdot 0+2\cdot 0)/(-5) = 0.6. \end{cases}$$

Verificăm condiţia de oprire

$$d\left(x^{(1)}-x^{(0)}\right) = \max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(1)}-x_i^{(0)}\right| = \max\left\{\left|x_1^{(1)}-x_1^{(0)}\right|, \left|x_2^{(1)}-x_2^{(0)}\right|, \left|x_3^{(1)}-x_3^{(0)}\right|\right\} =$$
$$= \max\{|1-0|, |0-0|, |0.6-0|\} = 1 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $k=1$ obţinem

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \left(5+3x_2^{(1)}+x_3^{(1)}\right)/5 = (5+3\cdot 0+0.6)/5 = 1.12 \\ x_2^{(2)} = \left(2x_1^{(1)}-x_3^{(1)}\right)/4 = (2\cdot 1-0.6)/4 = 0.35 \\ x_3^{(2)} = \left(-3-2x_1^{(1)}+2x_2^{(1)}\right)/(-5) = (-3-2\cdot 1+2\cdot 0)/(-5) = 1. \end{cases}$$

Verificăm condiţia de oprire

$$d\left(x^{(2)}-x^{(1)}\right) = \max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(2)}-x_i^{(1)}\right| = \max\left\{\left|x_1^{(2)}-x_1^{(1)}\right|, \left|x_2^{(2)}-x_2^{(1)}\right|, \left|x_3^{(2)}-x_3^{(1)}\right|\right\} =$$
$$= \max\{|1.12-1|, |0.35-0|, |1-0.6|\} = 0.4 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $k=2$ obţinem

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \left(5+3x_2^{(2)}+x_3^{(2)}\right)/5 = (5+3\cdot 0.35+1)/5 = 1.41 \\ x_2^{(3)} = \left(2x_1^{(2)}-x_3^{(2)}\right)/4 = (2\cdot 1.12-1)/4 = 0.31 \\ x_3^{(3)} = \left(-3-2x_1^{(2)}+2x_2^{(2)}\right)/(-5) = (-3-2\cdot 1.12+2\cdot 0.35)/(-5) = 0.908. \end{cases}$$

Verificăm condiţia de oprire

$$d\left(x^{(3)}-x^{(2)}\right) = \max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(3)}-x_i^{(2)}\right| = \max\left\{\left|x_1^{(3)}-x_1^{(2)}\right|, \left|x_2^{(3)}-x_2^{(2)}\right|, \left|x_3^{(3)}-x_3^{(2)}\right|\right\} =$$
$$= \max\{|1.41-1.12|, |0.31-0.35|, |0.908-1|\} = 0.19 > \varepsilon = 0.01.$$

$$\vdots$$

Aplicând raţionamentul de mai sus găsim soluţia cu precizia $\varepsilon = 0.01$, la pasul 14

$$\begin{cases} x_1^{(14)} = 1.495639 \\ x_2^{(14)} = 0.503865 \\ x_3^{(14)} = 1.004191. \end{cases}$$

Obs: Soluţia exactă a sistemului este $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple: Să se determine soluţiile următoarelor sisteme cu preciziile $\varepsilon = 10^{-4}, \varepsilon = 10^{-5}$.

$a)\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 10 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_4 = 10 \\ -2x_1 + 4x_3 - x_4 = 20 \\ -2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -30 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = -132 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = -132 \\ x_3 + 2x_4 = -30 \end{cases}$ $c)\begin{cases} -4x_1 + x_2 = -25 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -30 \\ 4x_2 - 4x_3 = 10 \end{cases}$

9 Metoda Seidel-Gauss pentru rezolvarea iterativă a sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{27}$$

unde $A \in \mathcal{M}_n$ este matricea sistemului (27) şi $b \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (27).
Ne propunem să aproximăm $x \in \mathbb{R}^n$ soluţia unică a sistemului (27) cu o precizie dată ε.

Prezentarea Metodei: Pentru $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ aproximaţia iniţială a soluţiei sitemului (27), ales arbitrar (de exemplu vectorul nul), calculăm

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}, 1 \leq i \leq n,\ k \geq 0,$$

până când este îndeplinită condiţia

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \leq \varepsilon,$$

unde ε reprezintă precizia cu care dorim să obţinem soluţia sistemului. Atunci $x \backsimeq x^{(k+1)}$.
Observatie: O condiţie suficientă pentru obţinerea soluţiei sitemului (27), cu precizia ε, este ca matricea A să fie dominant diagonală pe linii sau coloane şi strict dominant diagonală pe cel puţin una din linii sau coloane.

Exemplul Utilizând metoda Seidel -Gauss, să se determine soluţia următorului sistem cu precizia $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -3. \end{cases}$$

Sol: Avem că

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Observăm că matricea A este strict dominant diagonală pe linii şi deci, putem aplica metoda Seidel Gauss.

Scriem sistemul iniţial în forma echivalentă

$$\begin{cases} x_1 = (5 + 3x_2 + x_3)/5 \\ x_2 = (2x_1 - x_3)/4 \\ x_3 = (-3 - 2x_1 + 2x_2)/(-5). \end{cases}$$

Alegem arbitrar $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aproximaţie iniţială şi considerăm recurenţa

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(5 + 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right)/5 \\ x_2^{(k+1)} = \left(2x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right)/4 \\ x_3^{(k+1)} = \left(-3 - 2x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)}\right)/(-5). \end{cases}$$

Pentru $k = 0$ obţinem

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \left(5 + 3x_2^{(0)} + x_3^{(0)}\right)/5 = (5 + 3 \cdot 0 + 0)/5 = 1 \\ x_2^{(1)} = \left(2x_1^{(1)} - x_3^{(0)}\right)/4 = (2 \cdot 1 - 0)/4 = 0.5 \\ x_3^{(1)} = \left(-3 - 2x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}\right)/(-5) = (-3 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0.5)/(-5) = 0.8. \end{cases}$$

Verificăm condiţia de oprire

$$\max_{1 \le i \le 3} \left|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}\right| = \max\left\{\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right|, \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right|, \left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right|\right\} =$$

$$= \max\{|1 - 0|, |0.5 - 0|, |0.8 - 0|\} = 1 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $k = 1$ obţinem

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \left(5 + 3x_2^{(1)} + x_3^{(1)}\right)/5 = (5 + 3 \cdot 0.5 + 0.8)/5 = 1.46 \\ x_2^{(2)} = \left(2x_1^{(2)} - x_3^{(1)}\right)/4 = (2 \cdot 1.46 - 0.8)/4 = 0.53 \\ x_3^{(2)} = \left(-3 - 2x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}\right)/(-5) = (-3 - 2 \cdot 1.46 + 2 \cdot 0.53)/(-5) = 0.972. \end{cases}$$

Verificăm condiţia de oprire

$$\max_{1 \le i \le 3} \left|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}\right| = \max\left\{\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right|, \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right|, \left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right|\right\} =$$

$$= \max\{|1.46 - 1|, |0.53 - 0.5|, |0.972 - 0.8|\} = 0.46 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $k = 2$ obţinem

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \left(5 + 3x_2^{(2)} + x_3^{(2)}\right)/5 = (5 + 3 \cdot 0.53 + 0.972)/5 = 1.5124 \\ x_2^{(3)} = \left(2x_1^{(3)} - x_3^{(2)}\right)/4 = (2 \cdot 1.5124 - 0.972)/4 = 0.5132 \\ x_3^{(3)} = \left(-3 - 2x_1^{(3)} + 2x_2^{(3)}\right)/(-5) = (-3 - 2 \cdot 1.5124 + 2 \cdot 0.5132)/(-5) = 0.99968. \end{cases}$$

Verificăm condiţia de oprire

$$\max_{1 \le i \le 3} \left|x_i^{(3)} - x_i^{(2)}\right| = \max\left\{\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right|, \left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right|, \left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right|\right\} =$$

$$= \max\{|1.5124 - 1.46|, |0.5132 - 0.53|, |0.99968 - 0.972|\} = 0.0524 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $k = 3$ obţinem

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \left(5 + 3x_2^{(3)} + x_3^{(3)}\right)/5 = (5 + 3 \cdot 0.5124 + 0.99968)/5 = 1.507856 \\ x_2^{(4)} = \left(2x_1^{(4)} - x_3^{(3)}\right)/4 = (2 \cdot 1.507856 - 0.99968)/4 = 0.504008 \\ x_3^{(4)} = \left(-3 - 2x_1^{(4)} + 2x_2^{(4)}\right)/(-5) = (-3 - 2 \cdot 1.507856 + 2 \cdot 0.504008)/(-5) = 1.001539. \end{cases}$$

Verificăm condiţia de oprire

$$\max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(4)} - x_i^{(3)} \right| = \max \left\{ \left| x_1^{(4)} - x_1^{(3)} \right|, \left| x_2^{(4)} - x_2^{(3)} \right|, \left| x_3^{(4)} - x_3^{(3} \right| \right\} =$$

$$= \max \{|1.507856 - 1.5124|, |0.504008 - 0.5132|, |1.001539 - 0.99968|\} = 0.009192 < \varepsilon = 0.01.$$

Deci, soluţia sistemului cu precizia $\varepsilon = 10^{-2}$ este

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 1.507856 \\ x_2^{(4)} = 0.504008 \\ x_3^{(4)} = 1.001539. \end{cases}$$

Exemple: Să se determine soluţiile următoarelor sisteme cu preciziile $\varepsilon = 10^{-4}, \varepsilon = 10^{-7}, \varepsilon = 10^{-10}$

$a) \begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 10,25 \\ 10x_2 - 3x_3 = -22,75 \\ -2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 40 \end{cases}$ $b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -30 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = -132 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = -132 \\ x_3 + 2x_4 = -30 \end{cases}$ $c) \begin{cases} -4x_1 + x_2 = -25 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -30 \\ 4x_2 - 4x_3 = 10 \end{cases}$

Exercitiu: Bazându-ne pe exemplul rezolvat, modificati algoritmul de la metoda lui Jacobi pentru a-l transforma în Seidel-Gauss.

10 Metoda aproximaţiilor succesive pentru rezolvarea numerică iterativă a ecuaţiilor neliniare

Prezentarea Problemei: Considerăm ecuaţia

$$f(x) = 0, \tag{28}$$

unde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^1([a, b])$. Ne propunem să aproximăm soluţia ecuaţiei (28), $x^* \in [a, b]$.

Prezentarea Metodei: Metoda aproximaţiilor succesive constă în transformarea ecuaţiei (28) într-o formă echivalentă

$$x = g(x).$$

Construim şirul de aproximaţii succesive $(x_n)_{n \ge 0}$, definit prin

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n \ge 0, \tag{29}$$

unde x_0 este aproximaţia iniţială a soluţiei exacte x^*.

Observaţii 1. O condiţie suficientă pentru asigurarea convergenţei şirului (29) este aceea ca funcţia g să fie contracţie pe intervalul $[a, b]$.

2. Dacă g este derivabilă pe $[a, b]$, atunci g este contracţie dacă şi numai dacă

$$|g'(x)| \leq q < 1, \quad \forall x \in [a, b].$$

Criteriul de oprire:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon \Rightarrow x_{n+1} \backsimeq x^*,$$

sau

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} \leq \varepsilon \Rightarrow x_{n+1} \backsimeq x^*,$$

unde ε este precizia de calcul.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte x_0, ε, $itmax$; declară g
2. $it \leftarrow 0$
3. repetă
3.1. $x_1 \leftarrow g(x_0)$
3.2. $dif \leftarrow |x_1 - x_0|$
3.3. $x_0 \leftarrow x_1$
3.4. $it \leftarrow it + 1$
până când $(dif \leq \varepsilon)$ sau $(it > itmax)$
4. dacă $it > itmax$ atunci
4.1. scrie *'Nu se poate obţine soluţia în'*, itmax, *'iteraţii, cu precizia'*, ε
4.2. *ieşire*
5. scrie (*'Soluţia obţinută în* ',it, *'iterţii cu precizia'*,ε, 'este', x_1).

Observaţie: În C, funcţia $g(x) = \frac{4}{\sqrt{x+3}}$ se declară astfel:

```
float g(float x)
  {
return  4./sqrt(x+3);
  }
```

Funcţii matematice	În C sau C++
$\sqrt{x}$	sqrt(x)
$\sqrt[3]{x}$	cbrt(x)
$\sqrt[7]{x}$	pow(x, 1./7)
e^x	exp(x)
a^x	pow(a,x)
$\ln x$	log(x)
$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$	log(x)/log(a)

Exemplul 1. Folosind metoda aproximaţiilor succesive să se aproximeze rădăcina ecuaţiei

$$x = \sqrt[4]{x+2},$$

cu precizia $\varepsilon = 10^{-2}$.

Soluţie: Considerăm funcţia

$$f(x) = x - \sqrt[4]{x+2}, \quad x \geq 0.$$

Căutăm a, b astfel încât $f(a)f(b) < 0$.

$$f(0) = -\sqrt[4]{2} < 0,$$

$$f(1) = 1 - \sqrt[4]{3} < 0,$$

$$f(2) = 2 - \sqrt[4]{4} = 2 - \sqrt{2} > 0.$$

Deci, rădăcina ecuaţiei este în intervalul $x^* \in [1, 2]$.

Scriem ecuaţia noastră în forma echivalentă

$$x = g(x),$$

unde $g(x) = \sqrt[4]{x+2}, \quad x \in [1, 2]$.

Arătăm că funcţia g este contracţie pe intervalul $[1, 2]$, adica $|g'(x)| < 1$, pentru orice $x \in [1, 2]$. Avem că

$$\left|g'(x)\right| = \left|\frac{1}{4}(x+2)^{-\frac{3}{4}}\right| = \frac{1}{4\sqrt[4]{x+2}^3} \leq \frac{1}{4\sqrt[4]{1+2}^3} < 1, \text{ pentru orice } x \in [1, 2],$$

deoarece funcţia $\frac{1}{4\sqrt[4]{x+2}^3}$ este descrescătoare pe intervalul $[1, 2]$. Astfel functia g este contracţie pe intervalul $[1, 2]$.

Fie $x_0 = 2$ ales arbitrar din intervalul $[1, 2]$ şi considerăm recurenţa

$$x_{n+1} = g(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} = \sqrt[4]{x_n + 2}, \qquad n \geq 0.$$

Pentru $n = 0$, avem că

$$x_1 = g(x_0) = \sqrt[4]{x_0 + 2} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} = 1.414214.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_1 - x_0| = |1.414214 - 2| = 0.585786 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $n = 1$, avem că

$$x_2 = g(x_1) = \sqrt[4]{x_1 + 2} = \sqrt[4]{3.414214} = 1.359323.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_2 - x_1| = |1.359323 - 1.414214| = 0.054891 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $n = 2$, avem că

$$x_3 = g(x_2) = \sqrt[4]{x_2 + 2} = \sqrt[4]{3.359323} = 1.353826.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_3 - x_2| = |1.353826 - 1.359323| = 0.005497 < \varepsilon = 0.01.$$

Deci

$$x_3 = 1.353826,$$

aproximează rădăcina ecuaţiei cu eroarea $\varepsilon = 10^{-2}$.

Exemplul 2. Folosind metoda aproximaţiilor succesive să se aproximeze rădăcina ecuaţiei

$$x^3 + 3x^2 = 16,$$

cu precizia $\varepsilon = 8 \cdot 10^{-3}$.

Soluţie: Considerăm funcţia

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 16, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Căutăm a, b astfel încât $f(a)f(b) < 0$.

$$f(0) = -16 < 0,$$

$$f(1) = 1 + 3 - 16 = -12 < 0,$$

$$f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 16 = 4 > 0.$$

Deci, rădăcina ecuaţiei este in intrvalul $x^* \in [1, 2]$.

Scriem ecuaţia noastră în forma echivalentă $x = g(x)$. Avem că

$$x^3 + 3x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2(x+3) = 16 \Leftrightarrow x + 3 = \frac{16}{x^2} \Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{16}{x^2} - 3}_{=g(x)} \Leftrightarrow x = g(x),$$

unde $g(x) = \frac{16}{x^2} - 3$.

Verificăm dacă funcţia g este contracţie pe intervalul $[1, 2]$, adica $|g'(x)| < 1$, pentru orice $x \in [1, 2]$. Avem că

$$\left|g'(x)\right| = \left|-\frac{32}{x^3}\right| \geq \frac{32}{2^3} > 1, \text{ pentru orice } x \in [1, 2],$$

deoarece funcţia $\frac{32}{x^3}$ este descrescătoare pe intervalul $[1, 2]$. Astfel functia g nu este contracţie pe intervalul $[1, 2]$.

În acest caz scriem ecuaţia în forma echivalentă

$$x = h(x),$$

unde $h(x) = g^{-1}(x)$ este funcţia inversă a funcţiei g. Mai precis, scoatem x din partea dreaptă a ecuaţiei

$$x = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{16}{x^2} - 3 \Leftrightarrow x + 3 = \frac{16}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} = \frac{x^2}{16} \Leftrightarrow \frac{16}{x+3} = x^2 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x+3}} = x \Leftrightarrow x = h(x),$$

unde $h(x) = \frac{4}{\sqrt{x+3}}$, $x \in [1, 2]$.

Verificăm dacă funcţia $h = \frac{4}{\sqrt{x+3}} = 4(x+3)^{-\frac{1}{2}}$ este contracţie pe intervalul $[1, 2]$, adică $|h'(x)| < 1$, pentru orice $x \in [1, 2]$. Avem că

$$\left|h'(x)\right| = \left|4\left(-\frac{1}{2}\right)(x+3)^{-\frac{3}{2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{x+3}^3} \leq \frac{2}{\sqrt{1+3}^3} < 1, \text{ pentru orice } x \in [1, 2].$$

Astfel functia h este contracţie pe intervalul $[1, 2]$.

Fie $x_0 = 1$ ales arbitrar din intervalul $[1, 2]$ şi considerăm recurenţa

$$x_{n+1} = h(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{4}{\sqrt{x_n + 3}}, \qquad n \geq 0.$$

Pentru $n = 0$, avem că

$$x_1 = h(x_0) = \frac{4}{\sqrt{x_0 + 3}} = \frac{4}{\sqrt{1+3}} = 2.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_1 - x_0| = |2 - 1| = 1 > \varepsilon = 0.008.$$

Pentru $n = 1$, avem că

$$x_2 = h(x_1) = \frac{4}{\sqrt{x_1 + 3}} = \frac{4}{\sqrt{2+3}} = 1.788854.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_2 - x_1| = |1.788854 - 2| = 0.211146 > \varepsilon = 0.008.$$

Pentru $n = 2$, avem că

$$x_3 = h(x_2) = \frac{4}{\sqrt{x_2 + 3}} = \frac{4}{\sqrt{1.788854 + 3}} = 1.827865.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_3 - x_2| = |1.827865 - 1.788854| = 0.039011 > \varepsilon = 0.008.$$

Pentru $n = 3$, avem că

$$x_4 = h(x_3) = \frac{4}{\sqrt{x_3 + 3}} = \frac{4}{\sqrt{1.827865 + 3}} = 1.820465.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_4 - x_3| = |1.820465 - 1.827865| = 0.0074 < \varepsilon = 0.008.$$

Deci

$$x_4 = 1.820465,$$

aproximează rădăcina ecuaţiei cu eroarea $\varepsilon = 8 \cdot 10^{-3}$.

Exemple: 1. Să se aproximeze rădăcina pozitivă, supraunitară, cu eroarea $\varepsilon = 10^{-4}$, folosind metoda aproximaţiilor succesive pentru ecuaţia $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$.
2. Să se aproximeze rădăcina ecuaţiei $x = \sqrt[4]{x} + 2$, cu eroarea $\varepsilon = 10^{-3}$.
3. Să se aproximeze rădăcina ecuaţiei $x = (x+1)^3$, cu eroarea $\varepsilon = 10^{-2}$.
Sol: 1. $x^* \backsimeq 1.3652$; 2. $x^* \backsimeq 3.353$; 3. $x^* \backsimeq -2.324$.

11 Metoda Krylov pentru determinarea coeficienţilor polinomului caracteristic

Prezentarea Problemei: Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ne propunem să determinăm coeficienţii polinonului caracteristic

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n.$$

Prezentarea Metodei:
1) Se alege arbitrar, $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ nenul;
2) Calculăm

$$y^{(k)} = Ay^{(k-1)}, \quad 1 \le k \le n$$

3) Rezolvăm sistemul linear

$$\left(y^{(n-1)}y^{(n-2)}...y^{(1)}y^{(0)}\right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = -y^{(n)}. \tag{30}$$

Observaţii: i) Dacă sistemul (30) nu are solutie unică, se alege alt $y^{(0)}$ nenul şi se reia algoritmul.
ii) Dacă sistemul (30) are soluţie unică, atunci componentele soluţiei sitemului, $c_1, c_2, ...c_n$, sunt coeficienţii polinomului caracteristic.

Algoritmul Pseudocod
1. citeşte n, a_{ij}, $1 \le i, j \le n$
2. citeşte $y_{i,n}$, $1 \le i \le n$ {reprezintă $y^{(0)}$, nenul}
// *calculăm* $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n-1)}$, *folosind* $y^{(k)} = A \cdot y^{(k-1)}$, $1 \le k \le n$
3. pentru $j = n-1, n-2, ..., 1$ execută

3.1. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

3.1.1. $y_{ij} \leftarrow 0$

3.1.2. pentru $k = 1, 2, ..., n$ execută

3.1.2.1. $y_{ij} \leftarrow y_{ij} + a_{ik} \cdot y_{k,j+1}$

// *calculăm* $y^{(n)}$, *folosind* $y^{(n)} = A \cdot y^{(n-1)}$, *şi păstrăm* $-y^{(n)}$

4. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

4.1. $y_{i,n+1} \leftarrow 0$

4.2. pentru $k = 1, 2, ..., n$ execută

4.2.1. $y_{i,n+1} \leftarrow y_{i,n+1} + a_{ik} \cdot y_{k1}$

4.1. $y_{i,n+1} \leftarrow -y_{i,n+1}$

// *rezolvăm sistemul a cărui matrice extinsă este* $(y_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n+1}}$, *folosind una din medodele studiate:*

- *Metoda lui Gauss cu pivotare parţială la fiecare pas*
- *Metoda lui Gauss cu pivotare totală la fiecare pas*
- *Factorizarea LR*

Exemple: Utilizând metoda lui Krylov, determinaţi valorile şi vectorii proprii corespunzători matricei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Este matricea A inversabilă? Dacă A este inversabilă, detrminaţi-i inversa utilizând metoda lui Krylov.

Soluţie: Alegem arbitrar $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi considerăm recurenţa vectorială

$$y^{(k+1)} = A \cdot y^{(k)}.$$

Calculăm $y^{(1)}, y^{(2)}$ şi $y^{(3)}$:

$$y^{(1)} = A \cdot y^{(0)} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$y^{(2)} = A \cdot y^{(1)} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix},$$

$$y^{(3)} = A \cdot y^{(2)} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ -42 \\ 63 \end{pmatrix}.$$

Rezolvăm sistemul linear

$$\left(y^{(2)} y^{(1)} y^{(0)}\right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = -y^{(3)},$$

care este echivalent cu

$$\begin{pmatrix} 25 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 0 \\ 11 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -125 \\ 42 \\ -63 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Observăm că $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ este vectorul ce conţine coeficienţii polinomului caracteristic.

Sistemul (31) se scrie în forma echivalentă

$$\begin{cases} 25c_1 - 5c_2 + c_3 = -125 \\ -8c_1 + 2c_3 = 42 \\ 11c_1 - c_2 = -63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 6 \\ c_2 = 3 \\ c_3 = -10. \end{cases}$$

Polinomul caracteristic corespunzător matricei A este

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 10.$$

Pentru a determina valorile proprii, rezolvăm ecuaţia

$$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -5.$$

Deoarece valorile proprii sunt numere reale şi distincte, metoda Krylov ne permite sa calculăm vectorii proprii corespunzători valorilor proprii.

Pentru valoarea proprie $\lambda_1 = 1$, calculăm

$$q_1(\lambda) = \frac{p_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = (\lambda + 2)(\lambda + 5) = \lambda^2 + 7\lambda + 10.$$

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este

$$y^{(2)} + 7y^{(1)} + 10y^{(0)} = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Pentru valoarea proprie $\lambda_2 = -2$, calculăm

$$q_2(\lambda) = \frac{p_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_2} = (\lambda - 1)(\lambda + 5) = \lambda^2 + 4\lambda - 5.$$

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -2$ este

$$y^{(2)} + 4y^{(1)} - 5y^{(0)} = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Pentru valoarea proprie $\lambda_3 = -5$, calculăm

$$q_3(\lambda) = \frac{p_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_3} = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + \lambda - 2.$$

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = -5$ este

$$y^{(2)} + y^{(1)} - 2y^{(0)} = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Mai mult, cum termenul liber al polinomului caracteristic, $c_3 = -10$ este nenul, atunci matricea A este inversabilă şi inversa sa este dată de formula

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_3}(A^2 + c_1A + c_2I_3) = \frac{1}{10}(A^2 + 6A + 3I_3) =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 11 & -2 & 4 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 0 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exemple: Determinaţi polinoamele caracteristice ale matricelor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

12 Metoda Fadeev pentru determinarea coeficienţilor polinomului caracteristic

Prezentarea Problemei: Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ne propunem să determinăm coeficienţii polinonului caracteristic

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n.$$

Prezentarea Metodei: Coeficienţii se calculează cu ajutorul formulelor

1) $A_1 = A$; $c_1 = -\mathrm{Tr}(A_1)$; $B_1 = c_1I_n + A_1$;

2) $A_2 = AB_1$; $c_2 = -\mathrm{Tr}(A_2)/2$; $B_2 = c_2I_n + A_2$;

$\vdots$

n) $A_n = AB_{n-1}$; $c_n = -\mathrm{Tr}(A_n)/n$; $B_n = c_nI_n + A_n$.

Observaţii:

1) $B_n = O_n$ (matricea nulă)- deci nu se va calcula.

2) Dacă $c_n \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{c_n}B_{n-1}$.

3) În algoritmul pseudocod, rolul matricei A_k îl joacă matricea D.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$

// iniţializăm B cu matricea unitate I_n

2. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

2.1. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută

2.1.1. dacă $i = j$ atunci

2.1.1.1. $b_{ij} \leftarrow 1$

altfel

2.1.1.2. $b_{ij} \leftarrow 0$

3. pentru $k = 1, 2, ..., n-1$ execută

// calculăm A_k, folosind $A_k = A \cdot B_{k-1}$, şi notăm $D = A_k$

3.1. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

3.1.1. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută

3.1.1.1. $d_{ij} \leftarrow 0$

3.1.1.2. pentru $h = 1, 2, ..., n$ execută

3.1.1.2.1. $d_{ij} \leftarrow d_{ij} + a_{ih} \cdot b_{hj}$

// calculăm c_k, folosind $c_k = -Tr(A_k)/k$

3.2. $c_k \leftarrow 0$

3.3. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

3.3.1. $c_k \leftarrow c_k + d_{ii}$

3.4. $c_k \leftarrow -c_k/k$

// calculăm B_k, folosind $B_k = c_k \cdot I_n + A_k$

3.5. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

3.5.1. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută

3.5.1.1. dacă $i = j$ atunci

3.5.1.1.1. $b_{ij} \leftarrow d_{ij} + c_k$

altfel

3.5.1.1.2. $b_{ij} \leftarrow d_{ij}$

// calculăm $A_n = D$

4. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

4.1. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută

4.1.1. $d_{ij} \leftarrow 0$

4.1.2. pentru $h = 1, 2, ..., n$ execută

4.1.2.1. $d_{ij} \leftarrow d_{ij} + a_{ih} \cdot b_{hj}$

// calculăm $c_n = -Tr(A_n)/n$

5. $c_n \leftarrow 0$

6. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

6.1. $c_n \leftarrow c_n + d_{ii}$

7. $c_n \leftarrow -c_n/n$

8. dacă $c_n = 0$ atunci

8.1. scrie *'Matricea nu este inversabilă'*

altfel

8.2. scrie *'Matricea inversabilă este'*

8.3. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

8.3.1. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută

8.3.1.1. scrie $-b_{ij}/c_n$

9. scrie *'Coeficienţii polinomului caracteristic sunt'*, c_i, $1 \leq i \leq n$

Exemple: Utilizând metoda lui Fadeev, determinaţi polinomul caracteristic corespunzător matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este matricea A inversabilă? Dacă A este inversabilă, detrminaţi-i inversa utilizând metoda lui Fadeev.

Soluţie:
Pasul 1:

$$A_1 = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = -Tr(A_1)/1 = -(2+1+0)/1 = -3,$$

$$B_1 = c_1 I_3 + A_1 = -3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pasul 2:

$$A_2 = AB_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = -Tr(A_2)/2 = -(3+0+3)/2 = -3,$$

$$B_2 = c_2 I_3 + A_2 = -3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pasul 3:

$$A_3 = AB_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

$$c_3 = -Tr(A_3)/3 = -(-6-6-6)/3 = 6,$$

$$B_3 = c_3 I_3 + A_3 = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = O_3.$$

Polinomul caracteristic corespunzător matricei A este

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 6.$$

Cum termenul liber al polinomului caracteristic, $c_3 = 6$ este nenul, atunci matricea A este inversabilă şi inversa sa este dată de formula

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_3}B_2 = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple: Determinaţi polinoamele caracteristice ale matricelor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -12 & 5 \end{pmatrix}.$$

13 Aproximarea funcţiilor prin interpolare Lagrange

Prezentarea Problemei: Fie:
$x_0 < x_1 < ... < x_n \in \mathbb{R}$ noduri de interpolare;
$f_i = f(x_i)$, $0 \le i \le n$, valori data ale funcţiei în nodurile de interpolare;
$z \in \mathbb{R}$, cu $z \in [x_0, x_n]$.

Ne propunem să aproximăm $f(z)$, folosind polinomul de interpolare Lagrange pe nodurile date.

Prezentarea Metodei:

$$f(z) \cong \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{z - x_i}{x_k - x_i},$$

unde

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i},$$

este polinomul de interpolare Lagrange pe nodurile $x_0, x_1, ..., x_n$.

Observatie: Gradul polinomului de interpolare L este mai mic sau egal cu n.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, x_i, $0 \le i \le n$, f_i, $0 \le i \le n$, z
2. $L \leftarrow 0$
3. pentru $k = 0, 1, .., n$ execută
3.1. $P \leftarrow 1$
3.2. pentru $i = 0, 1, .., n$ execută
3.2.1. dacă $i \neq k$ atunci
3.2.1.1. $P \leftarrow P \cdot (z - x_i)/(x_k - x_i)$
3.3. $L \leftarrow L + f_k \cdot P$
4. scrie *'Valoarea aproximativă a funcţiei f în '*, z, *'este'*, L

Observaţii: Algoritmul de mai sus se completeaza ţinând cont de următoarele observaţii:
1) dacă $z \notin [x_0, x_n]$, nu putem aproxima f în z;
2) dacă $\exists\, i \in \{0, 1, .., n\}$, astfel încât $z = x_i$, atunci se va afişa valoarea corespunzătoare a lui L (fără a calcula suma);
3) evaluarea polinomului Lagrange se poate face în mai multe puncte $z_1, z_2, ..., z_m \in [x_0, x_n]$;
4) dacă $\exists\, i \in \{0, 1, .., n\}$, astfel încât $f_i = 0$, atunci nu se ia în considerare, în sumă, termenul care conţine $f_i = 0$.

Exemplul 1: Fie tabelul de date

x_i	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1
f_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

a) Să se determine polinomul de interpolare Lagrange ce interpolează datele din tabel;

b) Să se evalueze $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(0\right)$ şi $f\left(2\right)$.

Soluţie: Observăm că datele din tabel corespund funcţiei $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right),\ x \in [-1, 1]$.

Avem că $n = 4$ şi

$$x_0 = -1,\ x_1 = -\frac{2}{3},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{2}{3},\ x_4 = 1,$$

$$f_0 = 0,\ \ f_1 = \frac{1}{2},\ \ f_2 = 1,\ \ f_3 = \frac{1}{2},\ \ f_4 = 0.$$

Polinomul de interpolare Lagrange este

$$L(x) = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + f_2 l_2(x) + f_3 l_3(x) + f_4 l_4(x), \quad x \in [-1, 1],$$

(32) $$\Leftrightarrow L(x) = 0 \cdot l_0(x) + \frac{1}{2} \cdot l_1(x) + 1 \cdot l_2(x) + \frac{1}{2} \cdot l_3(x) + 0 \cdot l_4(x), \quad x \in [-1, 1],$$

unde polinoamele fundamentale Lagrange $l_k(x),\ 0 \le k \le 4$, se determină cu ajutorul formulei

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{4} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad 0 \le k \le 4.$$

Deoarece $f_0 = 0$ şi $f_4 = 0$, nu mai este necesar să calculăm $l_0(x)$ şi $l_4(x)$. În continuare determinăm polinoamele fundamentale Lagrane $l_1(x)$, $l_2(x)$ şi $l_3(x)$. Avem că

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} = \frac{(x + 1)\,(x - 0)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 1)}{\left(-\frac{2}{3} + 1\right)\left(-\frac{2}{3} - 0\right)\left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3} - 1\right)} =$$

$$= -\frac{27}{40} x(x + 1)(x - 1)(3x - 2),$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} = \frac{(x + 1)\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 1)}{(0 + 1)\left(0 + \frac{2}{3}\right)\left(0 - \frac{2}{3}\right)(0 - 1)} =$$

$$= \frac{1}{4}(x + 1)(3x + 2)(3x - 2)(x - 1),$$

$$l_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} = \frac{(x + 1)\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 0)\,(x - 1)}{\left(\frac{2}{3} + 1\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3} - 0\right)\left(\frac{2}{3} - 1\right)} =$$

$$= -\frac{27}{40} x(x + 1)(3x + 2)(x - 1).$$

Din relaţia (32) deduce că

$$L(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{27}{40}\right) x(x+1)(x-1)(3x-2) + \frac{1}{4}(x+1)(3x+2)(3x-2)(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{27}{40}\right) x(x+1)(3x+2)(x-1) =$$

$$= (x^2 - 1)\left(\frac{9}{40}x^2 - 1\right) = \frac{9}{40}x^4 - \frac{49}{40}x^2 + 1$$

b) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = L\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{40}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{49}{40}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0.777380,$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = L\left(\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{9}{40}\left(\tfrac{1}{3}\right)^4 - \tfrac{49}{40}\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 1 = 0.866666,$$
$$f(0) = f(x_2) = f_2 = 1,$$
$f(2)$ nu se poate evalua, deoarece $2 \notin [-1, 1]$.

Exemplul 2: Fie tabelul de date

x_i	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1
f_i	0	$\frac{1}{2}$	1	0

Să se evalueze $f(z)$, folosind polinomul de interpolare Lagrange pe nodurile date, unde: $z \in \{\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2\}$.
Sol: $\frac{1}{6} \simeq 0.166666$; $f(\frac{1}{4}) = 0.693752$; $f(\frac{1}{3}) = 0.844444$;

Exemplul 3: Fie tabelul de date

x_i	-1	0	2	3	4
f_i	-0.3	0.2	0	1.1	1.8

a) Să se evalueze $f(z)$, folosind polinomul de interpolare Lagrange pe nodurile date, unde: $z \in \{-2; -1.05; -0.5; 0; 1; 2; 2.995; 4; 67\}$.
b) Să se evalueze $f(-0.5)$ şi $f(1)$ folosind un polinom de interpolare Lagrange de gradul 2.
Sol: a) $f(-0.5) = 0.225$, $f(1) = -0.24$, $f(2.995) = 1.093846$

14 Aproximarea funcţiilor prin interpolare Newton

Prezentarea Problemei: Fie:
$x_0 < x_1 < ... < x_n \in \mathbb{R}$ noduri de interpolare;
$f_i = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$, valori data ale unei funcţii în nodurile de interpolare;
$z \in \mathbb{R}$, cu $z \in [x_0, x_n]$.

Ne propunem să aproximăm $f(z)$, folosind polinomul de interpolare Newton pe nodurile date.

Prezentarea Metodei:

$$f(z) \cong f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0; x_1; ...; x_k] \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (z - x_i),$$

unde

$$N(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0; x_1; ...; x_k] \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i),$$

este polinomul de interpolare Newton pe nodurile $x_0, x_1, ..., x_n$ şi

$$f[x_0] = f_0,$$

$$f[x_0;x_1;...;x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f_j}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k}(x_j - x_i)}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Observatie: $d^o(N) = n$.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, x_i, $0 \leq i \leq n$, f_i, $0 \leq i \leq n$, z
2. $N \leftarrow f_0$
3. pentru $k = 1, 2, .., n$ execută
   3.1. $s \leftarrow 0$
   3.2. pentru $j = 0, 1, .., k$ execută
      3.2.1. $p \leftarrow 1$
      3.2.2. pentru $i = 0, 1, .., k$ execută
         3.2.2.1. dacă $i \neq j$ atunci
            3.2.2.1.1. $p \leftarrow p \cdot (x_j - x_i)$
      3.2.3. $s \leftarrow s + f_j/p$
   3.3. $p \leftarrow 1$
   3.4. pentru $i = 0, 1, .., k-1$ execută
      3.4.1. $p \leftarrow p \cdot (z - x_i)$
   3.5. $N \leftarrow N + s \cdot p$
4. scrie *'Valoarea aproximativă a funcţiei f în '*, z, *'este'*, N

Algoritmul de mai sus se completeaza ţinând cont de următoarele observaţii:
1) dacă $z \notin [x_0, x_n]$, nu putem aproxima f în z;
2) dacă $\exists\, i \in \{0, 1, .., n\}$, astfel încât $z = x_i$, atunci se va afişa valoarea corespunzătoare a lui N (fără a calcula suma);
3) evaluarea polinomului Newton se poate face în $z_1, z_2, ..., z_m \in [x_0, x_n]$;
4) dacă $\exists\, i \in \{1, 2, .., n\}$, astfel încât $s = f[x_0; x_1; ...; x_k] = 0$, atunci nu se ia în considerare, în sumă, termenul care conţine $s = 0$.

Exemplu 1: Fie tabelul de date

x_i	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1
f_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

a) Să se determine polinomul de interpolare Newton ce interpolează datele din tabel;
b) Să se evalueze $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(0\right)$ şi $f\left(2\right)$.

Soluţie: Avem că $n = 4$ şi

$$x_0 = -1,\ x_1 = -\frac{2}{3},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{2}{3},\ x_4 = 1,$$

$$f_0 = 0,\ \ f_1 = \frac{1}{2},\ \ f_2 = 1,\ \ f_3 = \frac{1}{2},\ \ f_4 = 0.$$

Construim tabelul diferenţelor divizate

x_i	Dif. diviz. de ordin 0	Dif. diviz. de ordin 1	Diferenţele divizate de ordin 2	Diferenţele divizate de ordin3	Diferenţa divizată de ordin 4
$x_0 = -1$	$f[x_0] = 0$	$f[x_0; x_1] = \frac{3}{2}$	$f[x_0; x_1; x_2] = -\frac{3}{4}$	$f[x_0; x_1; x_2; x_3] = -\frac{9}{40}$	$f[x_0; x_1; ..; x_4] = \frac{9}{40}$
$x_1 = -\frac{2}{3}$	$f[x_1] = \frac{1}{2}$	$f[x_1; x_2] = \frac{3}{4}$	$f[x_1; x_2; x_3] = -\frac{9}{8}$	$f[x_1; x_2; x_3; x_4] = \frac{9}{40}$	–
$x_2 = 0$	$f[x_2] = 1$	$f[x_2; x_3] = -\frac{3}{4}$	$f[x_2; x_3; x_4] = -\frac{3}{4}$	–	–
$x_3 = \frac{2}{3}$	$f[x_3] = \frac{1}{2}$	$f[x_3; x_4] = -\frac{3}{2}$	–	–	–
$x_4 = 1$	$f[x_4] = 0$	–	–	–	–

Pentru a obţine valorile din tabelul de mai sus, determinăm diferenţele divizate cu ajutorul următoarelor formule:

Diferenţele divizate de ordin 0:

$$f[x_0] = f_0 = 0, \quad f[x_1] = f_1 = \frac{1}{2}, \quad f[x_2] = f_2 = 1, \quad f[x_3] = f_3 = \frac{1}{2}, \quad f[x_4] = f_4 = 0.$$

Diferenţele divizate de ordin 1:

$$f[x_0; x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{-\frac{2}{3} - (-1)} = \frac{3}{2},$$

$$f[x_1; x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{0 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{4},$$

$$f[x_2; x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{2}{3} - 0} = -\frac{3}{4},$$

$$f[x_3; x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3} = \frac{0 - \frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{3}{2}.$$

Diferenţele divizate de ordin 2:

$$f[x_0; x_1; x_2] = \frac{f[x_1; x_2] - f[x_0; x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{2}}{0 - (-1)} = -\frac{3}{4},$$

$$f[x_1; x_2; x_3] = \frac{f[x_2; x_3] - f[x_1; x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{9}{8},$$

$$f[x_2; x_3; x_4] = \frac{f[x_3; x_4] - f[x_2; x_3]}{x_4 - x_2} = \frac{\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - 0} = -\frac{3}{4}.$$

Diferenţele divizate de ordin 3:

$$f[x_0; x_1; x_2; x_3] = \frac{f[x_1; x_2; x_3] - f[x_0; x_1; x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{-\frac{9}{8} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{\frac{2}{3} - (-1)} = -\frac{9}{40},$$

$$f[x_1;x_2;x_3;x_4]=\frac{f[x_2;x_3;x_4]-f[x_1;x_2;x_3]}{x_4-x_1}=\frac{-\frac{3}{4}-\left(-\frac{9}{8}\right)}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{9}{40},$$

Diferenţa divizată de ordin 4:

$$f[x_0;x_1;x_2;x_3;x_4]=\frac{f[x_1;x_2;x_3;x_4]-f[x_0;x_1;x_2;x_3]}{x_4-x_0}=\frac{\frac{9}{40}-\left(-\frac{9}{40}\right)}{1-(-1)}=\frac{9}{40},$$

Polinomul de interpolare Newton este

$$N(x)=f[x_0]+f[x_0;x_1](x-x_0)+f[x_0;x_1;x_2](x-x_0)(x-x_1)+$$

$$+f[x_0;x_1;x_2;x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+f[x_0;x_1;x_2;x_3;x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),\quad x\in[-1,1],$$

$$=0+\frac{3}{2}(x+1)-\frac{3}{4}(x+1)\left(x+\frac{2}{3}\right)-\frac{9}{40}(x+1)\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-0)-\frac{9}{40}(x+1)\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-0)\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{9}{40}x^4-\frac{9}{40}x^2+1,\quad x\in[-1,1].$$

Observăm ca polinomul de interpolare Newton este acelasi cu polinomul de interpolare Lagrange.

b) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=N\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{40}\left(-\frac{1}{2}\right)^4-\frac{49}{40}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1=0.777380,$
$f\left(\frac{1}{3}\right)=N\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{40}\left(\frac{1}{3}\right)^4-\frac{49}{40}\left(\frac{1}{3}\right)^2+1=0.866666,$
$f(0)=f(x_2)=f_2=1,$
$f(2)$ nu se poate evalua, deoarece $2\notin[-1,1]$.

Exemplul 2: Fie tabelul de date

x_i	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1
f_i	0	$\frac{1}{2}$	1	0

Să se evalueze $f(z)$, folosind polinomul de interpolare Newton pe nodurile date, unde:
$z\in\{\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{1}{2};2\}$.
Sol: $\frac{1}{6}\simeq 0.166666$; $f(\frac{1}{4})=0.693752$; $f(\frac{1}{3})=0.844444$;

Exemplul 3: Fie tabelul de date

x_i	-1	0	2	3	4
f_i	-0.3	0.2	0	1.1	1.8

a) Să se evalueze $f(z)$, folosind polinomul de interpolare Newton pe nodurile date, unde:
$z\in\{-2;-1.05;-0.5;0;1;2;2.995;4;67\}$.
b) Să se evalueze $f(-0.5)$ şi $f(1)$ folosind un polinom de interpolare Newton de gradul 3.
Sol: a) $f(-0.5)=0.225$, $f(1)=-0.24$, $f(2.995)=1.093846$

15 Aproximarea funcţiilor prin spline cubic cu derivata a doua nulă la extremităţile intervalului de aproximare

Prezentarea Problemei: Fie:
$x_0 < x_1 < ... < x_n \in \mathbb{R}$ noduri de interpolare;
$f_i = f(x_i)$, $0 \le i \le n$, valori date ale unei funcţii în nodurile de interpolare;
$z \in \mathbb{R}$, cu $z \in [x_0, x_n]$.

Ne propunem să aproximăm $f(z)$, folosind spline-ul cubic S pe nodurile date, ştiind că
$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.

Prezentarea Metodei:
Notăm

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad 1 \le i \le n,$$

$$S''(x_i) = u_i, \quad 0 \le i \le n.$$

Avem că $S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \Rightarrow u_0 = u_n = 0$.

Spline-ul cubic care aproximează funcţia f este

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x \in [x_0, x_1] \\ S_2(x), & x \in [x_1, x_2] \\ ... & \\ S_n(x), & x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases}$$

unde

(33)
$$S_i(x) = \frac{u_i(x - x_{i-1})^3 + u_{i-1}(x_i - x)^3}{6h_i} + \left(f_i - u_i \cdot \frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \left(f_{i-1} - u_{i-1} \cdot \frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i}, i = \overline{1, n}.$$

Pentru a determina $u_1, u_2, ..., u_n$ rezolvăm sistemul

(34)
$$\frac{h_i}{6}u_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}u_i + \frac{h_{i+1}}{6}u_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \quad i = \overline{1, n-1},$$

cu $u_0 = u_n = 0$.

Matricea sistemului (34) este tridiagonală, simetrică, şi are următoarele elemente:

(35)
$$\begin{cases} a_i = (h_i + h_{i+1})/3,\ 1 \le i \le n-1 \text{ -pe diagonala principală} \\ b_i = h_{i+1}/6,\ 1 \le i \le n-2 \text{ -deasupra diagonalei principale} \\ c_i = h_{i+1}/6,\ 1 \le i \le n-2 \text{ -sub diagonala principală} \end{cases}$$

iar termenul liber al sistemului (34) are componentele

(36)
$$t_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad 1 \le i \le n-1.$$

Observaţie: Putem simplifica formulele (35) şi (36) prin înmulţirea fiecărei ecuaţii a sistemului (34) cu 6. Obţinem

$$(3') \qquad \begin{cases} a_i = 2(h_i + h_{i+1}), & 1 \le i \le n-1 \\ b_i = c_i = h_{i+1}, & 1 \le i \le n-2, \end{cases}$$

respectiv

$$(4') \qquad t_i = 6(f_{i+1} - f_i)/h_{i+1} - 6(f_i - f_{i-1})/h_i \quad 1 \le i \le n-1.$$

Pentru rezolvarea sistemului (34), folosim factorizarea LR pentru matrice tridiagonale şi înlocuind $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$ astfel obţinute, în (33), găsim S.

Exemplul 1. a)Determinaţi spline-ul cubic S ce aproximează datele din tabelul următor

x_i	-3	-2	-1	0	1
f_i	9	4	1	0	1

ştiind că $S''(-3) = S''(1) = 0$.

b)Să se evalueze $f(z)$, pentru $z \in \{-2.5; -1.75; 0; 0.5; 1.25\}$.

Soluţie: a) Avem că

$$x_0 = -3,\ x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,$$

$$f_0 = 9,\ \ f_1 = 4,\ \ f_2 = 1,\ \ f_3 = 0,\ \ f_4 = 1.$$

Notând

$$h_i = x_i - x_{i-1},\ 1 \le i \le 4 \qquad \text{şi} \qquad u_i = S''(x_i),\ 0 \le i \le 4,$$

obţinem că

$$h_1 = x_1 - x_0 = -2 - (-3) = 1,$$
$$h_2 = x_2 - x_1 = -1 - (-2) = 1,$$
$$h_3 = x_3 - x_2 = 0 - (-1) = 1,$$
$$h_4 = x_4 - x_3 = 1 - 0 = 1.$$

Cum $S''(-3) = S''(1) = 0 \Rightarrow S''(x_0) = S''(x_4) = 0 \Rightarrow u_0 = u_4 = 0.$

Spline-ul cubic ce aproximează funcţia f este

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x \in [x_0, x_1] \\ S_2(x), & x \in (x_1, x_2] \\ S_2(x), & x \in (x_2, x_3] \\ S_4(x), & x \in (x_3, x_4] \end{cases}$$

unde S_i, $1 \le i \le 4$ se determină cu ajutorul formulei (33).

Obs: În expresia (33) cunoaştem valorile lui f_i, $0 \le i \le 4$, x_i, $0 \le i \le 4$, h_i, $1 \le i \le 4$ şi u_0 şi u_4.

Determinăm u_1, u_2 şi u_3 rezolvând sistemul (34). În (34) luând pe rând $i = 1$, $i = 2$ şi $i = 3$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{h_1}{6}u_0 + \dfrac{h_1 + h_2}{3}u_1 + \dfrac{h_2}{6}u_2 = \dfrac{f_2 - f_1}{h_2} - \dfrac{f_1 - f_0}{h_1} \\ \dfrac{h_2}{6}u_1 + \dfrac{h_2 + h_3}{3}u_2 + \dfrac{h_3}{6}u_3 = \dfrac{f_3 - f_2}{h_3} - \dfrac{f_2 - f_1}{h_2} \\ \dfrac{h_3}{6}u_2 + \dfrac{h_3 + h_4}{3}u_3 + \dfrac{h_4}{6}u_4 = \dfrac{f_4 - f_3}{h_4} - \dfrac{f_3 - f_2}{h_3}. \end{cases}$$

Cum $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 1$, $f_0 = 9$, $f_1 = 4$, $f_2 = 1$, $f_3 = 0$, $f_4 = 1$ şi $u_0 = u_4 = 0$, obţinem

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{6}u_2 = \frac{1-4}{1} - \frac{4-9}{1} \\ \frac{1}{6}u_1 + \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{6}u_3 = \frac{0-1}{1} - \frac{1-4}{1} \\ \frac{1}{6}u_2 + \frac{2}{3}u_3 = \frac{1-0}{1} - \frac{0-1}{1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4u_1 + u_2 = 12 \\ u_1 + 4u_2 + u_3 = 12 \\ u_2 + u_3 = 12 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_1 = \frac{18}{7} \\ u_2 = \frac{12}{7} \\ u_3 = \frac{18}{7}. \end{array}\right.$$

Avem datele necesare pentru a calcula S_1, S_2, S_3 şi S_4. Din relaţia (33) pentru $i = 1$ obţinem

$$S_1(x) = \frac{u_1(x-x_0)^3 + u_0(x_1-x)^3}{6h_1} + \left(f_1 - u_1 \cdot \frac{h_1^2}{6}\right)\frac{x-x_0}{h_1} + \left(f_0 - u_0 \cdot \frac{h_1^2}{6}\right)\frac{x_1-x}{h_1} =$$

$$= \frac{\frac{18}{7}(x+3)^3 + 0\cdot(-2-x)^3}{6\cdot 1} + \left(4 - \frac{18}{7}\cdot\frac{1^2}{6}\right)\frac{x+3}{1} + \left(9 - 0\cdot\frac{1^2}{6}\right)\frac{-2-x}{1} =$$

$$= \frac{3}{7}(x+3)^3 + \frac{25}{7}(x+3) - 9(x+2).$$

Din relaţia (33) pentru $i = 2$ obţinem

$$S_2(x) = \frac{u_2(x-x_1)^3 + u_1(x_2-x)^3}{6h_2} + \left(f_2 - u_2 \cdot \frac{h_2^2}{6}\right)\frac{x-x_1}{h_2} + \left(f_1 - u_1 \cdot \frac{h_2^2}{6}\right)\frac{x_2-x}{h_2} =$$

$$\frac{\frac{12}{7}(x+2)^3 + \frac{18}{7}(-1-x)^3}{6\cdot 1} + \left(1 - \frac{12}{7}\cdot\frac{1^2}{6}\right)\frac{x+2}{1} + \left(4 - \frac{18}{7}\cdot\frac{1^2}{6}\right)\frac{-1-x}{1} =$$

$$= \frac{2}{7}(x+2)^3 - \frac{3}{7}(x+1)^3 + \frac{5}{7}(x+2) - \frac{25}{7}(x+1).$$

Din relaţia (33) pentru $i = 3$ obţinem

$$S_3(x) = \frac{u_3(x-x_2)^3 + u_2(x_3-x)^3}{6h_3} + \left(f_3 - u_3 \cdot \frac{h_3^2}{6}\right)\frac{x-x_2}{h_3} + \left(f_2 - u_2 \cdot \frac{h_3^2}{6}\right)\frac{x_3-x}{h_3} =$$

$$= \frac{\frac{18}{7}(x+1)^3 + \frac{12}{7}(0-x)^3}{6\cdot 1} + \left(0 - \frac{18}{7}\cdot\frac{1^2}{6}\right)\frac{x+1}{1} + \left(1 - \frac{12}{7}\cdot\frac{1^2}{6}\right)\frac{0-x}{1} =$$

$$= \frac{3}{7}(x+1)^3 - \frac{2}{7}x^3 - \frac{3}{7}(x+1) - \frac{5}{7}x.$$

Din relaţia (33) pentru $i = 3$ obţinem

$$S_4(x) = \frac{u_4(x-x_3)^3 + u_3(x_4-x)^3}{6h_4} + \left(f_4 - u_4 \cdot \frac{h_4^2}{6}\right)\frac{x-x_3}{h_4} + \left(f_3 - u_3 \cdot \frac{h_4^2}{6}\right)\frac{x_4-x}{h_4} =$$

$$= \frac{0\cdot(x-0)^3 + \frac{18}{7}(1-x)^3}{6\cdot 1} + \left(1 - 0\cdot\frac{1^2}{6}\right)\frac{x-0}{1} + \left(0 - \frac{18}{7}\cdot\frac{1^2}{6}\right)\frac{1-x}{1} =$$

$$= \frac{3}{7}(1-x)^3 + x - \frac{3}{7}(1-x).$$

Deci, spline-ul cubic ce aproximează funcţia f este

$$S(x) = \left\{\begin{array}{ll} S_1(x), & x \in [x_0, x_1] \\ S_2(x), & x \in (x_1, x_2] \\ S_2(x), & x \in (x_2, x_3] \\ S_4(x), & x \in (x_3, x_4] \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} \frac{3}{7}(x+3)^3 + \frac{25}{7}(x+3) - 9(x+2), & x \in [-3,-2] \\ \frac{2}{7}(x+2)^3 - \frac{3}{7}(x+1)^3 + \frac{5}{7}(x+2) - \frac{25}{7}(x+1), & x \in (-2,-1] \\ \frac{3}{7}(x+1)^3 - \frac{2}{7}x^3 - \frac{3}{7}(x+1) - \frac{5}{7}x, & x \in (-1,0] \\ \frac{3}{7}(1-x)^3 + x - \frac{3}{7}(1-x), & x \in (0,1]. \end{array}\right.$$

b) $f(-2.5) \simeq S_1(-2.5) = \frac{3}{7}(-2.5+3)^3 + \frac{25}{7}(-2.5+3) - 9(-2.5+2) = 6.339286,$
$f(-1.75) \simeq S_2(-1.75) = \frac{2}{7}(-1.75+2)^3 - \frac{3}{7}(-1.75+1)^3 + \frac{5}{7}(-1.75+2) - \frac{25}{7}(-1.75+1) = 3.042411,$
$f(0) = f(x_3) = f_3 = 0,$
$f(0.5) \simeq S_4(0.5) = \frac{3}{7}(1-0.5)^3 + 0.5 - \frac{3}{7}(1-0.5) = 0.33926,$
$f(1.25)$ nu se poate evalua deoarece $1.25 \notin [-3, 1]$.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, x_i, $0 \le i \le n$, f_i, $0 \le i \le n$, z
2. pentru $i = 1, 2, .., n$ execută
2.1. $h_i \leftarrow x_i - x_{i-1}$
3. pentru $i = 1, 2, .., n-1$ execută
3.1. $a_i \leftarrow 2(h_i + h_{i+1})$
4. pentru $i = 1, 2, .., n-2$ execută
4.1. $b_i \leftarrow h_{i+1}$
4.2. $c_i \leftarrow b_i$
5. pentru $i = 1, 2, .., n-1$ execută
5.1. $t_i \leftarrow 6(f_{i+1} - f_i)/h_{i+1} - 6(f_i - f_{i-1})/h_i$
6. pentru $i = 1, 2, .., n-2$ execută
6.1. dacă $a_i = 0$ atunci
6.1.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
6.1.2. *ieşire*
6.2. $c_i \leftarrow c_i/a_i$
6.3. $a_{i+1} \leftarrow a_{i+1} - b_i \cdot c_i$
7. pentru $i = 2, 3, ..., n-1$ execută
7.1. $t_i \leftarrow t_i - c_{i-1} \cdot t_{i-1}$
8. dacă $a_{n-1} = 0$ atunci
8.1. scrie *'Sist. nu are soluţie unică '*
8.2. *ieşire*
9. $t_{n-1} \leftarrow t_{n-1}/a_{n-1}$
10. pentru $i = n-2, n-3, ..., 1$ execută
10.1. $t_i \leftarrow (t_i - b_i \cdot t_{i+1})/a_i$
11. pentru $i = 1, 2, .., n-1$ execută
11.1. scrie $'u_i =', t_i$
12. pentru $i = 1, 2, .., n-1$ execută
12.1. $u_i \leftarrow t_i$
13. $u_0 \leftarrow 0;\ u_n \leftarrow 0$
14. pentru $i = 1, 2, .., n$ execută
14.1. dacă $z \in [x_{i-1}, x_i]$ atunci
14.1.1. $S \leftarrow \frac{u_i(z-x_{i-1})^3 + u_{i-1}(x_i-z)^3}{6h_i} + \left(f_i - u_i \cdot \frac{h_i^2}{6}\right)\frac{z-x_{i-1}}{h_i} + \left(f_{i-1} - u_{i-1} \cdot \frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x_i-z}{h_i}$
14.1.2. scrie *"Valoarea functiei f in' ,z,' este', S*
14.2. scrie *"Nu putem aproxima valoarea functiei f in' ,z.*

Obsrvaţii: Va sugerez să impementăm **Exemplul 1** de mai sus.

Obs. 1. La pasul 1 citim $n = 4 \in \mathbb{Z}$, ce reprezintă numărul nodurilor introduse (indicierea începe de la 0!), apoi citim nodurile $x_0 = -3$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, apoi valorile funcţiei în noduri $f_0 = 9$, $f_1 = 4$, $f_2 = 1$, $f_3 = 0$, $f_4 = 1$ şi în final $z \in \mathbb{R}$. Numarul real z reprezintă valoarea în care vrem sa evaluăm functia f. În cazul nostru, z poate fi orice valoare din multimea

$\{-2.5;\ -1.75;\ 0;\ 0.5;\ 1.25\}$.

Obs. 2. În cadrul paşilor 6. – 11. se apelează procedura de rezolvarea a sistemelor liniare cu matrice tridiagonală

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & c_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix}$$

Obs. 3. La pasul 14. s-a aplicat formula (33). S reprezintă o variabilă reală în care se memorează valoarea lui f în punctul z.

Exemplu: Fie tabelul de date

x_i	-1	0	1	2
f_i	5	1	1	11

Să se evalueze $f(z)$, unde:
$z \in \{-0.75; -0.5; 0; 0.5; 1.25; 4\}$.

Indicaţie:

Avem $h_1 = h_2 = h_3 = 1$; $u_0 = u_3 = 0$.
Obţinem sistemul

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 60 \end{pmatrix}$$

cu soluţia $u_1 = 2.4$ şi $u_2 = 14.4$
Apoi din formula (33) avem
$f(-0.75) = 3.906$; $f(-0.5) = 2.85$; $f(0.5) = -0.05$; $f(1.25) = 2.7125$.

16 Metoda trapezului pentru evaluarea integralelor

Prezentarea Problemei: Ne propunem să aproximăm valoarea integralei definite

$$\int_a^b f(x)dx,$$

cu eroarea ε dată.

Prezentarea Metodei: Fie $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, având nodurile de interpolare
$x_i = x_0 + ih$, $0 \le i \le n$, unde $h = \frac{b-a}{n}$.

Metoda trapezului, propune următoarea formulă de aproximare

(37) $$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right).$$

Exemplul I: Aproximaţi valoarea integralei

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx,$$

cu eroarea $\varepsilon = 10^{-2}$.
Sol: Avem că $a = 0$, $b = 1$ şi $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Determinăm cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

(38) $$\boxed{\frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2} < \varepsilon,} \quad \text{unde } M_2 = \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|.$$

Avem că:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} = -(x+1)^{-2}.$$

$$f''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow M_2 = \max_{x\in[0,1]}\left|\frac{2}{(x+1)^3}\right| = \frac{2}{(0+1)^3} = 2,$$

deoarece funcţia $\frac{2}{(x+1)^3}$ este descrescătoare pe intervalul $[0,1]$.

Revenind în relaţia (38) obţinem

$$\frac{(1-0)^3 \cdot 2}{12n^2} < 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{2}{12n^2} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n^2 > \frac{200}{12} \simeq 16.(6) \Rightarrow n = 5.$$

Determinăm pasul $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$ şi apoi nodurile de interpolare:
$x_0 = a = 0$, $x_1 = x_0 + h = 0.2$, $x_2 = x_1 + h = 0.4$, $x_3 = x_2 + h = 0.6$, $x_4 = x_3 + h = 0.8$, $x_5 = x_4 + h = 1$.

Aplicând formula de aproximare a integralei (37) obţinem

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{4} f(x_i) + f(x_5)\right) =$$

$$= \frac{0.2}{2}\Big(f(x_0) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\big) + f(x_5)\Big) =$$

$$= 0.1\left(\frac{1}{0+1} + 2\left(\frac{1}{0.2+1} + \frac{1}{0.4+1} + \frac{1}{0.6+1} + \frac{1}{0.8+1}\right) + \frac{1}{1+1}\right) = 0.6954.$$

Obs: Valoarea 0.6954 aproximează valoarea exactă a integralei $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2$, cu precizia $\varepsilon = 10^{-2}$.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte a, b, ε; declară funcţia f

2. $n \leftarrow 1$

3. $Integr \leftarrow (f(a) + f(b)) \cdot (b - a)/2$

4. repetă

4.1. $n \leftarrow 2 \cdot n$

4.2. $h \leftarrow (b - a)/n$

4.3. $Integr0 \leftarrow Integr$

4.4. $S \leftarrow 0$

4.5. pentru $i = 1, 2, ..., n - 1$ execută

4.5.1. $S \leftarrow S + f(a + ih)$

4.6. $Integr \leftarrow (f(a) + 2S + f(b)) \cdot h/2$

până când $|Integr - Integr0| \leq \varepsilon$

5. scriem ('Valoarea integralei, obţinută cu precizia', ε, 'este', $Integr$)

Obsrvaţii:

Obs 1. În C funcţia $f(x) = \frac{1}{x+1}$ se declară astfel:

```
float f(float x)
{
 return 1./(x+1);
}
```

Obs 2. Capetele intebgralei a şi b se vor declara de tip float!

Obs 3. În Algoritmul Pseudocod, n nu se determină ca în Exemplul I de mai sus, aplicând formula (38), ci n se initializează cu 1 şi apoi se dublează ($n \leftarrow 2n$) aplicându-se succesiv formula trapezului de aproximare (37) până când diferenţa dintre valorile a două integrale consecutive devine mai mică decât precizia.

Exemple: 1. Aproximaţi $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$, cu precizia $\varepsilon = 10^{-5}$.

Sol: $I = 0.69314$, în 9 paşi.

2. Aproximaţi $I = \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx$, cu precizia $\varepsilon = 10^{-3}$, unde

$$f(x) = \begin{cases} 0.4(x+1)^3 + 0.6(x+1) - 5x & x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{x+1} & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Sol: $I = 3.59314$. Funcţia f se declară astfel

```
float f(float x) {
if(x >= -1 && x <= 0)
return 0.4*pow((1 + x),3)+0.6*(1 + x)-5*x;
if(x >= 0 && x <= 1)
return 1/ (1 + x); }
```

3. Aproximaţi $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{x^2} dx$, cu precizia $\varepsilon = 10^{-3}$.

Sol: $I = 3.518265$

4. Aproximaţi $I = \displaystyle\int_2^3 \sqrt[4]{e^x + x + 1} dx$, cu precizia $\varepsilon = 10^{-4}$.

Funcţii matematice	În C sau C++
$\sqrt{x}$	sqrt(x)
$\sqrt[3]{x}$	cbrt(x)
$\sqrt[7]{x}$	pow(x, 1./7)
e^x	exp(x)
a^x	pow(a,x)
$\ln x$	log(x)
$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$	log(x)/log(a)

17 Metoda Simpson pentru evaluarea integralelor

Prezentarea Problemei: Ne propunem să aproximăm valoarea integralei definite

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Prezentarea Metodei: Fie $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, având nodurile de interpolare
$x_i = x_0 + ih$, $0 \leq i \leq n$, unde $h = \frac{b-a}{n}$.

Metoda Simpson, propune următoarea formulă de aproximare

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{6}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_n)\right). \tag{39}$$

Exemplul II: Aproximaţi valoarea integralei

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx,$$

cu eroarea $\varepsilon = 10^{-4}$.
Sol: Avem că $a = 0$, $b = 1$ şi $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Determinăm cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\boxed{\frac{(b-a)^5 M_4}{2880n^4} < \varepsilon,} \quad \text{unde } M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(IV)}(x)\right|. \tag{40}$$

Avem că:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3},\ f'''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4},\ f^{(IV)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_4 = \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{24}{(x+1)^5}\right| = \frac{24}{(0+1)^5} = 24.$$

Revenind în relaţia (40) obţinem

$$\frac{(1-0)^5 \cdot 24}{2880 n^4} < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{24}{2880 n^4} < \frac{1}{10^4} \Leftrightarrow n^4 > \frac{24 \cdot 10^4}{2880} \simeq 83.(3) \Rightarrow n = 4.$$

Determinăm pasul $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$ şi apoi nodurile de interpolare:
$x_0 = a = 0$, $x_1 = x_0 + h = 0.25$, $x_2 = x_1 + h = 0.5$, $x_3 = x_2 + h = 0.75$, $x_4 = x_3 + h = 1$.

Aplicând formula de aproximare a integralei (39) obţinem

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \frac{h}{6}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{3} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{3} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_4)\right) =$$

$$= \frac{0.25}{2}\Big\{ f(x_0) + 2\big[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big] +$$

$$+4\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right] + f(x_4)\Big\} = 0.6913.$$

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte a, b, ε; declară f

2. $n \leftarrow 1$

3. $Integrala \leftarrow \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \cdot (b-a)/6$

4. repetă

4.1. $n \leftarrow 2 \cdot n$

4.2. $h \leftarrow (b-a)/n$

4.3. $IntegralaO \leftarrow Integrala$

4.4. $s_1 \leftarrow 0$

4.5. pentru $i = 1, 2, ..., n-1$ execută

4.5.1. $s_1 \leftarrow s_1 + f(a + ih)$

4.6. $s_2 \leftarrow 0$

4.7. pentru $i = 0, 1, ..., n-1$ execută

4.7.1. $s_2 \leftarrow s_2 + f(a + ih + h/2)$

4.8. $Integrala \leftarrow (f(a) + 2s_1 + 4s_2 + f(b)) \cdot h/6$

până când $|Integrala - IntegralaO| \leq \varepsilon$

5. scriem ('Valoarea integralei, obţinută cu precizia', ε, 'este', $Integrala$)

Exemplu: 1. Aproximaţi $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ cu precizia $\varepsilon = 10^{-5}$.

Sol: $I = 0.69314$, în 4 paşi.

2. Aproximaţi $I = \displaystyle\int_2^3 \sqrt[4]{x^2 + e}\, dx$, cu precizia $\varepsilon = 10^{-2}$.

18 Evaluarea numerică a integralelor duble pe triunghiuri

Prezentarea Problemei: Ne propunem să aproximăm valoarea integralei definite

$$I(f) = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

unde D este un triunghi cu vârfurile $V_i(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq 3$.

Prezentarea Metodei: $I(f)$ poate fi aproximată cu ajutorul formulei

$$I(f) = \frac{S}{12}\Big(f(V_1) + f(V_2) + f(V_3) + 9f(V_G)\Big). \tag{41}$$

unde S este aria triunghiului, iar $V_G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ este centrul de greutate al triunghiului D.

Exemplul 1. Aproximaţi

$$I = \iint_D \sqrt{3xy+2}\, dxdy,$$

unde D este tringhiul cu vârfurile $V_1(0,0)$, $V_2(0,2)$ şi $V_3(3,0)$.
Soluţie: Avem că

$$f(x,y) = \sqrt{3xy+2}.$$

Aria triunghiului dreptunghic $D = V_1V_2V_3$ este

$$S = S_{\triangle V_1V_2V_3} = \frac{V_1V_2 \cdot V_1V_3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3.$$

Fie V_G centrul de greutate al triunghiului $\triangle V_1V_2V_3 \Rightarrow V_G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) = V_G\left(\frac{0+0+3}{3}, \frac{0+2+0}{3}\right) = V_G\left(1, \frac{2}{3}\right)$. Aplicând formula (41) obţinem

$$I = \frac{3}{12}\left(f(0,0) + f(0,2) + f(3,0) + 9f\left(1, \frac{2}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{12}\left(\sqrt{3\cdot 0\cdot 0+2} + \sqrt{3\cdot 0\cdot 2+2} + \sqrt{3\cdot 0\cdot 3+2} + 9\sqrt{3\cdot 1\cdot \frac{2}{3}+2}\right) = \frac{1}{4}(3\sqrt{2}+18) \simeq 5.560659.$$

Exemplul 2. Aproximaţi

$$\iint_D \frac{xy-1}{x^2+y^2+1}\, dxdy,$$

unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in [2,\, 4],\ y \in [1,\, 2]\right\}$.
Soluţie: Avem că

$$f(x,y) = \frac{xy-1}{x^2+y^2+1}.$$

Observăm ca domeniul de integrare D este dreptunghiul cu vârfurile $V_1(2,1)$, $V_2(4,1)$, $V_3(4,2)$ şi $V_4(2,2)$.
Nu putem aplica direct formula (41) deoarece domeniul de integrare D nu este triunghi.

Vom împarţi domeniul de integrare D în două triunghiuri. Mai precis, domeniul D poate fi scris ca reuniunea dintre triunghiul $\triangle V_1V_2V_3$ şi triunghiul $\triangle V_1V_3V_4$. Observăm că intersecţia dintre cele două triunghiuri este segmentul (V_1V_3), deci aria intersecţiei este multimea vidă.

Avem că

$$\iint_D \frac{xy-1}{x^2+y^2+1}\,dxdy = \underbrace{\iint_{\triangle V_1V_2V_3} \frac{xy-1}{x^2+y^2+1}\,dxdy}_{\stackrel{not}{=} I_1} + \underbrace{\iint_{\triangle V_1V_3V_4} \frac{xy-1}{x^2+y^2+1}\,dxdy}_{\stackrel{not}{=} I_2}.$$

Observaţie: Chiar dacă $\triangle V_1V_2V_3 \equiv \triangle V_1V_3V_4$, în general $I_1 \neq I_2$.

Utilizând formula (41) vom aproxima pe rând fiecare din integralele I_1 şi I_2.

Deoarece $\triangle V_1V_2V_3 \equiv \triangle V_1V_3V_4$, avem că

$$S = S_{\triangle V_1V_2V_3} = S_{\triangle V_1V_3V_4} = \frac{V_1V_2 \cdot V_2V_3}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

Fie V_{G1} centrul de greutate al triunghiului $\triangle V_1V_2V_3 \Rightarrow V_{G1}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) = V_{G1}\left(\frac{2+4+4}{3}, \frac{1+1+2}{3}\right) = V_{G1}\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Aplicând formula (41) obţinem

$$I_1 = \iint_{\triangle V_1V_2V_3} \frac{xy-1}{x^2+y^2+1}\,dxdy = \frac{S_{\triangle V_1V_2V_3}}{12}\left(f(V_1)+f(V_2)+f(V_3)+9f(V_{G1})\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(f(2,1)+f(4,1)+f(4,2)+9f\left(\frac{10}{3},\frac{4}{3}\right)\right) \simeq 0.241556.$$

Fie V_{G2} centrul de greutate al triunghiului $\triangle V_1V_3V_4 \Rightarrow V_{G2}\left(\frac{x_1+x_3+x_4}{3}, \frac{y_1+y_3+y_4}{3}\right) = V_{G2}\left(\frac{2+4+2}{3}, \frac{1+2+2}{3}\right) = V_{G2}\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Aplicând formula (41) obţinem

$$I_2 = \iint_{\triangle V_1V_3V_4} \frac{xy-1}{x^2+y^2+1}\,dxdy = \frac{S_{\triangle V_1V_3V_4}}{12}\left(f(V_1)+f(V_3)+f(V_4)+9f(V_{G2})\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(f(2,1)+f(4,2)+f(2,2)+9f\left(\frac{8}{3},\frac{5}{3}\right)\right) \simeq 0.306689.$$

Deci

$$\iint_D \frac{xy-1}{x^2+y^2+1}\,dxdy = I_1 + I_2 = 0.241556 + 0.306689 \simeq 0.548245.$$

Algoritmul Pseudocod (formula (41))

1. citeşte $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$; declară f
2. $l_1 \leftarrow \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
3. $l_2 \leftarrow \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$
4. $l_3 \leftarrow \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$
5. $p \leftarrow (l_1+l_2+l_3)/2$
6. $S \leftarrow \sqrt{p(p-l_1)(p-l_2)(p-l_3)}$

7. $I \leftarrow \frac{S}{12} \cdot \left(f\left(x_1, y_1\right) + f\left(x_2, y_2\right) + f(x_3, y_3) + 9f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)\right)$

8. scriem ('Valoarea integralei este ', I)

Obsrvaţii:

Obs 1. În C funcţia $f(x, y) = \sqrt{3xy + 2}$ se declară astfel:

```
float f(float x, float y)
{
return sqrt( 3*x*y+2);
}
```

Obs 2. Vă recomand ca variabilele x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 să le declaraţi local (in interiorul lui int main()). Dacă vor fi declarate global pot apărea erori deoarece y_1 este funcţie (mai precis este functia Bessel)!

Obs 3. În Algoritmul Pseudocod, l_1, l_2, l_3 reprezintă lungimile laturilor triunghiului. Aria triunghiului se calculează cu formula lui Heron:

$$S = \sqrt{p(p - l_1)(p - l_2)(p - l_3)},$$

unde $p = \frac{l_1+l_2+l_3}{2}$ este semiperimetrul.

Exerciţii: I. Să se completeze algoritmul de mai sus astfel încât să se poată aproxima integrala din Exemplul 2 (şi Exerciţiul III b)), unde domeniul de integrare D nu este triunghi.

II a). Aproximaţi $I = \iint_D \sqrt{xy - y^2}dxdy$, unde D este tringhiul cu varfurile $V_1(0, 0)$, $V_2(10, 1)$ şi $V_3(1, 1)$.

Sol: $I = 5.89$.

III b). Aproximaţi $I = \iint_D \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(1+xy)}dxdy$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x \leq 3;\, 0 \leq y \leq 1\}$.

19 Metoda Euler pentru rezolvarea unei probleme Cauchy

Prezentarea Problemei: Considerăm problema Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{array}\right. \tag{42}$$

Prezentarea Metodei: Fie $x_0 < x_1 < ... < x_n$, unde $x_{i+1} = x_i + h$, $0 \leq i \leq n$. Ne propunem să determinăm valorile aproximative ale soluţiei problemei Cauchy (42), notate y_i, unde $y_i \simeq y(x_i)$, $0 \leq i \leq n - 1$.

Formulele utilizate sunt:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),\ 0 \leq i \leq n - 1. \end{array}\right. \tag{43}$$

Exemplul 1: Fie problema Chauchy

$$\left\{\begin{array}{l} y' = \frac{2y}{x} \\ y(1) = 1 \end{array}\right. \qquad x \in [1,\ 1.5]. \tag{44}$$

Să se determine soluţia aproximativă a acestei probleme în punctele $x_1 = 1.1, x_2 = 1.2, x_3 = 1.3, x_4 = 1.4$ şi $x_5 = 1.5$ folosind metoda Euler cu pasul $h = 0.1$.

Soluţie: Avem că

$$f(x, y) = \frac{2y}{x};\ x_0 = 1;\ y_0 = y(x_0) = 1;\ h = 0.1.$$

Obs: Trebuie să determinăm $y_1, y_2, ..., y_5$ ce aproximează valorile $y(1.1), y(1.2), ..., y(1.5)$.

Pentru $i = 0$, din relaţia (43) obţinem

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 1 + 0.1 = 1.1 \\ y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot f(1, 1) = 1 + 0.1 \cdot \frac{2 \cdot 1}{1} = 1.2. \end{cases}$$

Pentru $i = 1$, din relaţia (43) obţinem

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h = 1.1 + 0.1 = 1.2 \\ y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1.2 + 0.1 \cdot f(1.1, 1.2) = 1.2 + 0.1 \cdot \frac{2 \cdot 1.2}{1.1} \simeq 1.418181. \end{cases}$$

Pentru $i = 2$, din relaţia (43) obţinem

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + h = 1.2 + 0.1 = 1.3 \\ y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1.418181 + 0.1 \cdot f(1.2, 1.418181) = 1.418181 + 0.1 \cdot \frac{2 \cdot 1.4181818}{1.2} \simeq 1.654545. \end{cases}$$

Pentru $i = 3$, din relaţia (43) obţinem

$$\begin{cases} x_4 = x_2 + h = 1.3 + 0.1 = 1.4 \\ y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) \simeq 1.909090. \end{cases}$$

Pentru $i = 4$, din relaţia (43) obţinem

$$\begin{cases} x_5 = x_2 + h = 1.4 + 0.1 = 1.5 \\ y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) \simeq 2.181818. \end{cases}$$

□

Observaţie: De la cursul de Matematici Speciale ştim că, pentru a determina soluţia ecuaţiei cu variabile separabile (44), procedăm astfel:

$$y' = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + c \Rightarrow y = cx^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cum $y(1) = 1 \Rightarrow c = 1$. Deci soluţia exactă a problemei Cauchy este $y(x) = x^2$.

În tabelul de mai jos observăm diferenţa dintre valorile soluţiei obţinute cu metoda lui Euler şi valorile exacte ale soluţiei $y = x^2$:

x_i	$y_i \simeq y(x_i)$	$y = x^2$
1.1	1.2	1.21
1.2	1.418181	1.44
1.3	1.654545	1.69
1.4	1.909090	1.96
1.5	2.181818	2.25

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, x_i, $0 \le i \le n$, y_0, ε; declară f;
2. $i \leftarrow 0$
3. repetă
3.1. $x \leftarrow x_i$; $xx \leftarrow x_{i+1}$; $y \leftarrow y_i$
3.2. $h \leftarrow xx - x$;
3.3. $yy \leftarrow y + h \cdot f(x, y)$;
3.4. repetă
3.4.1. $h \leftarrow \frac{h}{2}$
3.4.2. $aux \leftarrow yy$
3.4.3. cât timp $x < xx$ execută
3.4.3.1. $y \leftarrow y + h \cdot f(x, y)$
3.4.3.2. $x \leftarrow x + h$
3.4.4. $yy \leftarrow y$; $x \leftarrow x_i$; $y \leftarrow y_i$
până când $|yy - aux| \le \varepsilon$
3.5. $y_{i+1} \leftarrow yy$;
3.6. scrie 'valoarea aproximativa a solutiei in', xx 'este', yy
3.7. $i \leftarrow i + 1$;
până când $i = n$

Obs 1: În algoritmul de mai sus, xx şi yy sunt variabile reale. (NU sunt $x * x$ sau $y * y$!) De asemenea, vă recomand să folosiţi o altă notaţie pentru x şi y, deoarece dacă veţi lucra cu variabila x şi vectorul $x[i]$ vor apărea erori de sintaxă.

Obs 2: Valorile $y_1, y_2, ..., y_n$, se calculează, fiecare, cu o precizia dorită ε, tactica fiind înjumătăţirea pasului h atunci când se trece de la pasul i la pasul $i + 1$.

Obs 3: În C (sau $C++$) la pasul 3.4.3. se foloseşte instrucţiunea

```
while (x < xx)
{
...
}
```

În acest caz nu trebuie negat while-ul, deoarece while=cât timp$\neq$până când.

Obs 4: Implementând datele din Exemplul 1, pentru $\varepsilon = 10^{-4}$, obţinem aproximările $y_1 = 1.209957$, $y_2 = 1.439906$, $y_3 = 1.689847$, $y_4 = 1.959781$, $y_5 = 2.249707$.

Exemplul 2: Fie problema

$$\begin{cases} y' = -y - \frac{2}{x^2} \\ y(1.5) = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Să se determine soluţia aproximativă a acestei probleme în punctele $x_1 = 1.7$, $x_2 = 1.9$ şi $x_3 = 2.1$ folosind metoda Euler cu pasul $h = 0.2$.

20 Metoda Runge-Kutta de ordin doi pentru rezolvarea unei probleme Cauchy asociată unei ecuaţii diferenţiale ordinare

Prezentarea Problemei: Considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{45}$$

Prezentarea Metodei: Fie $x_0 < x_1 < ... < x_n$, unde $x_{i+1} = x_i + h$, $0 \le i \le n$. Ne propunem sa determinăm valorile aproximative ale soluţiei problemei Cauchy (45), notate y_i, unde
$y_i \simeq y(x_i)$, $0 \le i \le n-1$.
Formulele utilizate sunt:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ k_1 = h \cdot f(x_i, y_i) \\ k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k_1\right) \\ y_{i+1} = y_i + (k_1 + 3k_2)/4,\ 0 \le i \le n-1. \end{cases} \tag{46}$$

Exemplul 1: Fie problema Chauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{2y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad x \in [1,\ 1.3]. \tag{47}$$

Să se determine soluţia aproximativă a acestei probleme în punctele $x_1 = 1.1, x_2 = 1.2$ şi $x_3 = 1.3$ folosind metoda Runge-Kutta de ordinul doi cu pasul $h = 0.1$.
Soluţie: Avem că

$$f(x,y) = \frac{2y}{x};\ x_0 = 1;\ y_0 = y(x_0) = 1;\ h = 0.1.$$

Pentru $i = 0$, din relaţia (46) obţinem

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 1 + 0.1 = 1.1 \\ k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = h \cdot f(1,1) = 0.1 \cdot \frac{2\cdot 1}{1} = 0.2 \\ k_2 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}k_1\right) = 0.1 \cdot f\left(1 + \frac{2}{30}, 1 + \frac{4}{30}\right) = \frac{68}{320} \\ y_1 = y_0 + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2) = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{68}{320}\right) = \frac{387}{320} \simeq 1.209375. \end{cases}$$

Pentru $i = 1$, din relaţia (46) obţinem

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h = 1.2 \\ k_1 = h \cdot f(x_1, y_1) = h \cdot f\left(1.1, \frac{387}{320}\right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\cdot\frac{387}{320}}{\frac{11}{10}} = \frac{387}{1760} \\ k_2 = h \cdot f\left(x_1 + \frac{2}{3}h, y_1 + \frac{2}{3}k_1\right) = 0.1 \cdot f\left(1.1 + \frac{2}{30}, \frac{387}{320} + \frac{2\cdot 387}{3\cdot 1760}\right) = \frac{1}{10} f\left(\frac{7}{6}, \frac{4773}{3520}\right) = \frac{14319}{61600} \\ y_2 = y_1 + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2) = \frac{387}{320} + \frac{1}{4}\left(\frac{387}{1760} + 3 \cdot \frac{14319}{61600}\right) = \frac{88623}{61600} \simeq 1.438685. \end{cases}$$

Pentru $i = 2$, din relaţia (46) obţinem

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + h = 1.3 \\ k_1 = h \cdot f(x_2, y_2) = h \cdot f\left(1.2, \frac{88623}{61600}\right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\cdot\frac{88623}{61600}}{\frac{12}{10}} = \frac{29541}{123200} \\ k_2 = h \cdot f\left(x_2 + \frac{2}{3}h, y_2 + \frac{2}{3}k_1\right) = 0.1 \cdot f\left(1.2 + \frac{2}{30}, \frac{88623}{61600} + \frac{2\cdot 29541}{3\cdot 123200}\right) = \frac{1}{10} f\left(\frac{19}{15}, \frac{9847}{6160}\right) = \frac{29541}{117040} \\ y_3 = y_2 + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2) = \frac{88623}{61600} + \frac{1}{4}\left(\frac{29541}{123200} + 3 \cdot \frac{29541}{117040}\right) = \frac{3160887}{1872640} \simeq 1.687930. \end{cases}$$

$\square$

Observaţie: În tabelul de mai jos observăm diferenţa dintre valorile soluţiei obţinute cu metoda lui Euler, valorile soluţiei obţinute cu metoda lui Ruge-Kutta de ordinul al doilea şi valorile exacte ale soluţiei $y = x^2$:

x_i	$y_i \simeq y(x_i)$ Euler	$y_i \simeq y(x_i)$ Runge-Kutta	$y = x^2$ sol. exactă
1.1	1.2	1.209375	1.21
1.2	1.418181	1.438685	1.44
1.3	1.654545	1.687930	1.69

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, x_i, $0 \le i \le n$, y_0, ε; declară f;
2. $i \leftarrow 0$
3. repetă
3.1. $x \leftarrow x_i$; $xx \leftarrow x_{i+1}$; $y \leftarrow y_i$
3.2. $h \leftarrow xx - x$
3.3. $k_1 \leftarrow h \cdot f(x, y)$
3.4. $k_2 \leftarrow h \cdot f\left(x + 2h/3, y + 2k_1/3\right)$
3.5. $yy \leftarrow y + (k_1 + 3k_2)/4$;
3.6. repetă
3.6.1. $h \leftarrow \frac{h}{2}$
3.6.2. $aux \leftarrow yy$
3.6.3. cât timp $x < xx$ execută
3.6.3.1. $k_1 \leftarrow h \cdot f(x, y)$
3.6.3.2. $k_2 \leftarrow h \cdot f(x + 2h/3, y + 2k_1/3)$
3.6.3.3. $y \leftarrow y + (k_1 + 3k_2)/4$
3.6.3.4. $x \leftarrow x + h$
3.6.4. $yy \leftarrow y$; $x \leftarrow x_i$; $y \leftarrow y_i$
până când $|yy - aux| \le \varepsilon$
3.7. $y_{i+1} \leftarrow yy$;
3.8. scrie 'valoarea aproximativa a solutiei in', xx 'este', yy
3.9. $i \leftarrow i + 1$;
până când $i = n$

Exemplul 2: Fie problema

$$\begin{cases} y' = -y - \frac{2}{x^2} \\ y(1.5) = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Să se determine soluţia aproximativă a acestei probleme în punctele $x_1 = 1.7$, $x_2 = 1.9$ şi $x_3 = 2.1$ folosind metoda Runge-Kutta de ordinul al doilea cu pasul $h = 0.2$.