Matematici Speciale - Curs

George Popescu

Cuprins - Capitole

Cuprins – în detaliu

Ecuaţii exacte sau care admit factor integrant

3. Analiză Fourier – serii Fourier

3.1 Funcţii (semnale) periodice. Funcţii pare, impare. Prelungire prin periodicitate, prelungire pară (impară).
Proprietăţi de calcul a integralelor pentru funcţii pare (impare)
3.2 Spaţii vectoriale cu produs scalar, vectori ortogonali, procedeul Gramm-Schmidt, bază ortonormată.
Sistemul trigonometric ortogonal, polinoame trigonometrice, serii trigonometrice.
3.3 Coeficienţi Fourier, serie Fourier asociată unei funcţii continue pe porţiuni.
Formula lui Parseval, Inegalitatea lui Bessel.
Teoremele lui Weierstrass de aproximare. Aproximare cu polinoame trigonometrice
Calculul coeficienţilor Fourier, dezvoltare in serie Fourier, în serie de sinusi, de cosinusi calculul sumei unor serii numerice folosind serii Fourier.

4. Transformarea Laplace

4.1 Funcţii (semnal) original. Transformata Laplace. Proprietăţi de calcul.
Transformatele Laplace ale unor funcţii elementare.
4.2 Teoreme fundamentale : teorema asemănării, deplasării, întârzierii, derivării imaginii, integrării originalului, integrării imaginii, valorii iniţiale, valorii finale, semnale periodice, teorema derivării originalului. Convoluţia. Transformarea Laplace a convoluţiei.
4.3 Calculul transformatei Laplace, calculul de original corespunzător unei transformate Laplace.
4.4 Transformata Laplace discretă (transformata "Z")
Calculul transformatei pentru semnale discrete. Proprietăţi simple de calcul.
Transformata Laplace discretă pentru unele semnale elementare.
Aplicaţie la determinarea termenilor unor şiruri definite prin relaţii liniare de recurenţă (semnale discrete obţinute prin suprapunerea efectelor unor întârziate ale lor)

5. Transformarea Fourier

5.1 Funcţii (semnale) integrabile pe R. Transformata Fourier.
Continuitatea, derivabilitatea transformatei Fourier .
Teorema de inversare Fourier. Teorema de inversare a transformatei Laplace
5.2 Transformata Fourier pentru funcţii rapid descrescatoare, proprietăţi de calcul formulele lui Parseval, convoluţia, formulele lui Borel.
5.3 Transformarea "prin sinus", "prin cosinus" , calcul, formule de inversare.
Calculul de transformate Fourier, transformate prin sinus şi cosinus,
Rezolvarea unor ecuaţii integrale, reprezentarea unor funcţii ca integrale Fourier.

6. Ecuaţii diferenţiale liniare cu derivate parţiale de ordin II

6.1 Ecuaţii diferenţiale, condiţii la limită, condiţii iniţiale, problema Cauchy.
clasificarea ecuaţiilor (de tip hiperbolic, parabolic, eliptic) forma canonică.
6.2 Ecuaţii liniare cu derivate parţiale de ordin II remarcabile, rezolvate prin metoda separării variabilelor şi aplicând principiul suprapunerii efectelor.
problema Dirichlet pe discul unitate, ecuaţia coardei vibrante, propagarea căldurii în bară infinită.

7. Câmpuri vectoriale
Determinarea unui potenţial scalar şi a unui potenţial vector

7.1 Câmp scalar, câmp vectorial. Câmp de gradienţi. Potenţial scalar asociat.
Câmp conservativ. Câmp irotaţional.
Domeniu stelat. Lucrul mecanic al unui câmp de gradienţi.
Condiţii în care un câmp conservativ este câmp de gradienţi.
Determinarea unui potenţial scalar pentru un câmp de gradienţi.
7.2 Câmp solenoidal. Câmp de rotori.
Determinarea unui potenţial vector pentru un câmp solenoidal.

8. Anexă

8.1 Funcţiile B şi Γ integrale improprii

0.1 Introducere în Analiza Complexă

0.2 Mulţimea numerelor complexe

În cele ce urmează prezentăm un mod relativ simplu de a defini numerele complexe, folosind motivaţii algebrice. Presupunem cunoscute noţiunile de grup, inel, corp, spaţiu vectorial. O scurtă prezentare se găseşte în Anexă.

Considerăm mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ ca semigrup infinit, generat de un element notat "1" şi de o operaţie (lege de compoziţie) notată "+" numită **adunare**.

$$\underbrace{1+1}_{2 \text{ ori}} \overset{not}{=} 2 \quad , \quad \underbrace{1+1+1}_{3 \text{ ori}} \overset{not}{=} 3 \quad , \quad \underbrace{1+1+1+1}_{4 \text{ ori}} \overset{not}{=} 4 \quad ... \quad \underbrace{1+1+...+1}_{n \text{ ori}} \overset{not}{=} n \; ...$$

Rezultă astfel mulţimea numerelor naturale

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

iar adunarea este în mod natural asociativă, comutativă.

Mulţimea astfel construită are un număr infinit de elemente deoarece

$$\underbrace{1+1+...+1}_{n \text{ ori}} = \underbrace{1+1+...+1}_{p \text{ ori}} \text{ dacă şi numai dacă } \; n = p$$

Se adaugă (se adjuncţionează) un element neutru notat "0".
Deci

$$n + 0 = 0 + n = n \quad , \quad \text{pentru orice } \in \mathbb{N}$$

Definim $\mathbb{Z}$ ca fiind cel mai mic grup comutativ (cu aceeaşi operaţie, adunarea numerelor naturale) ce conţine numerele naturale ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$), în sensul de "**grupul generat**" de $\mathbb{N}$.

Notăm cu "-1" opusul lui 1 , deci

$$1 + (-1) = (-1) + 1 = 0$$

Apoi constatăm că

$$(-1) + (-1) + 2 = (-1) + (-1) + 1 + 1 = 0$$

deci $(-1) + (-1)$ este opusul lui 2 şi îl notăm cu "-2"

$$(-1) + (-1) \overset{not}{=} -2$$

apoi în mod asemănător

$$\underbrace{(-1)+(-1)+(-1)}_{3 \text{ ori}} \overset{not}{=} -3 \quad , \quad \underbrace{(-1)+(-1)+(-1)+(-1)}_{4 \text{ ori}} \overset{not}{=} -4 \quad ... \quad \underbrace{(-1)+(-1)+...+(-1)}_{n \text{ ori}} \overset{not}{=} -n \; ...$$

Obţinem astfel mulţimea numerelor întregi

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ este cel mai mic corp comutativ (cu aceleaşi operaţii, adunarea şi înmulţirea numerelor întregi) ce conţine numerele întregi ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$), în sensul de "**corpul generat**" de $\mathbb{Z}$.

Mai departe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ este construită ca fiind cel mai mic corp (cu aceleaşi operaţii, adunarea şi înmulţirea numerelor raţionale) ce conţine numerele raţionale ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$) , cu o relaţie de ordine totală şi în care orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Menţionăm provenienţa notaţiilor.
$\mathbb{N}$ de la numere naturale,
$\mathbb{Z}$ de la "zahlen" = a număra (în germană)
numere raţionale de la "ratio" = raport (în limba latină) iar $\mathbb{Q}$ de la "quotient" = cât (în franceză, engleză)
în fine $\mathbb{R}$ de la numere reale

$\mathbb{C}$ de la numere complexe.

Iată un exemplu familiar de construcţie algebrică a unui corp.

Considerând polinoamele cu coeficienţi numere raţionale $\mathbb{Q}[X]$, este uşor de arătat că nu orice astfel de polinom are rădăcini numere raţionale.

De exemplu $x^2 - 2$ nu are rădăcini în $\mathbb{Q}$.

Deoarece $x^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2$ şi nici un număr raţional $x \in \mathbb{Q}$ nu verifică o astfel de relaţie.

Să adăugăm numărul $\sqrt{2}$ (definit cu proprietatea că $(\sqrt{2})^2 = 2$ şi $\sqrt{2} > 0$).

Este un simplu exerciţiu de calcul, a arăta că mulţimea numerelor de forma

$$\{a + b\sqrt{2} \text{ , cu } a, b \in \mathbb{Q}\} \overset{not}{=} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

este **cel mai mic corp comutativ** ce conţine numerele raţionale şi numărul $\sqrt{2}$, $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Este însă evident că acest corp nu conţine şi rădăcinile altor polinoame de exemplu rădăcinile polinomului x^2-3, adică $\sqrt{3}$ şi $-\sqrt{3}$.

Deci acest gen de extindere a corpului numerelor raţionale nu cuprinde toate rădăcinile polinoamelor din $\mathbb{Q}[X]$.

Considerăm acum polinoamele cu coeficienţi numere reale $\mathbb{R}[X]$, este uşor de arătat că nu orice astfel de polinom are rădăcini numere reale.

De exemplu $x^2 + 1$ nu are rădăcini în $\mathbb{R}$.

Urmând ideea de mai înainte, să adăugam la numerele reale un element "abstract", notat cu i (de la imaginar).

Dorim să construim un corp comutativ care să conţină numerele reale şi acest nou element i.

Operaţiile sunt definite în mod natural

$$a + i = i + a \quad , b \cdot i = i \cdot b \overset{not}{=} ib \quad , i + 0 = 0 + i = i \quad , i \cdot 1 = 1 \cdot i = i$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

În plus

$$i \cdot i \overset{not}{=} i^2 \overset{def}{=} -1$$

La fel ca şi pentru spaţii vectoriale se demonstrează că

$$i \cdot 0 = 0 \text{ şi } i \cdot (-1) = -i$$

aici "$-i$" reprezintă opusul lui i

Rezultă i are invers faţă de înmultire şi inversul său este $-i$

$$i \cdot (-i) = i \cdot i \cdot (-1) = 1$$

Rezultă că $a = ib \;\Leftrightarrow\; a = 0$ şi $b = 0$, deoarece

$$a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a}a = ib\frac{1}{a} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = i\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} = -i \notin \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

deci

$$a + ib = c + id \;\Leftrightarrow\; a = b \text{ şi } c = d$$

Deoarece adunarea este asociativă şi comutativă, iar înmulţirea este distributivă faţă de adunare şi comutativă, rezultă relaţiile cunoscute

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$
$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Exact ca pentru $\mathbb{Q}(\sqrt{2}$, este uşor de arătat că mulţimea elementelor de forma

$$\{a + ib \text{ , cu } a, b \in \mathbb{R}\} \overset{not}{=} \mathbb{C}$$

este **cel mai mic corp comutativ** ce conţine numerele reale şi elementul i , $\mathbb{R} \cup \{i\} \subset \mathbb{C}$

Definiţie. *Numim "**numere**" **complexe** elementele mulţimii*

$$\{a + ib \text{ , cu } a, b \in \mathbb{R}\} \overset{not}{=} \mathbb{C}$$

şi notăm cu $\mathbb{C}$ ***mulţimea numerelor complexe.***

Până acum, această construcţie, o extensie (la un corp) a numerelor reale, nu pare a fi esenţial diferită de extensia de la $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Se demonstrează urmatoarea teoremă.

Teoremă. *Orice polinom cu coeficienţi numere complexe (de grad n) are exact n rădăcini numere complexe* $\mathbb{C}$.

În urma acestui fapt, mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ construită după aceeaşi idee ca pentru $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ se dovedeşte a fi nu o extensie oarecare, ci cea mai bună din punct de vedere algebric.

Proprietăţi algebrice.

1. Reprezentarea unui număr complex $z \in \mathbb{C}$ în forma $z = a + ib$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, este unică şi se numeşte **reprezentare algebrică**.

Numerele reale a, b se numesc **partea reală**, respectiv **partea imaginară** a numărului complex z.

$$a \overset{not}{=} \operatorname{Re} z \ , \ b \overset{not}{=} \operatorname{Im} z \quad , \quad z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$$

2. Dacă $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$, atunci $z \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\operatorname{Im} z = 0$

În particular

$$0 + 0i = 0 \quad , \quad 1 + 0i = 1$$

$$x + iy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{şi} \ y = 0$$

3. Orice număr complex nenul, adică $z = x + iy \neq 0 \ \Leftrightarrow \ x, y \neq 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 + y^2 \neq 0$

are invers faţă de înmulţire notat

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

care provine din

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

se verifică şi prin calcul direct

$$z \cdot \frac{1}{z} = (x + iy) \left[\frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} \right] = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + i \frac{x(-y)}{x^2 + y^2} + i \frac{yx}{x^2 + y^2} + i^2 \frac{y(-y)}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{(-1)(-y^2)}{x^2 + y^2} = 1$$

4. Notăm cu $\overline{z} = a - ib$ şi îl numim **conjugatul numărului complex** $z = a + ib$. Rezultă că

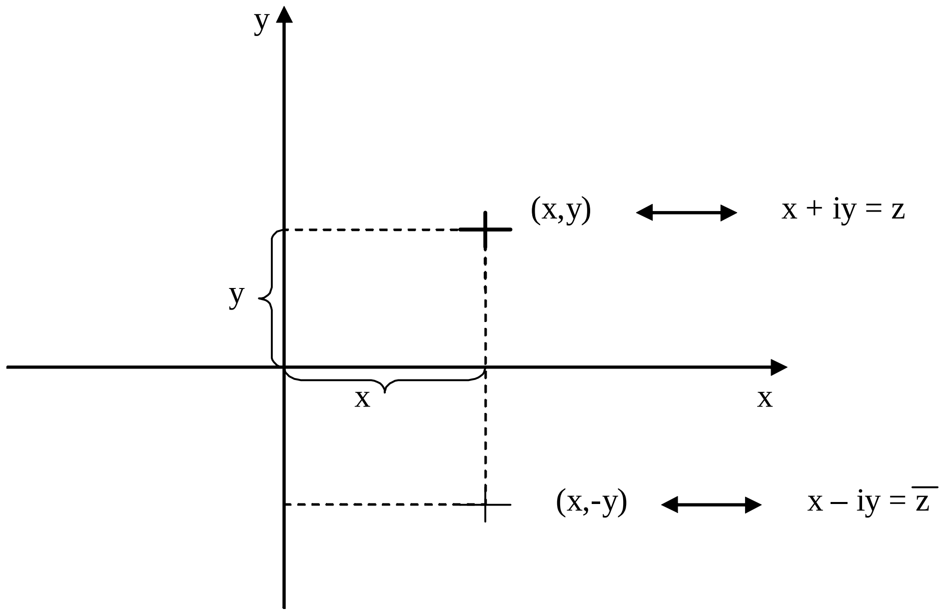
$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad , \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i} \ , \ z \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ z = \overline{z}$$

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \ , \ \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \ , \ \overline{\left(\frac{z}{w} \right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

Comentariu. În cele ce urmează, notaţia $z = x + iy$ înseamnă în mod implicit că $x, y \in \mathbb{R}$.

Reprezentare geometrică.

Este clar că un număr complex $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, cu $x, y \in \mathbb{R}$ este definit de o pereche de numere reale (x, y), care poate fi identificată cu punctul din plan de coordonate (x, y).



Deci putem identifica $\mathbb{C}$ cu $\mathbb{R}^2$.

"Geometric" mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ este numită "**planul complex**", prin identificare cu "planul" $\mathbb{R}^2$ (ca spaţiu vectorial euclidian).

Să observăm că adunarea a două numere complexe

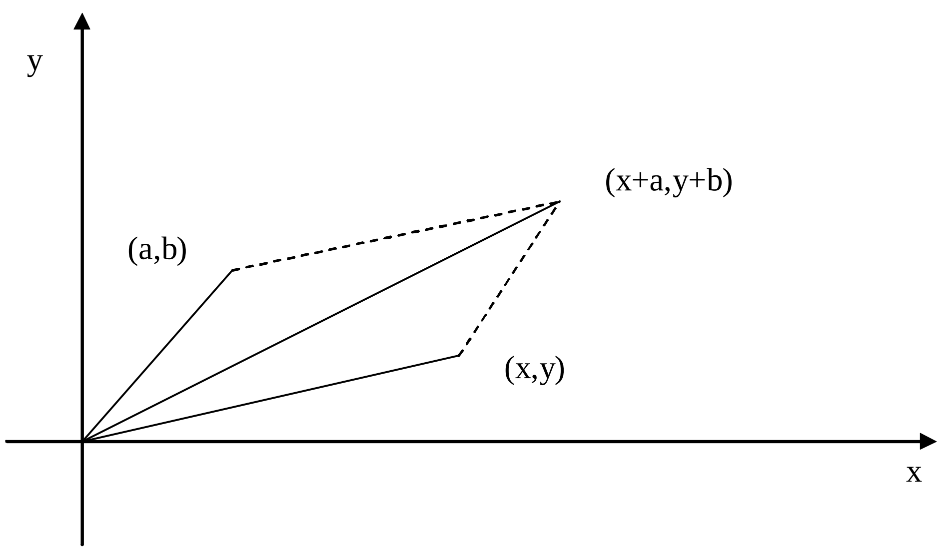
$$(x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b)$$

se identifică cu adunarea vectorilor (x, y) , (a, b) din $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

iar înmulţirea numerelor complexe corespunde înmulţirii perechilor

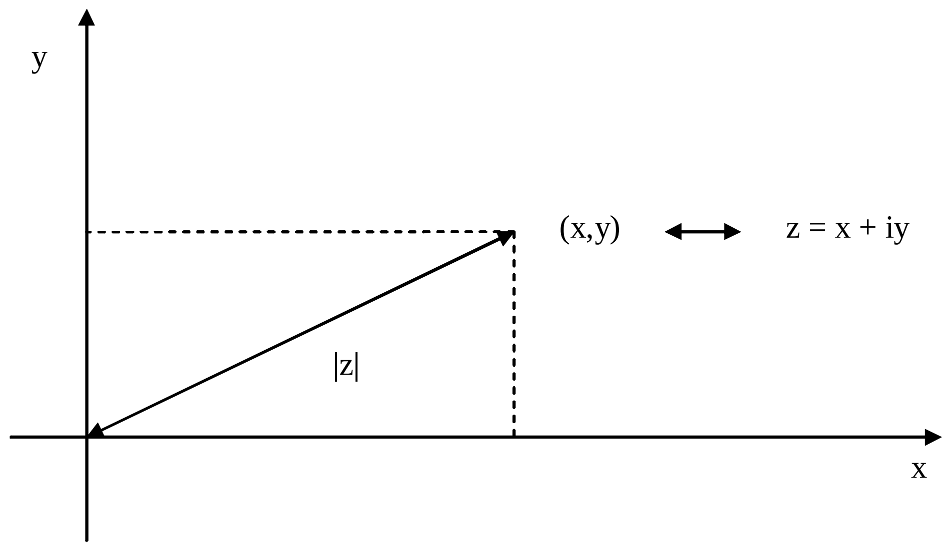
$$(x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, xb + ya)$$



Definiţie. Pentru $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, cu $x, y \in \mathbb{R}$. Notăm cu

$$|z| = |x + iy| \overset{not}{=} \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

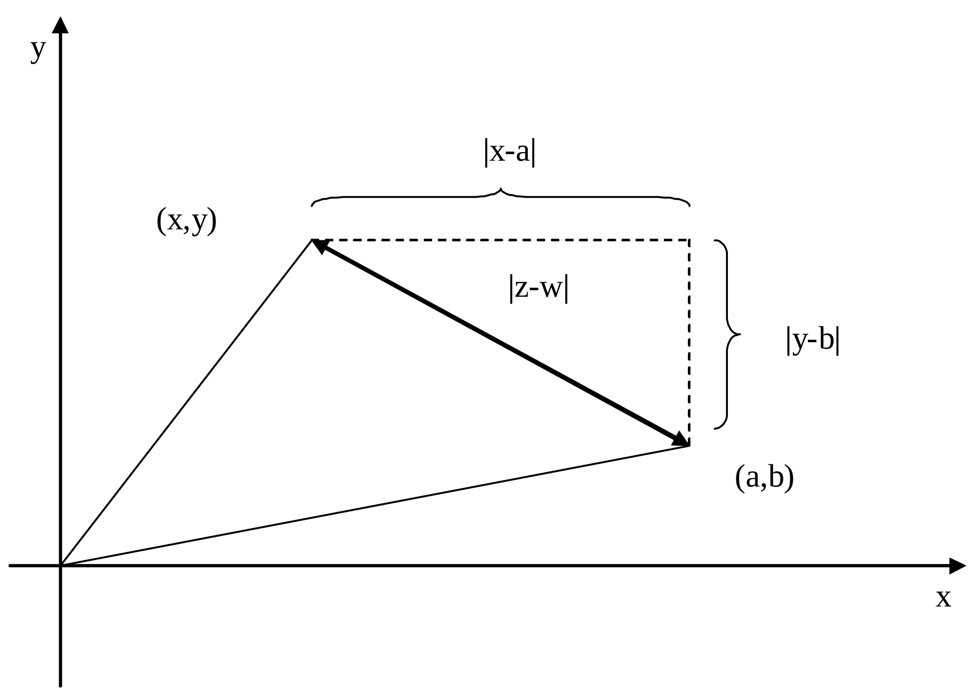
numit **modulul numărului complex** z.



Este clar că modulul reprezintă geometric distanţa dintre punctul de coordonate (x, y) şi punctul $(0, 0)$, iar dacă $z = x + iy$ şi $w = a + ib$ atunci

$$|z - w| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

reprezintă o distanţă pe mulţimea numerelor complexe.



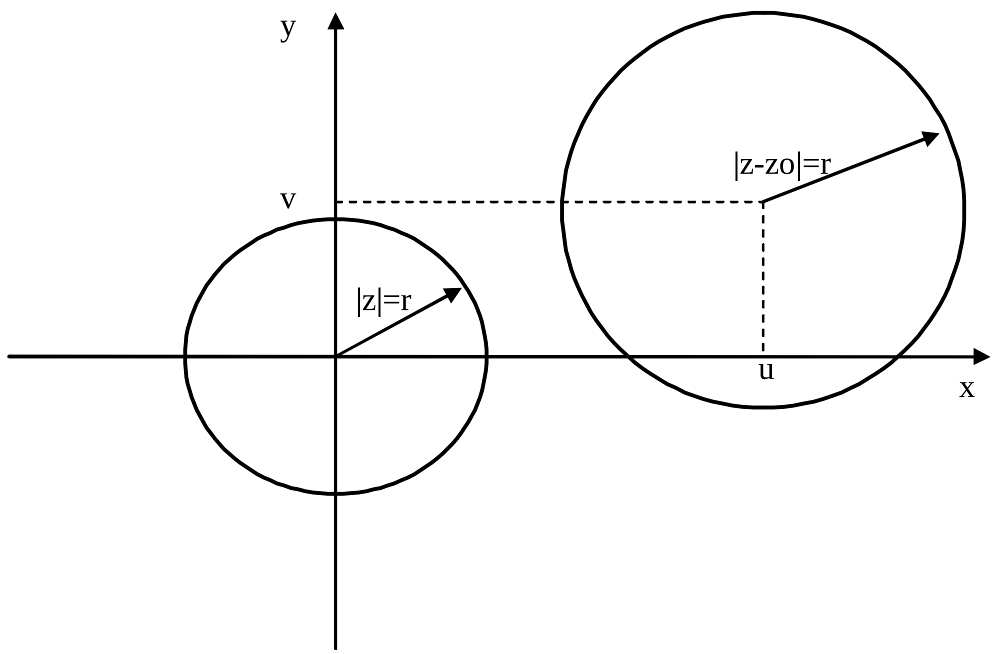
În plus avem proprietăţile

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \quad , \quad |\overline{z}| = |z|$$

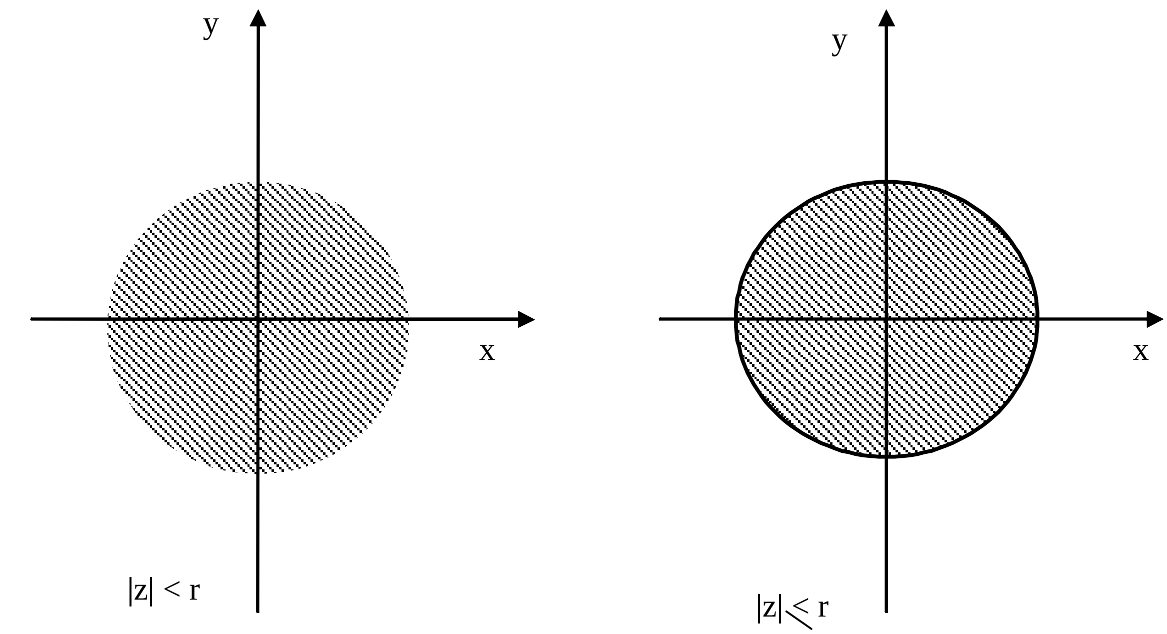
$$|zw| = |z| \cdot |w| \quad , \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

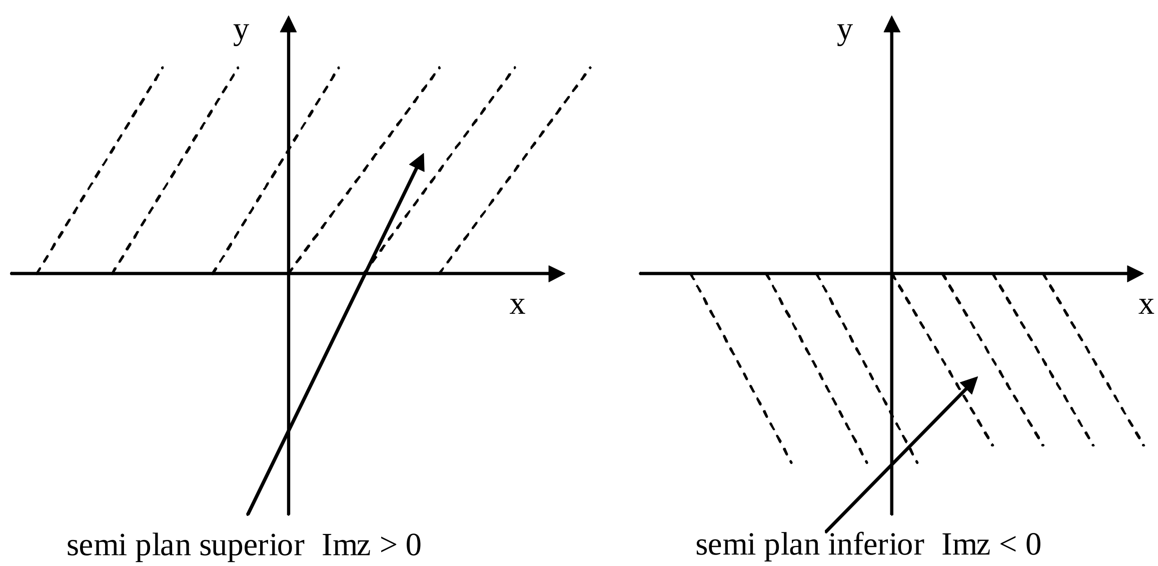
Să notăm câteva submulţimi remarcabile de numere complexe şi reprezentarea lor geometrică in plan



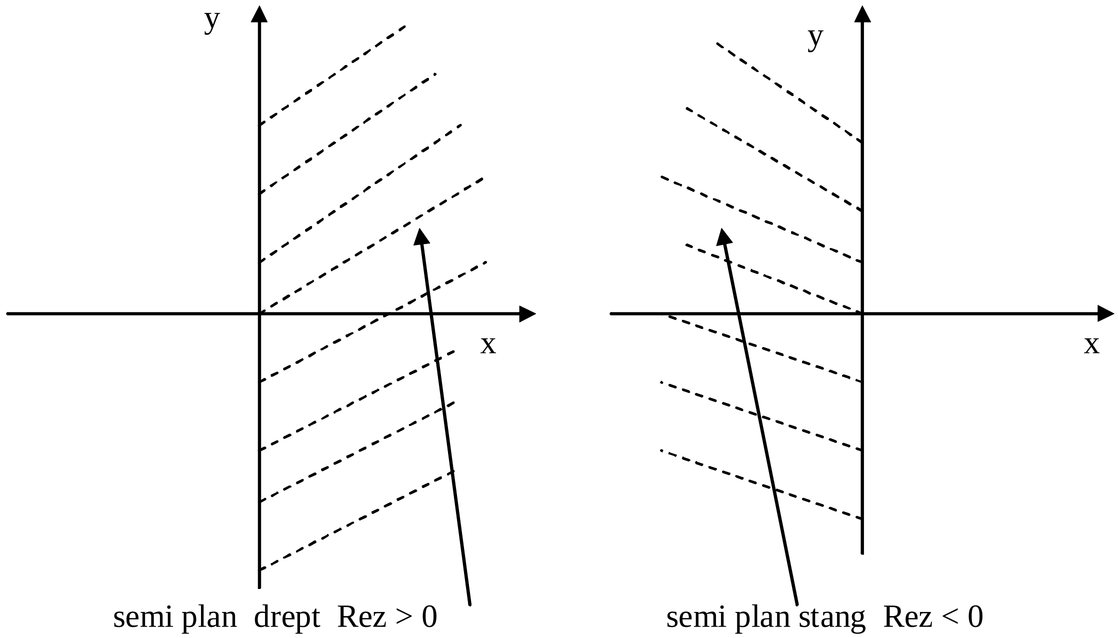
cercul de centru $z_0 = u + iv$ şi rază r $\{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z - z_0| = r\}$ pe scurt $\{\ |z - z_0| = r\}$
cercul de centru 0 şi rază r $\{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| = r\}$ pe scurt $\{\ |z| = r\}$



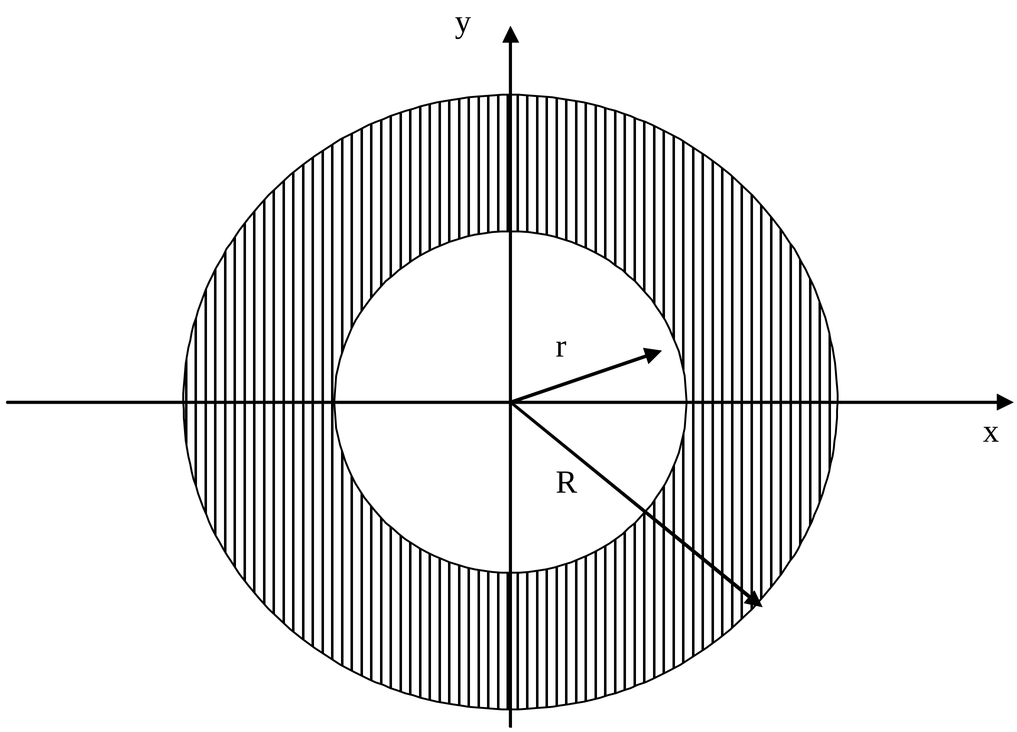
<u>discul deschis de centru 0 şi rază r</u> $\{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| < r\}$ pe scurt $\{\ |z| < r\}$
<u>discul închis de centru 0 şi rază r</u> $\{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| \leq r\}$ pe scurt $\{\ |z| \leq r\}$



<u>semiplanul superior</u> $\{z \in \mathbb{C}\ ,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$, <u>semiplanul inferior</u> $\{z \in \mathbb{C}\ ,\ \mathrm{Im}\, z < 0\}$



semiplanul drept $\{z \in \mathbb{C} \text{ , } \operatorname{Re} z > 0\}$, semiplanul stâng $\{z \in \mathbb{C} \text{ , } \operatorname{Re} z < 0\}$



coroana circulară de centru 0 şi raze $0 < r < R$ $\{z \in \mathbb{C} \text{ , } r < |z| < R\}$

Iată câteva **inegalităţi remarcabile**

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} z| &\leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \\ |\operatorname{Im} z| &\leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \end{aligned}$$

Demonstraţie. Fie $z = x + iy$ şi $w = a + ib$, cu $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Este evident că

$$|\operatorname{Re} z| = |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z| \quad , \ |\operatorname{Im} z| = |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

$$|z+w| \leq |z| + |w| \ \Leftrightarrow \ \sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{a^2+b^2} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (x+a)^2 + (y+b)^2 \leq x^2 + y^2 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 2xa + 2yb \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow xa + yb \leq \ |xa+yb| \leq \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (xa+yb)^2 \leq (x^2+y^2) \cdot (a^2+b^2) \ \Leftrightarrow \ 2xayb \leq x^2b^2 + y^2a^2 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (xb - ya)^2 \geq 0$$

ultima inegalitate este evident adevărată.■

Definiţie. *Un şir de numere complexe* $(z_n)_{n\geq 1}$, $z_n \in \mathbb{C}$, *se numeşte* ***convergent****, dacă există* $w \in \mathbb{C}$ *aşa încât*

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - w| = 0 \ , \ \textit{(ca limită de numere reale pozitive) şi notăm } z_n \longrightarrow w$$

Observaţie. $z_n \longrightarrow w \ \Leftrightarrow \ \operatorname{Re} z_n \longrightarrow \operatorname{Re} w$ şi $\operatorname{Im} z_n \longrightarrow \operatorname{Im} w$,
cu alte cuvinte, dacă $z_n = x_n + iy_n$ şi $w = a + ib$, atunci

$$z_n \longrightarrow w \quad \Leftrightarrow \quad x_n \longrightarrow a \text{ şi } y_n \longrightarrow b$$

Demonstraţie. Ţinem seama de faptul că

$$|\operatorname{Re}(z_n - w)| \ , \ |\operatorname{Im}(z_n - w)| \leq |(z_n - w)| \leq |\operatorname{Re}(z_n - w)| + |\operatorname{Im}(z_n - w)|$$

■

Exemplu

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{2}{n} - i\frac{n}{n+1}\right) = 3 - i$$

deoarece

$$3 + \frac{2}{n} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 3 \quad \text{şi} \quad \frac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 1$$

Observaţie. Dacă $z_n \longrightarrow u$ si $w_n \longrightarrow v$, atunci

$$(z_n + w_n) \longrightarrow u + v \ , \ \ (z_n \cdot w_n) \longrightarrow u \cdot v \ , \ \frac{z_n}{w_n} \longrightarrow \frac{u}{v} \ , \text{ dacă } v \neq 0$$

Demonstraţia este identică cu cea pentru şiruri de numere reale.■

Observaţie.

1. Dacă şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent, dar şirul $(w_n)_{n\geq 1}$ este divergent, atunci suma lor $(z_n + w_n)_{n\geq 1}$ este un şir divergent.

2. Dacă şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent, cu limita diferită de zero, dar şirul $(w_n)_{n\geq 1}$ este divergent, atunci produsul lor $(z_n \cdot w_n)_{n\geq 1}$ este un şir divergent.

Exemplu. Pentru $z \in \mathbb{C}$, şirul z^n este convergent dacă $|z| < 1$ şi în acest caz $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$, deoarece $|z^n| = |z|^n \to 0$ pentru $|z| < 1$
dacă $z = 1$, şirul este evident constant $z^n = 1^n = 1$, deci convergent.

Pentru orice alte valori şirul este divergent (nu demonstrăm acest fapt deocamdată).

Definiţie. *Spunem că "$z \to \infty$" dacă $|z| \to +\infty$, citim "z tinde la infinit"*
adică $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \to +\infty$, ceea ce înseamnă fie $x \to \pm\infty$ fie $y \to \pm\infty$, fie amândouă.

Exemple.
Pentru $z \in \mathbb{C}$, cu $|z| > 1$ şirul z^n tinde la ∞, $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = \infty$ deoarece

$$|z^n| = |z|^n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$$

în particular :

$$z = 2 \quad , \quad |z|^n = 2^n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$$

$$z = 1 + i \quad , \quad |z|^n = |1 + i|^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$$

Pentru $z = 1 + i$, avem $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} > 1$, deci $|(1 + i)^n| = (\sqrt{2})^n \to +\infty \Rightarrow (1 + i)^n \to \infty$

Definiţie. *Un şir de numere complexe $(z_n)_{n\geq 1}$, $z_n \in C$, este* **mărginit**, *dacă toţi termenii şirului sunt continuţi într-un disc, mai precis există $r > 0$ aşa încât $|z_n| \leq r$ pentru orice $n \geq 1$.*
În caz contrar şirul este **nemărginit**.

Observaţie. Un şir de numere complexe $(z_n)_{n\geq 1}$, $z_n \in \mathbb{C}$ este nemărginit, dacă are un subşir $(z_{n_k})_{k\geq 1}$ pentru care $|z_{n_k}| \underset{k\to\infty}{\to} +\infty$
Observaţie. Orice şir convergent de numere complexe este mărginit.
Corolar. Un şir care nu este mărginit, nu este nici convergent.

Exemplu. Pentru $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| > 1$, şirul $(z^n)_{n\geq 1}$ este divergent deoarece este nemărginit.

Definiţie. *Un şir de numere complexe $(z_n)_{n\geq 1}$, $z_n \in C$, se numeşte* ***şir Cauchy*** *sau* ***şir fundamental****,*
dacă există un şir $a_n \longrightarrow 0$ aşa încât

$$\text{pentru orice } n, p \geq 1 \quad \text{avem} \quad |z_{n+p} - z_n| \leq a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Aceasta nu este definiţia tradiţională, dar este o formulare echivalentă şi aplicabilă practic.
Observaţie. Se demonstrează uşor că în mulţimea numerelor complexe orice şir Cauchy este şir convergent.

0.2.1 Funcţii complexe (şi de variabilă complexă)

Pentru o funcţie $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, şi $z = x + iy \in D$, notăm

$$f(z) = f(x + iy) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z) \overset{not}{=} u(x, y) + iv(x, y)$$

Numim u şi v partea reală respectiv partea imaginară a funcţiei f, acestea sunt funcţii reale de două variabile reale.

$$u = \operatorname{Re} f \quad , \quad v = \operatorname{Im} f$$

În cele ce urmează, notaţia $f = u + iv$ ($f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$) înseamnă în mod implicit că u şi v reprezintă partea reală respectiv partea imaginară a funcţiei.
Este o notaţie folosită în foarte multe texte de analiză complexă.

Exemplu. Funcţiile polinomiale $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definite doar prin adunări şi înmuţiri

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...a_n z^n$$

cu $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$,
şi funcţiile raţionale

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ , unde } P, Q \text{ sunt polinoame, iar } f : \{z \in \mathbb{C} \text{ , } Q(z) \neq 0 \ \} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Exemple

$$f(z) = 2 + i \ \text{ funcţie constantă} \quad , \quad f(z) = 1 - 3z + 5iz^2 \quad , \quad f(z) = \frac{z-1}{z+3} : \{z \in \mathbb{C} \ , \ z + 3 \neq 0 \ \} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Definiţie. Spunem că $z \longrightarrow z_0$, (z tinde la z_0) dacă $|z - z_0| \to 0$
dacă notăm $z = x + iy$ şi $z_0 = x_0 + iy_0$, atunci

$$z \longrightarrow z_0 \quad \Leftrightarrow \quad x \longrightarrow x_0 \ \text{ şi } \ y \longrightarrow y_0 \quad \text{(acestea fiind limite în } \mathbb{R})$$

Exemplu. Pentru $z = x + iy$, $z \to 3 - 2i \ \Leftrightarrow \ x \to 3$ şi $y \to (-2)$

$$z \to 3 - 2i \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x \to 3 \\ y \to -2 \end{cases}$$

Definiţie. Pentru o funcţie $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, şi $z_0 \in \{|z - z_0| < r\} \subset D$ spunem că

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = L \ \text{ dacă } \lim_{|z - z_0| \longrightarrow 0} |f(z) - L| = 0 \ , \ \text{ unde } L \in \mathbb{C}$$

Observaţie.

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = L \ \text{ dacă şi numai dacă } \underbrace{\lim_{z \longrightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z)}_{u} = \operatorname{Re} L \ \text{ şi } \ \underbrace{\lim_{z \longrightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z)}_{v} = \operatorname{Im} L$$

Definiţie. Pentru o funcţie $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, şi $z_0 \in \{|z - z_0| < r\} \subset D$ spunem că funcţia f este **continuă în** punctul z_0 dacă $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

O mulţime $D \subset \mathbb{C}$ se numeşte **deschisă** dacă pentru orice punct $z_0 \in D$ există un disc deschis aşa încât $z_0 \in \{|z - z_0| < r\} \subset D$.

Vom identifica o mulţime de numere complexe cu mulţimea corespunzătoare de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.

O funcţie $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definită pe o mulţime deschisă, se numeşte **continuă pe** D, dacă f este continuă în fiecare punct din D.

Conform observaţiei de mai înainte, o funcţie complexă $f = u + iv$ este continuă dacă şi numai dacă funcţiile reale u, v (partea reală şi imaginară) sunt continue (ca funcţii de două variabile).

Proprietăţi. Operaţiile naturale cu funcţii continue produc tot funcţii continue.

1. Dacă $f, g : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sunt continue în $z_0 \in D$ atunci $f + g$, $f \cdot g$ sunt continue în z_0 , la fel şi $\frac{f}{g}$ dacă $g(z_0) \neq 0$

2. Dacă $D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathbb{C}$, f este continuă în $z_0 \in D$ iar g este continuă în $f(z_0)$ atunci $g \circ f$ este continuă în z_0.

3. Dacă $f, g : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, iar f este continuă în $z_0 \in D$ dar g nu este continuă în z_0, atunci suma lor $f + g$, nu este continuă în z_0 .

4. Dacă $f, g : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, iar f este continuă în $z_0 \in D$, cu $f(z_0) \neq 0$, dar g nu este continuă în z_0, atunci produsul lor $f \cdot g$, nu este continuu în z_0 .

<u>Demonstraţia</u>. este identică cu cea pentru funcţii reale.■

Exemple. Orice funcţie polinomială sau raţională este continuă pe întreg domeniul de definiţie.

Derivabilitate **Definiţie**. Fie $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, şi $z_0 \in \{|z - z_0| < r\} \subset D$ spunem că f este **derivabilă în** z_0 , dacă

$$\text{există } \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \overset{not}{=} f'(z_0) \overset{not}{=} \frac{df}{dz}(z_0)$$

$f'(z_0)$ se numeşte **derivata** lui f în punctul z_0

O funcţie $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definită pe o mulţime deschisă, se numeşte **derivabilă pe** D, dacă f este derivabilă în fiecare punct din D.

Comentariu. Definiţia este identică cu cea pentru funcţii reale de o variabila reală, deci este normal să aibe aceleaşi proprietăţi.

Unele texte folosesc denumirea de "funcţie $\mathbb{C}$-diferenţiabilă". Am preferat o denumire mai simplă şi mai familiară.

Proprietăţi. Operaţiile naturale cu funcţii derivabile produc tot funcţii derivabile.

1. Dacă $f, g : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sunt derivabile în $z_0 \in D$ atunci $f + g$, $f \cdot g$ sunt derivabile în z_0 , la fel şi $\frac{f}{g}$ dacă $g(z_0) \neq 0$ şi în plus

$$(f + g)' = f' + g' \ , \ (fg)' = f'g + fg' \ , \ (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

2. Dacă $D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathbb{C}$, f este derivabilă în $z_0 \in D$ iar g este derivabilă în $f(z_0)$ atunci $g \circ f$ este derivabilă în z_0 şi în plus

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$$

3. Dacă $f, g : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, iar f este derivabilă în $z_0 \in D$ dar g nu este derivabilă în z_0, atunci suma lor $f + g$, nu este derivabilă în z_0 .

Demonstraţia. este identică cu cea pentru funcţii reale.■

Corolarii.

1. O funcţie constantă este derivabilă şi are derivata funcţia constantă zero.
2. Funcţia "putere" $f(z) = z^n$ este derivabilă pe $\mathbb{C}$ şi

$$(z^n)' = nz^{n-1} \quad , \ \text{pentru orice} \quad n \geq 1$$

3.Funcţia $f(z) = \frac{1}{z^n}$ este derivabilă pe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ şi

$$\left(\frac{1}{z^n}\right)' = \frac{-n}{z^{n+1}} \quad , \ \text{pentru orice} \quad n \geq 1$$

4. Orice funcţie polinomială sau raţională este derivabilă pe întreg domeniul de definiţie

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n)' = a_1 + a_2 2z + ... + a_n n z^{n-1}$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$

$$\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)' = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{[Q(z)]^2}$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$ pentru care $Q(z) \neq 0$

Demonstraţia. este identică cu cea pentru funcţii reale.■

Observatie. O funcţie derivabilă este neapărat continuă.

Teorema 1. *Dacă funcţia* $f = u + iv$, ($u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$) *este derivabilă în punctul* $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$,

atunci funcţiile $u = u(x, y), v = v(x, y)$ *au derivate parţiale în punctul* (x_0, y_0) *şi în plus acestea verifică*

$$\textbf{Relaţiile Cauchy-Riemann} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} \\ \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} \end{array} \right.$$

iar derivata se poate calcula astfel

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

toate derivatele parţiale fiind calculate în punctul (x_0, y_0).

Demonstraţie. Conform ipotezei există limita

$$\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$$

notăm $z=x+iy$ şi considerăm limita în cazul particular $z=x+iy_0\to x_0+iy_0$, ceea ce revine la $x\to x_0$ şi deci

$$f'(z_0)=\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x+iy_0)-f(x_0+iy_0)}{(x+iy_0)-(x_0+iy_0)}=\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{u(x,y_0)+iv(x,y_0)-[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)]}{x-x_0}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0}}_{\frac{\partial u}{\partial x}}+i\underbrace{\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}}_{\frac{\partial v}{\partial x}}=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

În mod analog considerăm limita în cazul particular $z=x_0+iy\to x_0+iy_0$, ceea ce revine la $y\to y_0$ şi deci

$$f'(z_0)=\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x_0+iy)-f(x_0+iy_0)}{(x_0+iy)-(x_0+iy_0)}=\lim_{y\longrightarrow y_0}\frac{u(x_0,y)+iv(x_0,y)-[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)]}{i(y-y_0)}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow x_0}\underbrace{\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{i(y-y_0)}}_{\frac{\partial u}{\partial y}}+i\lim_{x\longrightarrow x_0}\underbrace{\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{i(y-y_0)}}_{\frac{\partial y}{\partial y}}=-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

deci

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)}_{\text{Re}}+i\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)}_{\text{Im}}=f'(z_0)=i\left(\underbrace{-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\text{Im}}\right)+\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\text{Re}}$$

Rezultă deci că funcţiile u,v au derivate parţiale în punctul (x_0,y_0)
şi că acestea verifică relaţiile Cauchy-Riemann, deoarece în relaţia anterioară părţile reale sunt egale, la fel şi cele imaginare.

Baron, Augustin-Louis Cauchy (21 Aug 1789 – 23 Mai 1857) matematician francez, un pionier în domeniul analizei. Matematician profund, a exercitat o influenţă majoră asupra contemporanilor săi. Mai multe concepte şi teoreme îi poartă numele, doar în domeniul elasticităţii există 16 concepte care poartă numele lui Cauchy. În analiza complexă - şir Cauchy, relaţii Cauchy-Riemann, Teorema lui Cauchy, Formula lui Cauchy, Inegalitătile Cauchy.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (17 Sept, 1826 – 20 iul, 1866) matematician german, are contribuţii în analiză, teoria numerelor şi geometrie diferenţială, a căror influenţă durează până în prezent.

■

Teorema 2. *Dacă funcţia $f=u+iv$, ($u=\operatorname{Re}f$, $v=\operatorname{Im}f$) şi*
- funcţiile u,v sunt diferenţiabile în punctul (x_0,y_0) şi în plus
- funcţiile u,v verifică relaţiile Cauchy-Riemann,
atunci funcţia f este derivabilă în punctul $z_0=x_0+iy_0$.

Nu prezentăm demonstraţia în expunerea de faţă.

Corolar. *Dacă pentru funcţia $f:D\subset\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, D mulţime deschisă, $f=u+iv$, ($u=\operatorname{Re}f$, $v=\operatorname{Im}f$) u,v sunt funcţii de clasă C^1 pe D şi verifică relaţiile Cauchy-Riemann, atunci f este derivabilă pe D.*

Exemplu. Să determinăm punctele în care funcţia $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, $f(z)=|z|$, este derivabilă.

În acest caz $u(x,y)=\operatorname{Re}f=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y)=\operatorname{Im}f=0$, deci pentru $(x,y)\neq(0,0)$ obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad,\quad\frac{\partial v}{\partial y}=0\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad,\quad\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

deci funcţia nu verifică relaţiile Cauchy-Riemann.

În punctul $(0,0)$ funcţia $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ nu are derivate partiale, deoarece nu exista limita:

$$\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases} 1 \ , \ x>0 \\ -1 \ , \ x<0 \end{cases}$$

Constatăm că relaţiile Cauchy-Riemann nu sunt verificate în nici un punct, deci funcţia modul nu este derivabilă nicăieri. ■

Exemplu. Să determinăm punctele în care funcţia $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, $f(z)=|z|^2$, este derivabilă.

În acest caz $u(x,y)=\operatorname{Re} f=|z|^2=x^2+y^2$, $v(x,y)=\operatorname{Im} f=0$, deci

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

Constatăm că relaţiile Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=-0 \end{cases}$$

sunt verificate doar pentru $x=0$ şi $y=0$.
Deci funcţia $|z|^2$ este derivabilă doar în punctul $z=0=0+i\cdot 0$
■

Comparaţi aceste exemple cu funcţiile $|x|$ şi $|x|^2=x^2$ definite pentru numere reale, care sunt derivabile pe $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ respectiv pe $\mathbb{R}$.

Definiţie. *Dacă funcţia $f:D\subset\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, D mulţime deschisă, este derivabilă pe D, (în fiecare punct din D), atunci funcţia se numeşte* **olomorfă pe** *D. În loc de* mulţime deschisă *vom folosi denumirea de* ***domeniu***.

Motivul acestei denumiri este faptul că o funcţie olomorfă (derivabilă pe o mulţime deschisă) are foarte multe alte proprietăţi (este indefinit derivabilă, dezvoltabilă în serie Taylor, partea reală şi partea imaginară sunt indefinit derivabile şi armonice).
Unele texte folosesc denumirea de funcţie "analitică" în loc de "olomorfă".
Pe de altă parte este adevărat că noţiunile de funcţie "olomorfă" şi funcţie "analitică" coincid, vom demonstra acest fapt ulterior.

Observaţie. Dacă funcţia $f:D\subset\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, este olomorfă pe domeniul D, $f=u+iv$, $(u=\operatorname{Re} f$, $v=\operatorname{Im} f)$ iar u,v sunt funcţii de clasă C^2 pe D , atunci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad , \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

Demonstraţie. Folosim relaţiile Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

Funcţia v este de clasă C^2, deci conform teoremei lui Schwarz derivatele parţiale de ordin 2 obţinute sunt egale

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

(nu contează ordinea de derivare) şi rezultă

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0$$

În mod absolut analog se procedează pentru pentru funcţia v.■

Comentariu. Condiţia ca funcţiile să fie de clasă C^2 nu este de fapt necesară, deoarece se demonstrează că pentru funcţii olomorfe, partea reală şi partea imaginară sunt funcţii de clasă C^∞ (indefinit derivabile).

Definiţie. Operatorul diferenţial

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

se numeşte **laplacian**. Funcţiile cu laplacianul nul ($\Delta u = 0$) pe o mulţime deschisă, se numesc **funcţii armonice**.

Pierre-Simon, marquis de Laplace (/23 Mar 1749 – 5 Mar 1827) matematician şi astronom francez, ale cărui lucrări au fost cruciale pentru dezvoltarea astronomiei matematice şi statisticii.

Corolar. Partea reală şi partea imaginară ale unei funcţii olomorfe sunt funcţii armonice.

Definiţie. Dacă funcţia $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, este olomorfă pe domeniul D , $f = u + iv$, $(u = \operatorname{Re} f \ , \ v = \operatorname{Im} f)$ funcţiile u şi v se numesc **armonic conjugate**, v este **conjugatul armonic** al lui u şi reciproc u este **conjugatul armonic** al lui v.

Denumirea este justificată de faptul că acest "conjugat armonic" este unic pană la o constantă, dacă domeniul D are anumite proprietăţi.

Definiţie. O mulţime $D \subset \mathbb{C}$ se numeşte **conexă**, dacă pentru orice două puncte din mulţime $z_1, z_2 \in D$ există un drum care uneşte z_1 cu z_2 şi este conţinut în D. Mai precis există o funcţie continuă $\gamma : [a, b] \to D$, aşa încât $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$.

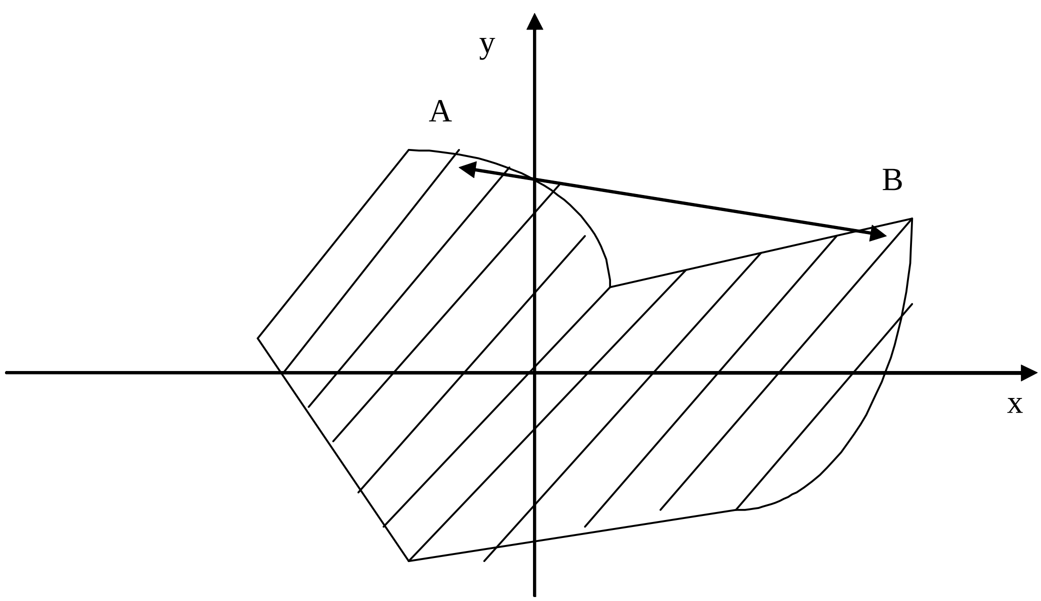
Acest tip de "conexiune" se mai numeşte şi "conex prin arce". Drumul y este privit ca un arc de curbă ce uneşte cele două puncte.

Definiţie. O mulţime $D \subset \mathbb{C}$ se numeşte **convexă**, dacă pentru orice două puncte din mulţime $z_1, z_2 \in D$ segmentul care le uneşte este inclus în D.

Cu alte cuvinte $\{z \in \mathbb{C} \ , \ z = (1-t)z_1 + tz_2 \in D \ , \ t \in [0, 1] \ \} \subset D$.

Observaţie. Orice mulţime convexă este conexă. Nu şi reciproc.

Exemplu.

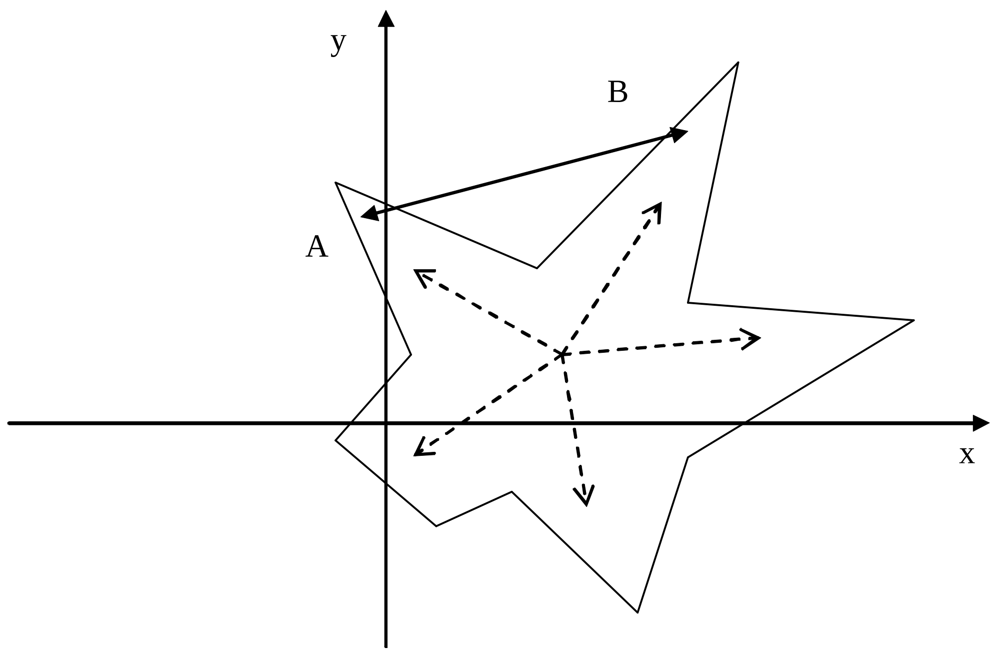


multime conexa dar NU convexa

Segmentul ce uneşte punctele A şi B nu este inclus in mulţimea din interiorul conturului. Deci mulţimea nu este convexă, dar este conexă.

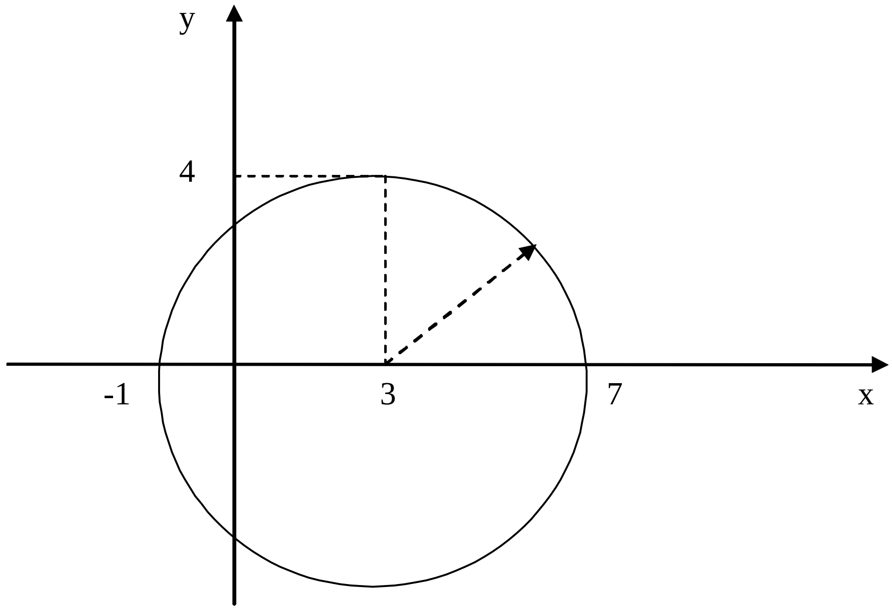
Definiţie. O mulţime $D \subset \mathbb{C}$ se numeşte **stelată**, dacă există un punct $z_0 \in D$ aşa încât pentru orice alt punct $z \in D$ segmentul ce uneşte z_0 cu z este inclus în D.

Observaţie. Orice mulţime stelată este conexă. dar nu neapărat convexă.
Exemplu.



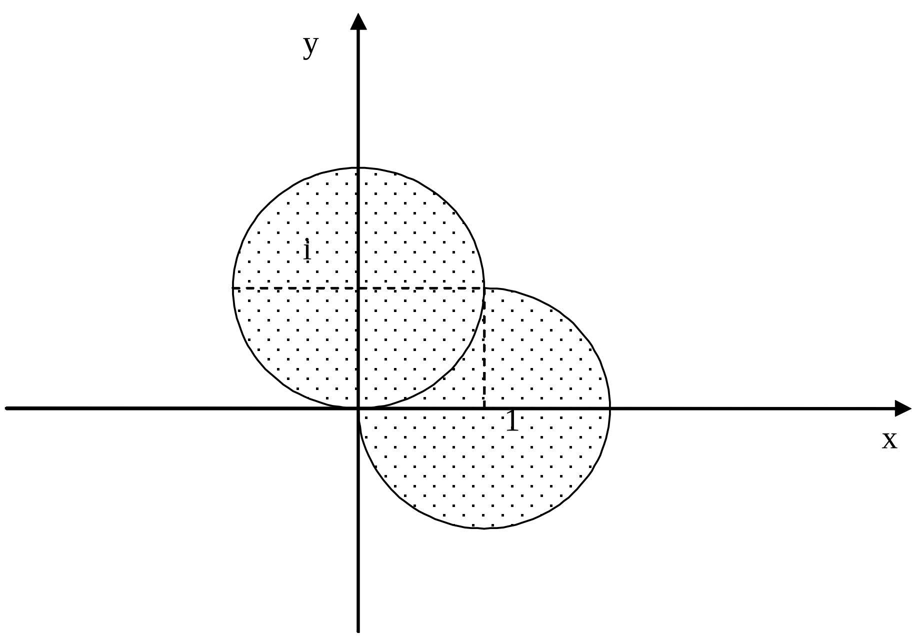
Mulţimea este stelată. Segmentul ce uneşte punctele A şi B nu este inclus în mulţime, deci mulţimea nu este convexă.

Exemple.
a) un disc deschis este mulţime convexă, deci domeniu conex
$D = \{|z-3| < 4\}$



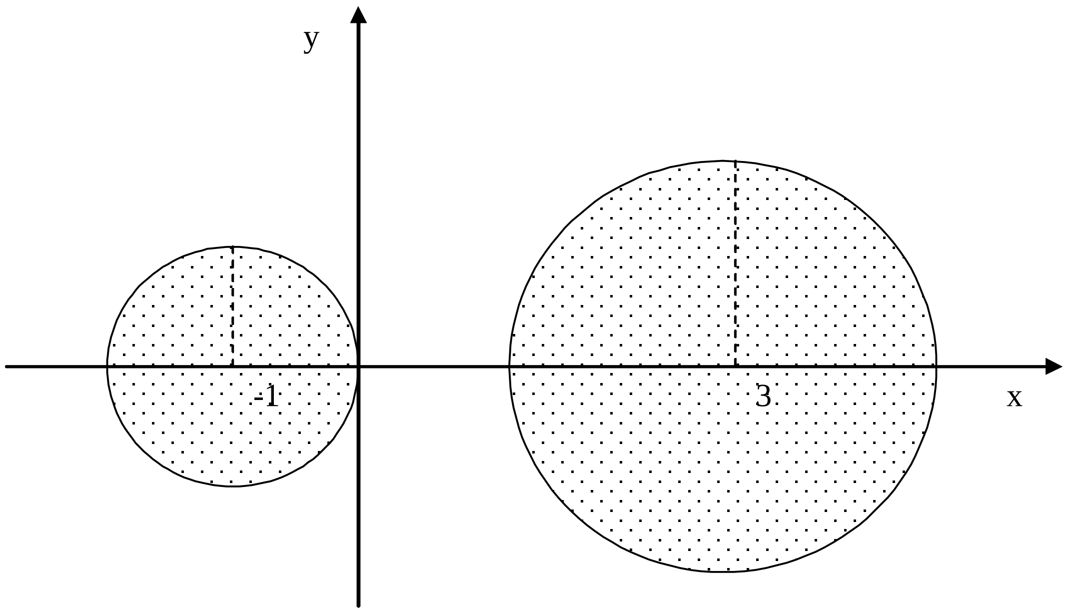
b) reuniunea unor discuri deschise cu intersecţie nevidă este mulţime stelată, deci domeniu conex (dar nu convex)

$D = \{|z-1| < 1\} \cup \{|z-i| < 1\}$



c) reuniunea unor mulţimi deschise disjuncte nu este un domeniu conex

$D = \{|z+1| < 1\} \cup \{|z-3| < 2\}$



Definiţie. Un domeniu $D \subset \mathbb{C}$ mărginit, se numeşte **simplu conex**, dacă atât D cât şi complementara sa $\mathbb{C}\backslash D$ sunt amândouă mulţimi conexe.

Nu aceasta este definiţia "standard", dar este o descriere echivalentă pentru mulţimi mărginite din planul complex (planul $\mathbb{R}^2$)

Exemple. Întreg planul complex, adică mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ este simplu conexă, orice semiplan, orice disc inchis sau deschis, toate acestea sunt mulţimi simplu conexe.

O coroană $\{r < |z| < R\}$, $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\{|z| < r\}\backslash\{0\}$, toate acestea nu sutn simplu conexe, în general dacă se "scoate" un punct dintr-o multime conexă, se obţinem o mulţime care nu este simplu conxă.

Teoremă. Dacă $D \subset \mathbb{C}$ este domeniu simplu conex şi $u : D \to \mathbb{R}$ este funcţie armonică pe D, ($\Delta u = 0$) atunci există o unică (până la o constantă) funcţie armonică $v : D \to \mathbb{R}$ aşa încât funcţia $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ să fie olomorfă pe D.

Nu prezentăm demonstraţia.

Observaţie. Acelaşi rezultat are loc şi pentru partea imaginară. Este suficient să considerăm funcţia $g = -if = -iu + v$, pentru care v este partea reală şi se aplică teorema de mai înainte.

Teoremă. Dacă $D \subset \mathbb{C}$ este domeniu simplu conex şi $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, este funcţie olomorfă pe D, atunci

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x + iy) = u(z, 0) + iv(z, 0)$$

Problemă. Cunoscând fie partea reală, fie partea imaginară a unei funcţii olomorfe pe un domeniu simplu conex, se poate determina funcţia olomorfă (până la o constantă).

Soluţie. De exemplu se cunoaşte $u : D \to \mathbb{R}$, $u = u(x, y)$. Se verifică faptul că u este funcţie armonică pe D, ($\Delta u = 0$).

Apoi din faptul că f este olomorfă şi din relaţiile Cauchy - Riemann rezultă că

$$f'(z) = f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

Folosind teorema menţionată mai înainte, rezultă că

$$f'(z) = f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(z, 0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z, 0)$$

Apoi ştiind derivata funcţiei încercăm să determinăm funcţia. "Integrăm" (calculăm "antiderivata"), folosind metodele elementare:

tabelul cu derivatele funcţiilor elementare, derivarea funcţiilor compuse şi integrarea prin părţi.

O altă metodă constă în determinarea părţii imaginare, adică funcţia $v(x,y)$, căreia i se cunisc cele două derivate parţiale, din relaţile Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

cu alte cuvinte, se pune problema de a determina un potenţial scalar pentru câmpul de gradienţi $\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$

folosind unul din modurile de "integrare" (A) sau (B)

$$\text{(A)} \quad v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt$$

$$\text{(B)} \quad v(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t)dt - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial y}(t,y)dt$$

acestea depind de alegerea punctului (x_0, y_0) , iar alegerea acestui punct depinde de "forma" domeniului simplu conex D , motiv pentru care este totuşi o metodă mai dificil de folosit practic.

În plus, determinarea părţii imaginare $v(x,y)$ nu rezolvă decât parţial problema iniţială, deoarece în acest mod obţinem doar f în funcţie x, y parametrii reali

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

dar nu obţinem funcţia complexă olomorfă f în functie de parametrul complex z , fiind nevoiţi să folosim tot teorema anterioară

$$f(z) = f(z+i0) = u(z,0) + iv(z,0)$$

Exemple. 1. Considerăm $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, deci pentru $(x,y) \neq (0,0)$ obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Funcţia $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ nu este armonică, deoarece derivând obţinem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} + \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$$

şi deci $\Delta u \neq 0$. Ceea ce explică faptul că funcţia modul nu este derivabilă (fapt studiat mai înainte).

2. Considerăm $u(x,y) = x^2 + y^2$, deci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \quad , \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \ , \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \ , \ \text{deci} \quad \Delta u = 4$$

Deci funcţia $u(x,y) = x^2 + y^2$ nu este armonică.

3. Considerăm funcţia $u(x,y) = x^2 - y^2$, $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. În acest caz avem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad , \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \ , \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \ , \ \text{deci} \quad \Delta u = 0$$

Prin urmare funcţia este armonică pe $\mathbb{R}^2$, iar derivata funcţiei olomorfe $f = u + iv$ este

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2x - i(-2y) = 2(x+iy) = 2z$$

şi este uşor de observat că

$$f(z) = z^2 + ct = z^2 + a + ib$$

Deci $f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2 + a + ib = x^2 - y^2 + a + i(2xy + b)$, de unde rezultă că

$$\operatorname{Re} f = x^2 - y^2 = u(x,y) = x^2 - y^2 + a \quad \Rightarrow \quad a = 0 \ \text{ şi } \ v(x,y) = 2xy + b \ \ , \ \ b \in \mathbb{R}$$

4. Considerăm funcţia $v(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi determinăm funcţia olomorfă $f = u + iv$.
Calculăm laplacianul Δv

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x(x\cos y - y\sin y)\right) = e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x(\cos y) = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y)\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x(x\cos y - y\sin y)\right) = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y)\right) =\\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y)\right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y) + e^x(\cos y) = e^x(x\cos y - y\sin y + 2\cos y)\\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= e^x(-x\cos y - \cos y - \cos y + y\sin y) = e^x(-x\cos y - 2\cos y + y\sin y)\end{aligned}$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Deci funcţia $v(x,y)$ este armonică.
Ca şi în cazurile precedente folosim relaţiile Cauchy - Riemann

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) =$$
$$= e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) + ie^x(x\cos y - y\sin y + \cos y)$$

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(z,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z,0) =$$
$$= e^z(-z\sin 0 - \sin 0 - 0\cos 0) + ie^z(z\cos 0 - 0\sin 0 + \cos 0) = ie^z(z+1)$$

Deci $f'(z) = ie^z(z+1)$ şi folosim integrarea prin părţi
(vom defini ulterior funcţia exponenţială, este suficient să ştim că $(e^z)' = e^z$)
(în mod deliberat am renunţat la "tradiţionalul" dz care nu are sens în cazul calculului de antiderivată, în care apare în mod evident un singur parametru.

$$\int ie^z(z+1) = ie^z(z+1) - i\int e^z \cdot 1 = ie^z(z+1) - ie^z = ie^z z + ct$$

şi obţinem

$$f(z) = ie^z z + ct = ie^z z + a + ib$$

$$u(x,y) + iv(x,y) = f(z) = \operatorname{Re}(ie^z z + a + ib) + i\operatorname{Im}(ie^z z + a + ib)$$

Aici este nevoie de relaţia

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos x + ie^x\sin y$$

Apoi calculăm partea reală şi partea imaginară

$$ie^z z + a + ib = i(e^x \cos x + ie^x \sin y)(x + iy) + a + ib =$$

$$= i[e^x \cos x \cdot x + e^x \cos x \cdot iy + ie^x \sin y \cdot x + ie^x \sin y \cdot iy] + a + ib =$$

$$= \underbrace{-e^x(y\cos x + x\sin y) + a}_{u} + i\underbrace{e^x(x\cos x - y\sin y) + b}_{v}$$

Deci

$$\begin{aligned} u(x,y) &= -e^x(y\cos x + x\sin y) + a \\ v(x,y) &= e^x(x\cos x - y\sin y) + b \end{aligned}$$

Dar $v(x,y) = e^x(x\cos x - y\sin y)$, din ipoteză,
Prin urmare $b = 0$ şi

$$u(x,y) = -x\sin y - y\cos y + a \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

■

0.2.2 Serii de puteri

Considerând serii de numere complexe $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ obţinem aceleaşi rezultate ca şi pentru serii de numere reale.

Definiţie. O serie de numere complexe $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$, $(a_n \in \mathbb{C})$ este **convergentă** în $\mathbb{C}$, dacă şirul sumelor parţiale $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ este convergent în $\mathbb{C}$.

În caz contrar seria este **divergentă**. În caz de convergenţă, limita sirului sumelor parţiale se notează

$$s \overset{not}{=} \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + ... + a_n) \overset{not}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

şi se numeşte **suma seriei**.

Este evident că termenii seriei a_n sunt toţi nenuli, altfel e uşor de arătat că renunţând la termenii nuli, nu se modifică nici natura seriei (convergenţa sau divergenţa) şi nici suma ei dacă e convergentă.

Teoremă. Dacă seria $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|$ este convergentă, atunci şi seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ este convergentă.
Demonstraţia este identică cu cea pentru serii de numere reale.
Definiţie. O serie de numere complexe $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$, $(a_n \in \mathbb{C})$ se numeşte **absolut convergentă**, dacă seria $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|$ este convergentă.

Criteriul raportului. Fie seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$. Dacă există

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

atunci pentru
i) $L < 1 \Rightarrow$ seriile $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|$, $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sunt convergente
ii) $L > 1 \Rightarrow$ seriile $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|$, $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sunt divergente.

Exemple.
1) Seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă şi limita raportului este 1 , deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = ... = 1$$

2) Seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă şi limita raportului este 1 , deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \lim \frac{n}{n+1} = ... = 1$$

În concluzie:
dacă limita raportului $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, acest fapt este nerelevant pentru natura seriei.

Considerăm seriile de forma $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. Motivul este simplu. Sumele parţiale sunt polinoame

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$$

Dacă aceste şiruri sunt convergente putem aproxima cu polinoame alte funcţii complexe.

Pentru a calcula valoarea unui polinom se efectuează doar adunări şi înmulţiri. Operaţii ce pot efectuate de un calculator.

Se pune deci problema pentru ce valori ale parametrului $z \in \mathbb{C}$ seria corespunzătoare este convergentă.

De exemplu pentru $z = 0$ şirul sumelor parţiale este constant $s_n(0) = a_0$, deci convergent, prin urmare şi seria de puteri este convergentă. Evident nu acest caz este interesant.

Exemplu.
Pentru seria **geometrică** $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$, şirul sumelor parţiale este (pentru $z \neq 1$)

$$s_n = 1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

şir care este convergent pentru $|z| < 1$ şi divergent în rest. Pentru $|z| < 1$ obţinem suma seriei geometrice

$$s_n = 1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1 - z} \overset{not}{=} \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

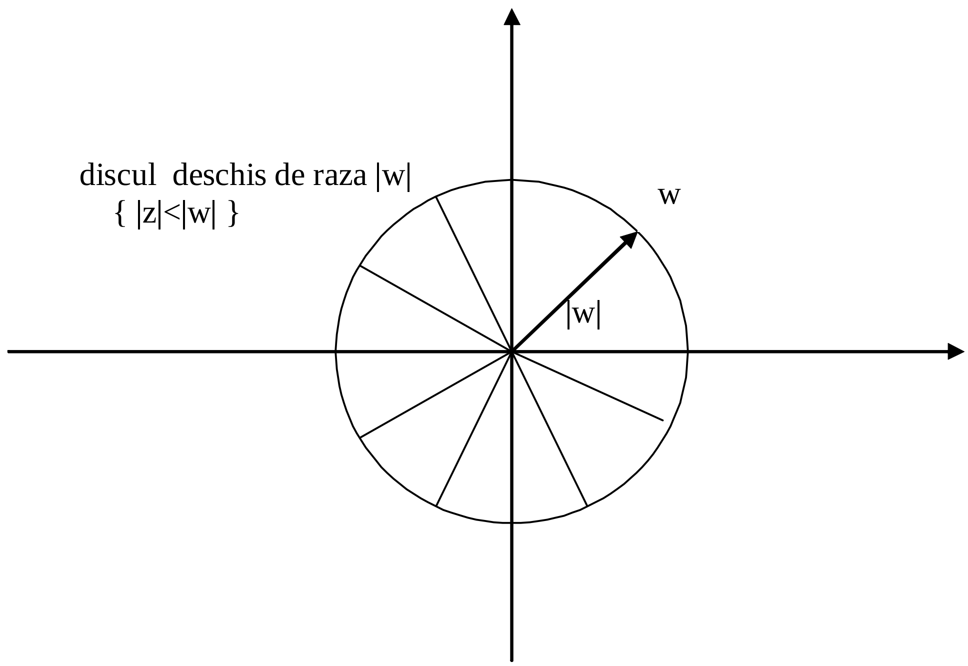
Exemplu. Seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} n^n z^n$ este divergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ deoarece conform criteriului raportului avem

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1} z^{n+1}}{n^n z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|z(1 + \frac{1}{n})^n (n+1)\right| = +\infty$$

<u>Niels Henrik Abel</u> (5 Aug 1802 – 6 April 1829) matematician norvegian.

Teorema (Abel). Dacă seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ este convergentă pentru un număr complex $w \neq 0$, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n z^n|$ este convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < |w|$, deci la fel este şi seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.

Comentariu. Cu alte cuvinte, teorema arată că dacă o serie de puteri este convergentă pentru un număr complex $w \neq 0$, atunci seria este absolut convergentă pe întregul disc deschis



Definiţie. Notăm cu $R = \sup\{r \geq 0$, pentru care seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n r^n$ este convergentă$\}$ şi numim **raza de convergenţă** a seriei de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.

Observaţie. Dacă $R = 0$, atunci seria de puteri este convergentă numai pentru $z = 0$ şi evident nu aproximează nici o funcţie complexă, deci cazul nu este interesant.

Toate seriile de puteri pe care le considerăm în continuare au raza de convergenţă $R > 0$, fapt ce nu va mai fi specificat în mod explicit.

Teorema razei de convergenţă. Fie o serie de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ cu raza de convergenţă $R > 0$.

i) dacă $R = +\infty$ atunci seria de puteri este convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$, la fel este şi seria $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n| z^n$.

ii) dacă $R \in (0, +\infty)$ atunci seria de puteri este convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < R$ şi divergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| > R$
la fel este şi seria $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n| z^n$.

Se pune evident problema unui mod de a calcula raza de convergenţă.

Jacques Salomon Hadamard (8 Dec.1865 – 17 Oct.1963) matematician francez, contribuţii majore în teoria numerelor, funcţii complexe, geometrie diferenţială şi ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale.

Teorema (Cauchy-Hadamard). Fie seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, cu raza de convergenţă R, atunci

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

unde $\limsup$ "limita superioară" a unui şir, se calculează astfel:
se considera toate subşirurile convergente cu limitele corespunzatoare şi se alege cea mai mare limită.
Evident că această formulă deşi cât se poate de precisă, nu este şi practic utilă, calculul "$\limsup$" nefiind simplu.
Un mod mult mai simplu de a aborda problema este aplicarea directă a criteriului raportului,
evident numai atunci cand limita raportului există.

Observaţie. Fie seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, cu raza de convergenţă R . Dacă există limita

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+k}z^{n+k}}{a_n z^n}\right| = \left|z^k\right| \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+k}}{a_n}\right|}_{L} = |z|^k L$$

(aici "a_{n+k}" este următorul coeficient nenul după "a_n") atunci conform criteriului raportului seria de puteri este

i) convergentă pentru $|z|^k L < 1$ sau echivalent $|z| < \left(\frac{1}{L}\right)^{1/k}$

ii) divergentă pentru $|z|^k L > 1$ sau echivalent $|z| > \left(\frac{1}{L}\right)^{1/k}$

Comparând cu teorema razei de convergenţă este clar că $R = \left(\frac{1}{L}\right)^{1/k}$, unde $\frac{1}{+0} = +\infty$, iar $\frac{1}{+\infty} = 0$

Dacă toţi ceoficienţii "a_n" sunt nenuli, atunci obţinem o versiune "standard" a criteriului raportului

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad , \quad R = \frac{1}{L}$$

seria de puteri este

i) convergentă pentru $|z|\, L < 1$ sau echivalent $|z| < \frac{1}{L} = R$

ii) divergentă pentru $|z|\, L > 1$ sau echivalent $|z| > \frac{1}{L} = R$

Definiţie. Fie seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ cu raza de convergenţă $R > 0$. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < R$ seria este convergenta (şirul sumelor parţiale este convergent) deci putem nota cu

$$s(z) \overset{not}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \lim_{n\to\infty} s_n(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k=n} a_k z^k$$

definind astfel o funcţie complexă $s : \{|z| < R\} \longrightarrow \mathbb{C}$, numită **suma seriei de puteri**, definită pe discul de convergenţă $\{|z| < R\}$

Teoremă. Fie seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ cu raza de convergenţă $R > 0$ şi suma ei $s : \{|z| < R\} \longrightarrow \mathbb{C}$. Atunci

i) seria de puteri $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ are aceeaşi rază de convergenţă,

ii) funcţia sumă s , este derivabilă pe domeniul ei de definiţie $\{|z| < R\}$ şi $s'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

iii) funcţia s (suma unei serii de puteri) este indefinit derivabilă (derivabilă de orice ordin)

iv) seria de puteri $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ are aceeaşi rază de convergenţă, iar dacă notăm suma ei cu $t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ atunci $t'(z) = s(z)$.

Cometariu. Funcţiile definite ca sume ale unor serii de puteri sunt indefinit derivabile, derivata se calculează exact ca pentru polinoame (derivând termen cu termen), de asemenea au primitive care se calculează integrând termen cu termen.

Funcţii complexe fundamentale Vom da ca exemplu funcţiile elementare complexe: exponenţiala, sinus, cosinus, funcţia argument, logaritm, putere, radical.

0.3 Funcţia Exponenţială - Funcţia Logaritm

Stilul "tradiţional" de prezentare: să definim funcţia logaritm !

sau, să rezolvăm ecuaţia :

$$e^z = w$$

Cu alte cuvinte, să determinăm numerele complexe $z \in \mathbb{C}$ pentru care

$$e^z = w \quad \text{sau echivalent} \quad \exp(z) = w \quad \text{unde} \quad w \in \mathbb{C}$$

Din ce motiv putem dori aşa ceva ?
O funcţie în general

$$\text{notată} \quad f : A \to B \quad \text{sau} \quad A \xrightarrow{f} B$$

se poate gândi ca un fel de "cutie neagră" în care
- intră un semnal (de intrare) "input signal" $a \in A$ şi
- iese un semnal (de ieşire) "output signal" $f(a) \in B$

$$A \ni a \longrightarrow \overset{f}{\blacksquare} \longrightarrow f(a) \in B$$

mulţimea A reprezintă valorile admisibile de intrare (ceea ce in matematică se numeşte "domeniu de definiţie") iar multimea B valorile posibile de ieşire
(ceea ce în matematică se numeşte "mulţimea valorilor funcţiei" sau "codomeniu" - denumire "istorică" mai puţin inspirată)

De exemplu un simplu bec cu filament incandescent, pentru a funcţiona adecvat - adică a lumina corespunzător -

necesită un semnal de intrare - adică un curent electric cu intensitate între anumite limite -
- un curent cu intensitate mică, are ca efect o luminozitate mică a filamentului - gen "lumânare"
- un curent cu intensitate prea mare, are ca efect o super luminozitate foarte scurtă şi apoi filamentull se topeşte, spunem că becul s-a "ars".
Prin urmare este util să cunoaştem dinainte limitele de funcţionare pentru a preveni efecte nedorite,
de exemplu prevenim folosind o "siguranţă" care limitează intensitatea curentului, adică "semnalul de intrare".

De fapt procesul a avut loc exact invers:
- mai întâi au fost observate diverse fenomene care se petrec conform unui "tipar" asemănător
un semnal de intrare -> procesare -> un semnal de ieşire
şi apoi a fost gândită ideea de "funcţie" ca să reprezinte astfel de "tipar".

Să revenim la problema initială : rezolvarea ecuaţiei în care apare funcţia exponentială, rezolvarea în numere complexe.
Poate că este mai uşor dacă reamintim cum se rezolvă o astfel de ecuaţie pentru numere reale

$$e^x = y \quad \text{sau echivalent} \quad \exp(x) = y \quad \text{unde} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

am notat cu "x" , pare mai "real" decât "z" .
De unde provine funcţia exponenţială ?
Iată două exemple concrete sau mai puţin abstracte.

1. Legenda spune că cel care a inventat jocul de şah, a prezentat jocul, unui şah (astfel s-a denumit apoi jocul).
Şahul a fost atât de încântat de joc, încât a oferit orice ca recompensă.
Legenda spune că inventatorul a cerut să fie platit în boabe de grâu astfel:
- un bob în primul pătrat al tablei de şah
- apoi 2 boabe în următorul pătrat, 4 boabe în următorul , 8 boabe şi tot aşa, de fiecare dată un număr dublu faţă de pătratul precedent.
Iniţial şahul a crezut că un săculeţ cu boabe de grâu este suficient, apoi a realizat rapid că întreaga producţie de grău nu e suficientă.
Pentru a verifica, să calculăm numărul de boabe. Sunt 64 de pătrate pe tabla de şah, deci numărul de boabe corespunzător este

$$1 \ , \ 2 \ , \ 2^2 \ , \ 2^3 \ , \ ... \ , \ 2^{63}$$

a apărut ceea ce numim funcţie "exponenţială" sau "creştere exponenţială" ,
Suma tuturor boabelor este (suma unei progresii "geometrice")

$$1 + 2 + 2^3 + ... + 2^{63} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

Ar trebui să determinăm cu aproximaţie cât de multe boabe corespund la 1 kg de grâu şi
apoi să avem o estimare a producţiei de grâu la hectar, de exemplu în prezent o producţie "mică" este 3000 kg/ha şi

respectiv pentru suprafaţa unei ţări - terenul arabil doar - de exemplu 1000 km^2

2. Un exemplu mai apropiat în timp. Se observă la microscop următorul fenomen.

O bacterie se divide în două, rezultând alte două bacterii, apoi după o oră cele două bacterii se divid şi ele în două fiecare,

rezultând deci 4 bacterii, care la rândul lor dupa încă o oră se divid rezultând 8 bacterii şi aşa mai departe.

Evident bacteriile sunt puse peste o substanţă care favorizează dezvoltarea lor (un "mediu de cultură").

Acea bacterie este asociată cu anumită epidemie.

Din puncte de vedere medical "epidemia" apare, dacă numărul de bacterii pe cm^3 depăşeşte o anumită limită.

Din acest motiv este de interes să ştim după cât timp de la observarea unei singure bacterii, creşterea numărul de bacterii determină o epidemie.

Desigur calculul nu ia în seamă durata de viaţă a unei bacterii.

Este uşor de observat că are loc tot o "creştere exponenţială" , exact ca pentru jocul de şah

Deci pornind de la o singură bacterie, după 24 ore numărul de bacterii este 2^{24} .

Aceste exemple arată modul "natural" în care apare funcţia exponenţială.

Revenim acum la .... matematică.

Definim funcţia exponenţială ca suma seriei de puteri

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

unde $0! = 1$ este doar simplă convenţie de notaţie, altfel nu are sens " 0! " zero factorial"

Suma unei serii de puteri este limita şirului sumelor parţiale

$$s_p(x) = \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!}x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{x^p}{p!}$$

Este natural să se pună problema din ce motiv acest şir este convergent, sau pentru ce valori $x \in \mathbb{R}$ este acest şir convergent.

Un criteriu util este criteriul "raportului".

Mai precis: dacă facem raportul termenilor consecutivi în modul

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}x^{(n+1)}}{\frac{1}{n!}x^n}$$

iar şirul obţinut are limită şi limita este < 1 , atunci neapărat seria este convergentă.

In cazul de faţă

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}x^{(n+1)}}{\frac{1}{n!}x^n} = \frac{1}{n+1}x \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

Prin urmare, seria numită "exponenţială" este convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Notăm cu " $\exp(x)$ " suma acestei serii pentru valoarea $x \in \mathbb{R}$.

Apare astfel o funcţie

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

care admite ca "semnal de intrare" orice $x \in \mathbb{R}$ (seria fiind convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$) ,

cu alte cuvinte domeniul de definiţie maxim este $\mathbb{R}$.

Nu este deloc clar din ce motiv suma acestei serii de puteri este numită funcţie exponenţială.

Vom explica acest fapt puţin mai târziu.

Ca pentru orice funcţie se pune problema de a determina limitele pentru "semnalul de ieşire" , adică mulţimea valorilor funcţiei.

O simplă observaţie arată că pentru $x = 0$ obţinem $\exp(0) = 1$

$$\exp(0) = \lim_{p\to\infty} s_p(0) = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!}0^n\right) = \lim_{p\to\infty}\left(1 + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \frac{0^3}{3!} + ... + \frac{0^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{0^p}{p!}\right) = \lim_{p\to\infty}(1) = 1$$

Pentru alte valori $x \neq 0$ nu e deloc clar cum putem calcula suma seriei, adică limita şirului sumelor parţiale corespunzător.

Ce putem face ?

Să folosim .... teoria. Poate fi utilă.

Suma unei serii de puteri este o funcţie derivabilă, iar derivata se calculează derivând "termen cu termen" astfel

$$[\exp(x)]' = \frac{d}{dx}\exp(x) = \frac{d}{dx}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right] = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d}{dx}[x]^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}nx^{n-1}$$

$$[\exp(x)]' = \frac{d}{dx}\exp(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = \exp(x)$$

deci pe scurt derivata este aceaşi funcţie

$$[\exp(x)]' = \frac{d}{dx}[\exp(x)] = \exp(x)$$

Acum o proprietate fundamentală pentru seria exponenţială.

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y) \quad \text{pentru orice } \ x, y \in \mathbb{R}$$

scris în detaliu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n = \left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}x^p\right)\cdot\left(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}y^q\right)$$

cu alte cuvinte :

suma seriei calculată pentru $(x+y)$ este egală cu produsul dintre suma seriei calculată pentru x şi suma seriei calculată pentru y

Demonstraţia nu este chiar elementară. Nu o prezentăm aici.

Din punct de vedere pur "tehnic" , ar trebui să fie destul de clar că acel "n" din suma unei serii ,

este doar un "contor" care porneşte de la 0 şi creşte din 1 în 1. Deci este nerelevant cu ce este notat contorul n , p sau q

prin urmare putem scrie la fel de bine

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}y^n\right)$$

In fine, să observăm că

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x)\cdot\exp(-x) \quad \text{pentru orice } \ x \in \mathbb{R}$$

deci $\exp(-x)$ este inversul (la înmulţire) pentru $\exp(x)$, deci în particular $\exp(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$

Cu alte cuvinte funcţia exponenţială nu ia valoarea zero.

Aparent acest fapt nu este deosebit de relevant. Dorim să determinăm ce valori ia funcţia exponenţială.

Suma unei serii de puteri este o funcţie derivabilă, deci este şi funcţie continuă.

Prin urmare, dacă ar lua atât valori pozitive (strict >0) cât şi valori negative (strict <0) atunci neapărat ar lua orice valoare intermediară

în particular ar lua şi valoarea zero.

Tocmai am observat că funcţia exponenţială nu ia valoarea zero !

Deci fiind funcţie continuă (ca suma unei serii de puteri)

- ori ia numai valori strict pozitive,
- ori ia numai valori strict negative.

Este suficient să cunoaştem o singură valoare a funcţiei , pentru a şti dacă ia numai valori pozitive sau numai valori negative.

Am observat deja că $\exp(0) = 1$ care este valoare strict pozitivă, deci exponenţiala ia numai valori pozitive

$$\exp(x) > 0 \quad \text{pentru orice } \ x \in \mathbb{R}$$

Putem scrie deci

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

Este deja un mare pas "înainte" .
Dar ia orice valoare pozitivă ?
Cu alte cuvinte, ecuaţia (cu necunoscuta "x")

$$\exp(x) = y \quad \text{unde} \quad y \in (0, +\infty)$$

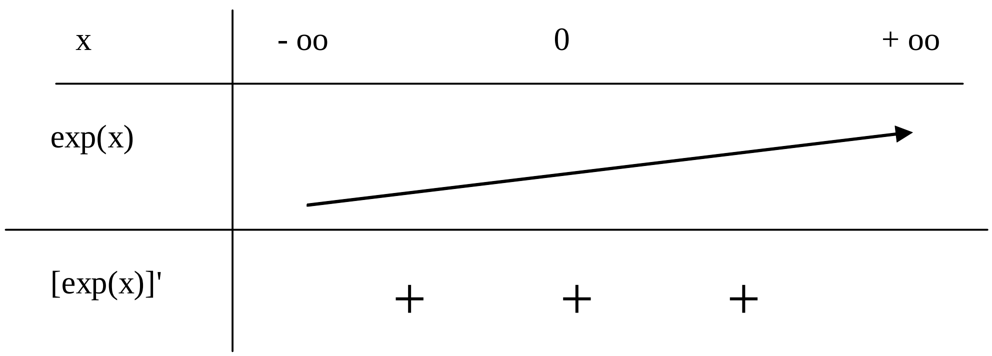
are soluţii pentru orice $y \in (0, +\infty)$?
Am demonstrat deja că derivata funcţiei exponenţiale este

$$[\exp(x)]' = \frac{d}{dx}[\exp(x)] = \exp(x)$$

Prin urmare derivata ia doar valori strict pozitive

$$[\exp(x)]' > 0 \quad \text{pentru orice} \;\; x \in \mathbb{R}$$

deci funcţia exponenţială este strict crescătoare.



Abia acum încercăm să justificăm denumirea de funcţie "exponenţială" pentru suma seriei de puteri.
Pentru $x = 1$ obţinem seria numerică (convergentă)

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 1^n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + ... = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... > 1 + 1 = 2$$

Notăm suma acestei serii cu " e " , adică limita şirului sumelor parţiale

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 1^n = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} 1^n \right)$$

" e " , notaţie "istorică" , numărul lui Euler.
Folosim proprietatea "fundamentală"

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \text{pentru orice} \;\; x, y \in \mathbb{R}$$

Pentru $x = 1$ şi $y = 1$ obţinem

$$\exp(1 + 1) = \underbrace{\exp(1)}_{e} \cdot \underbrace{\exp(1)}_{e}$$

deci

$$\exp(2) = e^2$$

In mod inductiv obţinem

$$\exp(n) = \exp(\underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{n \;\; \text{ori}}) = \underbrace{\exp(1) \cdot \exp(1) \cdot ... \cdot \exp(1)}_{n \;\; \text{ori}} = e^n$$

In mod asemănător

$$e = \exp(1) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{n \text{ ori}}\right) = \left[\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$$

deci

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{1/n}$$

Prin urmare, pentru numere rationale $x = p/q$ obţinem

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{p/q}$$

Din continuitate (folosind limita) putem extinde notaţia pentru orice număr real $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) \overset{not}{=} e^x$$

Ceea ce justifică denumirea de funcţie exponenţială pentru suma seriei de puteri

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

şi anume că este funcţia exponenţială cu "baza" e .
Din faptul că $e > 2$, rezultă că pentru $x > 0$ avem

$$2^x < e^x \quad \text{şi} \quad \frac{1}{e^x} < \frac{1}{2^x} \quad \text{sau} \quad e^{-x} < 2^{-x}$$

prin urmare

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

In concluzie, pentru funcţia exponenţială am obţinut limitele la $+\infty$ şi la $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

x	- oo	0	+ oo
exp(x)	0	$\nearrow$	+ oo
[exp(x)]'	+	+	+

Din cauză că este funcţie continuă, funcţia exponenţia exponenţială ia orice valoare "intermediară" $y \in (0, +\infty)$ cu alte cuvinte : pentru orice $y \in (0, +\infty)$ există $x \in \mathbb{R}$ aşa încât $\exp(x) = y$ sau $e^x = y$

Pe de altă parte am arătat că funcţia exponenţială este strict crescătoare, deci ia orice valoare într-un singur punct.

Prin urmare am rezolvat ecuaţia :

pentru orice $y \in (0, +\infty)$ există un unic $x \in \mathbb{R}$ aşa încât $\exp(x) = y$ sau $e^x = y$

sau :

ecuaţia $\exp(x) = y$ are soluţie unică $x \in \mathbb{R}$, pentru orice $y \in (0, +\infty)$.

Această unică soluţie se numeşte : " logaritmul lui y " sau "logaritmul lui y în baza e " , notat " $\ln y$ ".

Revenind la funcţia exponenţială

$$\mathbb{R} \overset{\exp}{\rightarrow} (0, +\infty) \quad , \quad \mathbb{R} \ni \underbrace{x}_{\ln y} \rightarrow \underbrace{e^x}_{y} \in (0, +\infty)$$

Diagrama arată clar că ceea ce am definit ca "logaritm" este inversa funcţiei exponenţiale.

"Povestea" pare relativ lungă.

Totuşi dacă rezumăm, fiecare pas este destul de simplu şi "natural".

- seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

este convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$

- suma seriei exp este o funcţie derivabilă şi

$$[\exp(x)]' = \frac{d}{dx} [\exp(x)] = \exp(x)$$

- proprietatea "fundamentală" e singurul fapt mai greu de demonstrat.

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \text{pentru orice} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

proprietate care justifică denumirea de "exponenţială"

- notând $e = \exp(1)$ putem folosi notaţia "exponenţială" $\exp(x) = e^x$
- din continuitatea funcţiei şi din $\exp(0) = 1$ rezultă ca funcţia ia numai valori strict pozitive

$$\exp(x) \in (0, +\infty)$$

- rezultă că derivata este strict pozitivă, deci funcţia este strict crescătoare
- limitele la "capete" , adică la $+\infty$ şi la $-\infty$ sunt

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

- deci tot din continuitate, funcţia exponentială ia orice valoare "intermediară" din intervalul $(0, +\infty)$
- fiind strict crescătoare, funcţia exponenţială ia orice valoare $y \in (0, +\infty)$ doar într-un singur punct $x \in \mathbb{R}$
- notăm acest unic punct cu $x = \ln y$

Astfel am arătat că functia exponenţială are inversă şi am numit această inversă funcţia "logaritm" .

Trecem acum să definim (în mod analog) funcţia logaritm pentru numere complexe.

Vom schiţa doar paşii care au fost prezentaţi în detaliu pentru numere reale.

Definim funcţia exponenţială ca suma seriei de puteri

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \frac{1}{0!} + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...$$

Pentru a determina convergenţa seriei, folosim tot criteriul "raportului", care funcţionează la fel şi pentru serii de numere complexe.

Facem raportul termenilor consecutivi şi obţinem

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!} z^{(n+1)}}{\frac{1}{n!} z^n} = \frac{1}{n+1} z \underset{n \to \infty}{\rightarrow} 0 \quad \text{pentru orice} \quad z \in \mathbb{C}$$

Prin urmare, seria numită "exponenţială" este convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Notăm cu " $\exp(z)$ " suma acestei serii pentru valoarea $z \in \mathbb{C}$.

Apare astfel o funcţie (de variabilă complexă, cu valori complexe)

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

In mod analog cu cazul pentru numere reale, observăm că pentru $z = 0$ obţinem $\exp(0) = 1$

$$\exp(0) = \lim_{p\to\infty} s_p(0) = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} 0^n \right) = \lim_{p\to\infty} \left(1 + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \frac{0^3}{3!} + ... + \frac{0^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{0^p}{p!} \right) = \lim_{p\to\infty} (1) = 1$$

Are loc proprietatea "fundamentală"

$$\exp(z + w) = \exp(xz \cdot \exp(w) \quad \text{pentru orice } \; z, w \in \mathbb{C}$$

scris în detaliu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} z^p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} w^q \right)$$

Pentru serii de puteri cu numere complexe are loc aceeaşi teoremă de derivare.
Suma unei serii de puteri este o funcţie derivabilă, iar derivata se calculează derivând "termen cu termen" astfel

$$[\exp(z)]' = \frac{d}{dz} \exp(z) = \frac{d}{dz} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right] = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d}{dz} [z]^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n z^{n-1}$$

$$[\exp(z)]' = \frac{d}{dz} \exp(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \frac{1}{0!} + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z)$$

deci pe scurt derivata este aceaşi funcţie

$$[\exp(z)]' = \frac{d}{dz} [\exp(z)] = \exp(z)$$

In mod analog cu cazul pentru numere reale, se justifică notaţia "exponenţială" $\exp(z) = e^z$
Pentru $x = 1$ obţinem seria numerică (convergentă) - este exact aceeaşi serie ca pentru numere reale.

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 1^n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + ... = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... > 1 + 1 = 2$$

Notăm suma acestei serii cu " e " , adică limita şirului sumelor parţiale

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 1^n = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} 1^n \right)$$

Folosim proprietatea "fundamentală"

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \quad \text{pentru orice } \; z, w \in \mathbb{C}$$

şi exact aceleaşi calcule ca pentru numere reale duc la

$$\exp(n) = e^n \quad , \quad \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{1/n}$$

Prin urmare, pentru numere rationale $x = p/q$ obţinem

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{p/q}$$

Analogia cu cazul de la numere reale se opreşte aici.
Să calculăm exponenţiala în $z = x + iy$ cu $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy)$$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = e^x$$

este în mod evident exact exponenţiala pentru numere reale pe care am definit-o mai înainte.

pentru $\exp(iy)$ separăm partea reală şi partea imaginară

$$\exp(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iy)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iy)^n}_{n \text{ par } = \ 2k} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iy)^n}_{n \text{ impar}=2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(iy)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(iy)^{2k+1}$$

$(i)^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ şi $(i)^{2k+1} = (i^2)^k \cdot i = (-1)^k \cdot i$

deci

$$\exp(iy) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k y^{2k}}_{\mathrm{Re}(\exp(iy))} + i \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k y^{2k+1}}_{\mathrm{Im}(\exp(iy))}$$

Au apărut astfel două serii de puteri

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k z^{2k} \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k z^{2k+1}$$

Folosind criteriul raportului se arată că cele două serii de puteri sunt convergente pentru orice $z \in \mathbb{C}$

Sumele acestor serii de puteri le numim "cos" respectiv "sin" , deocamdată fără o motivaţie rezonabilă.

(din punct de vedere "istoric" însă, au fost recunoscute seriile de puteri corespunzătoare funcţiilor reale "sin" respectiv "cos")

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \frac{1}{0!} - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ... = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...$$

Deci

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy) = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Este uşor de arătat că $\cos 0 = 1$ şi $\sin 0 = 0$, exact la fel ca şi pentru $\exp(0) = 1$

Apoi folosind teorema de derivare a seriilor de puteri , derivăm "termen cu termen" ,

derivatele acestor funcţii sunt

$$(\cos z)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(z^{2k}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2k) z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} z^{2k-1} =$$

pentru k de la 1 la ∞ , expresia $(2k-1)$ ia toate valorile impare 1,3,5,7, ... la fel ca şi $(2p+1)$ dar pentru p de la 0 la ∞ şi $p = k - 1$, $k = p + 1$

deci putem scrie

$$(\cos z)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} z^{2k-1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2(p+1)-1)!} z^{2(p+1)-1} = -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} z^{2p+1} = -\sin z$$

sau în detaliu

$$(\cos z)' = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + ...\right)' = 0 - \frac{2z}{2!} + \frac{4z^3}{4!} - \frac{6z^5}{6!} + \frac{8z^7}{8!} + ... =$$

$$= -\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...\right) = -\sin z$$

In mod analog obţinem

$$(\sin z)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k \left(z^{2k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k (2k+1) z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k z^{2k} = \cos z$$

Prin urmare am obţinut o exprimare a exponenţialei în funcţie de alte două funcţii sin , cos

$$\exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

La fel ca pentru numere reale avem

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$$

deci $\exp(z) \neq 0$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$

Să demonstrăm că

$$(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1 \text{ pentru orice } z \in \mathbb{C}$$

Această relaţie arată că expresia din stânga este constantă. Deci "viteza de variaţie" este zero, sau echivalent derivata este zero.

Putem calcula derivata (folosind preprietăţile derivării)

$$\frac{d}{dz}\left[(\sin z)^2 + (\cos z)^2\right] = 2\sin z \cdot (\sin z)' + 2\cos z \cdot (\cos z)' = 2\sin z \cdot \cos z + 2\cos z \cdot (-\sin z) = 0$$

Prin urmare expresia este constantă

$$(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = ct \text{ pentru orice } z \in \mathbb{C}$$

Pentru a determina valoarea constantei este suficient să "măsurăm" , adică să calculăm expresia într-un punct oarecare,

evident acolo unde ne este la îndemână. Singura valoare cunoscută acum este pentru $z = 0$

$$(\sin 0)^2 + (\cos 0)^2 = 0^2 + 1^2 = 1$$

deci valoarea constantei este 1 şi am obţinut relaţia anunţată

$$(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1 \text{ pentru orice } z \in \mathbb{C}$$

Revenim la exponenţială.

Să calculăm partea reală, partea imaginară şi modulul.

$$\exp(z) = \exp(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin y) = \underbrace{e^x \cos y}_{\text{Re}} + i \cdot \underbrace{e^x \sin y}_{\text{Im}}$$

deci

$$\text{Re}\left[\exp(x+iy)\right] = e^x \cos y \quad \text{şi} \quad \text{Im}\left[\exp(x+iy)\right] = e^x \sin y$$

Modulul este

$$|\exp(x+iy)| = \sqrt{(\text{Re})^2 + (\text{Im})^2} = \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = \sqrt{e^{2x}\left[\underbrace{(\cos y)^2 + (\sin y)^2}_{1}\right]} = \sqrt{e^{2x}} = e^x$$

în particular am obţinut

$$|\exp(iy)| = \left|e^{iy}\right| = \sqrt{[(\cos y)^2 + (\sin y)^2]} = 1 \quad \text{pentru orice } y \in \mathbb{R}$$

Se arată că funcţiile sin şi cos sunt funcţii periodice (nu prezentăm demonstraţia) .

Din cauza relaţiilor de derivare

$$(\cos z)' = -\sin z \quad , \quad (\sin z)' = \cos z$$

cele două funcţii au aceeaşi perioadă.

Fiind funcţii continue, periodice şi neconstante, rezultă că au o cea mai mică perioadă strict pozitivă.(nu demonstrăm acest fapt)

Notăm această perioadă cu " 2π " ,

astfel apare numărul "π" definit ca jumătate din cea mai mică perioadă a funcţiilor sin şi cos.

Apoi se arată că pentru valori reale $x \in \mathbb{R}$ regăsim toate proprietăţile cunoscute ale funcţiilor $\sin x$, $\cos x$ definite în mod "tradiţional" trigonometric.

In fine revenim la rezolvarea ecuaţiei

$$\exp(z) = w \quad , \quad \text{cu} \quad z, w \in \mathbb{C}$$

De vreme ce exponenţiala nu ia valoarea zero ($\exp(z) \neq 0$) înseamnă că ecuaţia poate avea soluţii numai pentru $w \neq 0$

Rescriem

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = w = u + iv \quad \text{cu} \quad x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

Modulele celor două numere complexe sunt de asemena egale

$$\underbrace{|\exp(x + iy)|}_{e^x} = |w| \qquad \Leftrightarrow$$

$$e^x = |w|$$

Ultima relaţie este o ecuaţie pentru numere reale cu soluţie unică aşa cum am arătat mai înainte

$$x = \ln |w|$$

Deci am determinat partea reală $\operatorname{Re} z = x = \ln |w|$

Revenim la ecuaţia iniţială

$$\exp(z) = w \quad , \quad \text{cu} \quad z, w \in \mathbb{C} \quad \text{şi} \quad w \neq 0$$

Rescriem ecuaţia

$$\exp(x + iy) = w \qquad \Leftrightarrow \qquad e^x(\cos y + i \sin y) = u + iv = |w| \cdot \left(\frac{u}{|w|} + i \frac{v}{|w|} \right)$$

simplificăm cu $e^x = |w|$ şi obţinem

$$\cos y + i \sin y = \frac{u}{|w|} + i \frac{v}{|w|}$$

deci două numere complexe egale,

sau echivalent : sunt egale părţile reale şi părţile imaginare, adică

$$\begin{aligned} \cos y &= \frac{u}{|w|} \\ \sin y &= \frac{v}{|w|} \end{aligned}$$

Din proprietăţile funcţiilor sin, cos pentru numere reale, există un singur "unghi" $\alpha \in [0, 2\pi)$ astfel încât

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{u}{|w|} \\ \sin \alpha &= \frac{v}{|w|} \end{aligned}$$

ceea ce duce la

$$y = \alpha + 2k\pi \quad \text{cu} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Astfel am determinat şi partea imaginară.

Prin urmare ecuaţia

$$\exp(z) = w \quad , \quad \text{cu} \quad z, w \in \mathbb{C} \quad \text{cu} \quad w \neq 0$$

are soluţiile

$$z = x + iy = \ln|w| + i\cdot(\alpha + 2k\pi) \quad \text{cu} \quad k \in \mathbb{Z}$$

unde α este unicul $\alpha \in [-\pi, \pi)$ cu

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{u}{|w|} \\ \sin\alpha &= \frac{v}{|w|} \end{aligned}$$

In concluzie, pentru numere complexe funcţia exponenţială
- ia orice valoare complexă diferită de zero,
- este o funcţie periodică cu perioada $2\pi i$

$$\exp(z+2\pi i) = \exp(x+iy+2\pi i) = \exp(x+i(y+2\pi)) = e^x[\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)] = e^x[\cos y + i\sin y] = \exp(z)$$

prin urmare funcţia exponenţială nu este injectivă, deci nu este inversabilă şi nu se poate defini în mod unic o funcţie "logaritm".

In aceste condiţii se defineşte logaritmul nu ca o funcţie ci ca multimea tuturor soluţiilor ecuaţiei $\exp(z) = w$, pentru $w \neq 0$

$$\mathrm{Log}(w) \overset{not}{=} \{\ln|w| + i\cdot(\alpha + 2k\pi) \quad \text{cu} \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

sau se poate defini o funcţie "logaritm" prin alegerea uneia din soluţiile posibile.

De exemplu

$$\log(w) \overset{def}{=} \ln|w| + i\cdot(\alpha + 2k\pi) \quad \text{cu} \quad k \in \mathbb{Z} \quad , \text{ pentru } \quad w \neq 0$$

unde unde α este unicul $\alpha \in [-\pi, \pi)$ cu

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{u}{|w|} \\ \sin\alpha &= \frac{v}{|w|} \end{aligned}$$

Exemplu.
Soluţiile ecuaţiei

$$\exp(z) = 1 + i$$

sunt

$$\mathrm{Log}(1+i) \overset{not}{=} \{\ln|1+i| + i\cdot(\alpha + 2k\pi) \quad \text{cu} \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

în acest caz $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
iar unghiul $\alpha \in [0, 2\pi)$ este definit de

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

deci $\alpha = \frac{\pi}{4}$
obţinem

$$\mathrm{Log}(1+i) \overset{not}{=} \left\{\ln\sqrt{2} + i\cdot(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) \quad \text{cu} \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Teoremă. Fie seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$ numită **seria exponenţială**.

1) seria are raza de convergenţă $R = +\infty$, deci are sens definirea funcţiei

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \text{ , pentru orice } z \in \mathbb{C}$$

2) $\exp(0) = 1$

3) $\exp(z+w)=\exp(z)\cdot\exp(w)$ sau echivalent

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n=\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}z^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}w^q\right)$$

4) notăm cu $e=\exp(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, după care se arată că $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
prin urmare obţinem $\exp(n)=(\exp(1))^n=e^n$, ceea ce justifică denumirea de functie exponenţială.
putem nota atunci $\exp(z)\overset{not}{=}e^z$, deoarece pentru $z\in\mathbb{R}$ funcţia coincide cu exponenţiala reală.
5) $\exp(z)\cdot\exp(-z)=1$, pentru orice $z\in\mathbb{C}$, deci $\exp(z)\neq 0$ pentru orice $z\in\mathbb{C}$
6) $(\exp(z))'=\exp(z)$
7) pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem $\exp(x)=e^x>0$
Demonstraţie.
1) folosim criteriul raportului

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}z^{n+1}}{\frac{1}{n!}z^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|\cdot|z|=0<1\quad\text{pentru orice}\ \ z\in\mathbb{C}$$

deci seria este absolut convergentă pentru orice $z\in\mathbb{C}$
2)

$$\exp(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}0^n=1+\frac{0}{1!}+\frac{0^2}{2!}+\frac{0^3}{3!}+...=1$$

3) nu dăm demonstraţia
4)

$$\exp(n)=\exp(\underbrace{1+1+...+1}_{n\text{- ori}})=\underbrace{\exp(1)\cdot\exp(1)\cdot...\cdot\exp(1)}_{n\text{-ori}}=(\exp(1))^n=e^n$$

5)

$$\exp(z)\cdot\exp(-z)=\exp(z-z)=\exp(0)=1$$

deci $\exp(z)\neq 0$ pentru orice $z\in\mathbb{C}$ şi

$$\exp(-z)=\frac{1}{\exp(z)}$$

6) derivăm funcţia exponenţială ca suma unei serii de puteri

$$(\exp(z))'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}z^{n-1}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...=\exp(z)$$

sau putem scrie mai clar

$$(\exp(z))'=\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...\right)'=0+\frac{1}{1!}+\frac{2z}{2!}+\frac{3z^2}{3!}+\frac{4z^3}{4!}+...=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...=\exp(z)$$

■

Să calculăm funcţia exponenţială punând în evidenţă partea reală şi partea imaginară
Fie $z=x+iy$

$$\exp(z)=\exp(x+iy)=\exp(x)\cdot\exp(iy)=$$
$$=\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)}_{\exp(x)}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iy)^n\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iy)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}i^ny^n=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}i^ny^n}_{n\text{-par}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}i^ny^n}_{n\text{-impar}}=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} i^{2k} y^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} i^{2k+1} y^{2k+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k y^{2k}}_{\cos} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k y^{2k+1}}_{\sin}$$

în care se recunosc seriile corespunzătoare funcţiilor reale sin şi cos, deci

$$\exp(x+iy) = \exp(x)(\cos y + i \sin y)$$

Considerăm acum seriile de puteri

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + ...$$

Aceste serii apar refăcând calculele anterioare, dar pentru numere complexe

$$\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n z^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n z^n}_{n\text{-par}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n z^n}_{n\text{-impar}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} i^{2k} z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} i^{2k+1} z^{2k+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k z^{2k}} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k z^{2k+1}}$$

$$\exp(iz) = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...\right) + i \left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + ...\right)$$

Se poate spune că aceste serii sunt "părţi" din seria exponenţială, partea cu puteri pare, respectiv partea cu puteri impare, în plus cu semne alternate

Se arată uşor că au raza de convergenţă $R = +\infty$, deci definesc funcţii definite pentru orice $z \in \mathbb{C}$ notate

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{respectiv} \quad \sin(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Demonstraţie.

Folosim criteriul raportului

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!} z^{2(n+1)}}{\frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n)! z^2}{(2n+2)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| = 0 < 1$$

seria este deci convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ şi are raza de convergenţă $R = +\infty$.

Analog

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} z^{2(n+1)+1}}{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+1)! z^2}{(2n+3)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^2}{(2n+3)(2n+2)} \right| = 0 < 1$$

seria este deci convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ şi are raza de convergenţă $R = +\infty$.

Proprietăţi.

1) $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$

2) $(\sin(z))' = \cos(z)$, $(\cos(z))' = -\sin(z)$

3) $(\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = 1$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$

4)

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z \quad , \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

5) pentru $z = x + iy$, cu $x, y \in \mathbb{R}$, avem

$$\exp(z) = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \quad , \quad \left|e^{iy}\right| = |\cos y + i \sin y| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1 \quad , \quad \left|e^{x+iy}\right| = e^x$$

6) pentru numere reale, funcţiile astfel definite sin , cos coincid cu funcţiile trigonometrice reale sin , cos
7) $\exp(2\pi i) = 1$, $\exp(i\pi) = -1$, $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$ deci exponenţiala complexă este periodică.
8) se arată că funcţia exponenţială $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ este surjectivă,
 în plus ia orice valoare de pe cercul de rază 1, adica $\{e^{ix}$, cu $x \in \mathbb{R}\} = \{|z| = 1\}$
Demonstraţie.
1)

$$\sin(0) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} 0^{2n+1} = \frac{0}{1!} - \frac{0^3}{3!} - \frac{0^5}{5!} + ... = 0$$

$$\cos(0) = 1 - \frac{0^2}{2!} + \frac{0^4}{4!} - \frac{0^6}{6!} + ... = 1$$

2) derivăm sumele de puteri

$$(\sin(z))' = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}\right)' = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)!} z^{2n} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cos(z)$$

$$(\cos(z))' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)}{(2n)!} z^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} z^{2n-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1} = -\sin(z)$$

sau derivăm în mod "vizibil" fiecare termen

$$(\sin(z))' = \left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + ...\right)' = \frac{1}{1!} - \frac{3z^2}{3!} - \frac{5z^4}{5!} + \frac{7z^6}{7!} + ... = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...$$

$$(\cos(z))' = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...\right)' = 0 - \frac{2z}{2!} + \frac{4z^3}{4!} - \frac{6z^5}{6!} + ... = -\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + ...\right)$$

3) pentru a demonstra relaţia

$$(\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = 1 \text{ pentru orice } z \in \mathbb{C}$$

folosim un principiu simplu.
În stânga avem o expresie - o funcţie, care depinde de un parametru z , iar în dreapta avem o constantă 1
ceea ce înseamnă că funcţia este constantă, deci nu variază, are deci derivata zero,
putem calcula această derivată

$$\left((\sin(z))^2 + (\cos(z))^2\right)' = 2\sin z \cdot (\sin z)' + 2\cos z \cdot (\cos z)' = 2\sin z \cos z - 2\cos z \sin z = 0$$

prin urmare funcţie este constantă

$$(\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = ct \text{ pentru orice } z \in \mathbb{C}$$

determinăm constanta, calculând valoarea funcţiei (constante) într-un punct.
Singurul punct în care cunoastem valorile funcţilor sin şi cos este $z = 0$
obţinem

$$(\sin(0))^2 + (\cos(0))^2 = 0 + 1 = 1$$

valoarea constantei este deci 1, deci

$$(\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = ct = 1 \text{ pentru orice } z \in \mathbb{C}$$

4) am arătat deja că $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$, deci

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z \quad , \quad \exp(-iz) = \cos(-z) + i \sin(-z)$$

adunând cele două relaţii obţinem

$$\exp(iz) + \exp(-iz) = 2 \cos z \quad \Rightarrow \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

scădem cele două relaţii şi obţinem

$$\exp(iz) - \exp(-iz) = i2 \sin z \quad \Rightarrow \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} i e^{-iz}}{2i}$$

5)

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy) = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

deoarece $e^x, \cos y, \sin y$ sunt reale, pentru modul obţinem

$$|\exp(iy)| = \left|e^{iy}\right| = |\cos y + i \sin y| = \sqrt{(\cos y)^2 + (\sin y)^2} = 1$$

$$|\exp(z)| = |\exp(x + iy)| = \left|e^{x+iy}\right| = |e^x (\cos y + i \sin y)| = e^x \left|\cos y + i \sin y\right| = e^x$$

sau

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$

7) calculăm

$$\exp(2\pi i) = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1$$

$$\exp(i\pi) = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \cdot \exp(2\pi i) = \exp(z)$$

□

Comentariu. Aceste fapte arată că funcţiile cunoscute în mod tradiţional ca funcţii trigonometrice, sunt definite în mod natural nu pentru numere reale, ci în contextul numerelor complexe.

Orice număr complex $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $z = x + iy$ se poate scrie

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = |z| \left(\frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = |z| \left(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{a} + i \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{b} \right) = |z| \left(a + ib\right)$$

unde

$$|a + ib| = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} = 1$$

există un unic număr real $t \in (-\pi, \pi]$ astfel încât

$$a = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos t \quad \text{şi} \quad a = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin t$$

sau

$$a = \frac{x}{|z|} = \cos t \quad \text{şi} \quad b = \frac{y}{|z|} = \sin t$$

deci

$$\operatorname{Re} z = x = |z| \cos t \quad \text{şi} \quad \operatorname{Im} z = y = |z| \sin t \quad \text{cu} \quad t \in (-\pi, \pi]$$

sau

$$z = y + iy = |z|\,(\cos t + i \sin t) = |z|\, e^{it}$$

Definiţie. Orice număr complex $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ se poate scrie $z = |z| \cdot e^{it}$, unde $t \in (-\pi, \pi]$.
Definim **funcţia argument** ca unica funcţie pe care o notăm cu arg : $\mathbb{C} \backslash \{0\} \longrightarrow (-\pi, \pi]$ cu proprietatea

$$z = |z| \cdot e^{i \arg(z)} \text{ pentru orice } z \in \mathbb{C}, z \neq 0$$

Se arată că funcţia argument nu este continuă pe $\mathbb{C} \backslash \{0\}$.

Exemple. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ avem $\arg x = 0$, pentru $x < 0$ avem $\arg x = \pi$. Pentru $z = i$, $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$, $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

Rezolvarea unor ecuaţii cu funcţii elementare.

Exemplul 1. Ecuaţia

$$\exp(z) = e^z = w \text{ , pentru } w \neq 0$$

Soluţie. Să notăm $z = x + iy$ şi $w = |w|\, e^{i \arg(w)}$. Două numere complex egale au acelaşi modul, deci

$$e^x = \left|e^{x+iy}\right| = |e^z| = |w| \text{ , deci } x = \ln|w| \text{ , } \ln \text{ este funcţia logaritm natural}$$

apoi revenind la ecuaţia iniţială obţinem

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = |w|\, e^{i \arg(w)} \;\; \Rightarrow \;\; e^{iy} = e^{i \arg(w)} \;\; \Leftrightarrow$$

$$\cos y + i \sin y = \cos(\arg w) + i \sin(\arg w) \;\; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \;\; \begin{cases} \cos y = \cos(\arg w) \\ \sin y = \sin(\arg w) \end{cases} \;\; \Leftrightarrow \;\; y = \arg w + 2n\pi \text{ , } n \in \mathbb{Z}$$

În final mulţimea soluţiilor ecuaţiei este

$$\{\ln|w| + i(\arg w + 2n\pi) \;\; , \;\; n \in \mathbb{Z}\}$$

■

Definiţie. Putem defini funcţia **logaritm** ca inversa restricţiei funcţiei exponenţiale la "banda" orizontală

$$\exp : \{\; z \in \mathbb{C} \text{ , cu } \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]\} \longrightarrow \mathbb{C} \backslash \{0\}$$

$$\log : \mathbb{C} \backslash \{0\} \longrightarrow \{\; z \in \mathbb{C} \text{ , cu } \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]\}$$

definită prin

$$\log w \overset{def}{=} \ln|w| + i \arg w$$

Se arată că această funcţie nu este continuă pe domeniul maxim de definiţie.
Folosind o variantă a teoremei funcţiei inverse în complex se arată că funcţia logaritm astfel definită este derivabilă pe mulţimea

$$\mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C} \text{ , cu } \operatorname{Im} z = 0 \text{ şi } \operatorname{Re} z \leq 0\} \text{ şi în plus } (\log z)' = \frac{1}{z}$$

Definitie. Putem defini **funcţia putere**, pentru exponent real $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ şi pentru $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ astfel

$$z^\alpha \overset{def}{=} |z|^\alpha \cdot \exp(i\alpha \arg z) = |z|^\alpha\, e^{i\alpha \arg z}$$

În particular se defineşte **funcţia radical**,

$$\sqrt[n]{z} \overset{def}{=} \sqrt[n]{|z|} e^{i(\arg z)/n}$$

Pe de altă parte sunt cunoscute soluţiile ecuaţiei $z^n = w$, şi anume cele n rădăcini complexe

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{|w|}\cdot\exp\left(i\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right) \text{ , pentru } k = 0, 1, ..., (n-1)$$

Exemplul 2. Considerăm ecuaţiile de tip

$$\sin z = w \quad , \quad \cos z = w \quad , \text{ unde } w \in \mathbb{C}$$

<u>*Soluţie*</u>. Scriem

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w \quad \text{, ceeace duce la o ecuaţie de grad II}$$

$$e^{iz} - e^{-iz} - 2iw = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{iz}\right)^2 - 2iw(e^{iz}) - 1 = 0$$

care se rezolvă în mod standard cu $\Delta = (-2iw)^2 + 4$, apoi

$$e^{iz} = \frac{2iw \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

şi problema s-a redus la două ecuaţii de tipul studiat în exemplul 1. Aici

$$\sqrt{\Delta} \overset{not}{=} \sqrt{|\Delta|}e^{\frac{i \arg \Delta}{2}}$$

Pentru funcţia cosinus se procedează în mod analog

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = w \quad \text{, ceea ce duce la o ecuaţie de grad II}$$

$$e^{iz} + e^{-iz} - 2w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{iz}\right)^2 - 2w(e^{iz}) + 1 = 0$$

care se rezolvă în mod standard cu $\Delta = (-2w)^2 - 4$, apoi

$$e^{iz} = \frac{2w \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

şi problema s-a redus la două ecuaţii de tipul studiat în exemplul 1.

1 Integrala complexă

În cele ce urmează introducem integrala complexă şi câteva consecinţe relevante.

Definiţie. *Se numeste* ***drum parametrizat de clasă*** C^1*, o funcţie* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$*,* $a < b \in \mathbb{R}$ *derivabilă pe* $[a, b]$ *cu derivata continuă.*

Notăm (parametrizarea) cu

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) \quad , \quad \gamma'(t) = x'(t) + iy'(t) \quad , \quad t \in [a, b]$$

$$\text{sau în altă notaţie} \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$$

deci funcţiile reale $x(t), y(t)$ *sunt de clasă* C^1*,* $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$*. (derivatele* $x'(t), y'(t)$ *lor sunt funcţii continue)*

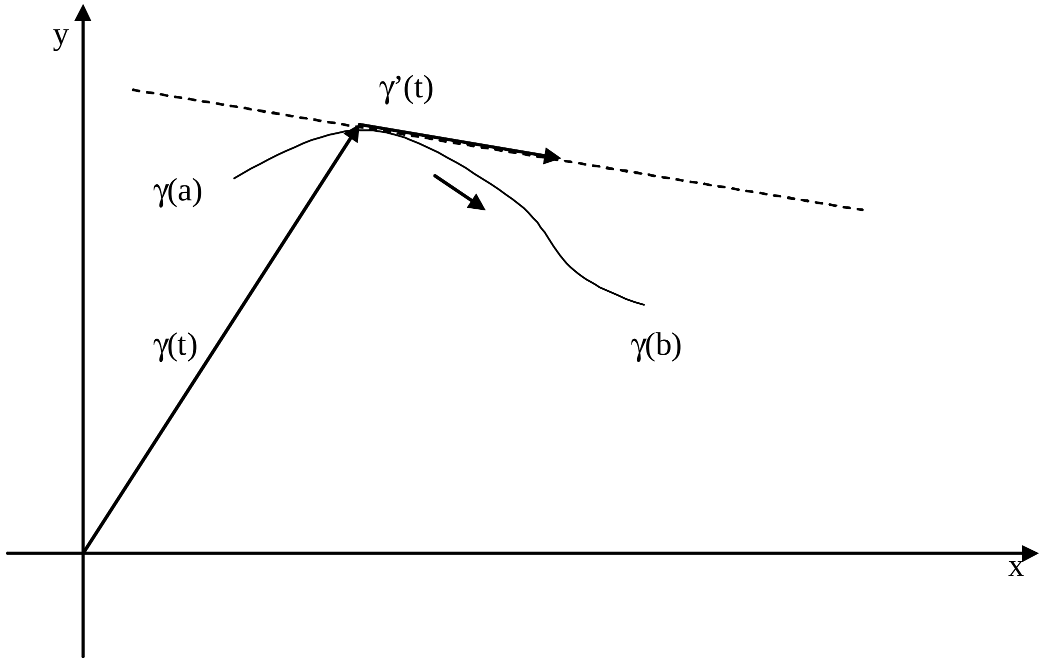
Punctele $\gamma(a)$*,* $\gamma(b) \in \mathbb{C}$ *se numesc* ***capetele drumului****,* ***punctul de start*** $\gamma(a)$ *şi* ***punctul final*** $\gamma(b)$*.*

Mulţimea valorilor $\gamma([a, b])$ *se poate numi* ***urma*** *sau* ***imaginea drumului****,*

aceasta se poate gândi ca o "traiectorie", iar parametrizarea ca un "mod de parcurgere" al traiectoriei.

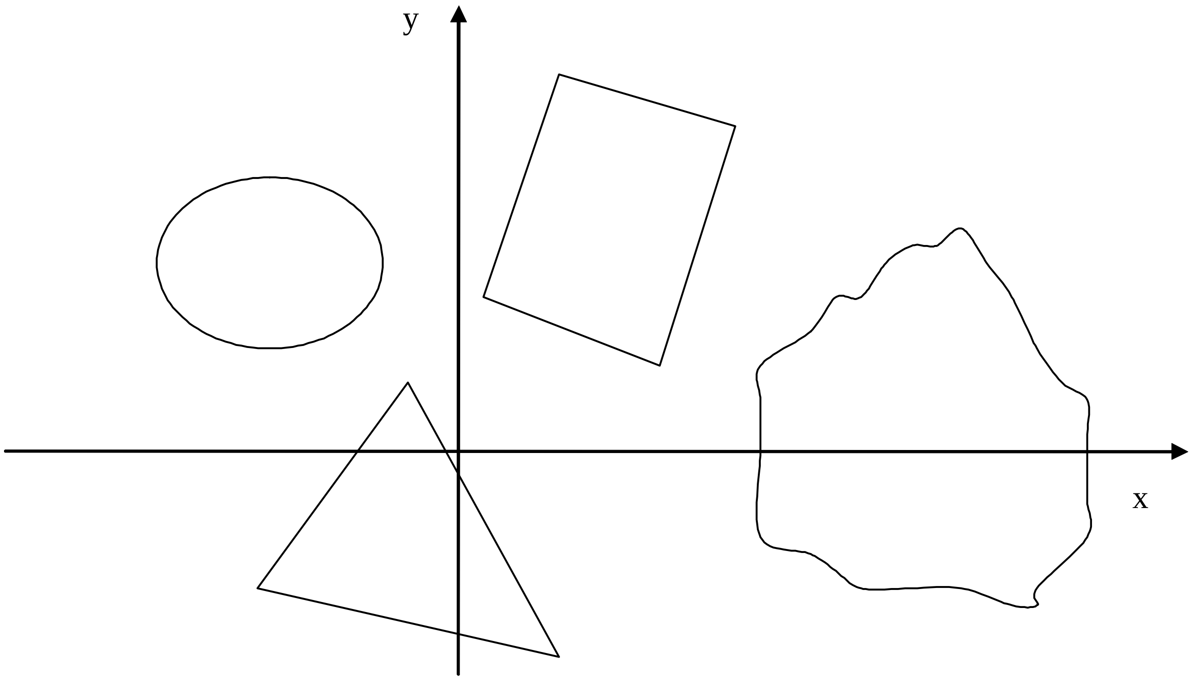
"Vectorul" $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ *sau în scriere vectorială* $\overrightarrow{\gamma'(t)} = (x'(t), y'(t))$ *, reprezinta viteza "tangenţială"*

(care este efectiv tangentă la traiectorie)



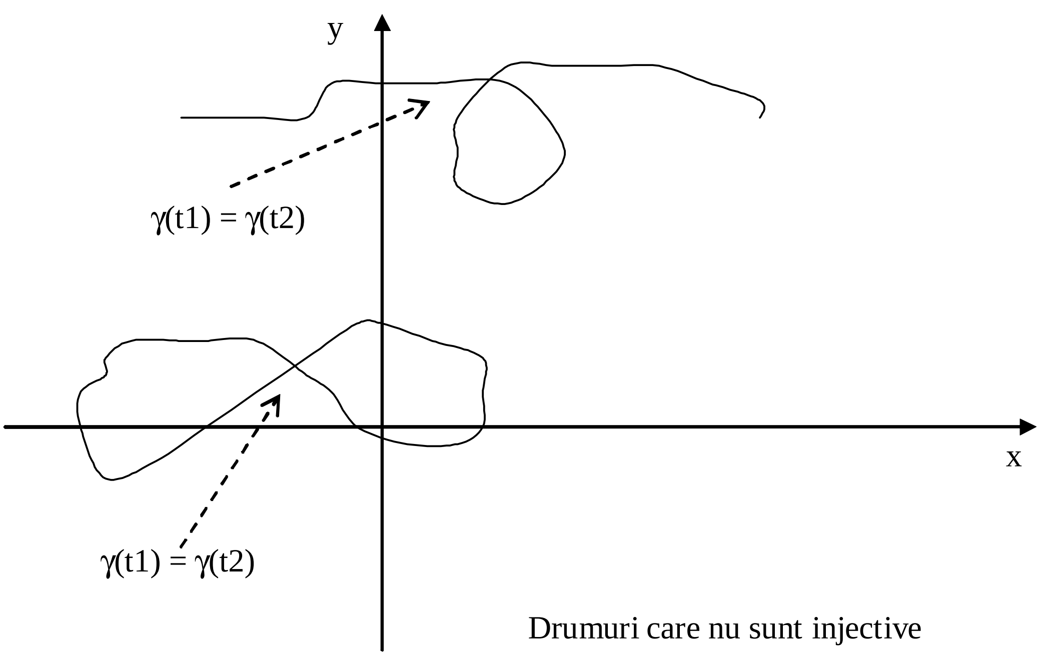
Dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$ atunci drumul este ***închis****.*
Drumul este ***injectiv*** *(sau* ***simplu****) dacă funcţia γ este injectivă, adică $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ pentru orice $t_1 \neq t_2$ (cu excepţia capetelor în cazul unui drum închis pentru care $\gamma(a) = \gamma(b)$).*
Cu alte cuvinte, un drum injectiv nu se "autointersectează".

Exemple.
Iată câteva exemple de drumuri închise.
De fapt în figură apar doar "imaginile" unor drumuri închise, nu şi parametrizările corespunzătoare.



Drumuri închise

Drumuri, (imaginile unor drumuri) care nu sunt injective, indiferent de parametrizare, deoarece se autointersectează.



Drumuri care nu sunt injective

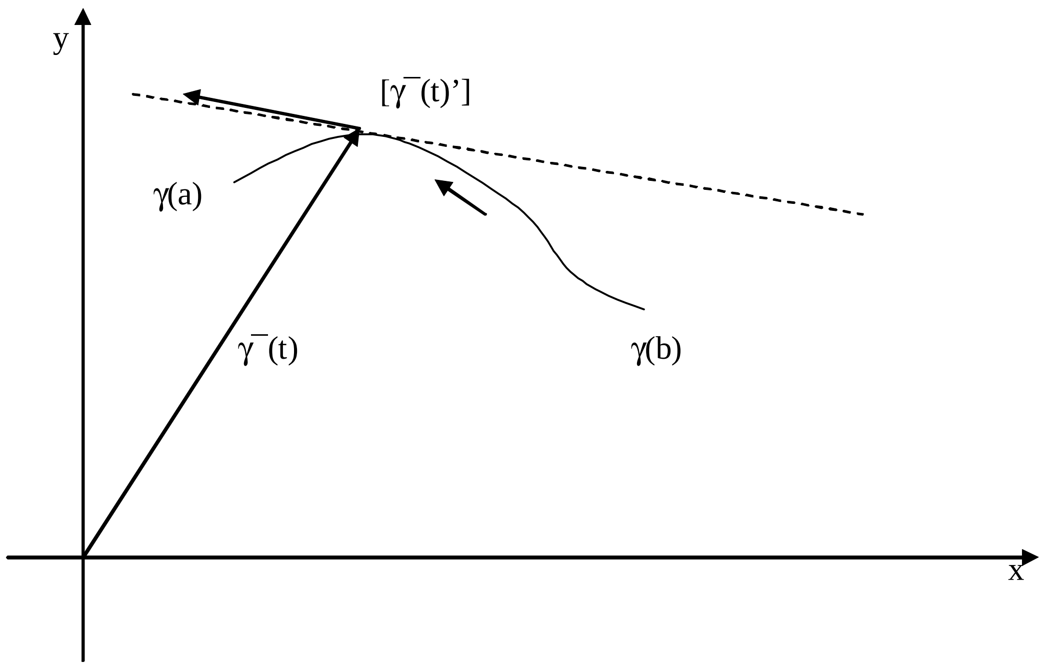
Definiţie. *Numim* ***opusul*** *lui* γ, *drumul definit*

$$\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{C} \quad , \quad \gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$$

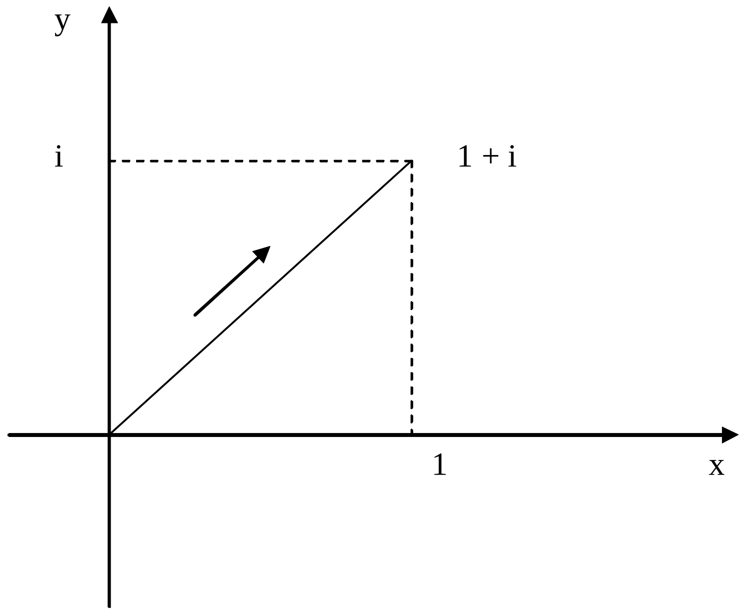
acesta parcurge traiectoria în sens opus, dar în acelaşi mod (cu acceaşi viteză) ca şi drumul γ
(se poate asocia cu ideea de a proiecta un cadrele unui film "înapoi", sau o bandă video "play" înapoi).
Se schimbă capetele drumului, ***punctul de start*** $\gamma(b)$ *şi* ***punctul final*** $\gamma(a)$.

Este clar că derivata opusului are aceeaşi direcţie dar sens contrar

$$[\gamma(t)^{-}]' = [\gamma(a+b-t)]' = \gamma'(a+b-t)\cdot(a+b-t)' = -\gamma'(a+b-t)$$



Exemple.
1. Segmentul ce uneşte punctele 0 si $1+i$ în complex (sau $(0,0)$ şi $(1,1)$ în planul $\mathbb{R}^2$) se poate parametriza în mai multe moduri



$$\gamma_1(t) = t + it \ \ , \ \ t \in [0,1] \quad , \quad \gamma_2(t) = t^2 + it^2 \ \ , \ \ t \in [0,1] \quad , \ \gamma_3(t) = \sin t + i \sin t \ \ , \ \ t \in [0, \pi/2]$$

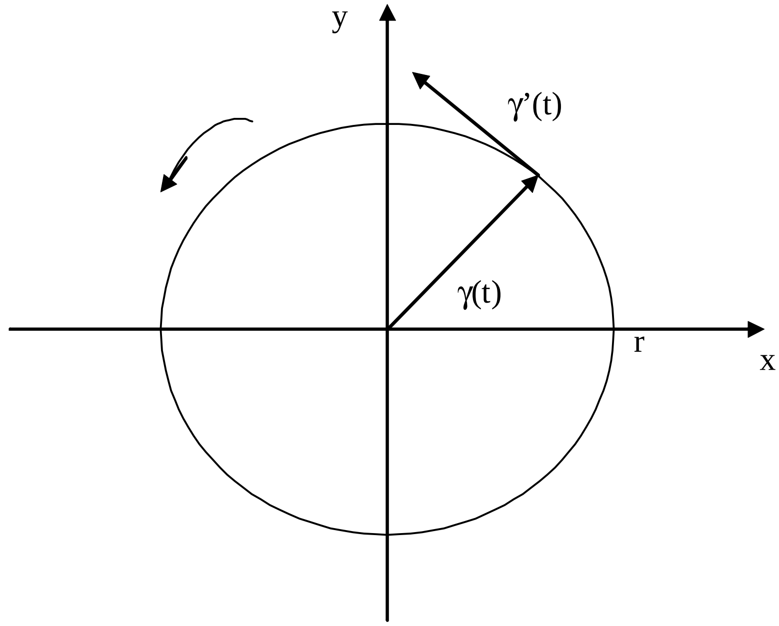
să remarcăm derivatele acestor drumuri şi opusele lor

$$\gamma_1'(t) = 1 + i \ \ , \ \ t \in [0,1] \quad , \quad \gamma_2'(t) = 2t + i2t \ \ , \ \ t \in [0,1] \quad , \ \gamma_3'(t) = \cos t + \cos t \ \ , \ \ t \in [0, \pi/2]$$

$$\gamma_1^-(t) = 1 - t + i(1-t) \ \ , \ \ t \in [0,1] \quad , \quad \gamma_2^-(t) = (1-t)^2 + i(1-t)^2 \ \ , \ \ t \in [0,1]$$

$$\gamma_3^-(t) = \sin(\pi/2 - t) + i \sin(\pi/2 - t) \ \ , \ \ t \in [0, \pi/2]$$

2. Cercul $\{|z| = r\}$ (cu centrul în 0 şi rază r) parcurs o dată în sens trigonometric.
Acesta este un drum închis şi injectiv



$$\gamma(t) = re^{it} = r(\cos t + i \sin t) \ \ , \ \ t \in [0, 2\pi] \ \text{ şi } \ \gamma'(t) = rie^{it}$$

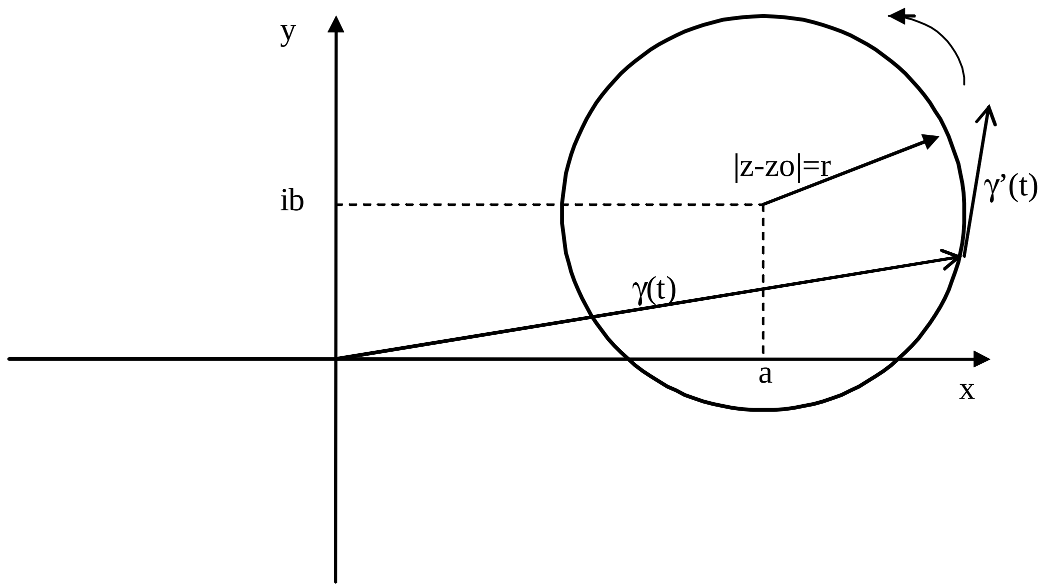
Pe "scurt" acest cerc se notează " $|z| = r$ "
În acest caz putem verifica uşor că vectorii $\overrightarrow{\gamma(t)} = r(\cos t, \sin t)$, $\overrightarrow{\gamma'(t)} = r(-\sin t, \cos t)$ sunt perpendiculari

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\gamma(t)} \ &\perp \ \overrightarrow{\gamma'(t)} \quad \Leftrightarrow \quad < \overrightarrow{\gamma(t)}, \overrightarrow{\gamma'(t)} >= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{\gamma(t)} \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} \ &= \ r\cos t \cdot (-r \sin t) + r \sin t \cdot r \cos t = 0 \end{aligned}$$

2'. Cercul $\{|z| = r\}$ (cu centrul în 0 şi rază r) parcurs de două ori în sens trigonometric.
Acesta este un drum închis dar nu injectiv

$$\gamma(t) = re^{it} = r(\cos t + i \sin t) \ \ , \ \ t \in [0, 2 \cdot 2\pi] = [0, 4\pi]$$

3. Cercul $\{|z - z_0| = r\}$ (cu centrul în z_0 şi rază r) parcurs o dată în sens trigonometric, $z_0 = a + ib$



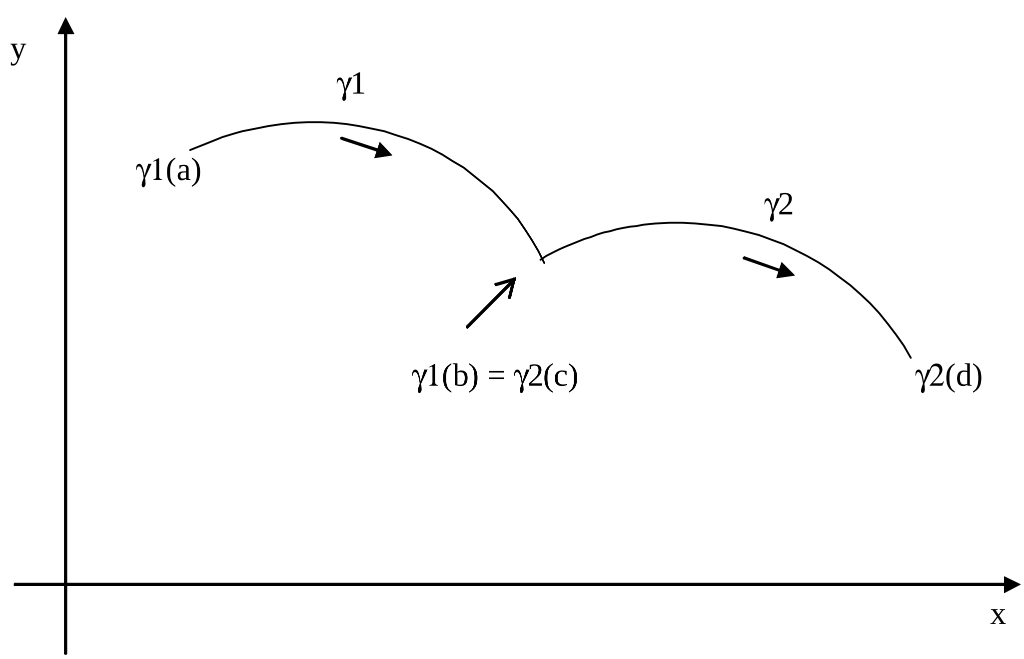
$$\gamma(t) = z_0 + re^{it} = z_0 + r(\cos t + i \sin t) \ \ , \ \ t \in [0, 2\pi] \ \ , \quad \text{sau} \ \ t \in [-\pi, \pi]$$

$$\gamma'(t) = rie^{it} = ri(-\sin t + i \cos t) \ \ , \ \ t \in [0, 2\pi]$$

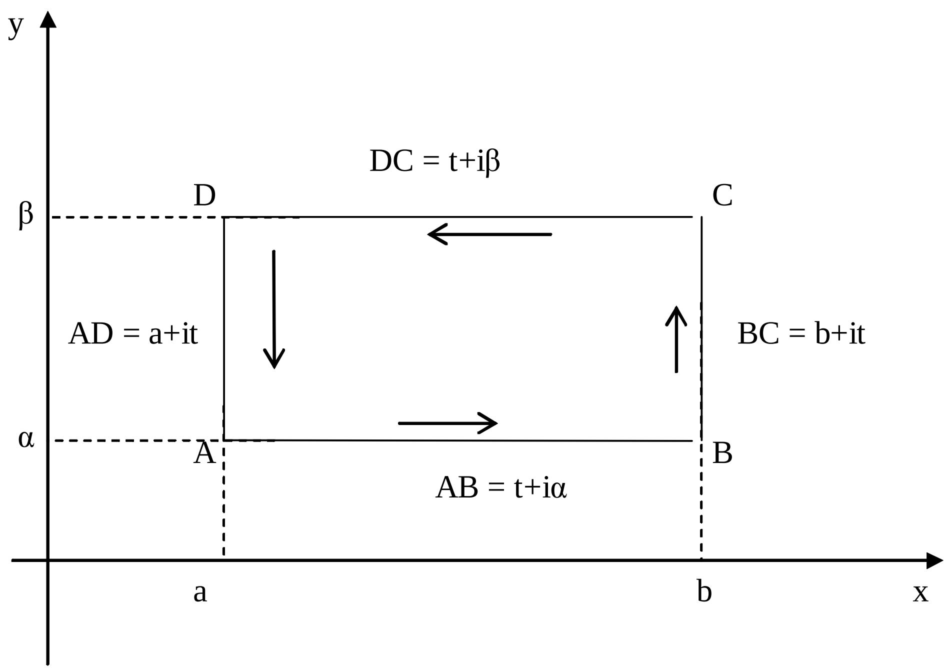
Pe "scurt" acest cerc se notează " $|z - z_0| = r$ ".

Definiţie. *Dacă două drumuri $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ şi $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ sunt astfel încât $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, adică punctul de sosire al unuia coincide cu punctul de plecare al celuilalt drum, atunci drumurile se pot reuni (inlănţui, juxtapune) formând drumul $\gamma_1 \cup \gamma_2$, (sau $\gamma_2 \cup \gamma_1$ dacă $\gamma_2(d) = \gamma_1(a)$) numit* ***reuniunea drumurilor*** *γ_1 şi γ_2 .*

(nu este necesară scrierea efectivă a unei parametrizări pentru $\gamma_2 \cup \gamma_1$)



Exemplu. Drumul format din conturul unui dreptunghi $ABCD$ se poate scrie ca reuniunea celor patru laturi $\gamma = AB \cup BC \cup CD \cup DA$, conturul fiind astfel parcurs în sens trigonometric. Este evident că reuniunea nu mai este un drum de clasă C^1, ci doar continuu.



Definiţie. *Un drum parametrizat $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ este de clasă C^1 pe porţiuni, dacă drumul este o reuniune finită de drumuri de clasă C^1 , $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_k$.*

În cele ce urmează toate drumurile considerate vor fi de clasă C^1 sau de clasă C^1 pe porţiuni, fapt ce nu va mai fi mentionat explicit pentru a nu încărca în mod inutil textul.

Drumul $\gamma = AB \cup BC \cup CD \cup DA$ descris mai înainte, este un exemplu de drum de clasă C^1 pe porţiuni. Este format din reuniunea a 4 segmente, AB, BC, CD, DA care sunt de clasă C^1. În punctele A, B, C, D nu există o unică tangentă la drum, deci drumul γ nu este de clasă C^1 în ansamblu, ci doar de clasă C^1 pe porţiuni.

Nu este necesară o parametrizare a drumului γ în intregime. Sunt suficiente parametrizările fiecărui segment în parte

- pentru AB , $z(t) = t + i\alpha$, $t \in [a,b]$
- pentru BC , $z(t) = b + it$, $t \in [\alpha, \beta]$
- pentru CD folosim opusul DC , $z(t) = t + i\beta$, $t \in [a,b]$
- pentru DA folosim opusul AD , , $z(t) = \alpha + it$, $t \in [\alpha, \beta]$

Definiţie. *Două drumuri $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ şi $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ sunt* ***echivalente (****sau* ***parametrizarile sunt echivalente)*** *$\gamma_1 \sim \gamma_2$ dacă există o funcţie $h : [a,b] \to [c,d]$ de clasă C^1 strict crescătoare, bijectivă aşa încât*

$$\gamma_1 = \gamma_2 \circ h \quad , \quad \textit{sau } \gamma_1(t) = \gamma_2(h(t)) \ \textit{ pentru orice } t \in [a,b]$$

să observăm că două drumuri echivalente au aceleaşi capete şi aceeaşi urmă.

Aceasta definiţie nu este foarte utilă pentru a verifica practic echivalenţa a două drumuri. Următoarea consecinţă este suficientă în cazul unor drumuri injective.

Consecinţă. *Dacă $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ şi $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ sunt drumuri de clasă C^1 injective cu aceleaşi capete*

$$\gamma_1(a) = \gamma_2(c) \ \text{ şi } \ \gamma_1(b) = \gamma_2(d)$$

şi aceeaşi urmă (imagine) $\gamma_1([a,b]) = \gamma_2([c,d])$, atunci γ_1 şi γ_2 sunt echivalente.

Demonstraţie. Se alege funcţia $h : [a,b] \to [c,d]$ astfel $h = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$, despre care se arată că este strict crescătoare şi de clasă C^1.

$\blacksquare$

Exemple. Drumurile menţionate mai înainte, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ce parcurg segmentul 0 , $(1+i)$ sunt echivalente.

Definiţie.
O mulţime $D \subset \mathbb{C}$ se numeşte deschisă dacă pentru orice $z_0 \in D$ există un disc deschis $\{|z - z_0 < r|\} \subset D$.

Definiţie. *Fie o funcţie $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, continuă pe $D \subset \mathbb{C}$ mulţime deschisă, şi $\gamma : [a,b] \longrightarrow D \;\; , a < b \in \mathbb{R}$ drum de clasă C^1. Se defineşte* ***integrala funcţiei f pe drumul*** *γ astfel*

$$\int_\gamma f \overset{not}{=} \int_\gamma f(z)dz \overset{def}{=} \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}_{E} dt \overset{def}{=} \int_a^b (\operatorname{Re} E)dt + i \int_a^b (\operatorname{Im} E)dt$$

Comentariu. Cele două integrale Riemann au sens, deoarece $\operatorname{Re} E$ şi $\operatorname{Im} E$ sunt funcţii continue.

Aceasta pentru că f este funcţie continuă, γ este de clasă C^1 deci γ şi γ' sunt continue, şi astfel funcţia $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ este funcţie continuă. Prin urmare partea reală şi partea imaginară ($\operatorname{Re} E$ şi $\operatorname{Im} E$) sunt de asemenea funcţii continue.

Unele texte folosesc pentru parametrizare notaţia

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \;,\; z'(t) = x'(t) + iy'(t) \;\text{ sau }\; \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$$

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)dt$$

Observaţie. *Integrala nu depinde de parametrizare, în sensul că pentru drumuri echivalente $\gamma_1 \sim \gamma_2$ se obţine aceeaşi valoare a integralei*

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \Rightarrow \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

Demonstraţie. Conform definiţiei avem $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$ şi deci $\gamma_1'(t) = \gamma_2'(h(t))h'(t)$

$$\int_{\gamma_1} f = \int_a^b f(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)dt = \int_a^b f(\gamma_2(h(t))) \cdot \gamma_2'(h(t))h(t)dt = \int_c^d f(\gamma_2(s)) \cdot \gamma_2'(s)ds = \int_{\gamma_2} f$$

cu schimbarea de variabilă $s = h(t) \;\; , s \in [c,d]$. $\blacksquare$

Exemple.

i) Considerăm drumul $\gamma(t) = t + it \;\;,\;\; t \in [0,1] \;,\; \gamma'(t) = 1 + i \cdot 1$ şi calculăm integrala

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_0^1 (\gamma(t))^2 \cdot \gamma'(t)dt = \int_0^1 (t+it)^2 \cdot (1+i)dt = \int_0^1 t^2(1+i)^2 \cdot (1+i)dt = (1+i)^3 \int_0^1 t^2 dt = (1+i)^3 \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{(1+i)^3}{3}$$

ii) Considerăm drumul $\gamma(t) = t^2 + it^2 \;\;,\;\; t \in [0,1] \;,\; \gamma'(t) = 2t + i \cdot 2t$, şi calculăm aceeaşi integrală observăm drumul că este echivalent cu drumul definit la i)

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_0^1 (\gamma(t))^2 \cdot \gamma'(t)dt = \int_0^1 (t^2 + it^2)^2 \cdot (2t + i2t)dt = \int_0^1 t^4(1+i)^2 \cdot 2t(1+i)dt = (1+i)^3 \int_0^1 2t^5 dt =$$

$$= (1+i)^3 \left.\frac{2t^6}{6}\right|_0^1 = \frac{(1+i)^3}{3}$$

Remarcăm faptul că în ambele exemple obţinem aceaşi valoare a integralei, folosind parametrizări diferite.

iii) Considerăm drumul $\gamma(t) = t(1-i)$, $t \in [0,2]$, $\gamma'(t) = (1-i)$

$$\int_\gamma \overline{z}dz = \int_0^2 \overline{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t)dt = \int_0^2 \overline{t(1-i)} \cdot (1-i)dt = \int_0^2 t(1+i)\cdot(1-i)dt = \int_0^2 (1+1)tdt = t^2\Big|_0^2 = 4$$

Proprietăţi (ale integralei complexe)

1) *liniaritate*

$$\text{i)} \quad \int_\gamma f+g = \int_\gamma f + \int_\gamma g \qquad \text{ii)} \quad \int_\gamma \alpha f = \alpha \int_\gamma f$$

pentru orice funcţii continue f, g *şi orice număr* $\alpha \in C$.

2)

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

3) *integrând de-a lungul drumului opus* γ^- *obţinem*

$$\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f$$

4) *"Newton - Leibniz", dacă există* $g : D \to C$ *derivabilă cu* $g'(t) = E(t)$ *(notaţia din definiţie) atunci*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}_{E}dt = \int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a)$$

4') *dacă funcţia* f *are primitive* $F' = f$ *, atunci*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

5) *dacă funcţia* f *are primitive* $F' = f$ *, atunci integrala pe orice drum închis este zero*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

6)

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\, dl = \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b |f(x(t)+iy(t))| \cdot |x'(t)+iy'(t)|\, dt$$

aici "dl" desemnează integrala curbilinie de "primul tip".

Demonstraţie. (1) şi (2) se deduc uşor ca şi pentru integrala Riemann, sau integrale curbilinii.
Pentru (3), opusul unui drum este $-\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$ şi deci derivand obţinem $[-\gamma(t)]' = \gamma'(a+b-t)\cdot(-1)$ şi

$$\int_{-\gamma} f = \int_a^b f(-\gamma(t)) \cdot [-\gamma(t)]'\, dt = \int_a^b f(\gamma(a+b-t)) \cdot \gamma'(a+b-t)dt = \int_b^a f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)(-1)(-dt) = -\int_\gamma f$$

cu schimbarea de variabilă $s = a+b-t$, $ds = -dt$.

Pentru 4) observăm că $g = \operatorname{Re} g + i \operatorname{Im} g$ deci derivând obţinem

$$g'(t) = [\operatorname{Re} g(t)]' + i[\operatorname{Im} g(t)]' = E(t)$$

şi deci

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}_{E} dt = \int_a^b g'(t)dt = \int_a^b [\operatorname{Re} g(t)]' + i[\operatorname{Im} g(t)]' dt =$$

$$= \int_a^b [\operatorname{Re} g(t)]' dt + i \int_a^b [\operatorname{Im} g(t)]' dt = [\operatorname{Re} g(b) - \operatorname{Re} g(a)] + i[\operatorname{Im} g(b) - \operatorname{Im} g(a)] = g(b) - g(a)$$

Pentru 4') observăm că $[F(\gamma(t))]' = F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ şi aplicăm 4)
Pentru (5) avem

$$\oint_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b [F(\gamma(t))]'\, dt = (F(\gamma(t)))|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

deoarece drumul fiind închis $\gamma(b) = \gamma(a)$.
Pentru (6), să remarcăm

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \right| \quad \text{şi} \quad \int_\gamma |f(z)|\, dl = \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\, dt$$

notăm

$$\theta = \arg \left(\int_\gamma f(z)dz \right) \quad \text{deci} \quad \int_\gamma f(z)dz = e^{i\theta} \int_\gamma f(z)dz$$

şi atunci putem scrie

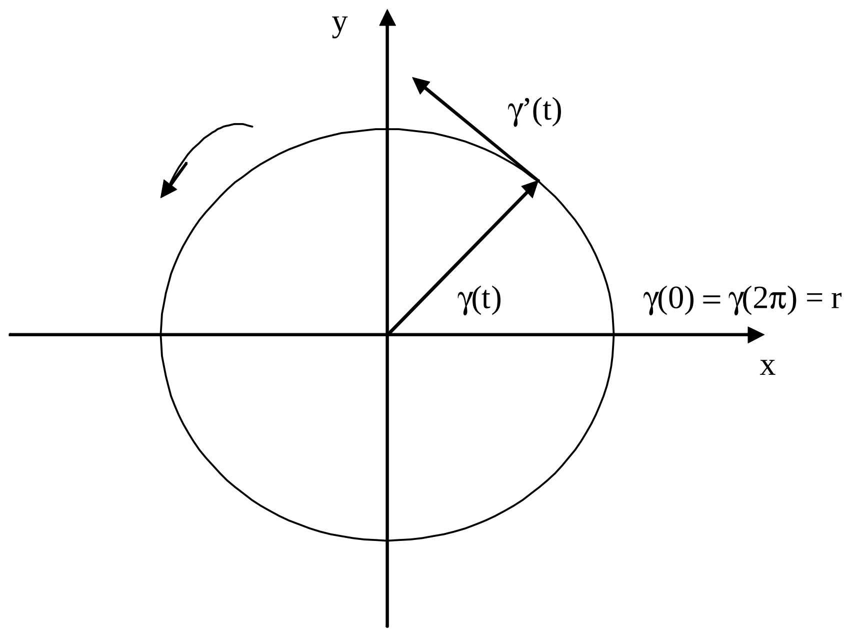
$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| = e^{-i\theta} \int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma e^{-i\theta} f(z)dz =$$

$$= \operatorname{Re} \left(\int_\gamma e^{-i\theta} f(z)dz \right) = \int_a^b \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t) \right) dt \leq \int_a^b \left| e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t) \right| dt = \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\, dt$$

■

Exemple.
1) Calculăm integrala următoarelor funcţii, pe cercul de rază r cu centrul în origine " $|z| = r$ ", parcurs o dată în sens trigonometric.

$$\oint_{|z|=r} z^n dz \quad \text{pentru } n \in \mathbb{Z} \ , \ n \neq -1 \ , \ \text{respectiv} \quad \oint_{|z|=r} \frac{1}{z} dz$$



Notăm $\oint$ pentru a indica integrala pe un drum închis.
Considerăm parametrizarea cercului

$$\gamma(t) = re^{it} = r(\cos t + i \sin t) \ \ , \ \ t \in [0, 2\pi] \ \text{ si } \ \gamma'(t) = rie^{it}$$

Pentru $n \geq 0$ sau $n \leq -2$, funcţia "z^n" are primitive $(\frac{1}{n+1} z^{n+1})' = z^n$ şi deci conform proprietăţii 5) integrala pe un cerc (drum închis)

$$\oint_{|z|=r} z^n dz = 0$$

Ca simplu exerciţiu, putem să calculăm şi "direct" folosind definiţia integralei complexe :

$$\oint_{|z|=r} z^n dz = \int_0^{2\pi} [\gamma(t)]^n \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} (r)^{n+1} i (e^{it})^{n+1} dt = r^{n+1} \int_0^{2\pi} ie^{it(n+1)} dt = r^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} e^{it(n+1)} \right) \Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= r^{n+1} \frac{1}{n+1} \left[\left(\underbrace{\cos(n+1)2\pi}_{-1} + i \underbrace{\sin(n+1)2\pi}_{0} \right) - \left(\underbrace{\cos 0}_{1} + i \underbrace{\sin 0}_{0} \right) \right] = 0$$

Pentru $n = -1$, calculăm folosind definiţia (deoarece funcţia "$\frac{1}{z}$" nu are primitive definite pe $\mathbb{C} \backslash \{0\}$)

$$\oint_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

în concluzie

$$\oint_{|z|=r} z^n dz = 0 \ \text{ pentru } n \in \mathbb{Z} \ \ , \ \ n \neq -1 \ \text{ si } \ \oint_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

indiferent de raza cercului r.
■

Observaţie. Dacă cercul este parcurs în sens trigonometric de mai multe ori, de 3 ori de exemplu, parametrizarea este

$$\gamma(t) = re^{it} = r(\cos t + i \sin t) \quad , \quad t \in [0, \underbrace{3 \cdot 2\pi}_{6\pi}] \ \text{ şi } \ \gamma'(t) = rie^{it}$$

Valoarea integralei se modifică corespunzator

$$\oint\limits_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = \int\limits_0^{6\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \int\limits_0^{6\pi} idt = 6\pi i$$

Pentru o parcurgere de n-ori obţinem

$$\gamma(t) = re^{it} = r(\cos t + i \sin t) \quad , \quad t \in [0, \underbrace{n \cdot 2\pi}_{2n\pi}] \ \text{ si } \ \gamma'(t) = rie^{it}$$

$$\oint\limits_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = \int\limits_0^{2n\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \int\limits_0^{2n\pi} idt = 2n\pi i$$

Nu există un mod "consacrat" de a nota de câte ori este parcurs un cerc. Acest fapt este menţionat separat în mod explicit.

2) Integrăm funcţii "similare", pe cercul de rază r cu centrul în z_0 " $|z - z_0| = r$ ", parcurs o dată în sens trigonometric, obţinem:

$$\oint\limits_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n dz = 0 \ \text{ pentru } n \in \mathbb{Z} \ , \ n \neq -1 \ , \ \text{ respectiv } \ \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

Demonstraţia este identică cu cea precedentă.

Pentru $n \geq 0$ sau $n \leq -2$, funcţia "$(z - z_0)^n$" are primitive $(\frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1})' = (z - z_0)^n$ şi deci conform proprietăţii 5) integrala pe un cerc (drum închis)

$$\oint\limits_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n dz = 0$$

Pentru $n = -1$ folosim parametrizarea cercului " $|z - z_0| = r$ "

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it} = z_0 + r(\cos t + i \sin t) \quad , \quad t \in [0, 2\pi] \ \text{ şi } \ \gamma'(t) = rie^{it} \quad , \quad z - z_0 = re^{it}$$

calculând obţinem

$$\oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} dz = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \int\limits_0^{2\pi} idt = 2\pi i$$

■

Pentru a înţelege ideea de "interior" al unui drum închis şi noţiunea de "simplu conex", este nevoie de următoarea teoremă (în versiune simplificată).

Teorema.(Jordan) *Fie* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *(sau echivalent* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *) drum de clasă* C^1 *pe porţiuni, închis şi injectiv.*

Complementara imaginii drumului $\mathbb{C} \backslash \gamma([a, b])$ *este formată din două mulţimi deschise conexe disjuncte.*

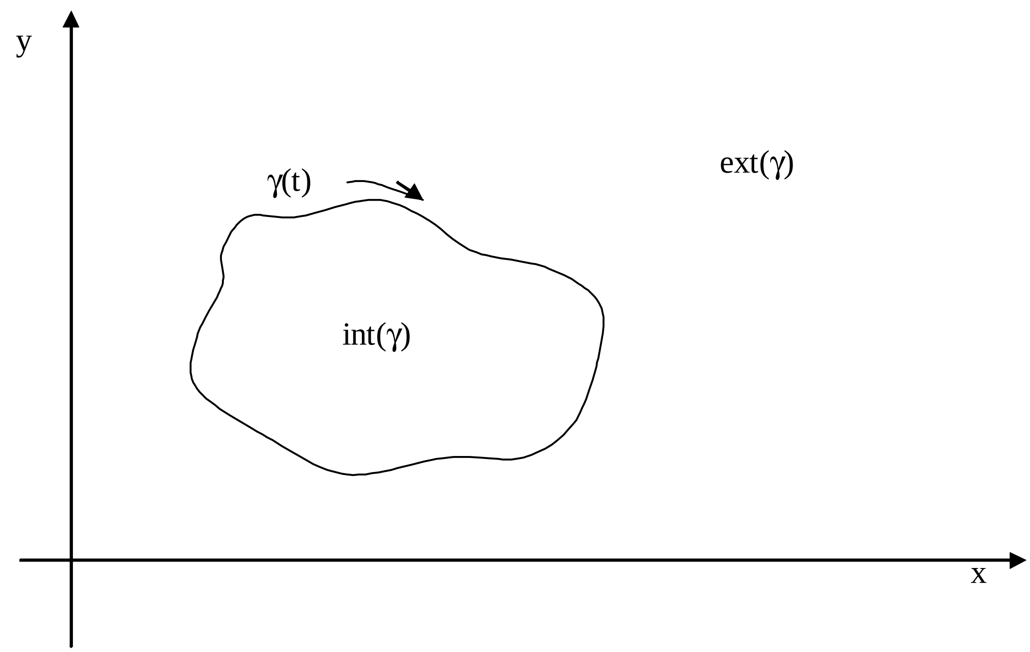
Una din ele este

- *mărginită numită* ***"interiorul drumului*** γ*" se notează cu* $\operatorname{int} \gamma$,
- *cealaltă este nemărginită numită* ***"exteriorul drumului*** γ*" se notează cu* $\operatorname{ext} \gamma$

În particular teorema afirmă faptul că interiorul unui drum închis şi injectiv este simplu conex.

Cu alte cuvinte, "planul complex" ("planul" $\mathbb{R}^2$) se "împarte" în două mulţimi deschise disjuncte, una este *mărginită* numită "interiorul drumului γ" , cealaltă este *nemărginită* numită "exteriorul drumului γ" , iar frontiera lor comună este imaginea drumului γ.

În plus putem observa că orice drum continuu ce uneşte un punct din "interior" cu un punct din "exterior" intersectează în mod necesar drumul γ.



Deşi enunţul este extrem de simplu şi intuitiv evident, demonstraţia nu este elementară. Enunţul se formulează pentru dumuri continue "rectificabile". Noţiunea de drum rectificabil nu face obiectul cursului de faţă, motiv pentru care am prezentat un enunţ simplificat.

Reamintim defniţia unei mulţimi conexe.

Definiţie. *O mulţime deschisă $D \subset \mathbb{C}$ este* ***conexă*** *(sau* ***conexă prin arce****) dacă orice două puncte $z, w \in D$ se pot "uni" printr-un drum $\gamma : [a, b] \to D$ (inclus în D), adică $\gamma(a) = z \ \ , \ \ \gamma(b) = w$.*

Definiţie. *O mulţime deschisă $D \subset \mathbb{C}$ este* ***simplu conexă****, dacă orice drum închis, injectiv $\gamma : [a, b] \to D$ are interiorul $\operatorname{int}\gamma \subset D$. Se mai numeşte şi "****domeniu simplu conex****".*

Nu este o proprietate uşor de verificat. Urmatoarele observaţii oferă versiuni mai simple.

Observaţie.
O mulţime deschisă $D \subset C$ şi mărginită, este simplu conexă dacă atât mulţimea D cât şi complementara sa $\mathbb{C} \backslash D$, sunt conexe.

Observaţie.
Reamintim că o mulţime "stelată" este simplu conexă. De asemenea orice mulţime convexă este conexă.

Teorema.(Cauchy) *Fie $D \subset \mathbb{C}$ domeniu simplu conex şi o funcţie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, olomorfă (derivabilă) pe D. Atunci pentru orice drum închis $\gamma : [a, b] \to D$ (inclus în D) avem*

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Demonstraţia, nu este elementară, nu o prezentăm.

Comentariu.
Se poate renunţa la condiţia "domeniu simplu conex", dar atunci teorema se aplică numai pentru drumuri închise, injective cu interiorul inclus în domeniu, ceea ce este un dezavantaj.

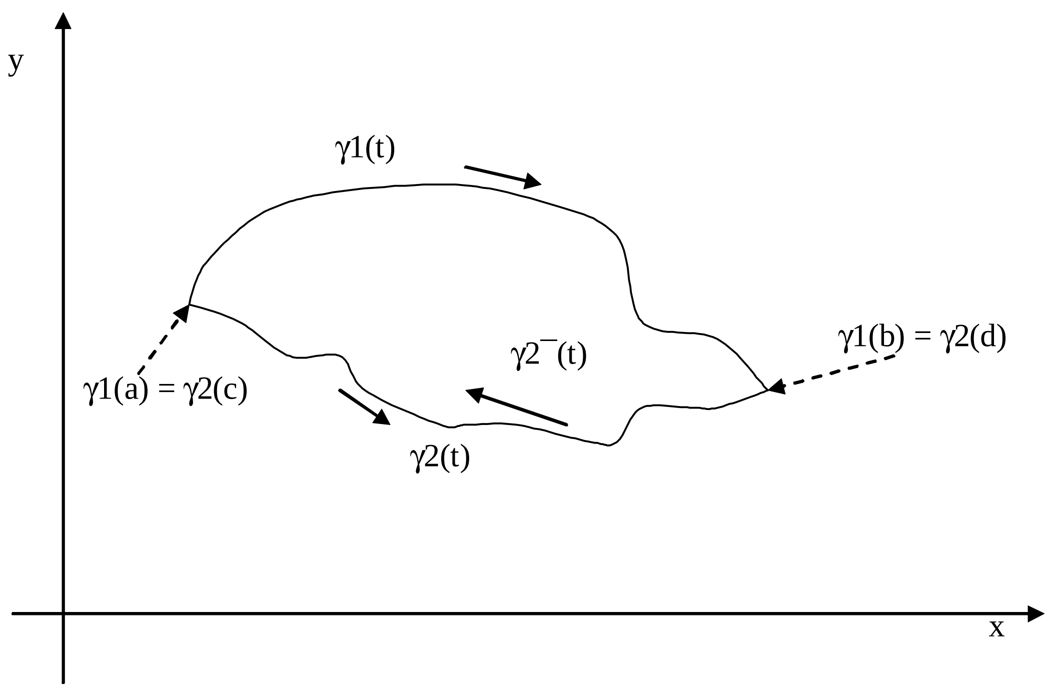
În versiunea de mai înainte, este nevoie de noţiunea "simplu conex", dar teorema se aplică pentru orice drum închis inclus in domeniu.

Consecinţa 1. *În condiţiile teoremei, $D \subset \mathbb{C}$ domeniu simplu conex şi o funcţie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, olomorfă pe D,* *integrala funcţiei nu depinde de drum ci numai de capetele drumului, mai precis*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

dacă drumurile $\gamma_1 : [a,b] \to D$ *şi* $\gamma_2 : [c,d] \to D$ *au aceleaşi capete:* $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ *şi* $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$.

Demonstraţie. Considerăm drumul $\Gamma = \gamma_1 \cup (\gamma_2^-)$ format din γ_1 şi opusul drumului γ_2.



Γ este un drum închis în D şi conform teoremei lui Cauchy

$$0 = \oint_{\Gamma} f = \int_{\gamma_1 \cup (\gamma_2^-)} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2^-} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f \quad \text{deci} \quad \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

■

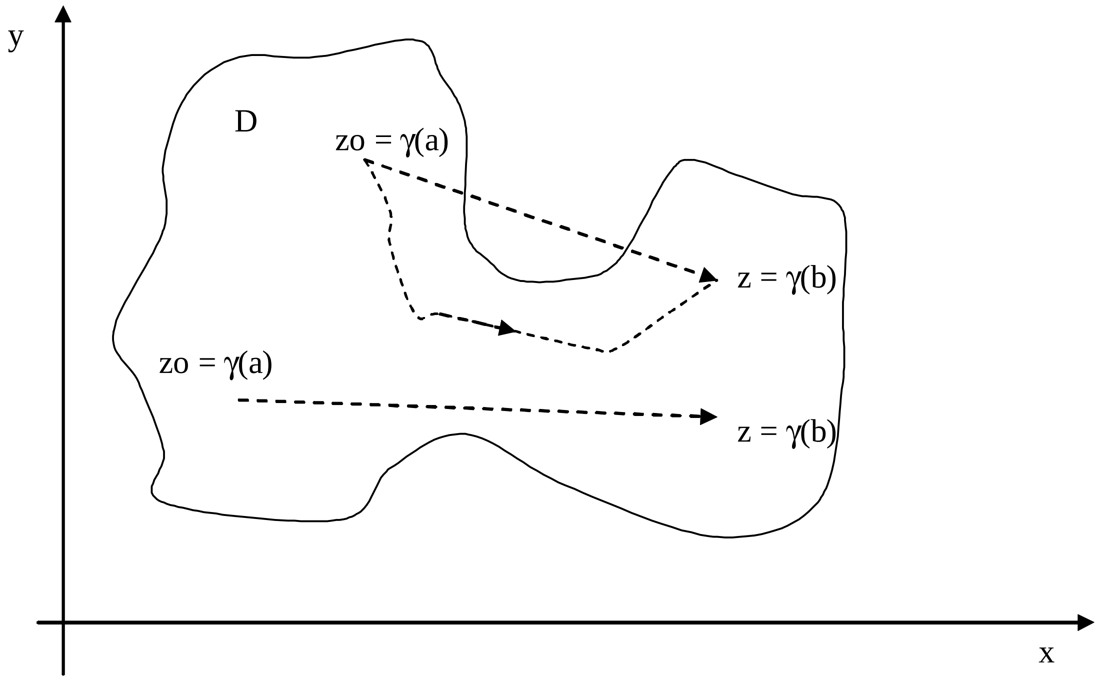
Consecinţa 2. *O funcţie* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, *olomorfă pe* $D \subset \mathbb{C}$ *domeniu simplu conex are primitive pe* D. *Mai precis o primitivă este definită astfel*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f$$

Demonstraţie. Fie $z_0 \in D$ un punct oarecare. Conform consecinţei 1, integrala nu depinde de drum ci numai de capete.

Deci pentru orice alt punct $z \in D$ integrala $\int_{\gamma} f$ are aceeaşi valoare pentru orice drum γ ce uneşte punctul z_0 cu punctul z,

($\gamma : [a,b] \to D$, $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z$).



Prin urmare se poate defini funcţia $F : D \to \mathbb{C}$ prin $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f$. Integrala "de la z_0 la z " înseamnă pe orice drum care uneşte punctul z_0 cu punctul z şi care este inclus în domeniul D. Conform consecinţei 1, indiferent de drum, valoarea integralei este aceeaşi.

In figură se vede că pentru anumită alegere a punctelor z_0 şi z , segmentul ce uneşte punctele z_0 şi z (aparent cel mai "simplu" drum) nu este în interiorul domeniului D. Conform consecinţei 1, integrala se face de-a lungul oricărui (alt) drum inclus în domeniul D, care uneşte z_0 cu z.

Folosind definitia derivatei se arată că funcţia F este derivabilă pe D şi că $F'(z) = f(z)$.

■

Consecinţa 3. *Pentru orice drum γ injectiv, închis, de clasă C^1 pe porţiuni, cu $\gamma(t) \neq z_0$ (γ nu trece prin z_0), parcurs o dată în sens trigonometric:*

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i & , \quad \text{dacă } \ z_0 \in \operatorname{int} \gamma \\ 0 & , \quad \text{dacă } \ z_0 \notin \operatorname{int} \gamma \end{cases}$$

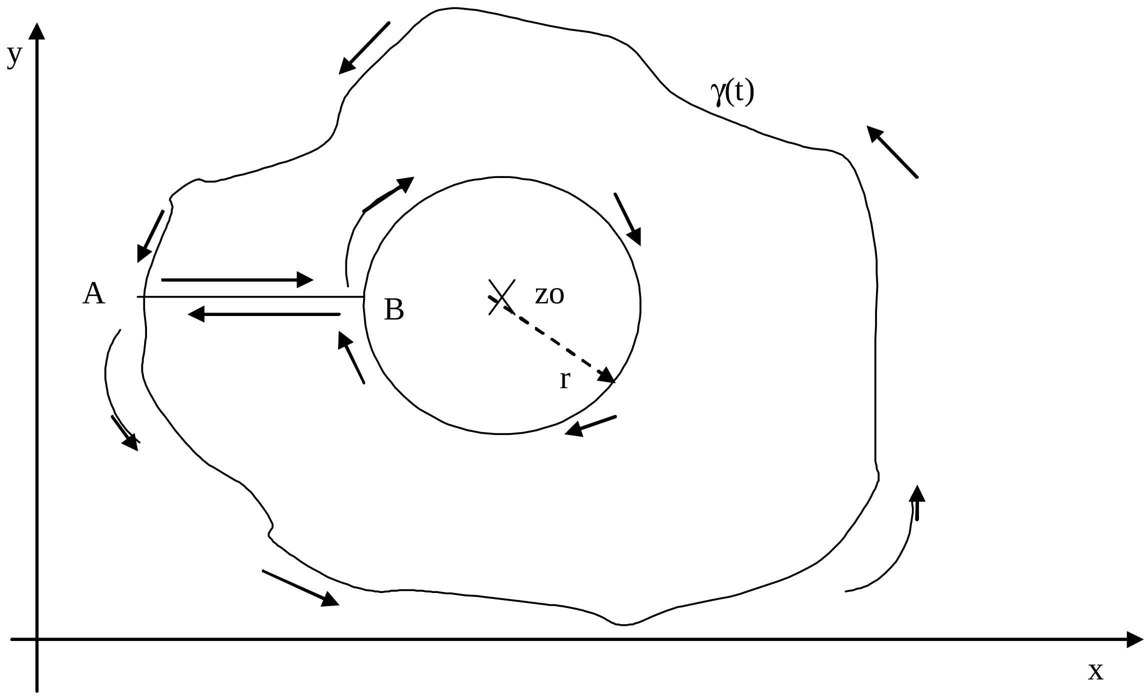
Demonstraţie.

Dacă $z_0 \notin \operatorname{int} \gamma$, atunci funcţia $\frac{1}{z - z_0}$ este olomorfă (derivabilă) pe interiorul $\operatorname{int} \gamma$ (care este simplu conex), deci conform teoremei lui Cauchy

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 0$$

Dacă $z_0 \in \operatorname{int} \gamma$, considerăm un disc $\{|z - z_0| \leq r\}$ inclus în interiorul drumului γ şi alegem punctele A şi B aşa incât segmentul AB să fie inclus în interiorul lui γ dar în exteriorul discului.

Considerăm drumul închis $\Gamma = y \cup AB \cup \{|z - z_0| = r\} \cup BA$,



Γ este format din reuniunea a 4 drumuri :
- drumul γ parcurs în sens trigonometric pornind din punctul A, (şi înapoi in A)
- segmentul AB , de la A la B
- cercul $\{|z - z_0| = r\}$ parcurs în sens invers trigonometric, pornind din B (şi înapoi in B)
- segmentul BA , de la B la A

Să observăm că $z_0 \notin \operatorname{int}\Gamma$, deci raţionăm exact ca mai înainte:

funcţia $\frac{1}{z-z_0}$ este olomorfă (derivabilă) pe interiorul $\operatorname{int}\Gamma$ (care este simplu conex), deci conform teoremei lui Cauchy

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z - z_0} dz = 0$$

Deci

$$0 = \oint_\Gamma \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_\gamma + \int_{AB} - \oint_{|z-z_0|=r} + \int_{BA} = \oint_\gamma + \int_{AB} - \oint_{|z-z_0|=r} - \int_{AB} = \oint_\gamma - \oint_{|z-z_0|=r}$$

Reamintim că $\oint$ simbolizează integrala pe drum închis parcurs în sens trigonometric.

Folosim faptul că integrala pe opusul unui drum δ este $\int_{-\delta} = -\int_\delta$

Cercul fiind parcurs în sens invers trigonometric, integrala pe această porţiune este $-\oint_{|z-w|=r}$

Integrala pe segmentul BA este $-\int_{AB}$

În final folosim calculul din exemplul 2) şi obţinem

$$0 = \oint_\gamma - \oint_{|z-z_0|=r} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

■

Observaţii. Teorema lui Cauchy oferă un criteriu de a arăta că un domeniu nu este simplu conex, sau o funcţie nu este olomorfă.

i) Dacă o funcţie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, olomorfă pe $D \subset \mathbb{C}$ are integrala nenulă pe un drum închis inclus în D (există astfel de drum)

$$\oint_{\gamma} f \neq 0$$

atunci în mod necesar domeniul nu este simplu conex.

ii) Dacă o funcţie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, are integrala nenulă pe un drum închis inclus în D (există astfel de drum) şi este D simplu conex

$$\oint_{\gamma} f \neq 0$$

atunci în mod necesar funcţia nu este olomorfă pe D

Exemple.

i) Funcţia $\frac{1}{z}$ este olomorfă pe $D = \mathbb{C} \backslash \{0\}$, dar pentru cercul de rază r cu centrul în 0 , parcurs o dată în sens trigonometric $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, integrala este nenulă

$$\oint_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i \neq 0$$

deci în mod necesar domeniul $D = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ nu este simplu conex.

ii) Funcţia $f(z) = \overline{z}$ este definită pe $\mathbb{C}$ care este evident simplu conex. Dar integrala pe drumul (cercul) γ definit mai înainte

$$\int_{\gamma} \overline{z} dz = \int_0^{2\pi} \overline{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \overline{re^{it}} rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} re^{-it} rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} r^2 i dt = r^2 2\pi i \neq 0$$

deci în mod necesar funcţia nu este olomorfă pe $\mathbb{C}$.

Teorema. (Formula integrală Cauchy) *Fie $D \subset \mathbb{C}$ mulţime deschisă şi o funcţie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, olomorfă (derivabilă) pe D. Atunci pentru orice drum închis, injectiv $\gamma : [a, b] \to D$ cu* $\operatorname{int} \gamma \subset D$ *şi orice $z_0 \in \operatorname{int} \gamma$ avem*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

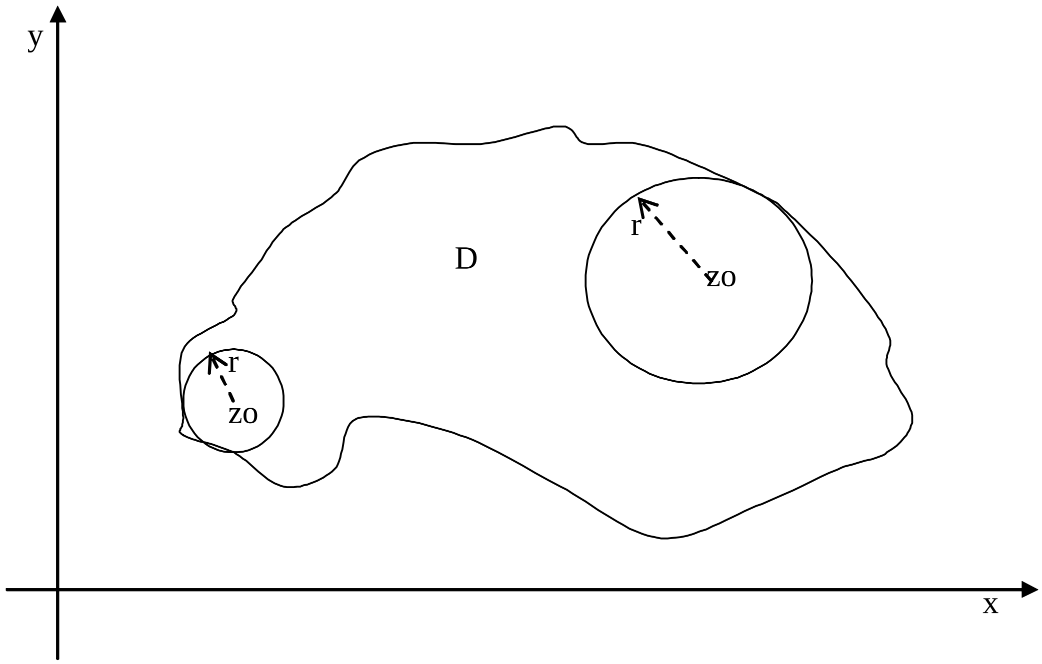
Nu prezentăm demonstraţia. Se foloseşte aceeaşi idee ca la consecinţa 3.

1.1 Funcţii analitice.

Definiţie. *O funcţie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, ($D \subset \mathbb{C}$ mulţime deschisă), se numeşte* ***analitică pe*** *D, dacă pentru orice punct $z_0 \in D$ există o serie de puteri $\sum\limits_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ şi un disc centrat în z_0* inclus $\{|w - z_0| < r\} \subset D$ *aşa încât*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad , \text{ pentru orice } z \in \{|w - z_0| < r\}$$

Seriile sunt diferite pentru fiecare punct z_0 , la fel diferă şi razele discurilor.



Observaţie. Este evident că orice funcţie analitică este olomorfă (fiind suma unei serii de puteri) şi că

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad , \ \text{pentru orice } n \geq 0$$

Deci funcţiile analitice sunt dezvoltabile în serie Taylor în orice punct din domeniul de definiţie.

Teorema. (Weierstrass-Riemann-Cauchy)
O funcţie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, ($D \subset \mathbb{C}$ mulţime deschisă), este olomorfă pe D dacă şi numai dacă f este analitică pe D.

Nu prezentăm demonstraţia. Aceasta foloseşte în mod esenţial proprietăţile integralei complexe.

Consecinţe.
1) o funcţie olomorfă este indefinit derivabilă (fiind suma unei serii de puteri) şi
dezvoltabilă în serie Taylor în orice punct z_0 pe cel mai mare disc centrat în z_0 şi inclus în domeniul de definiţie
2) dacă $f = u + iv$ este olomorfă, atunci funcţiile u, v sunt de clasă C^∞ (au derivate parţiale de orice ordin)

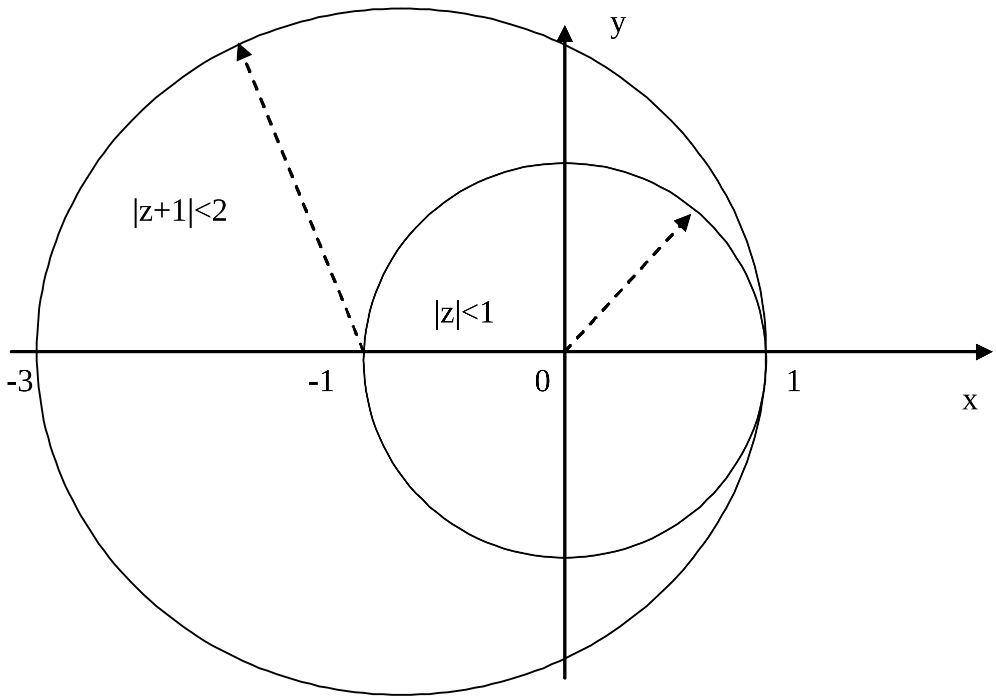
Exemplu.
Funcţia

$$f(z) = \frac{1}{1-z} : \mathbb{C} \backslash \{1\} \to \mathbb{C}$$

se dezvoltă în serie Taylor astfel

$$\text{i)} \quad f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad , \ \text{pentru orice} \quad |z| < 1$$

$$\text{ii)} \quad f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-(z+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{(z+1)}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{z+1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n \quad , \ \text{pentru orice} \quad |z+1| < 2$$



Sa observăm că într-adevar cel mai mare disc inclus în domeniul de definiţie $D = \mathbb{C} \backslash \{1\}$
i) centrat în 0 are raza 1, respectiv
ii) centrat în -1 are raza 2
■

1.2 "Zerouri" şi Puncte Singulare

Definiţie. Un punct $z_0 \in D$ pentru care $f(z_0) = 0$ se numeşte "zerou" (rădăcină) pentru funcţia $f : D \to \mathbb{C}$.

Sau "zero" ("zerou" elimină eventuala confuzie cu 0 "zero" ca element neutru faţă de adunare), plural "zerouri".
Sunt familiare rădăcinile (zerourile) polinoamelor cu coeficienţi numere complexe.
Mai precis orice polinom cu coeficienţi numere complexe ($a_0, a_1, a_2, ..., a_p \in \mathbb{C}$)

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_p z^p$$

de grad p ($a_p \neq 0$) are exact p rădăcini numere complexe $z_1, z_2, ..., z_p \in \mathbb{C}$.

Exemple.
1) $z^2 + 1$ are două rădăcini distincte $z_{1,2} = \pm i$
2) $z^3 + 1$ are trei rădăcini distincte

$$z_1 = -1 \ , \ z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \ , \ z_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

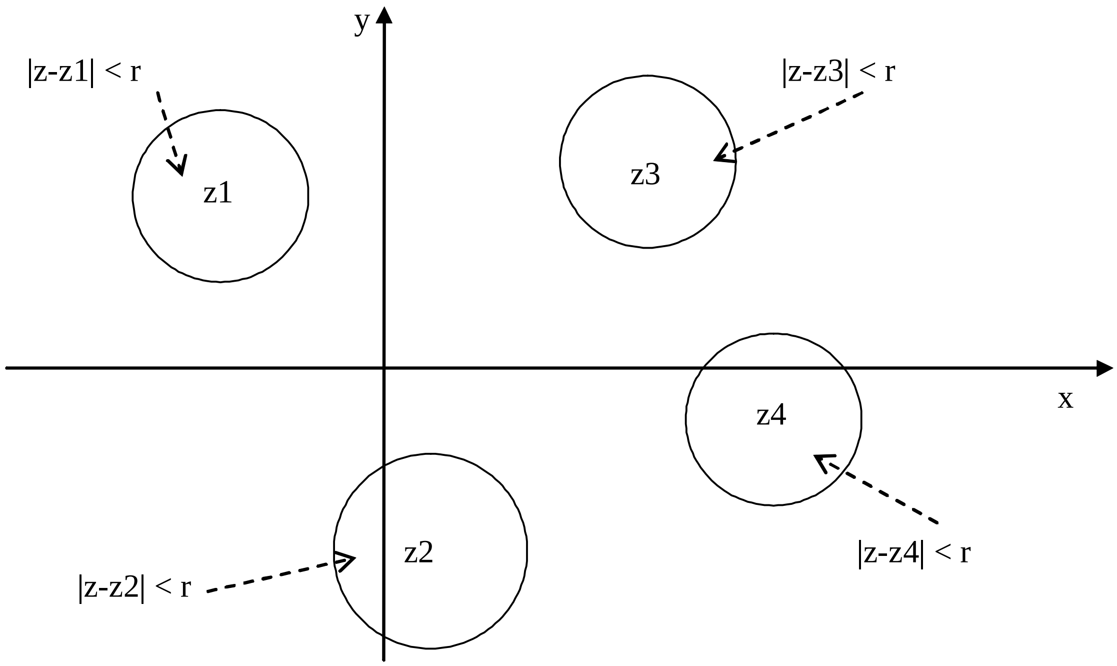
4) $z^4 + 1$ are 4 rădăcini distincte

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \ , \ z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}} \ , \ z_3 = e^{i\frac{3\pi}{4}} \ , \ z_4 = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \ ,$$

5) $z^3 - 5z^2 + 7z - 3 = (z-1)^2(z-3)$ are trei rădăcini $z_1 = 1$, $z_2 = 1$, $z_3 = 3$,
una din ele este rădăcină "dublă" , sau rădăcină de ordin 2.

Rădăcinile unui polinom fiind în număr finit, este evident că pot fi separate ("izolate") prin discuri disjuncte centrate în acele rădăcini care sunt distincte $z_1, z_2, ..., z_p$

$$\{|z - z_1| < r\} \ , \{|z - z_2| < r\} \ , ... \ , \{|z - z_p| < r\}$$



În acest mod se poate spune că rădăcinile unui polinom sunt "izolate", în sensul că în fiecare din aceste discuri polinomul are doar o singură rădăcină.

În plus este uşor de verificat următoarea caracterizare a unei rădăcini de ordin k

Observaţie. Un număr complex z_0 este rădăcină de ordin k pentru polinomul

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_p z^p$$

dacă şi numai dacă
- z_0 este rădăcină pentru P ($P(z_0) = 0$)
- toate derivatele de ordin mai mic decât k sunt nule în z_0 , iar
- derivata de ordin k este nenulă în z_0,

adică

$$P(z_0) = 0 \quad , \quad P^{(k)}(z_0) \neq 0 \quad , \quad P'(z_0) = 0 \quad , \quad P''(z_0) = 0 \quad , \; .... \; , \quad P^{(k-2)}(z_0) = 0 \quad , \quad P^{(k-1)}(z_0) = 0$$

Pentru funcţii olomorfe situaţia este asemănătoare.
Reamintim că olomorfă înseamnă derivabilă, dar şi analitică (dezvoltabilă în serie Taylor).

Fie z_0 un zerou pentru funcţia olomorfă f , deci $f(z_0) = 0$ ($f : D \to \mathbb{C}$ funcţie olomorfă pe mulţimea deschisă $D \subset \mathbb{C}$)
Să considerăm dezvoltarea în serie Taylor în punctul z_0 şi discul de convergenţă corespunzător $\{|z - z_0| < r\} \subset D$
Mai precis

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad , \text{ pentru orice } z \text{ cu } |z - z_0| < r$$

sau scriind explicit primii termeni

$$f(z) = \overbrace{f(z_0)}^{0} + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + ... + \frac{f^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}(z - z_0)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(z_0)}{(k)!}(z - z_0)^k + ...$$

Dar $f(z_0) = 0$. Cum sunt derivatele funcţiei în punctul z_0 , $f^{(n)}(z_0) = ?$

i) ori sunt toate zero, dar în acest caz toţi coeficienţii seriei Taylor $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ sunt zero , deci suma seriei Taylor este zero pentru orice z cu $|z-z_0|<r$, adică

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overbrace{f^{(n)}(z_0)}^{0}}{n!}(z-z_0)^n=0 \quad , \quad \text{pentru orice } z \text{ cu } |z-z_0|<r$$

În acest caz funcţia este nulă (constantă) $f(z)=0$ pentru orice z cu $|z-z_0|<r$ şi nu rămâne nimic de studiat.

ii) ori există o derivată (cel puţin una) nenulă.

$$f(z)=\overbrace{f(z_0)}^{0}+\frac{\overbrace{f'(z_0)}^{0}}{1!}(z-z_0)+\frac{\overbrace{f''(z_0)}^{0}}{2!}(z-z_0)^2+...+\frac{\overbrace{f^{(k-1)}(z_0)}^{0}}{(k-1)!}(z-z_0)^k+\frac{\overbrace{f^{(k)}(z_0)}^{\neq 0}}{(k)!}(z-z_0)^k+...$$

Să considerăm k cel mai mic ordin de derivată care nu este nulă în punctul z_0

$$f^{(k)}(z_0)\neq 0$$

aceasta înseamnă că primele $(k-1)$ derivate sunt nule în punctul z_0

$$f'(z_0)=0 \quad , \quad f''(z_0)=0 \quad , \quad .... \quad , \quad f^{(k-2)}(z_0)=0 \quad , \quad f^{(k-1)}(z_0)=0$$

Dezvoltarea în serie Taylor devine

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+\frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{k+1}+... \quad , \quad \text{pentru orice } z \text{ cu } |z-z_0|<r$$

$$f(z)=(z-z_0)^k\left[\underbrace{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}+\frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)+\frac{f^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!}(z-z_0)^2+...}_{g(z)}\right]=(z-z_0)^k g(z)$$

Funcţia g este suma unei serii de puteri (cu aceeaşi rază de convergenţă ca şi seria Taylor), deci derivabilă (olomorfă) pe discul $\{|z-z_0|<r\}$

În plus

$$g(z_0)=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\neq 0$$

În particular funcţia g este continuă, deci există o vecinătate a punctului z_0 , un disc $\{|z-z_0|<r_1<r\}$ pentru care

$$g(z)\neq 0 \ \text{ pentru orice } z \text{ cu } |z-z_0|<r_1$$

Aceste simple observaţii pot fi reunite în următoarea teoremă.

Teoremă. Fie $f: D\to\mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe mulţimea deschisă $D\subset\mathbb{C}$ şi $z_0\in D$ un zerou al funcţiei. Atunci:

i) ori funcţia este identic nulă (constantă) pe un disc $\{|z-z_0|<r\}\subset D$

ii) ori există k cel mai mic ordin de derivată care nu este nulă în z_0, adică

$$f^{(k)}(z_0)\neq 0 \quad , \quad f'(z_0)=0 \quad , \quad f''(z_0)=0 \quad , \quad .... \quad , \quad f^{(k-2)}(z_0)=0 \quad , \quad f^{(k-1)}(z_0)=0$$

şi putem scrie

$$f(z)=(z-z_0)^k\left[\underbrace{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}+\frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)+\frac{f^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!}(z-z_0)^2+...}_{g(z)}\right]=(z-z_0)^k g(z)$$

Funcţia g este suma unei serii de puteri, deci olomorfă (derivabilă). În plus

$$g(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$$

Din continuitatea funcţiei g , există o vecinătate a punctului z_0 , un disc $\{|z - z_0| < r\}$ pentru care

$$g(z) \neq 0 \ \text{ pentru orice } \ z \ \text{ cu } \ |z - z_0| < r$$

Prin urmare funcţia f nu are alte zerouri în vecinătatea lui z_0, deci zeroul unei funcţii olomorfe este "izolat". Numărul k se numeşte **ordinul zeroului** (cel mai mic ordin de derivată care nu este nulă în z_0)

Comentariu. Ordinul zeroului este definit în mod echivalent
- fie de k cel mai mic ordin de derivată nenulă (ii)
- fie de puterea k ce permite scrierea $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ şi $g(z_0) \neq 0$.

Exemple.
1) Orice zerou al funcţiilor sin şi cos este de ordin 1.

i) Fie z_0 zerou al funcţiei $\sin z$, $\sin z_0 = 0$. Pentru derivată obţinem $(\sin z)' = \cos z$.
Datorită relaţiei $\sin^2 z_0 + \cos^2 z_0 = 1$ obţinem $\cos^2 z_0 = 1$, deci derivata nu este nulă în z_0 şi prin urmare z_0 este zerou de ordin 1.
ii) Fie z_0 zerou al funcţiei $\cos z$, $\cos z_0 = 0$. Pentru derivată obţinem $(\cos z)' = -\sin z$.
Datorită relaţiei $\sin^2 z_0 + \cos^2 z_0 = 1$ obţinem $\sin^2 z_0 = 1$, deci derivata nu este nulă în z_0 şi prin urmare z_0 este zerou de ordin 1.

2) Pentru funcţia $f(z) = \sin z - z$, 0 este zerou de ordin 3.

Este clar că $f(0) = \sin 0 - 0 = 0$, deci 0 este zerou pentru funcţia f
Folosim dezvoltarea în serie Taylor

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ...$$

deci

$$f(z) = \sin z - z = (\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ...) - z = -\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ... = z^3 \underbrace{(-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + ...)}_{g(z)}$$

$$g(0) = -\frac{1}{3!} \neq 0$$

ceea ce arată că 0 este zerou de ordin 3.
Sau putem calcula derivatele

$$f'(z) = (\sin z - z)' = \cos z - 1 \ \ , \ \ f'(0) = \cos 0 - 1 = 0$$

$$f''(z) = (\sin z - z)'' = (\cos z - 1)' = -\sin z \ \ , \ \ f''(0) = -\sin 0 = 0$$

$$f'''(z) = (\sin z - z)''' = (\cos z - 1)'' = (-\sin z)' = -\cos z \ \ , \ \ f'''(0) = -\cos 0 = -1 \neq 0$$

ceea ce arată că 0 este zerou de ordin 3.

1.3 Puncte singulare

Să considerăm câteva exemple familiare de funcţii olomorfe care sunt derivabile pe mulţimi deschise, cu excepţia unor puncte izolate.

1. $f(z) = \frac{1}{z}$ derivabilă pe $\mathbb{C} \backslash \{0\}$, $f(z) = \frac{z+1}{z-2}$ derivabilă pe $\mathbb{C} \backslash \{2\}$,

   În general orice funcţie raţională, (p, q polinoame) $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ derivabilă pe $\mathbb{C}$ mai puţin rădăcinile lui q

2. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ este evident derivabilă pe $\mathbb{C} \backslash \{0\}$, dar de fapt este derivabilă pe $\mathbb{C}$, deoarece folosind dezvoltarea în serie Taylor obţinem

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \right) = \frac{1}{z} \left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ... \right) = \underbrace{\frac{1}{1!} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ...}_{g(z)}$$

Funcţia g este suma unei serii de puteri (cu aceeaşi rază de convergenţă ca seria funcţiei sin), deci convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ la fel ca şi seria funcţiei sin .

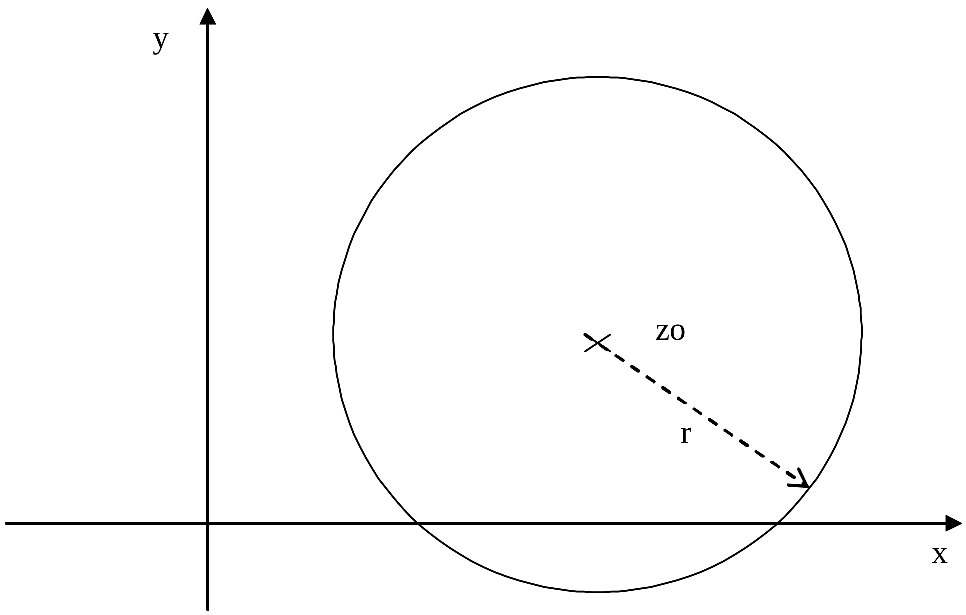
Deci funcţia $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ doar "aparent" nu este definită în punctul 0 . De fapt ea se prelungeşte în mod natural

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{pentru } z \neq 0 \\ 1 & \text{pentru } z = 0 \end{cases} = \underbrace{\frac{1}{1!} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ...}_{g(z)}$$

şi este olomorfă (derivabilă) pe $\mathbb{C}$ fiind suma unei serii de puteri convergente pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Definiţie. Dacă o funcţie f este olomorfă (derivabilă) pe mulţimea $\{0 < |z - z_0| < r\}$ (un disc fără centrul său) atunci punctul z_0 este un **punct singular izolat** pentru funcţia f .

(în mod implicit se presupune că nu se ştie dacă funcţia este derivabilă şi în punctul z_0)



Comentarii.

Cu alte cuvinte, dacă o funcţie este olomorfă (derivabilă) în vecinătatea unui punct z_0 şi nu ştim dacă poate fi definită şi în punctul z_0 astfel încât să obţinem o funcţie olomorfă pe întregul disc $\{|z - z_0| < r\}$, spunem că z_0 este un punct singular izolat pentru funcţie.

Punctul z_0 este "izolat" prin faptul că funcţia este derivabilă în vecinătatea punctului z_0 , eventual nu şi în punctul z_0.

În mod "tradiţional" definiţia nu conţine şi precizarea din final.

Fără acea precizare, dacă o funcţie este derivabilă pe un disc, atunci orice punct din interiorul discului este punct singular izolat pentru acea funcţie.Ceea nu ce este foarte natural.

Nu este "natural" să spunem că pentru un polinom (derivabil în orice punct din $\mathbb{C}$) orice punct este "punct singular izolat".

Dar are sens să spunem că 0 este punct singular izolat pentru funcţia $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

Aşa cum am constatat în exemplul 2) acest fapt este doar "aparent".

Există funcţii care au puncte singulare, dar acestea nu sunt şi izolate.

Exemplu.

Pentru funcţia

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

punctul 0 este punct singular, dar nu este "izolat", deoarece nu există un disc $\{0 < |z| < r\}$ pe care funcţia să fie derivabilă.

Fracţia nu are sens în nici unul din punctele în care se anulează numitorul $z_n = \frac{1}{n\pi}$ şi orice disc centrat în 0 conţine astfel de puncte,

deoarece $\sin \frac{1}{z_n} = \sin(n\pi) = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\pi} = 0$.

Iată clasificarea punctelor singulare izolate.

Definiţie. Fie z_0 punct singular izolat pentru funcţia $f : \{0 < |z - z_0| < r\} \to \mathbb{C}$.

i) punctul singular este **punct singular aparent**, dacă

$$\text{există} \quad \lim_{z\to z_0} f(z) = \quad \text{finită}$$

ii) punctul singular este **punct singular de tip pol**, dacă

$$\text{există} \quad \lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$$

iii) punctul singular este **punct singular esenţial**, dacă

$$\text{nu există} \quad \lim_{z\to z_0} f(z) \ \text{ şi } \ \text{nu există nici} \quad \lim_{z\to z_0} |f(z)|$$

Exemple.

1.Pentru funcţia

$$\frac{z+2}{z^2-4}$$

punctele 2 şi -2 sunt puncte singulare deoarece funcţia este olomorfă (derivabilă) pe întreg domeniul de definiţie $\mathbb{C}\backslash\{2,-2\}$.

Punctul -2 este punct singular aparent, iar punctul 2 este punct singular de tip pol deoarece

$$\frac{z+2}{z^2-4} = \frac{z+2}{(z+2)(z-2)} = \frac{1}{z-2}$$

Şi deci

$$\lim_{z\to -2} \frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{z\to 2} \left|\frac{1}{z-2}\right| = \lim_{z\to 2} \frac{1}{|z-2|} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Pentru funcţiile

$$\frac{\sin z}{z} \quad , \quad \frac{1-\cos^2 z}{z^2}$$

punctul 0 este punct singular deoarece funcţiile sunt olomorfe (derivabile) pe întreg domeniul de definiţie $\mathbb{C}\backslash\{0\}$

În plus 0 este punct singular aparent deoarece

folosind dezvoltarea în serie Taylor pentru funcţia sin obţinem

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} \left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ...\right) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1!} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ... = 1$$

pe de altă parte

$$\frac{1-\cos^2 z}{z^2} = \frac{1 - \frac{1+\cos 2z}{2}}{z^2} = \frac{2-(1+\cos 2z)}{2z^2} = \frac{1-\cos 2z}{2z^2}$$

folosind dezvoltarea în serie Taylor pentru funcţia cos obţinem

$$\frac{1-\cos 2z}{2z^2} = \frac{1}{2z^2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\right) = \frac{1}{2z^2}\left(1 - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{4^6}{6!} + ...\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{4^4}{6!} + ...\right)$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos 2z}{2z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{4^4}{6!} + ...\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2!} = \frac{1}{4}$$

2. Pentru funcţiile

$$\frac{1}{z} \quad , \quad \frac{1}{z^2} \quad , \quad \frac{z+1}{z^5}$$

punctul 0 este punct singular deoarece funcţiile sunt olomorfe (derivabile) pe întreg domeniul de definiţie $\mathbb{C}\backslash\{0\}$
În plus 0 este punct singular de tip pol deoarece $z \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z| \to 0$ şi deci

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{1}{z}\right| = \lim_{z\to 0}\frac{1}{|z|} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{1}{z^2}\right| = \lim_{z\to 0}\frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{z+1}{z^5}\right| = \lim_{z\to 0}\frac{z+1}{|z|^5} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

3. Pentru funcţia

$$\sin\frac{1}{z}$$

punctul 0 este punct singular deoarece funcţia este olomorfă (derivabilă) pe întreg domeniul de definiţie $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
În plus 0 este punct singular esenţial deoarece nu există $\lim\limits_{z\to 0}\sin\frac{1}{z}$
Pentru $z_n = \frac{1}{n2\pi}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n2\pi} = 0$ şi

$$\text{(i)} \qquad \sin\frac{1}{z_n} = \sin\frac{1}{\frac{1}{n2\pi}} = \sin(n2\pi) = 0 \ \text{ deci } \ \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{z_n} = 0$$

Iar pentru $w_n = \frac{1}{n2\pi+\frac{\pi}{2}}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n2\pi+\frac{\pi}{2}} = 0$ şi

$$\text{(ii)} \qquad \sin\frac{1}{w_n} = \sin\frac{1}{\frac{1}{n2\pi+\frac{\pi}{2}}} = \sin(n2\pi+\frac{\pi}{2}) = 1 \ \text{ deci } \ \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{w_n} = 1$$

Relaţiile (i) şi (ii) arată că nu există $\lim\limits_{z\to 0}\sin\frac{1}{z}$ şi nici $\lim\limits_{z\to 0}\left|\sin\frac{1}{z}\right|$, deci 0 este punct singular esenţial.
Pentru funcţia

$$e^{\frac{1}{z}} = \exp(\frac{1}{z})$$

punctul 0 este punct singular deoarece funcţia este olomorfă (derivabilă) pe întreg domeniul de definiţie $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
În plus 0 este punct singular esenţial deoarece nu există $\lim\limits_{z\to 0}\exp(\frac{1}{z})$
Pentru $z_n = \frac{1}{n2\pi i}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n2\pi i} = 0$ deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n2\pi i}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n2\pi} = 0$ şi

$$\text{(a)} \qquad \exp(\frac{1}{z_n}) = \exp\left(\frac{1}{\frac{i}{n2\pi}}\right) = \exp(in2\pi) = \underbrace{\cos(n2\pi)}_{1} + i\underbrace{\sin(n2\pi)}_{0} = 1 \ \text{ deci } \ \lim_{n\to\infty}\exp\frac{1}{z_n} = 1$$

Pentru $w_n = \frac{1}{(n2\pi+\frac{\pi}{2})i}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n2\pi+\frac{\pi}{2})i} = 0$ deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n2\pi+\frac{\pi}{2})i}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n2\pi+\frac{\pi}{2}} = 0$ şi

$$\text{(b)} \qquad \exp(\frac{1}{w_n}) = \exp\left(\frac{1}{\frac{1}{(n2\pi+\frac{\pi}{2})i}}\right) = \exp i(n2\pi+\frac{\pi}{2}) = \underbrace{\cos(n2\pi+\frac{\pi}{2})}_{0} + i\underbrace{\sin(n2\pi+\frac{\pi}{2})}_{1} = i \ \text{ deci } \ \lim_{n\to\infty}\exp\frac{1}{w_n} = i$$

Iar pentru $u_n = \frac{1}{n}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ şi

$$\text{(ii)} \qquad \exp(\frac{1}{w_n}) = \exp\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = \exp n \ \text{ deci } \ \lim_{n\to\infty}\exp\frac{1}{u_n} = +\infty$$

Relaţiile (a) , (b) şi (c) arată că nu există $\lim\limits_{z\to 0}\exp\frac{1}{z}$ şi nici $\lim\limits_{z\to 0}\left|\exp\frac{1}{z}\right|$, deci 0 este punct singular esenţial.

1.4 Serii Laurent

Definiţie. Se numeşte **serie Laurent** (**centrată în** z_0), o serie de forma

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$$

mai precis este vorba de o pereche de serii

$$\underbrace{\sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n}_{\text{partea Taylor}} \quad \text{şi} \quad \underbrace{\sum_{n\geq 1} c_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}}_{\text{partea principală}}$$

Definiţie. O serie Laurent este **convergentă** în punctul $z \neq z_0$
dacă atât partea Taylor cât şi partea principală sunt serii convergente.

Partea Taylor şi partea principală sunt serii de puteri, deci au raze de convergenţă.
Fie R raza de convergenţă pentru partea Taylor.
Conform teoremei Cauchy-Hadamard raza de convergenţă se calculează astfel

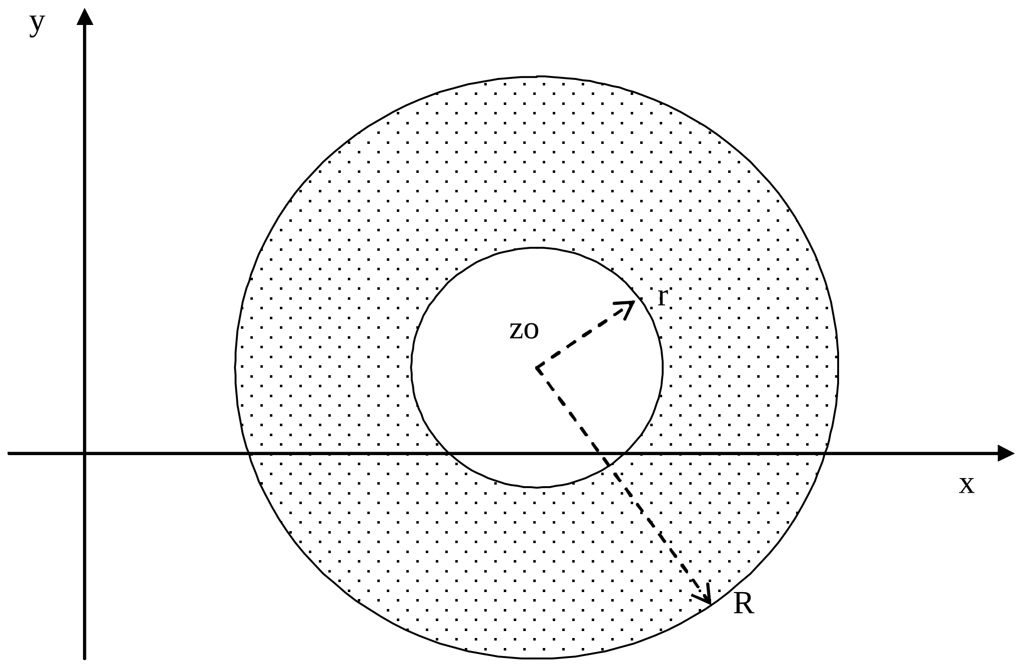
$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Deci partea Taylor este convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z-z_0| < R$
Fie $\frac{1}{r}$ raza de convergenţă pentru partea principală,
pe care o calculăm în mod similar

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}}$$

Deci partea principală este deci convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < \frac{1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad r < |z-z_0|$

În concluzie seria Laurent este convergentă pentru orice numere complexe $z \in \mathbb{C}$ cu $r < |z-z_0| < R$,
Aceasta presupune că $r < R$
Să remarcăm faptul că o serie Laurent este practic o pereche de două serii, ce pot avea orice numere complexe drept coeficienţi $c_n \in \mathbb{C}$
În cele ce urmează vom considera numai serii Laurent pentru care razele de convergenţă verifică $r < R$
Seria Laurent este divergentă pentru $z \in \mathbb{C}$ cu $|z-z_0| > R$ sau $r > |z-z_0|$



Coroana de convergenţă   0 < r < |z-zo| < R

Definiţie. Fie o serie Laurent $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ cu $r < R$. Se numeşte **coroana de convergenţă** mulţimea $\{r < |z-z_0| < R\}$

În mod natural se defineşte **suma seriei Laurent** $s : \{r < |z-z_0| < R\} \to \mathbb{C}$, pe coroana de convergenţă

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n} \quad \text{pentru} \quad r < |z-z_0| < R$$

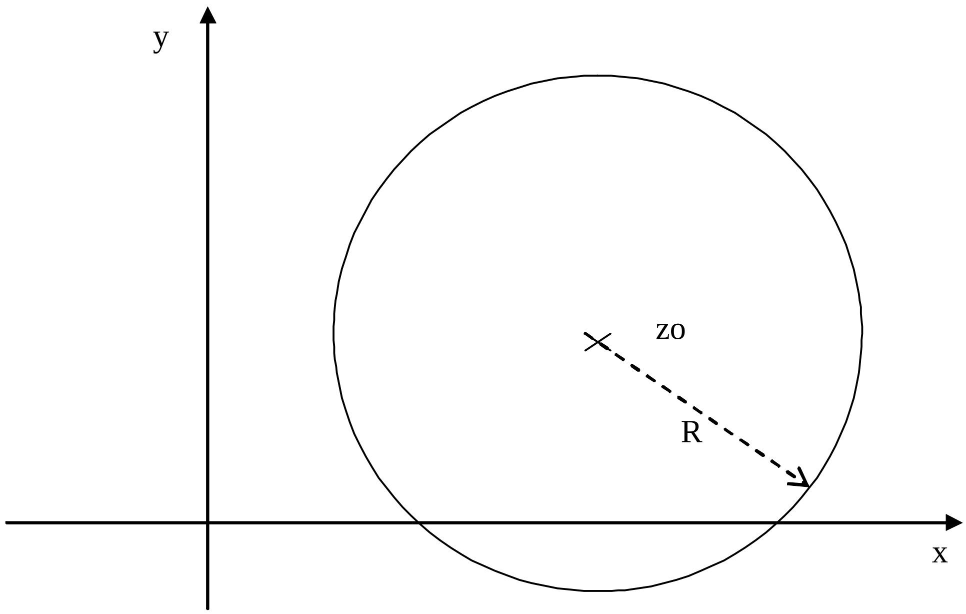
este o funcţie olomorfă (ca sumă a unor serii de puteri).

Seria Laurent este divergentă pentru $z \in \mathbb{C}$ cu $|z-z_0| > R$ sau $r > |z-z_0|$, adică în "afara coroanei de convergenţă".

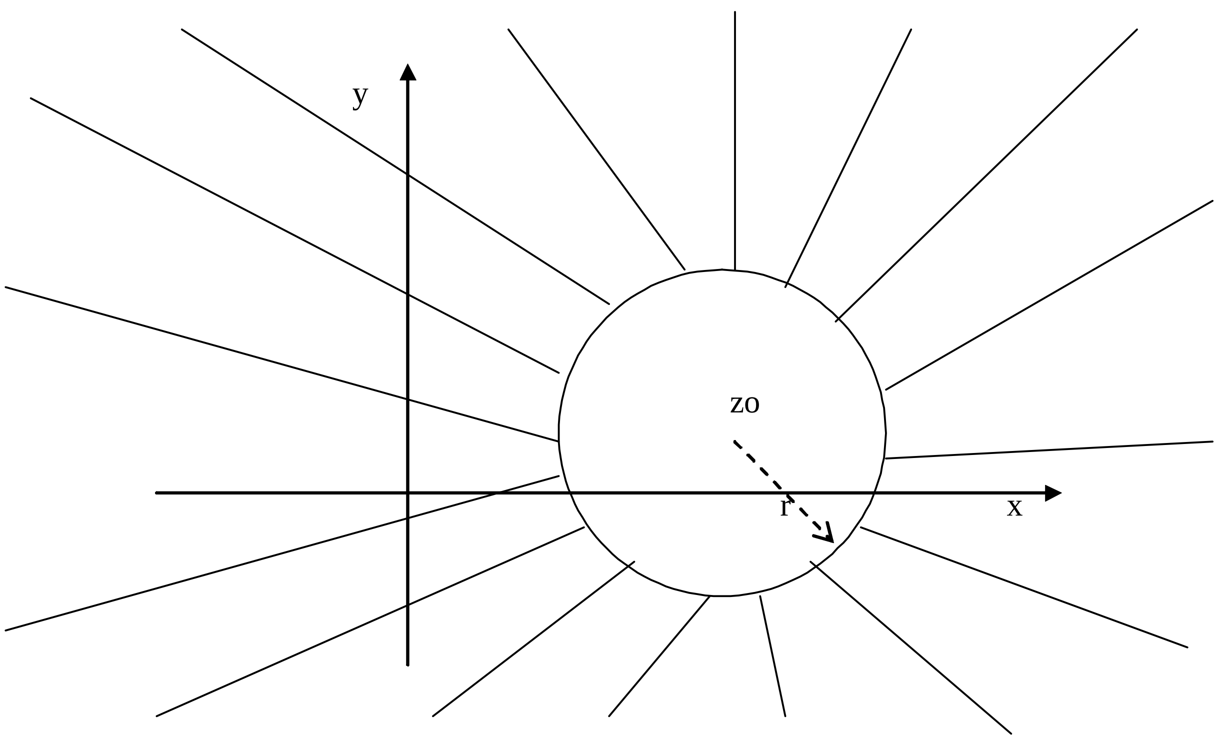
Exemple.

1) pentru $0 < r < R < \infty$ obţinem o coroană de convergenţă ca în figura anterioară

2) pentru $0 = r < R < \infty$ coroana de convergenţă este de fapt un disc fără centrul z_0



3) pentru $0 < r < R = \infty$ coroana de convergenţă este întreg $\mathbb{C}$, din care se scade discul $\{|z - z_0| < r\}$



4) pentru $0 = r < R = \infty$ coroana de convergenţă este de fapt întreg $\mathbb{C}$, eventual fără z_0

5) o serie Laurent poate să aibe numai parte Taylor, dacă toţi coeficienţii părţii principale sunt zero $c_{-n} = 0$, $n \geq 1$

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

6) o serie Laurent poate să aibe <u>numai parte principală</u>, dacă toţi coeficienţii părţii Taylor sunt zero $c_n = 0$, $n \geq 0$

$$s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n}$$

7) o serie Laurent poate să aibe un <u>număr finit de coeficienţi nenuli</u> atât în partea Taylor cât şi în partea principală

$$s(z) = \sum_{n=0}^{p} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{q} c_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n} = \underbrace{c_{-q}\frac{1}{(z-z_0)^q} + ... + c_{-1}\frac{1}{(z-z_0)}}_{\text{partea principala}} + \underbrace{c_0 + c_1(z-z_0) + ... + c_p(z-z_0)^p}_{\text{partea Taylor}}$$

Exemple.

i) $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + ...$$

nu are parte principală (coeficienţii părţii principale sunt toţi nuli),
iar coroana de convergenţă este $\{|z| < 1\}$ deoarece seria geometrică este convergentă numai pentru z cu $|z| < 1$

ii) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + ...$$

nu are parte Taylor (coeficienţii părţii Taylor sunt toţi nuli),
iar coroana de convergenţă este $\{1 < |z|\}$ deoarece seria geometrica este convergentă numai pentru $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$

iii) $$\frac{1}{z^5} + \frac{3}{z^2} - \frac{2}{z} + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...$$

are parte principală finită (toţi coeficienţii părţii principale sunt nuli, cu excepţia unui număr finit),
iar coroana de convergenţă este $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ deoarece partea principală este finită (deci convergentă pentru orice $z \neq 0$, iar partea Taylor este seria exponenţială.

iv) $$\frac{1}{(z+1)^3} - \frac{1}{z+1} + (z+1) - (z+1)^2 + (z+1)^3 + (z+1)^4$$

seria Laurent este centrată în punctul -1 ,
partea Taylor şi partea principală au un număr finit de coeficienţi nenuli,
deci ambele sunt convergente pentru orice $z \neq -1$
iar coroana de convergenţă este $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$

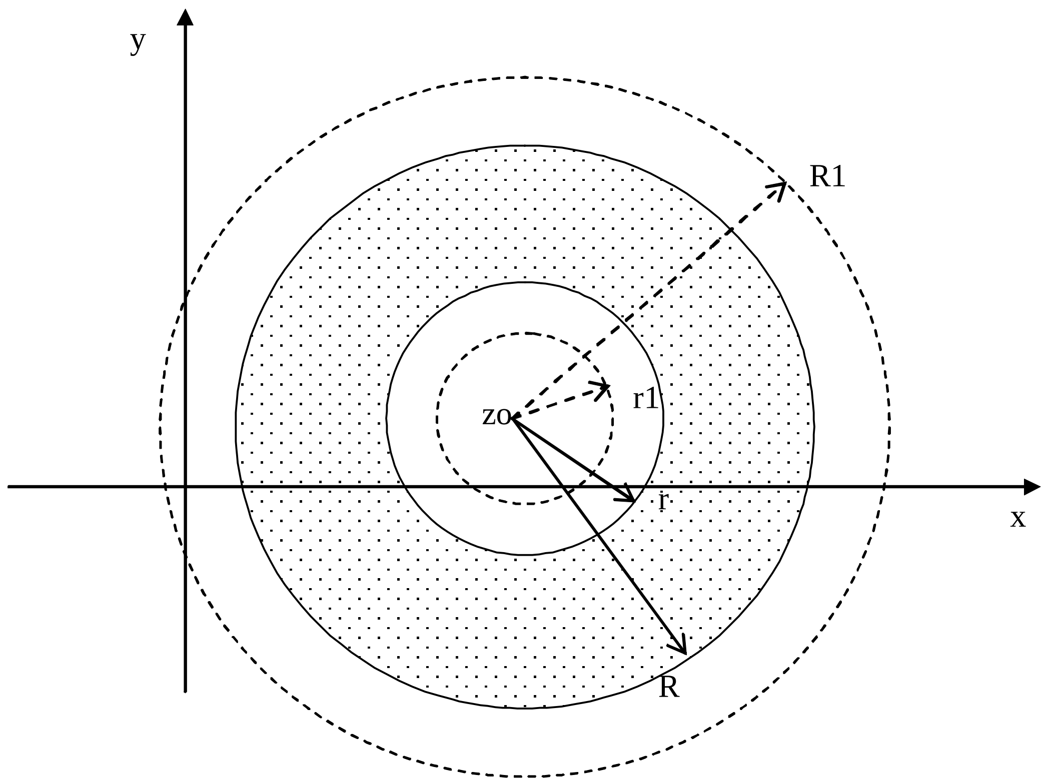
Teorema (de existenţă şi unicitate)
Orice funcţie olomorfă pe o coroană, are dezvoltare în serie Laurent (centrată în acea coroană).
Mai precis.
Fie $f : \{r < |z - z_0| < R\} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana $\{r < |z - z_0| < R\}$.
Atunci există o unică serie Laurent

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n$$

astfel încât

$$(*) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n} \quad \text{pentru orice } z \in \{r < |z-z_0| < R\}$$

Este clar că seria Laurent are coroana de convergenţă "mai mare" decât coroana pe care funcţia f este olomorfă.
(dacă $r_1 < R_1$ sunt razele de convergenţă pentru seria Laurent, atunci $r_1 < r < R < R_1$)



coroana {r < |z-zo| < R} (marcată) inclusă în coroana {r1 < |z-zo| < R1} (punctat)

Definiţie. Relaţia (*) arată că functia f este suma seriei Laurent pentru orice $z \in \{r < |z - z_0| < R\}$, acest fapt se numeşte "dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei f pentru coroana $\{r < |z - z_0| < R\}$ "

Demonstraţie. Nu prezentăm demonstraţia. Iată însă calculul coeficienţilor seriei Laurent, aşa cum reies din demonstraţie

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0=\rho|} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad \text{pentru orice } \rho \in (r, R) \text{ şi } n \in \mathbb{Z}$$

Observaţie.

Pentru a determina dezvoltarea în serie Laurent a unei funcţii, practic se determină coeficienţii seriei. Formula anterioară este însă mult prea dificil de aplicat.

În probleme simple se folosesc dezvoltările în serie Taylor ale funcţiilor elementare cunoscute:

seria geometrică, exponenţială, sin , cos

şi faptul că dezvoltarea în serie Laurent este unică.

Este esenţial punctul "z_0" , centrul coroanei (în care este centrată seria Laurent)

Este posibil ca o funcţie să aibe serie Laurent fără parte principală pentru o coroană, dar fără parte Taylor pentru altă coroană.

Exemple.

1) Funcţia $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ (olomorfă pe întreg domeniul de definiţie)

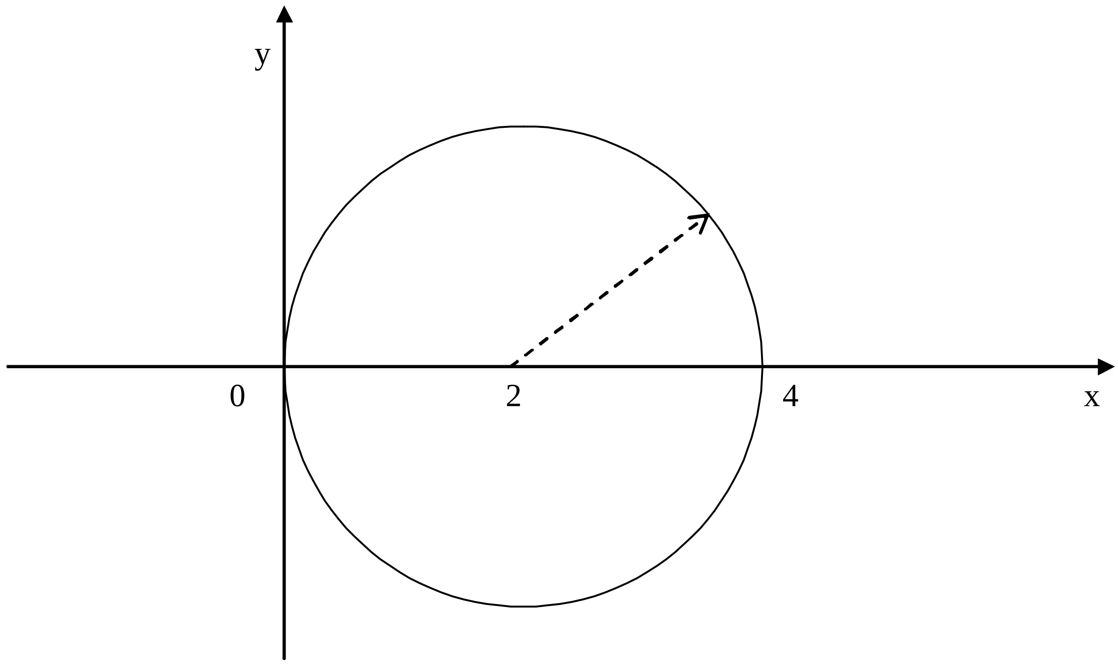
i) pentru coroana $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, (aici $r = 0$ şi $R = +\infty$) are dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Toţi coeficienţii sunt nuli cu excepţia $c_{-1} = 1$

ii) pentru coroana $\{0 < |z - 2| < 2\}$ are dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}} \quad \text{pentru} \quad |z - 2| < 2$$



Iată cum se determină dezvoltarea în serie Laurent.
Folosim seria geometrică şi schimbarea de variabilă $w = z - 2 \;\Rightarrow\; z = w + 2$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{w+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{w}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{2}\right)^n \quad \text{pentru} \quad \left|\frac{w}{2}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |w| < 2 \;\Leftrightarrow\; |z-2| < 2$$

deci

$$f(z) = \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}} \quad \text{pentru} \quad |z-2| < 2$$

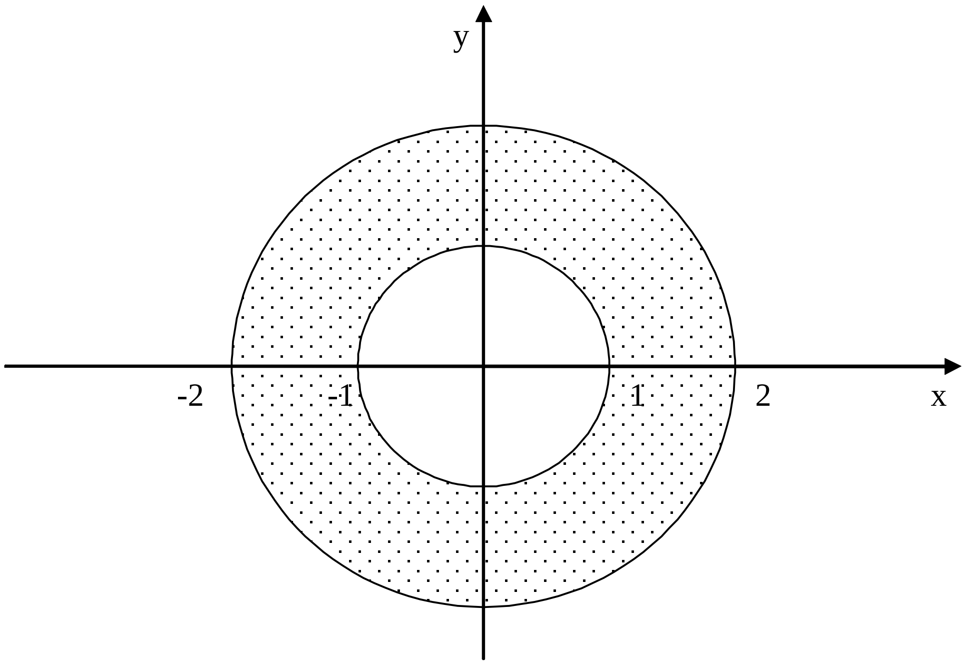
în acest caz seria Laurent nu are parte principală.

2) Funcţia $f : \mathbb{C}\backslash\{1,2\} \to \mathbb{C}$ (olomorfă pe întreg domeniul de definiţie)

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

i) pentru coroana $\{1 < |z| < 2\}$ funcţia are dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}z^n = ... - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{3}{2} + \frac{-1}{2^2}z + \frac{-1}{2^3}z^2 + ...$$



Iată cum se determină aceasta

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Deoarece $1 < |z| \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{1}{z}\right| < 1$, folosim $\frac{1}{z}$ ca "raţie" pentru seria geometrică, deci pentru $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ putem scrie

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \quad \text{pentru orice } z \text{ cu } \; 1 < |z|$$

Pe de altă parte $|z| < 2 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, folosim $\frac{z}{2}$ ca "raţie" pentru seria geometrică, deci pentru $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ putem scrie

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z}{2}-1} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}z^n \quad \text{pentru orice } z \text{ cu } \; |z| < 2$$

Adunând obţinem

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

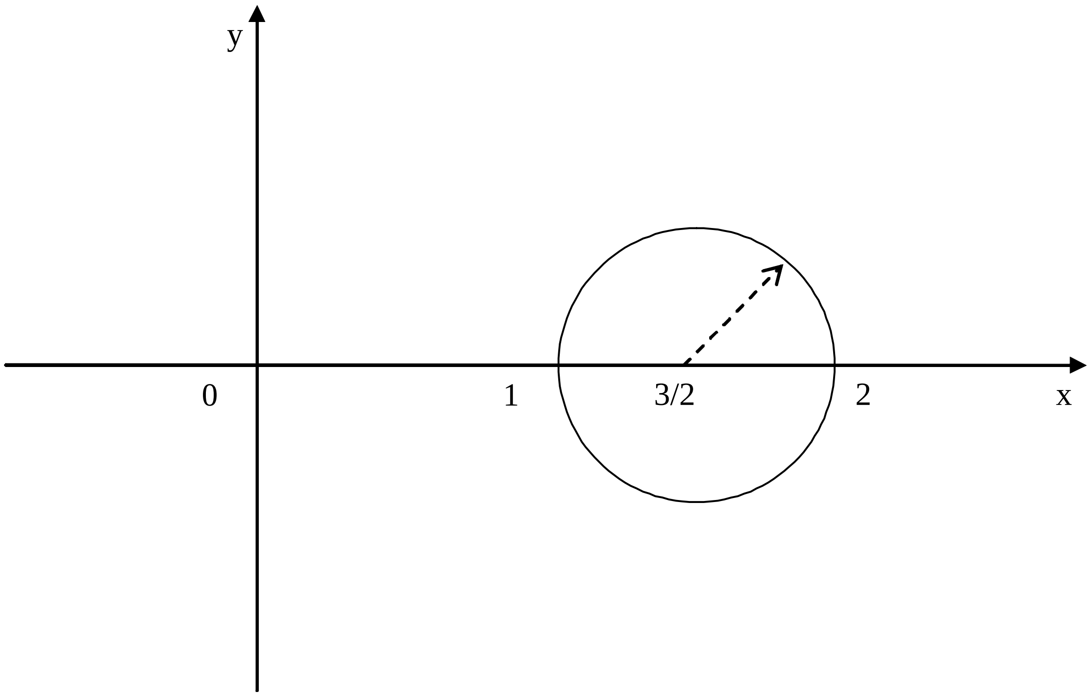
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}z^n + \frac{-1}{2} - 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{z^{n+1}} + \frac{-3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}z^n \quad \text{pentru orice } \; z \text{ cu } \; 1 < |z| < 2$$

ii) <u>pentru coroana $\{0 < \left|z - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}\}$</u> aceeaşi funcţie are dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)4^{(n+1)}\left(z - \frac{3}{2}\right)^{2n}$$

Observăm că seria Laurent are numai parte Taylor (coeficienţii părţii principale sunt toţi nuli)



Iată cum se determină aceasta.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Facem schimbarea de variabila $w = z - \frac{3}{2}$, avem $|w| < \frac{1}{2} < 1$ şi $z = w + \frac{3}{2}$
Deci putem folosi $2w$ ca raţie pentru seria geometrică

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{w + \frac{3}{2} - 2} = \frac{1}{w - \frac{1}{2}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \frac{1}{1-2w} = -2\sum_{n=0}^{\infty}(2w)^n \quad \text{deoarece } |2w| < 1$$

Pe de altă parte

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{w + \frac{3}{2} - 1} = \frac{-1}{w + \frac{1}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+2w} = -2\frac{1}{1-(-2w)} = -2\sum_{n=0}^{\infty}(-2w)^n \quad \text{deoarece } |2w| < 1$$

Adunând obţinem

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -2\sum_{n=0}^{\infty}(2w)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-2w)^n =$$

$$= -2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n w^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} -2^{n+1} w^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} 2^{n+1} w^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-1 + (-1)^{n+1}\right] 2^{n+1} w^n$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-1 + (-1)^{n+1}\right] 2^{n+1}\left(z - \frac{3}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}(-2)2^{2k+1}\left(z - \frac{3}{2}\right)^{2k}$$

deoarece

$$\left[-1 + (-1)^{n+1}\right] = \begin{cases} -2 \ , \ \text{pentru} \quad n = 2k \\ 0 \ , \ \text{pentru} \ \ n = 2k+1 \end{cases}$$

Putem înlocui k cu n şi obţinem

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)2^{2n+2}\left(z - \frac{3}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)4^{(n+1)}\left(z - \frac{3}{2}\right)^{2n}$$

Teoremă. Fie z_0 punct singular izolat pentru funcţia olomorfă $f : \{0 < |z - z_0| < R\} \to \mathbb{C}$ şi dezvoltarea în serie Laurent corespunzătoare acestui caz particular de coroană ($r = 0$). Atunci

i) z_0 este <u>punctul singular aparent</u> $\Leftrightarrow$ dezvoltarea în serie Laurent nu are parte principală

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ pentru orice } z \in \{0 < |z - z_0| < R\}$$

(coeficienţii părţii principale sunt toţi nuli $c_{-n} = 0$, $n \geq 1$)

ii) z_0 este <u>punctul singular de tip pol de ordin k</u> $\Leftrightarrow$ dezvoltarea în serie Laurent are parte principală "finită" (are un număr finit de coeficienţi nenuli) mai precis

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + c_{-1} \frac{1}{(z - z_0)} + ... + c_{-k} \frac{1}{(z - z_0)^k} \quad \text{pentru orice } z \in \{0 < |z - z_0| < R\}$$

iii) z_0 este <u>punctul singular esenţial</u> $\Leftrightarrow$ dezvoltarea în serie Laurent are parte principală "infinită" (are o infinitate de coeficienţi nenuli)

Nu prezentăm demonstraţia.

Exemple.

1) Considerăm coroana $\{0 < |z| < R\}$ şi funcţia

$$f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3}$$

Folosim dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei sin şi obţinem dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei f

$$f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ... - z \right) = \frac{1}{z^3} \left(-\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ... \right) = -\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + ...$$

Partea principală nu apare, are deci toţi coeficienţii nuli şi prin urmare 0 este punct singular aparent.

2) Considerăm coroana $\{0 < |z| < 1\}$ şi funcţia

$$f(z) = \frac{1}{z^2 (z - 1)}$$

Folosim seria geometrică

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + ... = \frac{1}{1 - z} \quad \text{pentru} \quad |z| < 1$$

înlocuind obţinem seria Laurent a funcţiei f

$$f(z) = \frac{1}{z^2 (z - 1)} = \frac{1}{z^2} \frac{-1}{1 - z} = \frac{1}{z^2} \left(1 + z + z^2 + ...\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + ...$$

Partea principală are numai doi coeficienţi nenuli $c_{-2} = 1$ şi $c_{-1} = 1$, prin urmare 0 este pol de ordin 2 .

3) Considerăm coroana $\{0 < |z| < R\}$ şi funcţia

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}$$

Folosim dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei sin şi obţinem dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei f

$$f(z) = \sin \frac{1}{z} = \frac{1}{1!} \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{z^5}{5!} \frac{1}{z^5} + ...$$

Partea principală are o infinitate de coeficienţi nenului, prin urmare 0 este punct singular esenţial.

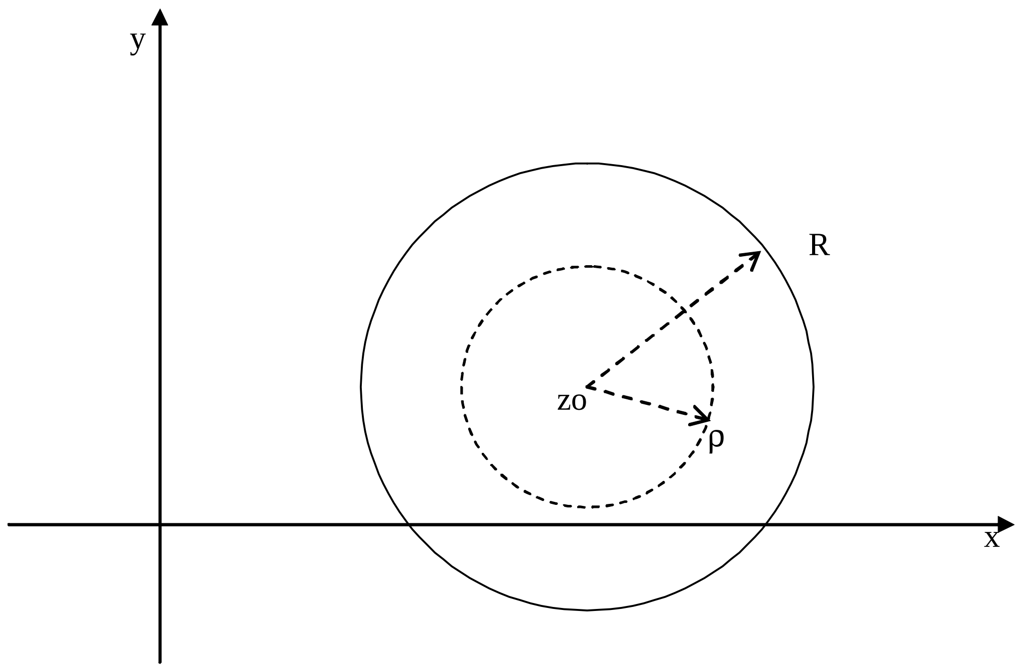
1.5 Reziduuri

Fie z_0 punct singular izolat pentru funcţia olomorfă $f : \{0 < |z - z_0| < R\} \to \mathbb{C}$ şi dezvoltarea în serie Laurent corespunzătoare acestui caz particular de coroană ($r = 0$)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} \quad \text{pentru orice } z \in \{0 < |z - z_0| < R\}$$

Să calculăm integrala pe un cerc $\{|z - z_0| = \rho\}$ cu $\rho < R$, parcurs o dată în sens trigonometric

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz = \oint_{|z-z_0|=\rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} \right) dz$$



Nu prezentăm motivaţia, dar se poate integra "termen cu termen", adică

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{|z-z_0|=\rho} c_n (z - z_0)^n dz + \sum_{n=1}^{\infty} \oint_{|z-z_0|=\rho} c_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \oint_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^n dz + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz$$

conform unui calcul efectuat anterior

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{pentru } n = -1 \\ 0 & \text{pentru } n \neq -1 \end{cases}$$

deci toate integralele sunt nule cu excepţia uneia

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz = c_{-1} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{1}{(z - z_0)} dz = c_{-1} 2\pi i$$

sau echivalent

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz = c_{-1}$$

Prin urmare valoarea unei astfel de integrale depinde numai de coeficientul "c_{-1}" , coeficientul lui $\frac{1}{z-z_0}$ din dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei.

Definiţie. Pentru z_0 punct singular izolat pentru funcţia olomorfă $f : \{0 < |z - z_0| < R\} \to \mathbb{C}$
se defineşte **reziduul** funcţiei în punctul z_0 astfel

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz = c_{-1} \quad , \quad 0 < \rho < R$$

unde "c_{-1}" este coeficientul lui $\frac{1}{z-z_0}$ din dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei pentru coroana $\{0 < |z - z_0| < R\}$
Conform calculului anterior, integrala nu depinde de "ρ" raza cercului.

Comentariu.
În mod "tradiţional" textele mai vechi în limba română au folosit notaţia $\text{Rez}(f, z_0)$, justificată de pronunţia "z" a noţiunii de "residue" (din engleză, franceză). Notaţiile sunt însă independente de contextul lingvistic, din acest motiv am optat pentru notaţia "Res" , unanim folosită în textele moderne.

Observaţie.
Dacă z_0 este punct singular aparent, atunci $\text{Res}(f, z_0) = 0$
Demonstraţie.
Folosim caracterizarea enunţată în teorema anterioară, conform căreia dacă z_0 este punct singular aparent, atunci dezvoltarea în serie Laurent nu are parte principală, mai precis toţi coeficienţii părţii principale sunt nuli, în particular $c_{-1} = 0$ şi deci $\text{Res}(f, z_0) = c_{-1} = 0$.

Observaţie.
Dacă z_0 este punctul singular de tip pol de ordin k , atunci reziduul se calculează

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^k\right]^{(k-1)} = \frac{1}{(k-1)!}g^{(k-1)}(z_0)$$

Am notat $g(z) = f(z)(z - z_0)^k$ şi folosim convenţia " $0! = 1$ ".

Demonstraţie.
Folosim dezvoltarea în serie Laurent conform caracterizării din teorema anterioară

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + c_{-1}\frac{1}{(z-z_0)} + ... + c_{-k}\frac{1}{(z-z_0)^k} \quad \text{pentru orice} \quad z \in \{0 < |z-z_0| < R\}$$

Apoi calculăm reziduul, prin determinarea coeficientului c_{-1}

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz = c_{-1}$$

Un calcul simplu :

$$f(z)(z-z_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n(z-z_0)^k + c_{-1}\frac{(z-z_0)^k}{(z-z_0)} + ... + c_{-k}\frac{(z-z_0)^k}{(z-z_0)^k}$$

$$g(z) = f(z)(z-z_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+k} + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + ... + c_{-k+1}(z-z_0) + c_{-k}$$

Derivăm de $(k-1)$ ori şi obţinem

$$g^{(k-1)}(z) = \left[f(z)(z-z_0)^k\right]^{(k-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(n+k)!}{(n+1)!}(z-z_0)^{n+1} + c_{-1}(k-1)!$$

Deci

$$g^{(k-1)}(z_0) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(n+k)!}{(n+1)!}(z_0 - z_0)^{n+1}}_{0} + c_{-1}(k-1)! = c_{-1}(k-1)!$$

De unde rezultă

$$\text{Res}(f, z_0) = c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[f(z)(z-z_0)^k\right]^{(k-1)}$$

■

Comentariu.
Calculul nu este diferit în cele două forme

$$g(z) = f(z)(z-z_0)^k \;\; \text{şi} \;\; g^{(k-1)}(z_0)$$

$$\lim_{z \to z_0} \left[f(z)(z-z_0)^k\right]^{(k-1)}$$

Observaţie.
Pentru z_0 pol de ordin 1 şi $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, P, Q polinoame,
(deci z_0 este zerou de ordin 1 pentru Q şi $P(z_0) \neq 0$) avem

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Demonstraţie.
Din faptul că z_0 este zerou de ordin 1 pentru Q , obţinem $Q(z_0) = 0$ şi $Q(z) = (z - z_0)S(z)$, $S(z_0) \neq 0$
Deci $Q'(z) = [(z-z_0)S(z)]' = S(z) + (z-z_0)S'(z) \;\Rightarrow\; Q'(z_0) = S(z_0)$
Calculând reziduul obţinem

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[f(z)(z-z_0)\right]^{(1-1)} = \frac{1}{0!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{P(z)}{Q(z)}(z-z_0)\right] = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{P(z)}{(z-z_0)S(z)}(z-z_0)\right]$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{P(z)}{S(z)}\right] = \frac{P(z_0)}{S(z_0)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

■

Comentariu.
Deşi reziduul este definit ca o integrală, foarte rar se determină reziduul calculând efectiv această integrală.
Singurul caz în care se "calculează" reziduul este punct singular de tip pol (cu metoda prezentată mai înainte)
Pentru puncte singulare aparente reziduul este nul.
(stabilirea faptului că este punct singular aparent se face fie calculăm limita în z_0, fie folosim dezvoltarea în serie Laurent)
Pentru puncte singulare esenţiale se foloseşte dezvoltarea în serie Laurent,
sau dacă aceast fapt este dificil, se determină doar c_{-1} coeficientul lui $\frac{1}{z-z_0}$

Exemple.
1) Considerăm funcţia

$$f(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z-2)^2} : \mathbb{C} \backslash \{1, 2\} \to \mathbb{C}$$

Este clar că funcţia este olomorfă pe $\mathbb{C} \backslash \{1, 2\}$. Deci punctele 1 şi 2 sunt puncte singulare izolate.
Punctul 1 este pol de ordin 1, iar punctul 2 este pol de ordin 2 , deci

$$\text{Res}(f, 1) = \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z \to 1} \left[f(z)(z-1)\right]^{(1-1)} = \frac{1}{0!} \lim_{z \to 1} \left[\frac{z+2}{(z-1)(z-2)^2}(z-1)\right]^{(0)}$$

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} \left[\frac{z+2}{(z-2)^2}\right] = \frac{3}{1^2} = 3$$

sau folosind observaţia de mai înainte

$$f(z)=\frac{z+2}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{P(z)}{Q(z)} \quad , \quad Q'(z)=\left[(z-1)(z-2)^2\right]'=(z-2)^2+2(z-1)(z-2)$$

$$\mathrm{Res}(f,1)=\frac{P(1)}{Q'(1)}=\frac{1+2}{(1-2)^2+2(1-1)(1-2)}=\frac{3}{1^2}=3$$

2) Considerăm funcţia

$$f(z)=\frac{\sin z-z}{z^3}:\mathbb{C}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}$$

Este clar că funcţia este olomorfă pe $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, deci 0 este punct singular izolat.
Folosim dezvoltarea în serie Laurent, de fapt dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei sin

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+... \ \text{ pentru orice } z$$

înlocuind obţinem

$$f(z)=\frac{\sin z-z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+...-z\right)=\frac{1}{z^3}\left(-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+...\right)=-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^4}{7!}+...$$

aceasta este seria Laurent pentru $f(z)$ şi coroana $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, nu are parte principală, deci 0 este punct singular aparent şi

$$\mathrm{Res}(f,0)=0$$

3) Considerăm funcţia

$$f(z)=z^4\exp(\frac{1}{z}):\mathbb{C}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}$$

Este clar că funcţia este olomorfă pe $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, deci 0 este punct singular izolat.
Folosim dezvoltarea în serie Laurent, de fapt dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei exponenţiale

$$\exp(\frac{1}{z})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} \ \text{ pentru orice } z\neq 0$$

înlocuind obţinem

$$f(z)=z^4\exp(\frac{1}{z})=z^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=z^4\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\frac{1}{5!z^5}+...\right)$$

$$f(z)=z^4\exp(\frac{1}{z})=z^4+z^3+\frac{z^2}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!z}+...$$

aceasta este seria Laurent pentru $f(z)$ şi coroana $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, coaficientul lui $\frac{1}{z}$ este $c_{-1}=\frac{1}{5!}$, deci

$$\mathrm{Res}(f,0)=\frac{1}{5!}$$

■

Teorema (reziduurilor)
Fie f o funcţie olomorfă pe mulţimea deschisă $D\subset\mathbb{C}$, cu excepţia unor puncte singulare izolate.
Atunci pentru orice $\gamma:[a,b]\to D$ drum închis, injectiv, de clasă C^1 pe porţiuni, care nu trece prin punctele singulare, cu interiorul inclus în D avem

$$\oint_g f(z)dz=2\pi i\sum_j \mathrm{Res}(f,z_j)$$

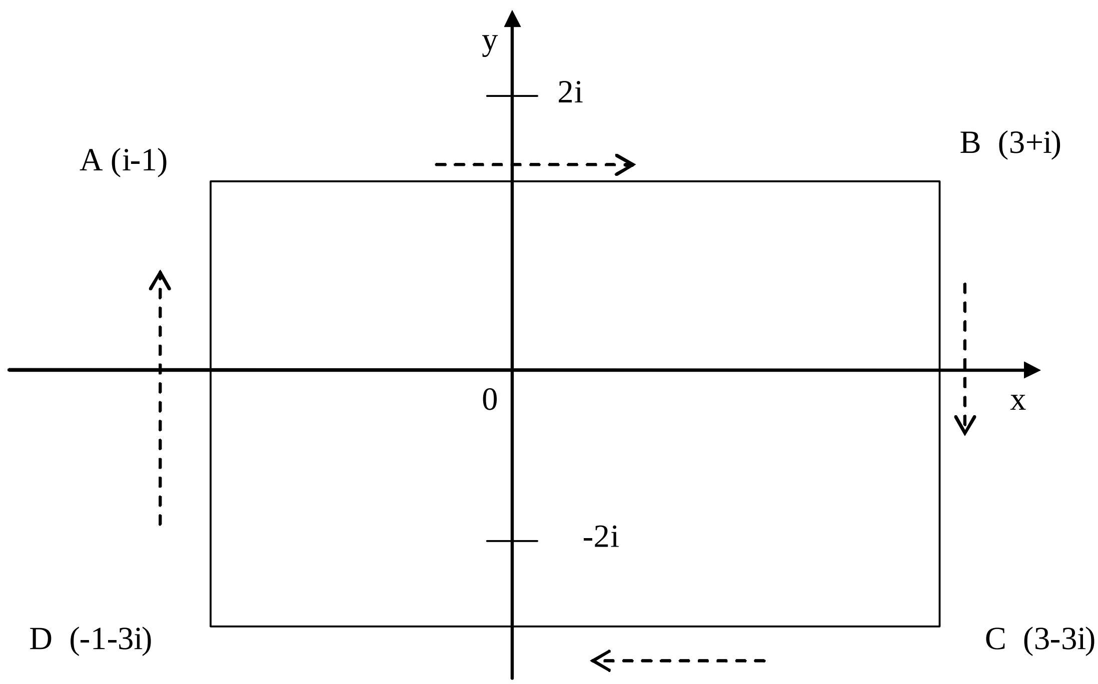
z_j sunt punctele singulare din interiorul drumului γ, parcurs în sens trigonometric

Nu prezentăm demonstraţia.

Comentarii.
Să remarcăm elementele esenţiale din teoremă.
1) funcţia este olomorfă pe interiorul drumului cu excepţia unui număr finit de puncte singulare
2) drumul este închis, injectiv, de clasă C^1 pe porţiuni

Exemplu.
Să se calculeze integrala , pe drumul Γ format din segmentele ce unesc în ordine punctele $z_A = i-1$, $z_B = 3+i$, $z_C = 3-3i$, $z_D = -1-3i$, $z_A = i-1$,

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z^2+4)} dz = ?$$



Soluţie.
Folosim teorema reziduurilor. Este clar că funcţia

$$\frac{e^z}{z(z^2+4)} : \mathbb{C} \backslash \{0, 2i, -2i\} \to \mathbb{C}$$

este olomorfă pe $\mathbb{C} \backslash \{0, 2i, -2i\}$, deci punctele $\{0, 2i, -2i\}$ sunt puncte singulare izolate.

Drumul Γ este reuniunea segmentelor $AB \cup BC \cup CD \cup DA$ rezultatul fiind un drum închis, injectiv, de clasă C^1 pe porţiuni, parcurs în sens invers trigonometric. Să observăm că doar punctele 0 şi $-2i$ sunt în interiorul drumului, adică în interiorul dreptunghiului.

Conform teoremei reziduurilor integrala pe drumul Γ (parcurs în sens invers trigonometric)

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z^2+4)} dz = -2\pi i \sum_{z_j \in int\Gamma} \text{Res}(f, z_j) = -2\pi i \left[\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -2i)\right]$$

Punctele 0 şi $-2i$ sunt poli de ordin 1 , deci reziduurile sunt

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} [f(z)z] = \lim_{z \to 0} \left[\frac{e^z}{z(z^2+4)} z\right] = \lim_{z \to 0} \left[\frac{e^z}{(z^2+4)}\right] = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res}(f,-2i)=\lim_{z\to -2i}\left[f(z)(z+2i)\right]=\lim_{z\to -2i}\left[\frac{e^z}{z\underbrace{(z^2+4)}_{(z-2i)(z+2i)}}(z+2i)\right]=\lim_{z\to -2i}\left[\frac{e^z}{z(z-2i)}\right]=$$

$$\operatorname{Res}(f,-2i)=\frac{e^{-2i}}{(-2i)(-4i)}=-\frac{\cos(2)-i\sin(2)}{8}$$

în final obţinem

$$\oint_\Gamma \frac{e^z}{z(z^2+4)}dz=-2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,-2i)\right]=-2\pi i\left[\frac{1}{4}-\frac{\cos(2)-i\sin(2)}{8}\right]$$

■

1.5.1 Singularitate la "∞"

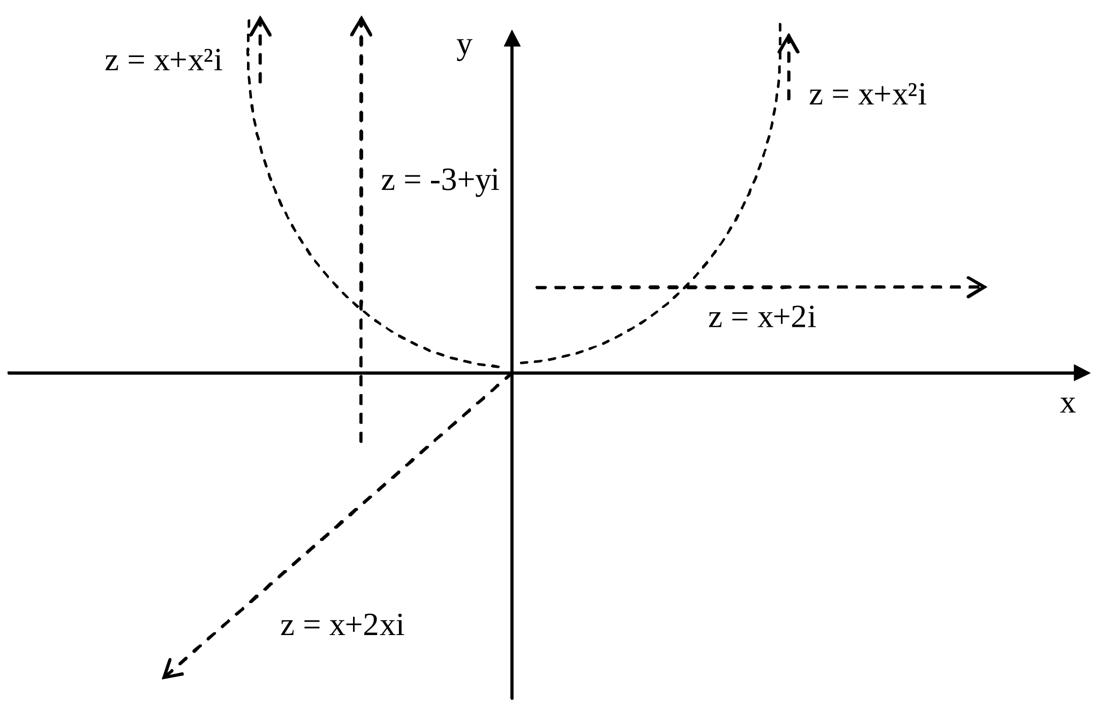
Definiţie. Spunem că "$z\to\infty$" (z "tinde" la ∞) dacă $|z|\to+\infty$. Cu alte cuvinte distanţa de la z la 0 creşte oricât de mult (tinde la ∞)

Să observăm,că $|z|\to 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{|z|}\to+\infty$.

Exemple.

z "tinde" la ∞ poate avea loc în diverse moduri:

1. După o dreaptă: $z=x+2i$ şi $x\to+\infty$ sau $z=-3+iy$ şi $y\to+\infty$ sau $z=x+2xi$ şi $x\to-\infty$
2. După o parabolă $z=x+x^2i$ şi $x\to\pm\infty$
3 sau orice altă "traiectorie" care se îndepărtează de 0 oricât de mult: spirală, sinusoidă, ...



Comentariu.

Totuşi ideea de "punct la ∞" este justificată de următorul fapt.

Considerăm o sferă (de rază 1) cu centrul pe axa Oz tangentă la planul xOy în punctul $O\ (0,0,0)$.

Apoi considerăm toate dreptele ce unesc punctul $N\ (0,0,2)$ (polul "nord") cu toate punctele din planul xOy.

Aceste drepte intersectează sfera în câte un singur punct "P".

Deci stabilesc o corespondenţă bijectivă între punctele din plan şi punctele de pe sferă, cu excepţia punctului N

Cu cât punctele din plan sunt mai depărtate de O , cu atât intersecţia dreptei corespunzătoare cu sfera se "apropie" de punctul N .

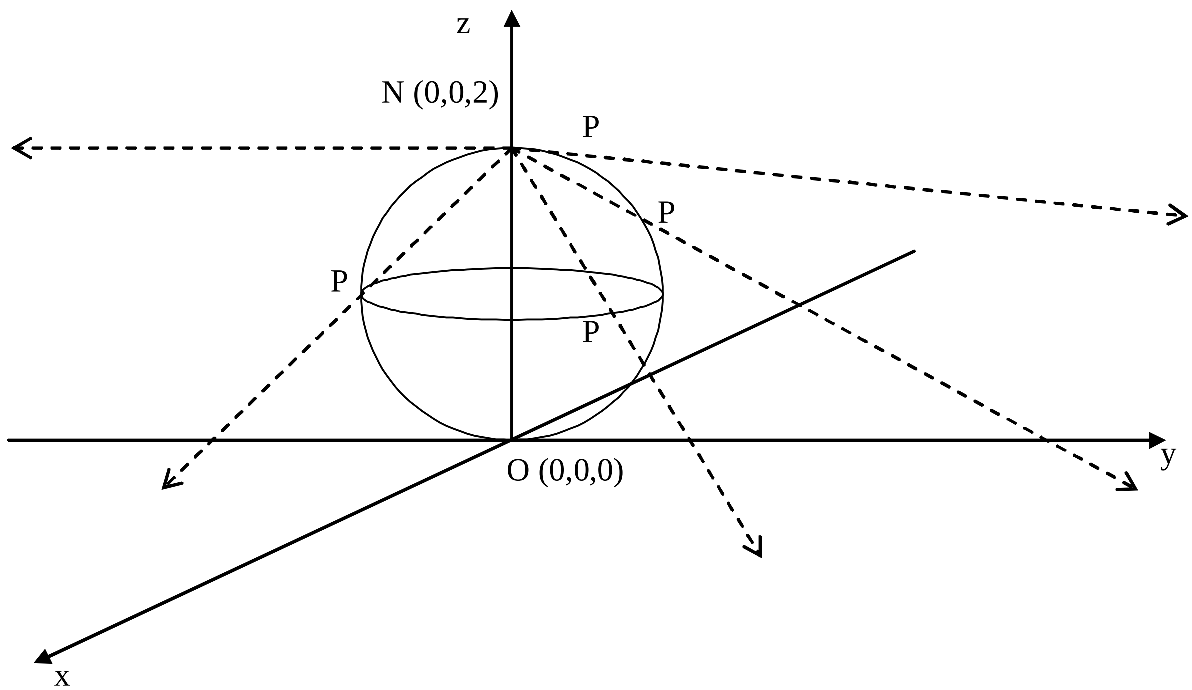
Identificăm punctele din plan (x, y) cu numere complexe $z = x + iy$.

Atunci putem spune că $z \to \infty$ în plan corespunde pe sferă cu " $P \to N$ "

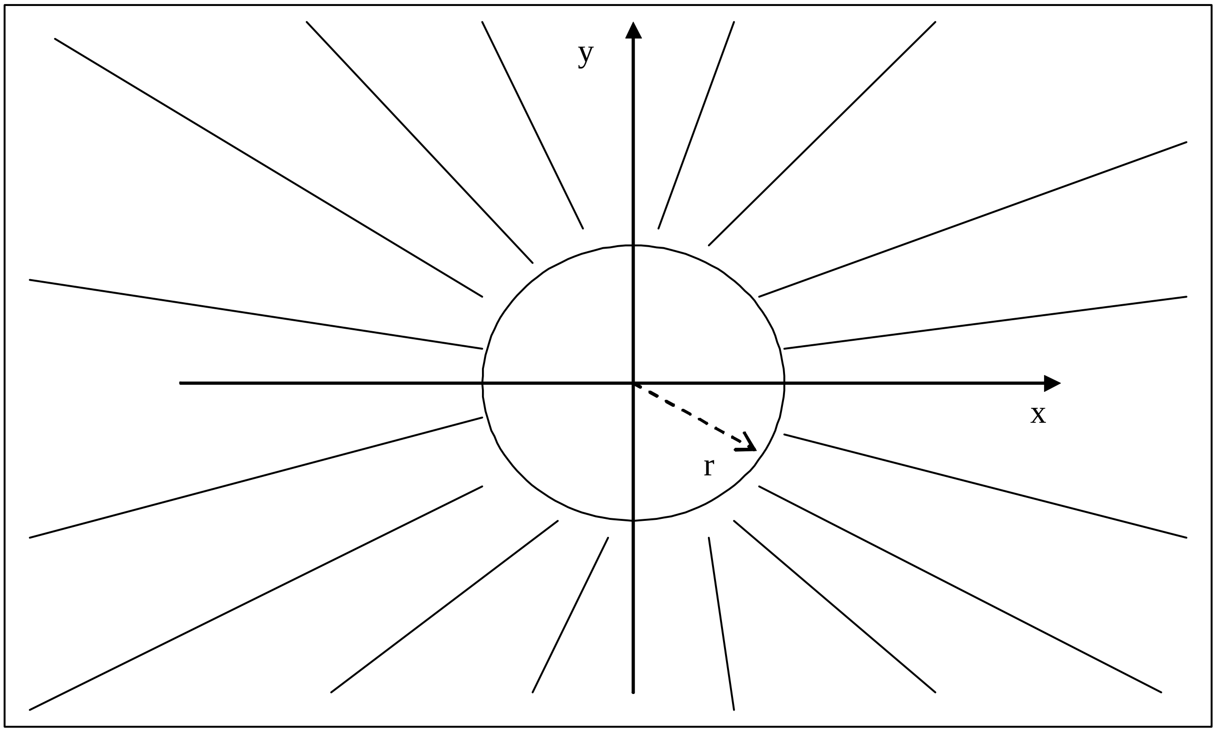
Cu alte cuvinte punctul N (polul nord) corespunde cu "punctul la ∞" din planul xOy

Această "proiecţie" a punctelor de pe sferă pe planul xOy

se numeşte **proiecţia stereografică**, iar sfera se numeşte "**sfera lui Riemann**"



Definiţie. Dacă o funcţie f este olomorfă pe o coroană de tipul $\{r < |z|\}$, atunci spunem că **"∞" este punct singular** (izolat) pentru acea funcţie.



Definiţie. Pentru o funcţie $f : \{r < |z|\} \to \mathbb{C}$ olomorfă pe coroana $\{r < |z|\}$
i) "∞" este **punct singular aparent**, dacă

$$\text{există} \quad \lim_{z\to\infty} f(z) = \quad \text{finită}$$

ii) "∞" este **punct singular de tip pol**, dacă

$$\text{există} \quad \lim_{z\to\infty} |f(z)| = +\infty$$

iii) "∞" este **punct singular esenţial**, dacă

$$\text{nu există} \quad \lim_{z\to\infty} f(z) \ \text{ şi } \ \text{nu există nici} \quad \lim_{z\to\infty} |f(z)|$$

Observaţie.
Să observăm că $|z| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|z|} \to +\infty$. Deci putem înlocui

$$\lim_{z\to\infty} f(z) \quad \text{cu} \quad \lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z})$$

Şi putem reformula clasificarea singularităţii astfel:
i) "∞" este punct singular aparent pentru $f(z) \quad \Leftrightarrow \quad$ 0 este punct singular aparent pentru $f(\frac{1}{z})$
ii) "∞" este punct singular de tip pol pentru $f(z) \quad \Leftrightarrow \quad$ 0 este punct singular de tip pol pentru $f(\frac{1}{z})$
iii) "∞" este punct singular esenţial pentru $f(z) \quad \Leftrightarrow \quad$ 0 este punct singular esenţial pentru $f(\frac{1}{z})$

Observaţie.
Putem reformula clasificarea folosind dezvoltarea în serie Laurent pentru funcţia $f(\frac{1}{z})$.
Putem înlocui $r < |z|$ cu $r < \left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{r}$. Prin urmare
pentru funcţia $f(z)$ avem coroana $\{r < |z|\}$, iar pentru funcţia $f(\frac{1}{z})$ avem coroana $\{|z| < \frac{1}{r}\}$

$$f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{z^n} \quad \text{pentru} \quad |z| < \frac{1}{r}$$

i) "∞" este punctul singular aparent $\Leftrightarrow$ dezvoltarea în serie Laurent nu are parte principală

$$f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ pentru orice } z \in \{|z| < \frac{1}{r}\}$$

(coeficienţii părţii principale sunt toţi nuli $c_{-n} = 0$, $n \geq 1$)

ii) "∞" este punctul singular de tip pol de ordin k $\Leftrightarrow$ dezvoltarea în serie Laurent are parte principală "finită" (are un număr finit de coeficienţi nenuli) mai precis

$$f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + c_{-1}\frac{1}{z} + ... + c_{-k}\frac{1}{z^k} \text{ pentru orice } z \in \{|z| < \frac{1}{r}\}$$

iii) "∞" este punctul singular esenţial $\Leftrightarrow$ dezvoltarea în serie Laurent are parte principală "infinită" (are o infinitate de coeficienţi nenuli)

Exemple.
1. Pentru $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \exp(\frac{1}{z})$, "∞" este punctul singular aparent , deoarece

$$f(\frac{1}{z}) = e^{\frac{1}{\frac{1}{z}}} = \exp(\frac{1}{\frac{1}{z}}) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ...$$

ceea ce arată că 0 este punct singular aparent pentru $f(\frac{1}{z})$ $\Leftrightarrow$ "∞" este punctul singular aparent pentru $f(z)$

2. Pentru un polinom de grad k , "∞" este punct singular de tip pol de ordin k .
Fie $f(z) = a_0 + a_1 z + .. + a_k z^k$, avem

$$f(\frac{1}{z}) = a_0 + a_1\frac{1}{z} + .. + a_k\frac{1}{z^k} \text{ pentru } |z| < \frac{1}{r}$$

ceea ce arată că 0 este pol de ordin k pentru $f(\frac{1}{z})$ $\Leftrightarrow$ "∞" este pol de ordin k pentru $f(z)$

3. Pentru $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \exp(\frac{1}{z})$, "∞" este punctul singular esenţial , deoarece

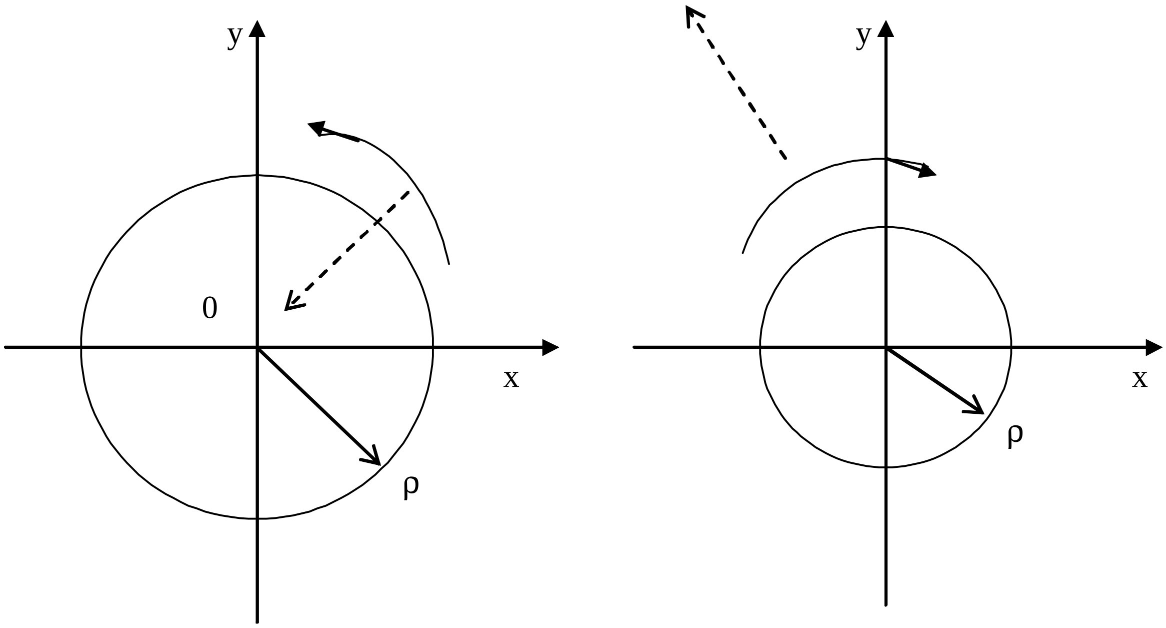
$$f(\frac{1}{z}) = e^{\frac{1}{z}} = \exp(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + ...$$

ceea ce arată că 0 este punct singular esenţial pentru $f(\frac{1}{z})$ $\Leftrightarrow$ "∞" este punctul singular esenţial pentru $f(z)$

Definiţie. Dacă "∞" este punct singular pentru f , atunci

$$\text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z)dz = -c_{-1}$$

Comentarii..
Integrala se calculează pe cerul de rază $\rho > r$, parcurs o dată în sens invers trigonometric.
(astfel apare semnul "$-$")
Valoarea intergalei nu depinde de ρ raza cercului.
"c_{-1}" este coeficientul lui $\frac{1}{z}$ din seria Laurent pentru coroana $\{r < |z|\}$
Sensul invers trigonometric este justificat de "orientare". Mai precis:
Pentru reziduul unui punct singular z_0 cercul este parcurs în sens trigonometric.
Astfel interiorul drumului şi punctul singular z_0 se află la "stanga" în sensul de parcurgere (sens trigonometric)
Cercul $|z| = \rho$ "înconjoară" punctul singular z_0
Pentru reziduul la "∞" cercul este parcurs în sens invers trigonometric.
Astfel "∞" se află la "stanga" în sensul de parcurgere.(sens invers trigonometric)
Cercul $|z| = \rho$ "înconjoară" punctul singular "∞"



sens în “jurul” punctului 0 sens în “jurul” lui “? ”

Observaţie.

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -\,\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2}f(z),0)$$

Demonstraţie.
Folosim dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f(z)$ pentru coroana $\{r < |z|\}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\frac{1}{z^n} \quad \text{pentru} \quad r < |z|$$

Pentru $f(\frac{1}{z})$ obţinem dezvoltarea în serie Laurent

$$f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n \quad \text{pentru} \quad |z| < \frac{1}{r}$$

Deci c_{-1} este coeficientul lui z . Nu trebuie decât să înmulţim cu $\frac{1}{z^2}$ pentru ca c_{-1} să devină coeficientul lui $\frac{1}{z}$

$$\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{z^{n+2}} + c_{-1}\frac{1}{z} + c_{-2}\frac{1}{z^2} + \sum_{n=3}^{\infty} c_{-n}z^{n-2}$$

De unde rezultă clar

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -c_{-1} = -\,\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0)$$

■

Utilitatea reziduului la "∞" rezultă din următoarea teoremă.

Teoremă. Fie f funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$ cu excepţia unui număr finit de puncte singulare $\{z_1, z_2, ..., z_k\}$, atunci

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f,z_j) + \mathrm{Res}(f,\infty) = 0$$

Demonstraţie.
Să considerăm un cerc $|z| = r$ care conţine toate punctele singulare $\{z_1, z_2, ..., z_k\}$.

Aplicăm teorema reziduurilor

$$\oint_{|z|=r} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{Res}(f, z_j)$$

Pe de altă parte "∞" este punct singular pentru f deoarece funcţia este olomorfă pe orice coroană $\{\rho < |z|\}$ care nu conţine punctele singulare şi deci

$$\text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} f(z)dz$$

Adunând obţinem

$$\sum_{j=1}^{k} \text{Res}(f, z_j) + \text{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} f(z)dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} f(z)dz = 0$$

■

Comentariu.

Prin urmare:

dacă folosind teorema reziduurilor se ajunge la calculul sumei reziduurilor în toate punctele singulare ale unei funcţii,

atunci este mai simplu de calculat un singur reziduu la "∞".

Desigur este nevoie ca funcţia să fie olomorfă spre "∞", adică "∞" să fie punct singular.

Exemplu.

Să se calculeze integrala pe un cerc parcurs odată în sens trigonometric

$$\text{a)} \quad \oint_{|z|=3/2} \frac{z^3}{z^4+1} dz = ? \qquad \text{b)} \quad \oint_{|z|=1/2} \frac{z^3}{z^4+1} dz = ?$$

Soluţie.

Să observăm că toate cele 4 puncte singulare z_1, z_2, z_3, z_4 sunt rădăcinile ecuaţiei $z^4 + 1 = 0 \Rightarrow \quad z^4 = -1 \quad \Rightarrow |z| = 1$

Deci toate cele 4 puncte singulare se află în interiorul cercului $|z| = 3/2$ (de rază $3/2$)

Aplicăm teorema reziduurilor şi teorema de mai înainte

$$\oint_{|z|=3/2} \frac{z^3}{z^4+1} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{Res}(f, z_j) = -2\pi i \,\text{Res}(f, \infty)$$

Pentru a determina reziduul la ∞ folosim

$$\text{Res}(f, \infty) = -\,\text{Res}(\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}), 0)$$

$$\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^2} \frac{\frac{1}{z^3}}{\frac{1}{z^4}+1} = \frac{1}{z(z^4+1)}$$

Rezultă că 0 este pol de ordin 1 pentru $\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$ şi

$$\text{Res}(\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}), 0) = \lim_{z \to 0} \left[\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}) z \right] = \lim_{z \to 0} \left[\frac{1}{z(z^4+1)} z \right] = \lim_{z \to 0} \frac{1}{(z^4+1)} = 1$$

Şi în final obţinem

$$\oint_{|z|=3/2} \frac{z^3}{z^4+1} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{Res}(f, z_j) = -2\pi i \,\text{Res}(f, \infty) = -2\pi i$$

Pentru cercul $|z| = 1/2$, raza este $1/2$ deci toate punctele singulare sunt în exteriorul acestui cerc. Funcţia este olomorfă pe interiorul cercului şi conform teoremei lui Caucy

$$\oint_{|z|=1/2} \frac{z^3}{z^4+1} dz = 0$$

■

1.6 Aplicatii la calculul unor integrale

În această parte prezentăm câteva tipuri de integrale reale ce pot fi calculate folosind rezultate din analiza complexă.

I. Integrale de tipul

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$$

unde $R(x, y)$ este o funcţie raţională $R(x, y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, P, Q sunt polinoame, definită în vecinătatea cercului $x^2 + y^2 = 1$, $Q(x, y)$ nu se anulează în puncte de pe cerc. Considerăm cercul unitate în planul complex $\{z \in \mathbb{C} \ , \ |z| = 1\}$ parametrizat

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t \quad , \quad t \in [0, 2\pi] \quad , \quad z'(t) = ie^{it} \quad , \quad e^{-it} = \frac{1}{e^{it}} = \frac{1}{z(t)}$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad , \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$\frac{z(t) - \frac{1}{z(t)}}{2i} = \sin t \quad , \quad \frac{z(t) + \frac{1}{z(t)}}{2} = \cos t$$

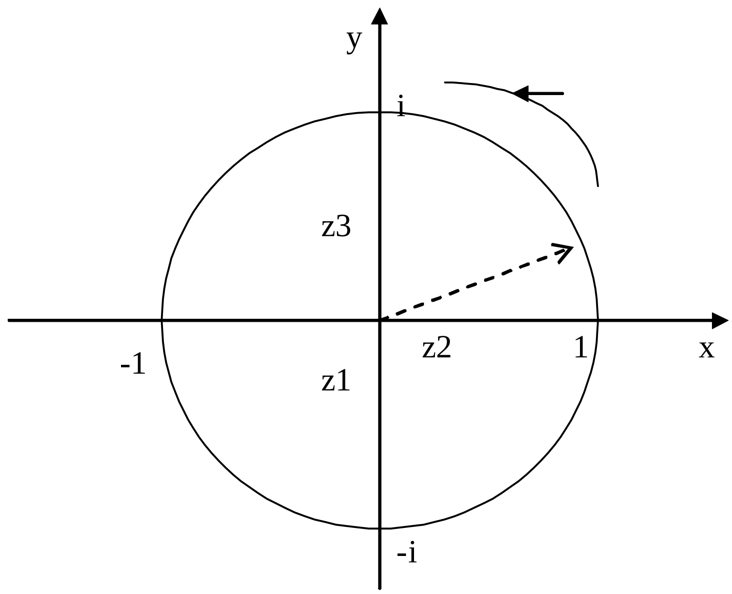
Prin urmare integrala complexă pe cercul $|z| = 1$ parcurs o dată în sens trigonometric se calculează astfel

$$\oint_{|z|=1} \underbrace{R(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}) \frac{1}{iz}}_{f(z)} dz = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) \frac{ie^{it}}{ie^{it}} dt = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$$

Pe de altă parte, conform teoremei reziduurilor obţinem

$$\oint_{|z|=1} \underbrace{R(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}) \frac{1}{iz}}_{f(z)} dz = \oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{|z_k<1|} \text{Res}(f, z_k)$$

unde z_k sunt punctele singulare ale funcţiei f din interiorul cercului $|z| = 1$, mai precis punctele singulare cu $|z_k| < 1$



Deci în final

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt = \oint_{|z|=1} \underbrace{R(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2})\frac{1}{iz}}_{f(z)}dz = 2\pi i \sum_{|z_k<1|} \mathrm{Res}(f, z_k)$$

Comentariu. Ţinând seama de periodicitate funcţiilor $\sin, \cos$ la fel se pot calcula şi integrale de tipul

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(\sin t, \cos t)dt = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt = \int_A^{A+2\pi} R(\sin t, \cos t)dt$$

sau dacă funcţiile sunt pare

$$\int_0^{\pi} R(\sin t, \cos t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} R(\sin t, \cos t)dt$$

Exemplu.
Să se calculeze integrala

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-4\cos t}dt$$

Soluţie.
Conform calculelor de mai înainte

$$5-4\cos t = 5-4\frac{z+\frac{1}{z}}{2} = 5-2(z+\frac{1}{z}) = \frac{5z-2z^2-2}{z}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-4\cos t}dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5-4\cos t}\frac{ie^{it}}{ie^{it}}dt = \oint_{|z|=1} \frac{z}{5z-2z^2-2}\frac{1}{iz}dz = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{5z-2z^2-2}dz$$

Determinăm punctele singulare

$$5z-2z^2-2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{-4} \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{1}{2}\ ,\ z_2 = 2$$

Doar $z_1 = \frac{1}{2}$ este în interiorul cercului $|z| = 1$, prin urmare

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 4\cos t} dt = ... = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \underbrace{\frac{1}{-2(z-2)(z-\frac{1}{2})}}_{f(z)} dz = \frac{1}{i} 2\pi i \cdot \text{Res}(f, \frac{1}{2})$$

Este clar că punctul $\frac{1}{2}$ este pol de ordin 1 , deci

$$\text{Res}(f, \frac{1}{2}) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \left[f(z)(z - \frac{1}{2}) \right] = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \left[\frac{1}{-2(z-2)(z-\frac{1}{2})} (z - \frac{1}{2}) \right] =$$

$$= \lim_{z \to \frac{1}{2}} \left[\frac{1}{-2(z-2)} \right] = \frac{1}{-2(\frac{1}{2} - 2)} = \frac{1}{3}$$

în final obţinem

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 4\cos t} dt = \oint_{|z|=1} \frac{z}{5z - 2z^2 - 2} \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} 2\pi i \cdot \text{Res}(f, \frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$$

■

II. Integrale improprii convergente de tipul

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

unde P, Q sunt polinoame din $\mathbb{R}[X]$, $Q(x) \neq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. (Q nu are rădăcini reale)
Faptul că integrala este convergentă se poate caracteriza prin

$$\lim_{x \to +\infty} x \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \quad , \quad \text{sau echivalent} \quad \deg P + 2 \leq \deg Q$$

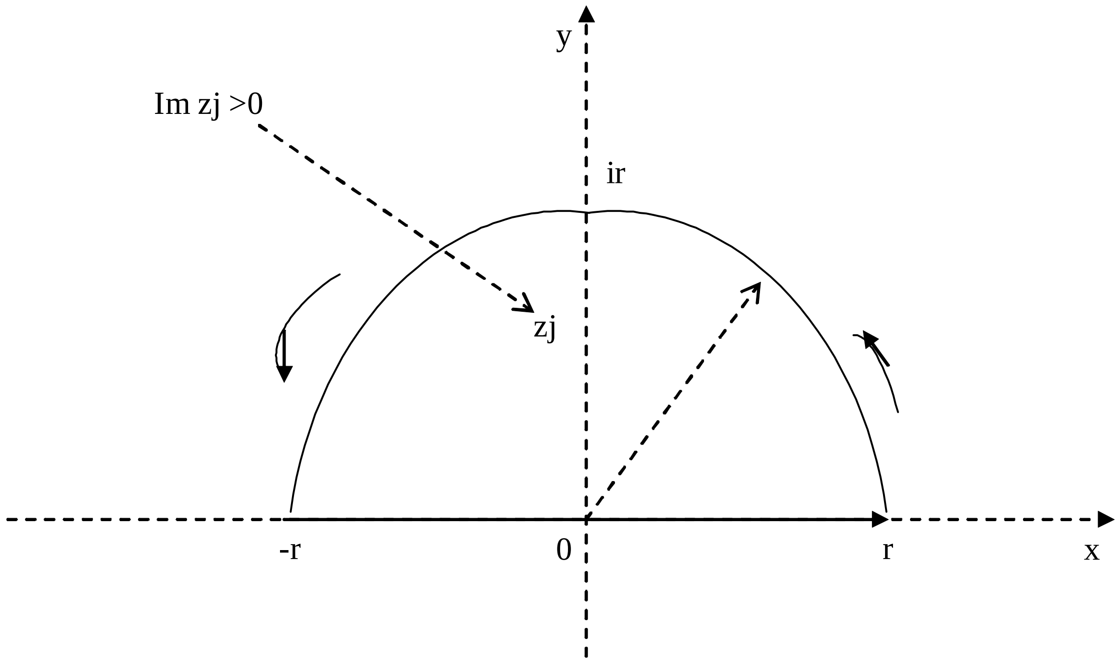
În aceste condiţii

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}\, z_j > 0} \text{Res} \left(\frac{P}{Q}, z_j \right)$$

unde z_j sunt punctele singulare (rădăcinile lui Q) din semiplanul superior $\text{Im}\, z_j > 0$.

Comentariu.
Nu putem folosi notaţia "grad" pentru gradul unui polinom, deoarece "grad" în mod universal desemnează "gradientul"
Din acest motiv folosim notaţia "deg" de la "degree", unanim folosită în textele de matematică.

Demonstraţie.
Considerăm drumul închis $\Gamma = [-r, r] \cup \{|z| = r\}$ format din
segmentul (intervalul) $[-r, r]$ şi semicercul de rază r cu centrul în 0, $|z| = r$, parcurs în sens trigonometric.
Folosim parametrizările
pentru segmentul $[-r, r]$, $z(x) = x \in [-r, r]$, $z'(x) = (x)' = 1$ şi
pentru semicercul $|z| - r$, $z(t) = r(\cos t + i \sin t) = re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $z'(t) = ire^{it}$



Polinomul Q are coeficienţi reali şi nu are rădăcini reale, prin urmare toate rădăcinile sale sunt numere complexe (conjugate două câte două).

(în particular rezultă că în mod necesar gradul lui Q este par)

Alegem r aşa încât toate rădăcinile lui Q , $z_1, z_2, ..., z_k$ să fie în interiorul cercului $|z| = r$, adică $|z_j| < r$, $j = \overline{1,k}$

Interiorul drumului Γ este interiorul semicercului.

Doar rădăcinile cu partea imaginară pozitivă $\operatorname{Im} z_j > 0$ se află în interiorul semicercului

Aplicăm teorema reziduurilor drumului închis Γ şi obţinem

$$\oint_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_j\right)$$

Pe de altă parte

$$\oint_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{[-r,r]} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{|z|=r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{|z|=r} \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} rie^{it} dt$$

Să observăm că trecând la limită pentru $r \to +\infty$ obţinem în mod natural

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Pe de altă parte trecând la limită pentru $r \to +\infty$ obţinem

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{0}^{\pi} \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} rie^{it} dt = 0$$

Demonstraţia este elementară din punct de vedere tehnic, dar nu face obiectul prezentării de faţă.

În final obţinem

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_j\right) = \oint_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \underbrace{\lim_{r \to +\infty} \int_{0}^{\pi} \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} rie^{it} dt}_{\to 0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Exemplu.
Să se calculeze integrala improprie

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

Soluţie
Să observăm mai întâi că funcţia $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ este funcţie pară. Deci

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \quad \text{şi} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

Prin urmare

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

Nu avem decât să aplicăm rezultatul de mai înainte.
În acest caz particular $P = 1$ şi are gradul 0 , $Q = (1+x^2)^2$, are gradul 4 , deci $\deg P + 1 < \deg Q = 4$ şi Q nu are rădăcini reale.

$$Q(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+z^2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = i \ , \ z_1 = -i$$

Ambele rădăcini sunt de ordin 2 , deci sunt poli de ordin 2 pentru funcţia $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ şi numai $z_1 = i$ are $\operatorname{Im} i = 1 > 0$
Deci conform rezultatului de mai înainte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2}, i\right)$$

Pentru un pol de ordin 2 calculăm reziduul astfel

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2}, i\right) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to i} \left[\frac{1}{\underbrace{(1+z^2)^2}_{(z-i)^2(z+i)^2}} (z-i)^2 \right]^{(2-1)} = \lim_{z \to i} \left[\frac{1}{(z+i)^2} \right]'$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2}, i\right) = \lim_{z \to i} \left[\frac{-2}{(z+i)^3} \right] = \frac{-2}{(2i)^3}$$

În final obţinem

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} 2\pi i \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{\pi}{4}$$

■

III. Integrale improprii convergente de tipul (III A)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx$$

Folosind $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ obţinem integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx$$

Unde P, Q sunt polinoame din $\mathbb{R}[X]$, $Q(x) \neq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. (Q nu are rădăcini reale)
Faptul că integralele reale sunt ambele convergente se poate caracteriza prin

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \quad , \text{ sau echivalent } \quad \deg P + 1 \leq \deg Q$$

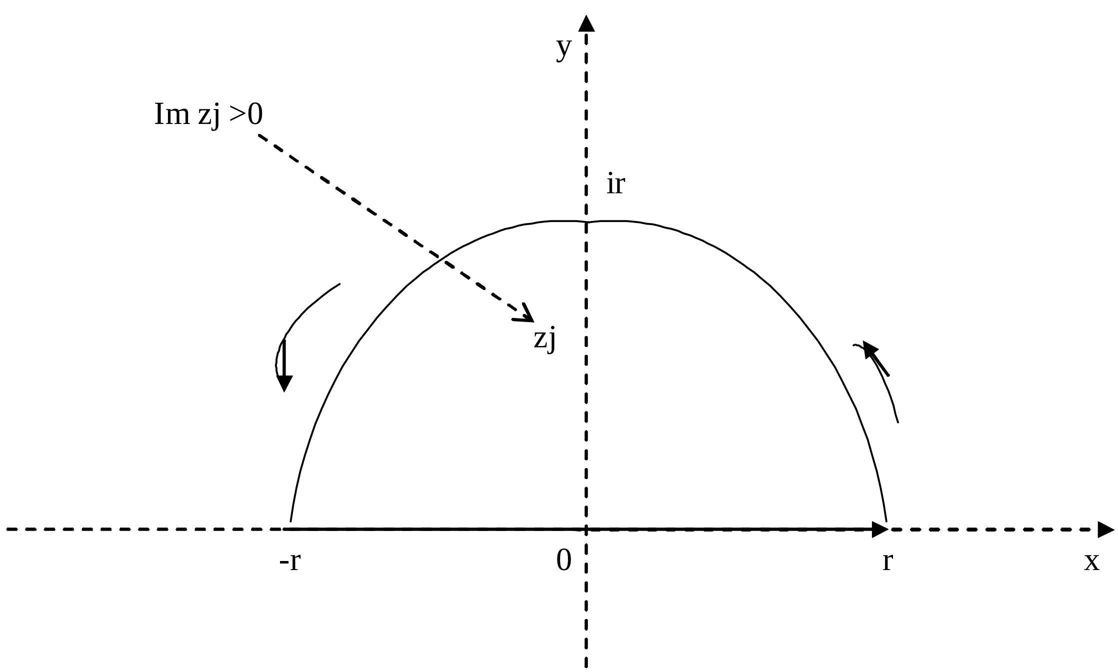
În aceste condiţii

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, z_j \right)$$

unde z_j sunt punctele singulare (rădăcinile lui Q) din semiplanul superior: $\operatorname{Im} z_j > 0$.
Integralele reale se calculează (se "recuperează") astfel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x dx = \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx \right] \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx = \operatorname{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx \right]$$

Demonstraţie.
Folosim un argument similar celui prezentat anterior.
Considerăm drumul închis $\Gamma = [-r, r] \cup \{|z| = r\}$ format din
segmentul (intervalul) $[-r, r]$ şi semicercul de rază r cu centrul în 0, $|z| = r$, parcurs în sens trigonometric.
Folosim parametrizările
pentru segmentul $[-r, r]$, $z(x) = x \in [-r, r]$, $z'(x) = (x)' = 1$ şi
pentru semicercul $|z| - r$, $z(t) = r(\cos t + i \sin t) = re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $z'(t) = ire^{it}$



Polinomul Q are coeficienţi reali şi nu are rădăcini reale, prin urmare toate rădăcinile sale sunt numere complexe (conjugate două câte două).

(în particular rezultă că în mod necesar gradul lui Q este par)

Alegem r aşa încât toate rădăcinile lui Q , $z_1, z_2, ..., z_k$ să fie în interiorul cercului $|z| = r$, adică $|z_j| < r$, $j = \overline{1, k}$

Interiorul drumului Γ este interiorul semicercului.

Doar rădăcinile cu partea imaginară pozitivă $\operatorname{Im} z_j > 0$ se află în interiorul semicercului

Aplicăm teorema reziduurilor drumului închis Γ şi obţinem

$$\oint_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q} e^{iz}, z_j\right)$$

Pe de altă parte

$$\oint_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = \int_{[-r,r]} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz + \int_{|z|=r} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = \int_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx + \int_{|z|=r} \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} e^{ire^{it}} rie^{it} dt$$

Să observăm că trecând la limită pentru $r \to +\infty$ obţinem în mod natural

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx$$

Pe de altă parte trecând la limită pentru $r \to +\infty$ obţinem

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{0}^{\pi} \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} e^{ire^{it}} rie^{it} dt = 0$$

Demonstraţia este mai complicată din punct de vedere tehnic decât cea din cazul anterior. Nu prezentăm această demonstraţie.

În final obţinem

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q} e^{iz}, z_j\right) = \oint_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx + \underbrace{\lim_{r \to +\infty} \int_{0}^{\pi} \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} e^{ire^{it}} rie^{it} dt}_{\to 0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx$$

Exemplu.

Să se calculeza integrala

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx$$

Soluţie.

Să observăm că funcţia $\frac{\cos x}{1+x^2}$ este funcţie pară, deci

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx \quad \text{şi} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx}_{A} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx}_{A}$$

Prin urmare

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1 + x^2} dx\right]$$

Aplicăm rezultatul de mai înainte (pentru tipul III A).
În acest caz particular $P = 1$ şi are gradul 0 , $Q = 1 + x^2$, are gradul 2 , deci $\deg P + 1 < \deg Q = 2$ şi nu are rădăcini reale.

$$Q(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = i \ , \ z_1 = -i$$

Ambele rădăcini sunt de ordin 1 , deci sun tpoli de ordin 1 pentru funcţia $\frac{e^{iz}}{1+z^2}$ şi numai $z_1 = i$ are $\operatorname{Im} i = 1 > 0$
Deci conform rezultatului de mai înainte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}, i\right)$$

Reziduul pentru pol de ordin 1 se calculează

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}, i\right) = \lim_{z \to i} \left[\frac{e^{iz}}{\underbrace{1+z^2}_{(z-i)(z+i)}} (z-i) \right] = \lim_{z \to i} \left[\frac{e^{iz}}{z+i} \right] = \frac{e^{-1}}{2i}$$

În final obţinem

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}, i\right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} \right] = \frac{\pi}{2e}$$

■

III. Integrale improprii convergente de tipul (III B) ("semireziduuri")

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx$$

Unde P, Q sunt polinoame din $\mathbb{R}[X]$, Q are şi rădăcini reale de tip $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dar acestea sunt rădăcini de ordin 1
Faptul că integrala este convergentă "la $\pm\infty$" se poate caracteriza prin

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \quad , \text{ sau echivalent } \quad \deg P + 1 \leq \deg Q$$

În aceste condiţii (formula este numită în "folclor" : formula "semireziduurilor")

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, z_j\right) + \pi i \sum_{x_k \in \mathbb{R}} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, x_k\right)$$

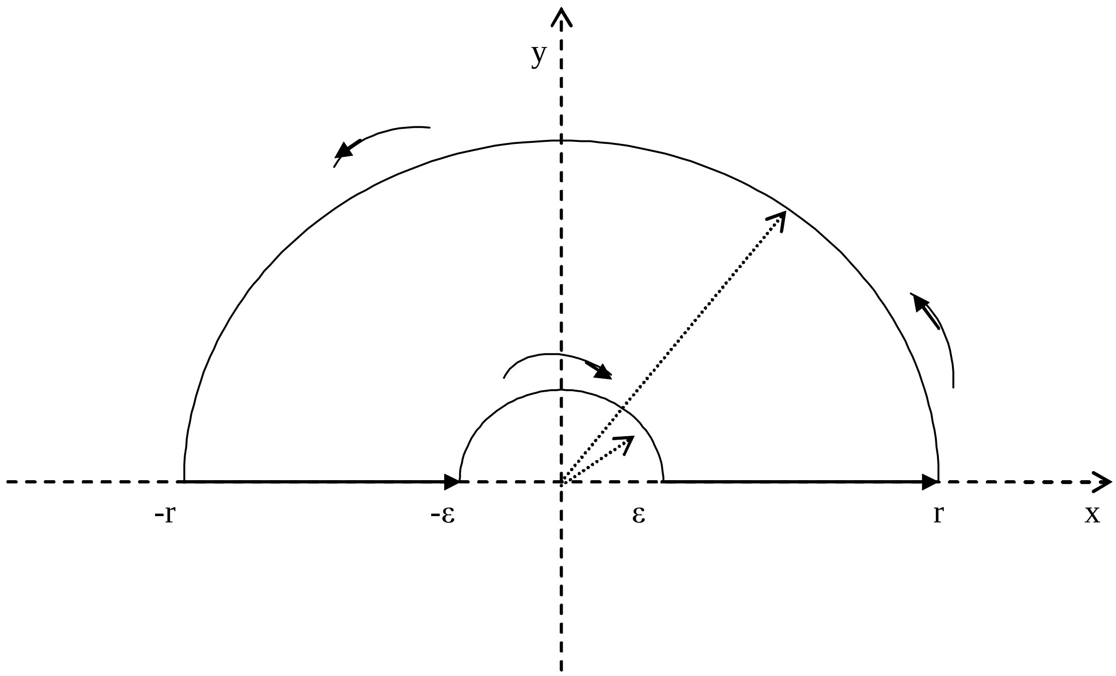
unde z_j sunt punctele singulare (rădăcinilecomplexe ale lui Q) din semiplanul superior: $\operatorname{Im} z_j > 0$,
iar x_k sunt punctele singulare de pe axa reală Ox (rădăcinile reale ale lui Q).
Trebuie observat că în acest caz, integrala improprie este definită în mod cu totul "special"

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx = \lim_{r \to +\infty, \varepsilon \searrow 0} \left[\int_{-r}^{x_1 - \varepsilon} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx + \int_{x_1 + \varepsilon}^{x_2 - \varepsilon} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx + \int_{x_2 + \varepsilon}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx \right]$$

am descris doar cazul în care polinomul Q are 2 rădăcini reale $x_1 < x_2$

Demonstraţie.
Considerăm cazul particular în care Q are o singură rădăcină reală de ordin 1 , şi anume $x = 0$.
Aceast caz este suficient pentru a înţelege ideea demonstraţiei.

Considerăm drumul închis $\Gamma = [-r, -\varepsilon] \cup \{|z| = \varepsilon\} \cup [\varepsilon, r] \cup \{|z| = r\}$ format din
- segmentul $[-r, -\varepsilon]$ parametrizat $z(x) = x \in [-r, -\varepsilon]$, $z'(x) = 1$
- semicercul centrat în 0 de rază ε , $\{|z| = \varepsilon\}$ parametrizat $z(t) = \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $z'(t) = i\varepsilon e^{it}$
  (parcurs în sens invers trigonometric)
- segmentul $[\varepsilon, r]$ parametrizat $z(x) = x \in [\varepsilon, r]$, $z'(x) = 1$
- semicercul centrat în 0 de rază r , $\{|z| = r\}$ parametrizat $z(t) = re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $z'(t) = ire^{it}$
  (parcurs în sens trigonometric)



Alegem r aşa încât toate rădăcinile complexe ale lui Q , z_j să fie în interiorul cercului $|z| = r$, adică $|z_j| < r$
şi alegem ε aşa încât toate rădăcinile complexe ale lui Q să fie în exteriorul cercului $|z| = \varepsilon$, adică $|z_j| > \varepsilon$
Interiorul drumului Γ este domeniul cuprins între cele două semicercuri.
Doar rădăcinile cu partea imaginară pozitivă $\operatorname{Im} z_j > 0$ se află în interiorul drumului Γ
Aplicăm teorema reziduurilor şi obţinem

$$\oint_\Gamma \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, z_j\right)$$

Pe de altă parte

$$\oint_\Gamma \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = \int_{[-r,-\varepsilon]} - \int_{|z|=\varepsilon} + \int_{[\varepsilon,r]} + \int_{|z|=r}$$

Pe segmentele de pe axa reală avem

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x dx + i \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx \quad , \quad \int_{\varepsilon}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = \int_{\varepsilon}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x dx + i \int_{\varepsilon}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx$$

Aici trebuie remarcat faptul că este convergentă doar integrala improprie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx$$

cealaltă integrală improprie este divergentă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x dx$$

Dar datorită faptului că rădăcinile reale ale lui Q sunt doar de ordin 1, se arată că suma integralelor ce conţin "cos" este nulă

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x dx + \int_{\varepsilon}^{-r} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x dx = 0$$

Trecem la limită după $\varepsilon \searrow 0$ şi $r \to +\infty$ şi obţinem în mod natural

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0\ ,\ \ r \to +\infty} \int_{[-r,-\varepsilon]} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = \lim_{\varepsilon \searrow 0\ ,\ \ r \to +\infty} \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx$$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0\ ,\ \ r \to +\infty} \int_{[\varepsilon,r]} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = \lim_{\varepsilon \searrow 0\ ,\ \ r \to +\infty} \int_{\varepsilon}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx$$

Demonstrarea celorlalte două limite este mai complicată. Omitem demonstraţia lor.
Integralele au loc de-a lungul semicercurilor, acest fapt nu este marcat explicit.

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{|z|=r} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = 0 \quad \text{şi} \qquad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, 0\right)$$

În final obţinem

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, z_j\right) = \oint_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = \lim_{\varepsilon \searrow 0\ ,\ \ r \to +\infty} \left[\int_{[-r,-\varepsilon]} - \int_{|z|=\varepsilon} + \int_{[\varepsilon,r]} + \int_{|z|=r}\right] =$$

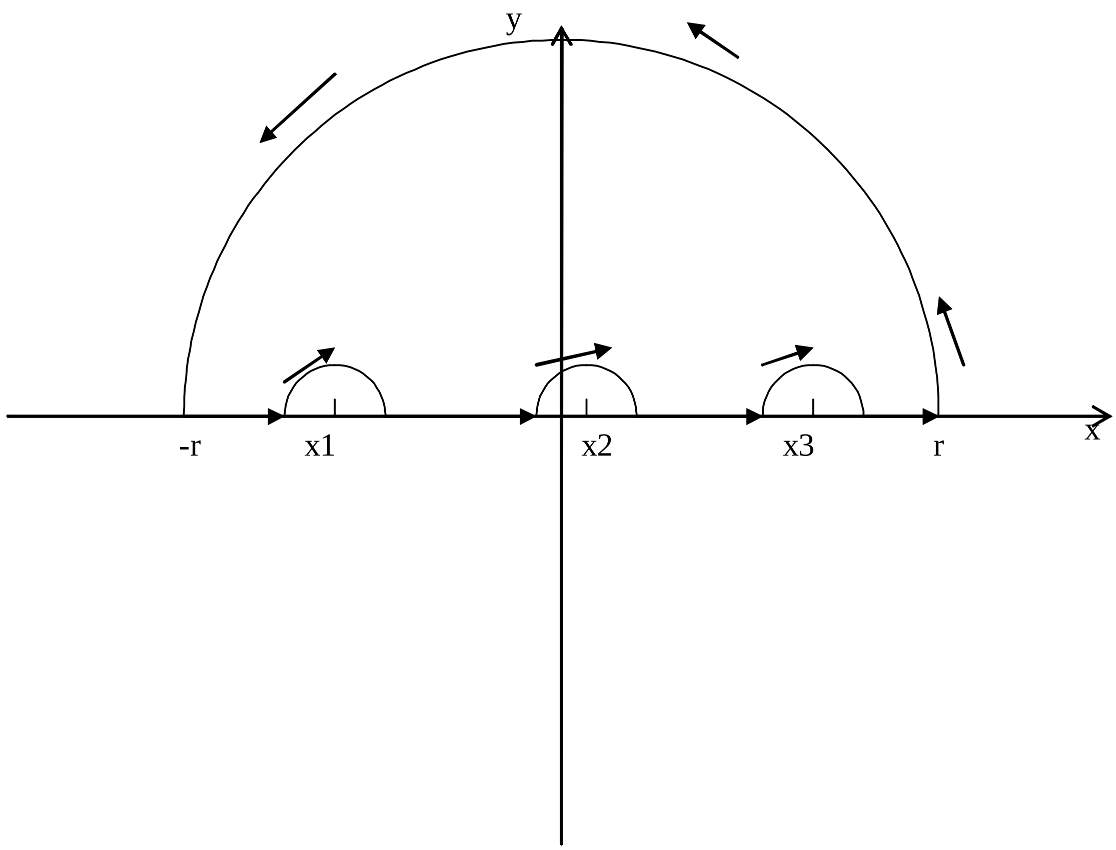
$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0\ ,\ \ r \to +\infty} \left[\int_{[-r,-\varepsilon]} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz\right] - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz + \lim_{\varepsilon \searrow 0\ ,\ \ r \to +\infty} \left[\int_{[\varepsilon,r]} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz\right] + \lim_{r \to +\infty} \int_{|z|=r} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx - \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, 0\right) + \int_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx$$

şi rearanjând termenii

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, z_j\right) + \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, 0\right) = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx$$

În cazul în care Q are mai multe rădăcini reale $x_1, x_2, x_3, ...,$
se procedează în mod similar "ocolind" aceste rădăcini cu semicercuri cu rază $\varepsilon \searrow 0$



Trecând la limită după $\varepsilon \searrow 0$ şi $r \to +\infty$,

- integralele pe segmente tind la integrala improprie $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$
- integrala pe semicercul $|z| = r$ tinde la 0 , iar
- integralele pe semicercurile centrate în rădăcinile reale $x_1, x_2, x_3, ...$ tind la "semireziduuri" $\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, x_k\right)$

Aplicăm teorema reziduurilor şi adunăm rezultatele ţinând seama de sensul de parcurgere al semicercurilor.
■

Exemplu.
Să se calculeze integrala improprie

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Se arată ca această integrală improprie este convergentă, iar integrala ce conţine "cos" este divergentă

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

Soluţie.
Să observăm că funcţia $\frac{\sin x}{x}$ este pară, deci

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{şi} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x} dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Prin urmare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Aplicăm rezultatul de mai înainte (pentru tipul III B).

În acest caz particular $P = 1$ şi are gradul 0 , $Q = x$, are gradul 1 , deci $\deg P + 1 \leq \deg Q$ şi Q are o singură rădăcină reală de ordin 1 , $x = 0$ şi nici o rădăcină complexă.

Deci conform rezultatului de mai înainte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = \lim_{z \to 0} \left[\frac{e^{iz}}{z} z\right] = \lim_{z \to 0} \left[e^{iz}\right] = e^0 = 1$$

În final obţinem

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx\right] = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left[\pi i\right] = \frac{\pi}{2}$$

■

IV. Integrale improprii convergente de tipul

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad , \quad \alpha \in (0, 1)$$

unde P, Q sunt polinoame din $\mathbb{R}[X]$, $Q(x) \neq 0$, pentru orice $x \geq 0$. (Q nu are rădăcini reale pozitive)

Faptul că integrala este convergentă "la $+\infty$" se poate caracteriza prin

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \quad , \quad \text{sau echivalent} \quad \deg P + 1 \leq \deg Q$$

În aceste condiţii

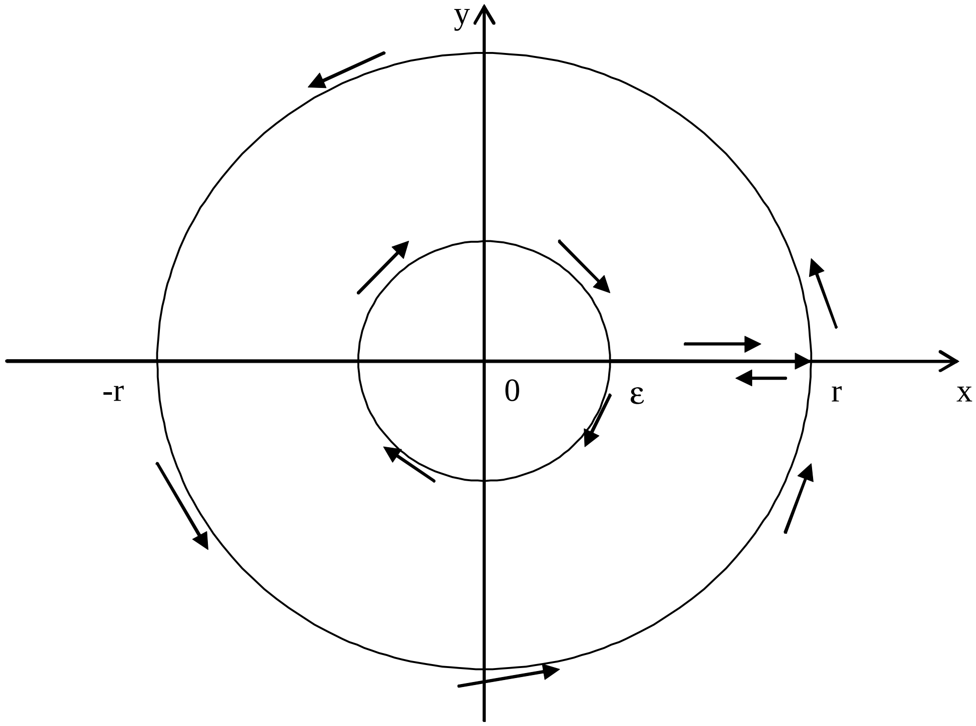
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi\alpha i}} \sum \operatorname{Res}\left(z^{-\alpha} \frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$$

unde z_j sunt toate punctele singulare pentru $\frac{P(z)}{Q(z)}$, adică toate rădăcinile lui Q .

Demonstraţie.

Considerăm drumul închis $\Gamma = [\varepsilon, r] \cup \{|z| = r\} \cup [\varepsilon, r]^- \cup \{|z| = \varepsilon\}$ format din

- segmentul $[\varepsilon, r]$ parametrizat $z(x) = x \in [\varepsilon, r]$, $z'(x) = 1$
- cercul $\{|z| = r\}$ centrat în 0 de rază r parametrizat $z(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $z'(t) = ire^{it}$ (parcurs în sens trigonometric)
- segmentul $[\varepsilon, r]$ parcurs de la r la ε parametrizat $z(x) = x \in [\varepsilon, r]$, $z'(x) = 1$
- cercul $\{|z| = \varepsilon\}$ centrat în 0 de rază ε parametrizat $z(t) = \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $z'(t) = i\varepsilon e^{it}$ (parcurs în sens invers trigonometric)



Alegem r aşa încât toate rădăcinile lui Q , să fie în interiorul cercului $|z| = r$, adică $|z_j| < r$
şi alegem ε aşa încât toate rădăcinile lui Q să fie în exteriorul cercului $|z| = \varepsilon$, adică $|z_j| > \varepsilon$
Interiorul drumului Γ este domeniul cuprins între cele două cercuri.
Aplicăm teorema reziduurilor şi obţinem

$$\oint_{\Gamma} z^{-\alpha} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j} \operatorname{Res}\left(z^{-\alpha}\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$$

unde z_j sunt toate punctele singulare ale functiei $\frac{P(z)}{Q(z)}$.
Pe de altă parte

$$\oint_{\Gamma} z^{-\alpha} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{[\varepsilon,r]} + \int_{|z|=r} - \int_{[\varepsilon,r]} - \int_{|z|=\varepsilon}$$

În acest caz apare problema evaluări corecte a funcţiei "putere" (de fapt a funcţiei argument)

$$z^{-\alpha} = e^{-\alpha \log z} = |z|^{\alpha} e^{-\alpha i \arg z}$$

Pentru acest caz considerăm funcţia argument $\arg : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to [0, 2\pi)$
i) Pentru segmentul $[\varepsilon, r]$, $z(x) = x$ are $\arg z = 0$ şi deci $z^{-\alpha} = |z|^{\alpha} e^{-\alpha i \arg z} = x^{-\alpha} e^{0} = x^{-\alpha}$

$$\int_{[\varepsilon,r]} z^{-\alpha} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{\varepsilon}^{r} x^{-\alpha} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Reamintim că un drum parametrizat reprezintă în un mod continuu de parcurgere a traiectorie.
Să urmărim cum se modifică argumentul atunci când parcurgem drumul Γ
Pornim cu argumentul 0 pe segmentul $[\varepsilon, r]$ şi agument 0 în punctul de start al cercului $\{|z| = r\}$
apoi de-a lungul cercului $\{|z| = r\}$ (parcurs în sens trigonometric) argumentul $\arg z$ creşte de la 0 până la 2π
Prin urmare argumentul ajunge 2π la punctul final al cercului $\{|z| = r\}$
deci argumentul este 2π segmentul $[\varepsilon, r]$ parcurs de la r la ε , parametrizat :

ii) $z(x) = x$ are $\arg z = 2\pi$ şi deci $z^{-\alpha} = |z|^{\alpha} e^{-\alpha i \arg z} = x^{-\alpha} e^{-\alpha 2\pi i} = x^{-\alpha} e^{-\alpha 2\pi i}$
integrala devine

$$-\int\limits_{[\varepsilon,r]} z^{-\alpha}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = -\int\limits_{\varepsilon}^{r} x^{-\alpha}e^{-\alpha 2\pi i}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = -e^{-\alpha 2\pi i}\int\limits_{\varepsilon}^{r} x^{-\alpha}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Trecem la limită după $\varepsilon \searrow 0$ şi $r \to +\infty$ şi obţinem în mod natural

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0\ ,\ r\to+\infty}\int\limits_{\varepsilon}^{r} x^{-\alpha}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Demonstrarea celorlalte două limite este mai complicată. Omitem demonstraţia lor.

$$\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{|z|=r} z^{-\alpha}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{|z|=\varepsilon} z^{-\alpha}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = 0$$

În final obţinem

$$\oint\limits_{\Gamma} z^{-\alpha}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = \lim_{\varepsilon \searrow 0\ ,\ r\to+\infty}\left[\int\limits_{[\varepsilon,r]} + \int\limits_{|z|=r} - \int\limits_{[\varepsilon,r]} - \int\limits_{|z|=\varepsilon}\right]$$

$$2\pi i\sum_{j}\operatorname{Res}\left(z^{-\alpha}\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right) = \oint\limits_{\Gamma} z^{-\alpha}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\frac{P(x)}{Q(x)}dx - e^{-\alpha 2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi\alpha i}}\sum_{j}\operatorname{Res}\left(z^{-\alpha}\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$$

■

Exemplu.
Să se calculeze integrala improprie

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx$$

Soluţie.
În acest caz $\alpha = \frac{1}{3}$, $P = 1$ şi are gradul 0, $Q = 1 + x^2$, are gradul 2 şi nu are rădăcini reale.
Punctele singulare sunt rădăcinile polinomului $1 + z^2$, deci poli de ordin 1 , $z_{1,2} = \pm i$
Calculele de mai înainte oferă o formulă clară

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi\alpha i}}\sum_{j=1}^{2}\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-1/3}}{1+z^2}, z_j\right)$$

Rămân de calculat reziduurile şi de explicitat funcţia putere.
Pe de-o parte avem

$$e^{-2\pi\alpha i} = e^{-2\pi i/3} = \exp(\frac{-2\pi}{3}i) = \cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi\alpha i}} = \frac{2\pi i}{1+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi i}{\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Pe de altă parte pentru poli de ordin 1

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-1/3}}{1+z^2}, i\right) = \lim_{z\to i}\left[\frac{z^{-1/3}}{(z-i)(z+i)}(z-i)\right] = \lim_{z\to i}\left[\frac{z^{-1/3}}{z+i}\right] = \frac{(i)^{-1/3}}{2i}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-1/3}}{1+z^2},-i\right)=\lim_{z\to -i}\left[\frac{z^{-1/3}}{(z-i)(z+i)}(z+i)\right]=\lim_{z\to -i}\left[\frac{z^{-1/3}}{z-i}\right]=\frac{(-i)^{-1/3}}{-2i}$$

Argumentul pentru i este $\arg i=\frac{\pi}{2}$ şi $\arg(-i)=\frac{3\pi}{2}$, deci

$$i^{-1/3}=\sqrt[3]{|i|}\exp(\frac{-1}{3}i\arg i)=\exp(\frac{-1}{3}i\frac{\pi}{2})=\exp(\frac{-\pi}{6}i)=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

$$(-i)^{-1/3}=\sqrt[3]{|-i|}\exp(\frac{-1}{3}i\arg(-i))=\exp(\frac{-1}{3}i\frac{3\pi}{2})=\exp(\frac{-\pi}{2}i)=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=-i$$

În final obţinem

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx=\frac{2\pi i}{\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\frac{(i)^{-1/3}}{2i}+\frac{(-i)^{-1/3}}{-2i}\right]=\frac{\pi}{\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}+i\right]$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right]=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

■

V. Integrale improprii convergente de tipul

$$\int_0^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\ln x dx$$

unde P,Q sunt polinoame din $\mathbb{R}[X]$, $Q(x)\neq 0$, pentru orice $x\geq 0$. (Q nu are rădăcini reale pozitive)
Faptul că integrala este convergentă "la $+\infty$" se poate caracteriza prin

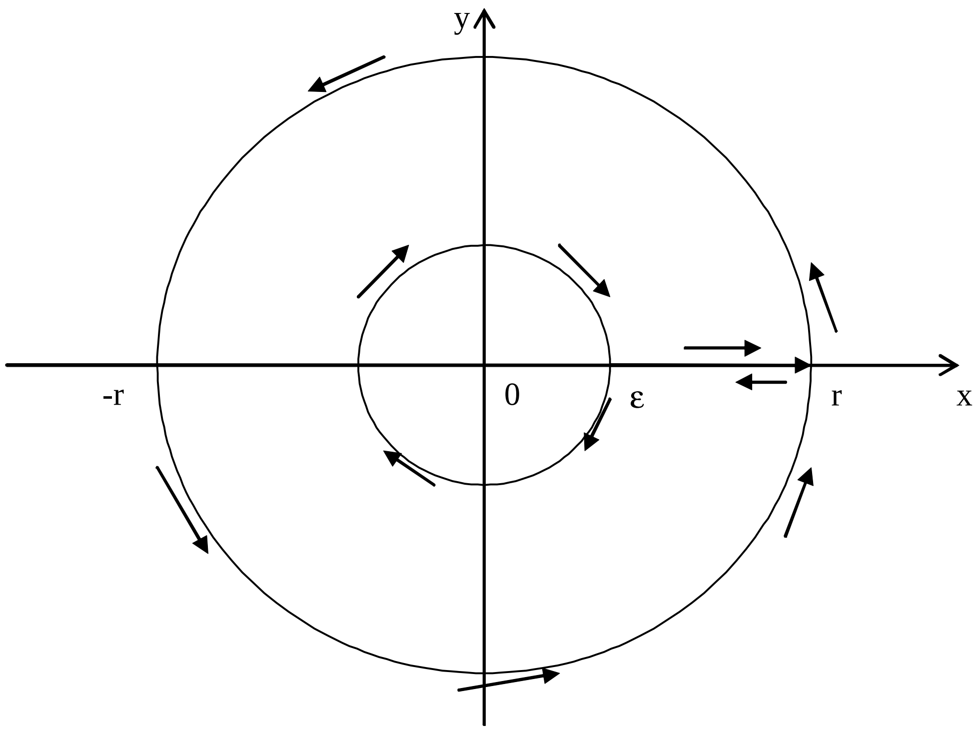
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \quad , \quad \text{sau echivalent} \quad \deg P+1\leq\deg Q$$

În aceste condiţii

$$\int_0^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\ln x dx=\frac{-1}{2}\operatorname{Re}\left[\sum_j \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}(\log z)^2,z_j\right)\right]$$

unde z_j sunt toate punctele singulare pentru $\frac{P(z)}{Q(z)}$, adică toate rădăcinile lui Q .

Demonstraţie.
Procedăm exact ca mai înainte, considerând acelaşi drum Γ, integrăm altă funcţie şi aplicăm teorema reziduurilor.
Considerăm drumul închis $\Gamma=[\varepsilon,r]\cup\{|z|=r\}\cup[\varepsilon,r]^-\cup\{|z|=\varepsilon\}$ format din
- segmentul $[\varepsilon,r]$ parametrizat $z(x)=x\in[\varepsilon,r]$, $z'(x)=1$
- cercul $\{|z|=r\}$ centrat în 0 de rază r parametrizat $z(t)=re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, $z'(t)=ire^{it}$
  (parcurs în sens trigonometric)
- segmentul $[\varepsilon,r]$ parcurs de la r la ε parametrizat $z(x)=x\in[\varepsilon,r]$, $z'(x)=1$
- cercul $\{|z|=\varepsilon\}$ centrat în 0 de rază ε parametrizat $z(t)=\varepsilon e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, $z'(t)=i\varepsilon e^{it}$
  (parcurs în sens invers trigonometric)



Alegem r aşa încât toate rădăcinile lui Q , să fie în interiorul cercului $|z| = r$, adică $|z_j| < r$
şi alegem ε aşa încât toate rădăcinile lui Q să fie în exteriorul cercului $|z| = \varepsilon$, adică $|z_j| > \varepsilon$
Interiorul drumului Γ este domeniul cuprins între cele două cercuri.
Aplicăm teorema reziduurilor pentru funcţia $\frac{P(z)}{Q(z)}(\log z)^2$ şi obţinem

$$\oint_\Gamma \frac{P(z)}{Q(z)}(\log z)^2\,dz = 2\pi i\sum_j \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}(\log z)^2\,dz, z_j\right)$$

unde z_j sunt toate punctele singulare ale functiei $\frac{P(z)}{Q(z)}$.
Pe de altă parte

$$\oint_\Gamma \frac{P(z)}{Q(z)}(\log z)^2\,dz = \int_{[\varepsilon,r]} + \int_{|z|=r} - \int_{[\varepsilon,r]} - \int_{|z|=\varepsilon}$$

Apare în acest caz problema evaluării corecte a funcţiei logaritm (de fapt a funcţiei argument)

$$\log z = \ln|z| + i\arg z$$

Pentru acest caz considerăm funcţia argument $\arg : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to [0, 2\pi)$
i) Pentru segmentul $[\varepsilon, r]$, $z(x) = x$ are $\arg z = 0$ şi deci $\log z = \ln x + i\cdot 0 = \ln x$

$$\int_{[\varepsilon,r]} \frac{P(z)}{Q(z)}(\log z)^2\,dz = \int_\varepsilon^r \frac{P(x)}{Q(x)}(\ln x)^2 dx$$

Reamintim că un drum parametrizat reprezintă în un mod continuu de parcurgere a traiectorie.
Să urmărim cum se modifică argumentul atunci parcurgem drumul Γ
Pornim cu argumentul 0 pe segmentul $[\varepsilon, r]$ şi agument 0 în punctul de start al cercului $\{|z| = r\}$
apoi de-a lungul cercului $\{|z| = r\}$ (parcurs în sens trigonometric) argumentul $\arg z$ creşte de la 0 până la 2π
Prin urmare argumentul ajunge 2π la punctul final al cercului $\{|z| = r\}$
deci argumentul este 2π segmentul $[\varepsilon, r]$ parcurs de la r la ε , parametrizat :

ii) $z(x) = x$ are $\arg z = 2\pi$ şi deci $\log z = \ln x + i2\pi$
integrala devine

$$-\int\limits_{[\varepsilon,r]} \frac{P(z)}{Q(z)} (\log z)^2\, dz = -\int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x + 2\pi i)^2 dx$$

Trecem la limită după $\varepsilon \searrow 0$ şi $r \to +\infty$ şi obţinem în mod natural

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0\ ,\ r\to+\infty} \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x)^2 dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x)^2 dx$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0\ ,\ r\to+\infty} \left[-\int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x + 2\pi i)^2 dx \right] = -\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x + 2\pi i)^2 dx$$

Demonstrarea celorlalte două limite este mai complicată. Omitem demonstraţia lor.

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{|z|=r} \frac{P(z)}{Q(z)} (\log z)^2\, dz = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{r\to+\infty} \int\limits_{|z|=\varepsilon} \frac{P(z)}{Q(z)} (\log z)^2\, dz = 0$$

În final obţinem

$$2\pi i \sum_j \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\log z)^2\, dz, z_j \right) = \oint\limits_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} (\log z)^2\, dz = \lim_{\varepsilon\searrow 0\ ,\ r\to+\infty} \left[\int\limits_{[\varepsilon,r]} + \int\limits_{|z|=r} - \int\limits_{[\varepsilon,r]} - \int\limits_{|z|=\varepsilon} \right]$$

$$2\pi i \sum_j \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\log z)^2\, dz, z_j \right) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x)^2 dx - \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \underbrace{(\ln x + 2\pi i)^2}_{(\ln x)^2 + 4\pi i \ln x - 4\pi^2} dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x)^2 dx - \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x)^2 dx - 4\pi i \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \ln x dx + 4\pi^2 \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

$$2\pi i \sum_j \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\log z)^2\, dz, z_j \right) = -4\pi i \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \ln x dx + 4\pi^2 \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

$$\frac{-1}{2} \sum_j \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\log z)^2\, dz, z_j \right) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \ln x dx + \pi i \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Deci

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \ln x dx = \frac{-1}{2} \operatorname{Re}\left[\sum_j \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\log z)^2, z_j \right) \right]$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{-1}{2\pi} \operatorname{Im}\left[\sum_j \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\log z)^2, z_j \right) \right]$$

■

Exemplu.
Să se calculeze integrala improprie

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2} dx$$

Soluţie.

În acest caz $P = 1$ şi are gradul 0, $Q = 1 + x^2$, are gradul 2 şi nu are rădăcini reale.
Punctele singulare sunt rădăcinile polinomului $1 + z^2$, deci poli de ordin 1 , $z_{1,2} = \pm i$
Putem folosi direct formulele demonstrate mai înainte.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \frac{-1}{2} \operatorname{Re}\left[\sum_j \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}(\log z)^2, z_j\right)\right]$$

Reziduurile în poli de ordin 1 sunt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}(\log z)^2, i\right) = \lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z-i)(z+i)}(\log z)^2(z-i)\right] = \lim_{z\to i}\left[\frac{1}{z+i}(\log z)^2\right] = \frac{(\log i)^2}{2i}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}(\log z)^2, -i\right) = \lim_{z\to -i}\left[\frac{1}{(z-i)(z+i)}(\log z)^2(z+i)\right] = \lim_{z\to -i}\left[\frac{1}{z-i}(\log z)^2\right] = \frac{(\log(-i))^2}{-2i}$$

Argumentul pentru i este $\arg i = \frac{\pi}{2}$ şi $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$, deci

$$(\log i)^2 = (\ln|i| + i\arg i)^2 = (\ln 1 + i\frac{\pi}{2})^2 = (i\frac{\pi}{2})^2 = -\frac{\pi^2}{4}$$

$$(\log(-i))^2 = (\ln|-i| + i\arg -i)^2 = (\ln 1 + i\frac{3\pi}{2})^2 = (i\frac{3\pi}{2})^2 = -\frac{9\pi^2}{4}$$

În final obţinem

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \frac{-1}{2} \operatorname{Re}\left[\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}(\log z)^2, i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}(\log z)^2, -i\right)\right] = \frac{-1}{2}\operatorname{Re}\left[\frac{-\frac{\pi^2}{4}}{2i} - \frac{\frac{9\pi^2}{4}}{-2i}\right] = 0$$

şi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{-1}{2\pi} \operatorname{Im}\left[\sum_j \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}(\log z)^2, z_j\right)\right] = \frac{-1}{2\pi}\operatorname{Im}\left[\frac{-\frac{\pi^2}{4}}{2i} - \frac{\frac{9\pi^2}{4}}{-2i}\right] = \frac{-1}{2\pi}\operatorname{Im}\left[-\pi^2 i\right] = \frac{\pi}{2}$$

■

Comentariu.
Putem observa şi direct faptul că integrala improprie este nulă. Descompunem astfel

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{y}$ şi obţinem $x \searrow 0 \Rightarrow y \to +\infty$, $x \nearrow 1 \Rightarrow y \searrow 1$, $dx = \frac{-1}{y^2} dy$, deci

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_{+\infty}^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{1+\left(\frac{1}{y}\right)^2} \frac{-1}{y^2} dy = \int_1^{+\infty} \frac{-\ln y}{\frac{y^2+1}{y^2}} \frac{1}{y^2} dy = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln y}{1+y^2} dy$$

În final obţinem

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln y}{1+y^2} dy + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$$

Analiză Complexă - Întrebări "test"

Iată câteva întrebări simple, cu care puteţi "verifica" capacitatea de a vă "orienta" în analiza complexă.

Puteţi adăuga şi alte întrebări ce vi se par relevante.

1. Cum determinaţi partea reală, partea imaginară a unui număr complex ?
2. Cum calculaţi modulul unui număr complex ? ce reprezintă modulul din punct de vedere geometric ?
3. Cum se adună, înmultesc, împart numerele complexe ?
4. Două numere complexe sunt egale dacă ..... ?
5. Din ce motive o funcţie este derivabilă ? Ce opţiuni aveţi pentru a demonstra că o functie este derivabilă ?
6. Ce înseamnă o funcţie "olomorfă" ?
7. Cum se derivează o sumă de funcţii, un produs, un raport, o compunere ?
8. Polinoamele sunt funcţii complexe derivabile pe domeniul .... ?
9. Funcţiile raţionale (raport de polinoame) sunt funcţii complexe derivabile pe domeniul ... ?
10. Ce fel de funcţii pot fi partea reală, sau partea imaginară a unei funcţii olomorfe ?

11. Cum folosim relaţiile Cauchy-Riemann pentru a stabili dacă o funcţie este olomorfă ?
12. Cum folosim relaţiile Cauchy-Riemann pentru a determina o funcţie olomorfă, ştiind partea sa reală ?
13. Ce legătură are raza de convergenţă cu convergenţa unei serii de puteri ?
14. Cum se calculează derivata sumei unei serii de puteri ?
15. Cum se determina seria Taylor asociată unei funcţii ?
16. Va puteţi aminti cele două serii "remarcabile" : geometrică, exponenţială, (sin , cos) ?
17. Puteti găsi rapid definiţia si proprietăţile funcţiilor exp, sin, cos ?
18. Cum se definesc funcţiile : argument, logaritm, putere ?
19. Ce valori nu ia funcţia exponenţială ? dar funcţiile sin, cos ?
20. Puteţi calcula o integrală folosind definiţia ?

Puteţi parametriza un cerc ? un semicerc ? sfert de cerc ? contează centrul ? contează raza ?
Integrala pe un drum închis este 0 dacă funcţia este .... ?
Puteţi determina o primitivă pentru o funcţie elementară ? de exemplu exp, sin, cos, polinom, ... ?
Cum se calculează o integrală folosind o primitivă ?
Cum sunt zerourile unei funcţii olomorfe ?
Ce puncte singulare are un polinom ? dar o funcţie raţională ?
Câte exemple de coroane cunoaşteţi ?
Puteţi distinge partea Taylor de partea principală pentru o serie Laurent ?
Câte dezvoltări în serie Laurent are o funcţie pentru o coroană ?
Câte dezvoltări în serie Taylor are o funcţie într-un punct ?

Cum puteţi calcula reziduul într-un punct singular ?
Cum stabiliţi dacă un punct singular este pol şi de ce ordin ?
Puteţi folosi teorema reziduurilor ?
Puteţi distinge o funcţie pară ? o funcţie impară ? cum ?
În ce măsură contează pentru anumite integrale (reale), dacă o funcţie este pară sau impară ?
O funcţie care nu este impară este neapărat pară ?
O funcţie care nu este pară este neapărat impară ?
Ce posibilităţi de calcul există pentru integrale pe drumuri închise ?
Contează sensul în care este parcurs un drum, pentru calculul integralei ? cum ?
Cum se modifică valoarea integralei dacă drumul închis este parcurs de mai multe ori ?

Puteţi determina argumentul unui număr complex ? cum procedaţi ?
Puteţi determina argumentul unui număr complex relativ "simplu" : 3 , $2i$, -5 , $1+i$, $\sqrt{3}-i$, ... ?
Cum calculaţi limitele unor funcţii complexe ? puteţi folosi dezvoltări în serie Taylor ?
Cum stabiliţi dacă o funcţie este armonică ?
O funcţie complexă derivabilă, poate fi partea reală a altei funcţii complexe derivabile ?
Funcţia exponenţială este periodică ? care este perioada ?
Cum determinaţi (calculati) reziduul unei funcţii într-un punct singular esenţial ?
Puteţi da un exemplu de punct singular aparent ?
Puteţi da un exemplu de funcţie complexă care nu este derivabilă în nici un punct ?
Puteţi da un exemplu de funcţie complexă care nu este derivabilă doar în trei puncte ?
Puteţi da un exemplu de funcţie care are un pol de ordin 3 ?

Puteţi da un exemplu de funcţie care are un punct singular esenţial ?

Indicaţii (Ind) - Răspunsuri (R)
Unele întrebări nu fac decât să amintească, că anumite elemente sunt importante.
Răspunsul la astfel de întrebări se obţine direct din textul cursului. Le notăm cu " $\Box$ "

1.$\Box$ 2. $\Box$ 3. $\Box$ 4. $\Box$ 5. R - verifică definiţia, este o "compunere de funcţii elementare", verifică criteriul Cauchy-Riemann
6.$\Box$ 7.$\Box$ 8.$\Box$ 9.$\Box$ 10.$\Box$ R - Funcţii armonice.
11. verificaţi faptul că pareta reală şi partea imaginară sunt funcţii de clasă C^1, apoi verificaţi relaţiile Cauchy-Riemann

Ecuaţii Diferenţiale Ordinare

Introducere

Ecuaţiile diferenţiale sunt un model matematic pentru majoritatea fenomenelor din lumea reală.
Strict formal, o ecuaţie diferenţială "ordinară" este o egalitate verificată de o funcţie $x = x(t)$ (care depinde de un singur parametru - variabilă) şi de derivata sa $x'(t)$:

$$(*) \qquad E(t, x(t), x'(t)) = 0 \text{ pentru orice } t \text{ într-un anumit domeniu}$$

Se poate numi şi ecuaţie diferenţială de ordin 1.
Ecuaţiile diferenţiale liniare de ordin superior, precum şi sistemele liniare de ecuaţii diferenţiale se pot şi ele pune într-o astfel de formă.
Putem considera şi ecuaţii diferenţiale de ordin 2, adică ecuaţii în care apare şi derivata de ordin 2

$$E(t, x(t), x'(t), x''(t)) = 0 \text{ pentru orice } t \text{ într-un anumit domeniu}$$

Ecuaţii diferenţiale de ordin 3, adică ecuaţii în care apare şi derivata de ordin 3

$$E(t, x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) = 0 \text{ pentru orice } t \text{ într-un anumit domeniu}$$

sau ecuaţii diferenţiale de orice alt ordin, adică ecuaţii în care apare şi derivata de un ordin oarecare " n ".

Definiţie. Se numeşte **soluţie** a ecuaţiei diferenţiale o funcţie derivabilă "$x = x(t)$" care verifică ecuaţia (*).
Determinarea tuturor soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale se numeşte uneori "integrarea" ecuaţiei.
Denumirea este justificată de modul de rezolvare a celei mai simple ecuaţii diferenţiale $x'(t) = f(t)$,
şi anume se integrează sau se calculează "integrala" (de fapt antiderivata) $\int f(t)dt$
obţinând astfel soluţia $x(t) = \int f(t)dt + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Notaţia $x = x(t)$ înseamnă " x " este funcţie de " t " sau "depinde de parametrul t ".
Notăm derivata funcţiei "$x = x(t)$" cu

$$x'(t) \quad \text{sau} \quad \frac{dx}{dt} \quad \text{sau} \quad \dot{x}(t)$$

Este preferabil să citim " derivata (funcţiei) lui x în raport cu t " marcând astfel cum gândim,
evitând să citim ad literam " x prim " sau " de x la de t " sau " x punct "
Derivata unei funcţii (unei mărimi fizice) reprezintă (numeric) viteza de variaţie,
cât de repede variază mărimea fizică în timp.
Notaţia $\frac{dx}{dt}$ este justificată de modul de calcul al derivatei unei funcţii (unei mărimi fizice).
Variaţia funcţiei în intervalul de timp $(t - t_0)$ este $(x(t) - x(t_0))$,
iar raportul

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

reprezintă viteza de variaţie în acest interval de timp, sau "viteza medie"
diferenţa $(x(t) - x(t_0))$ se poate nota $\Delta x = x(t) - x(t_0)$ sau $dx = x(t) - x(t_0)$,

respectiv $\Delta t = t - t_0$ sau $dt = t - t_0$
atunci raportul devine

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

viteza "instantanee" la momentul t_0 se obţine ca limită a raportului, adică

$$\lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \overset{not}{=} x'(t_0) \overset{not}{=} \frac{dx}{dt}(t_0)$$

Soluţia explicită $x = x(t)$ reprezintă variaţia efectivă a mărimii în timp,
cu alte cuvinte predicţia valorilor mărimii la orice moment de timp t.

Exemplu. Cea mai simplă ecuaţie diferenţială este de forma

$$x'(t) = f(t)$$

Cu alte cuvinte, să se determine funcţiile (derivabile) $x = x(t)$ a căror derivată este $f(t)$.
În analiza matematică studiată în liceu, aceeaşi problemă este formulată astfel
"Să se determine (primitivele) antiderivatele funcţiei $f = f(t)$ " sau

$$\int f(t)dt = \ ? \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = (\ ?\ )' \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \frac{d}{dt}(?)$$

Soluţiile se scriu în forma "tradiţională"

$$x(t) = \int f(t)dt + C \ \ , \ \ C \in \mathbb{R}.$$

unde $\int f(t)dt$ desemnează o (primitivă) antiderivată oarecare.
Constanta $C \in \mathbb{R}$ se poate determina dacă se cunoaşte valoarea funcţiei $x(t_0) = b$ într-un punct oarecare t_0 ,
numită şi "**condiţie iniţială**"
În acest caz soluţia se poate scrie în forma

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f + b = \int_{t_0}^{t} f(s)ds + b = \int_{t_0}^{t} f(s)ds + x(t_0)$$

Denumirea "**condiţie iniţială**" este inspirată din fizică, unde folosind notaţia $x = x(t)$
se spune că mărimea fizică "x" ia valoarea b la momentul iniţial t_0 , atunci când t semnifică timpul.
Aceasta corespunde situaţiei în care ştiind viteza $x'(t) = f(t)$
(viteza de variaţie a mărimii x în raport cu parametrul t)
putem determina explicit variaţia mărimii $x = x(t)$ în funcţie de parametrul t ,
atunci când putem determina explicit antiderivata $\int f(t)dt$,
altfel tot ce obţinem este doar o reprezentare "integrală" a soluţiei (adică sub forma unei integrale).
Condiţia iniţială, reprezintă valoarea mărimii masurată la un moment t_0 ,
Cu alte cuvinte, măsurănd (cunoscând) valoarea mărimii la un moment t_0 ,
putem prezice valorile la orice moment ulterior $t \geq t_0$
Sau, cunoscând valoarea mărimii la un moment "final"
putem determina valorile "evoluţiei" mărimii, la orice moment anterior $t \leq t_0$.

Concret, în balistică, dacă se cunoaşte poziţia iniţială (poziţia de start) şi viteza, se pot prezice poziţiile ulterioare ale unui proiectil sau unde va ajunge, adică poziţia finală.

Sau, invers, dacă se cunoaşte unde a ajuns un proiectil (poziţia finală) şi viteza de impact, atunci se poate determina poziţia de start, sau poziţia iniţială, locul de unde a fost lansat acel proiectil. Sau dorind ca proiectilul să ajung într-un anumit loc, determinăm poziţia iniţială de unde trebuie lansat ca să ajungă în locul dorit.

La fel pentru orice alt sistem fizic, de exemplu un circuit electric, cunoscând valoarea iniţială a intensităţii, putem prezice valorile viitoare ale intensităţii, ceea ce este evident o informaţie deosebit de utilă, sau temperatura unei componente electrice, electronice, este foarte important de cunoscut cum va evolua în viitor pentru a preîntâmpina eventuale accidente sau a cunoaşte necesarul de răcire al componentei respective.

In matematică, pentru ecuaţii diferenţiale, vom numi condiţie initială, indiferent de o eventuală semnificaţie fizică.

Definiţie. *Se numeşte* ***problemă Cauchy*** *, o ecuaţie diferenţială împreună cu o condiţie iniţială:*

$$\begin{cases} E(t, x(t), x'(t)) = 0 & \text{(ED)} \\ x(t_0) = b & \text{(CI)} \end{cases}$$

Se numeşte ***soluţie a problemei Cauchy ,***
o funcţie derivabilă $x = x(t)$ care verifică ecuaţia diferenţială (ED) şi condiţia iniţială (CI) şi este definită în vecinătatea lui t_0.

În cele ce urmează vom căuta doar soluţii "locale", adică definite într-o vecinătate a "condiţiei iniţiale" t_0,
mai precis soluţii definite pe un interval (α, β) care conţine t_0 , $t_0 \in (\alpha, \beta)$
sau un interval simetric $t_0 \in (t_0 - r, t_0 + r)$
Pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale care nu au specificate o condiţie iniţială, vomproceda în md asemănător, căutând doar soluţii pe anumite intervale intervale.

Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) matematician francez. A iniţiat proiectul formulării şi demonstrării riguroase a teoremelor din calculul diferenţial şi integral, un "pionier" al analizei matematice. Are contribuţii importante în analiza complexă şi lucrări ce acoperă majoritatea problemelor din matematică şi fizică matematică.
Sunt foarte multe noţiuni matematice şir Cauchy, Criteriul lui Cauchy, teorema Cauchy, formula Cauchy, inegalităţi Cauchy, care poartă numele lui Cauchy. Sunt denumiri rămase "istoric" , nu neapărat utile, deoarece a eticheta o teoremă doar cu un nume propriu, nu spune nimic despre conţinutul acelei teoreme, dar au rămas consacrate aşa deocamdată.

Comentariu.
Două probleme fundamentale nu vor fi prezentate în detaliu.
Mai precis
(I) problema "**existenţei**" soluţiilor (pentru ecuaţii diferenţiale) şi
(II) problema "**existenţei şi unicităţii**" soluţiei (pentru problema Cauchy).
Prezentăm pe scurt teoremele care asigură condiţii suficiente ca o ecuaţie diferenţială să aibe soluţii. (teoreme de existenţă)
şi teoremele care asigură condiţii suficiente ca o problemă Cauchy să aibe soluţie unică. (teoreme de existenţă şi unicitate)

O problemă Cauchy este "**corect pusă**" (corect formulată), dacă ecuaţia diferenţială are soluţii care verifică condiţiile iniţiale.
În caz contrar, problema Cauchy este "**incorect pusă**" şi deci nu are soluţii.
Are mare importanţă şi o a treia problemă fundamentală.
(III) Cum se modifică soluţiile problemei Cauchy atunci când se modifică condiţiile iniţiale.
Altfel formulat: "dependenţa soluţiilor de condiţiile iniţiale" , numită şi stabilitatea soluţiilor, nu o prezentăm în detaliu.

Definiţie.
Ecuaţiile diferenţiale scrise în forma

$$(*) \qquad E(t, x(t), x'(t)) = 0 \ \text{ pentru orice } t \ \text{ într-un anumit domeniu}$$

sunt în mod tradiţional numite în ***forma canonică****, sau aduse la* ***forma canonică****,*
Ecuaţiile diferenţiale scrise în forma

$$x'(t) = G(t, x(t)) \ \text{ pentru orice } t \ \text{ într-un anumit domeniu}$$

$$x''(t) = G(t, x(t), x'(t)) \ \text{ pentru orice } t \ \text{ într-un anumit domeniu}$$

$$x'''(t) = G(t, x(t), x'(t), x''(t)) \ \text{ pentru orice } t \ \text{ într-un anumit domeniu}$$

sunt în mod tradiţional numite în ***forma normală****, sau aduse la* ***forma normală****.*
Aceste denumiri sunt tradiţionale, "istorice", nu tocmai fericit alese, deoarece nu exprimă clar ce anume reprezintă.
Forma canonică, este folosită doar pentru a scrie în modul cât mai general posibil o ecuaţie diferenţială.
De fapt este numită **ecuaţie "implicită"** , deoarece relaţia $E(t, x(t), x'(t)) = 0$
reprezintă o relaţie care descrie în mod implicit derivata $x'(t)$ în funcţie de t şi de $x(t)$.
Forma normală $x'(t) = G(t, x(t))$ reprezintă de fapt o relaţie care

descrie explicit cum depinde derivata $x'(t)$ în funcţie de t şi de $x(t)$.

Sunt frecvent folosite denumirile de **- soluţie generală - soluţie particulară - soluţie singulară**.

Definiţie. ***Soluţie generală*** *sau* ***soluţia generală*** *a unei ecuaţii diferenţiale, denumeşte mulţimea tuturor soluţiilor obţinute printr-o anumită metodă.*

De exemplu, pentru ecuaţia diferenţială

$$x'(t) = t^2$$

soluţia generală este mulţimea tuturor funcţiilor $x = x(t)$ de forma

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

Poate fi oarecum derutant faptul că "soluţia generală" nu este o soluţie (o singură funcţie) ci o mulţime de soluţii (de funcţii) care verifică ecuaţia diferenţială.

Definiţie. ***Soluţie particulară*** *a unei ecuaţii diferenţiale, denumeşte o soluţie oarecare* $x = x(t)$, sau *orice soluţie obţinută din soluţia generală prin "particularizare" , de exemplu pentru o anumită valoare a unei constante de integrare.*

De exemplu, o soluţie particulară pentru ecuaţia diferenţială

$$x'(t) = t^2$$

se obţine din soluţia generală dând o anumită valoare constantei de integrare $C \in \mathbb{R}$,
de exemplu pentru $C = 0$ obţinem soluţia particulară

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3$$

pentru $C = 4$ obţinem soluţia particulară

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4$$

pentru $C = -5\pi$ obţinem soluţia particulară

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5\pi$$

Definiţie. ***Soluţie singulară*** *a unei ecuaţii diferenţiale, denumeşte o soluţie care nu se obţine prin particularizare din soluţia generală.*

Această definiţie nu este foarte precisă, dar este simplu exprimată.

De exemplu, pentru ecuaţia diferenţială

$$x'(t) = t^3 \cdot x^2(t)$$

se pot determina soluţiile nenule ($x(t) \neq 0$ pentru orice t) astfel

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = t^3$$

integrăm şi obţinem

$$\int \frac{x'(t)}{x^2(t)} dt = \int t^3 dt \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; -\frac{1}{x(t)} = \frac{1}{4}xt^4 + C \;,\; C \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; x(t) = \frac{-1}{\frac{1}{4}t^4 + C}$$

Obţinem soluţia generală

$$x(t) = \frac{-1}{\frac{1}{4}t^4 + C} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

Să observăm că ecuaţia diferenţială are şi soluţia nulă, adică funcţia $x(t) = 0$ pentru orice t
deoarece în acest caz $x'(t) = 0$ pentru orice t şi înlocuind în ecuaţia diferenţială, obţinem o identitate

$$\underbrace{x'(t)}_{0} = t^3 \cdot \underbrace{x^2(t)}_{0} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = t \cdot 0 \;\text{ pentru orice }\; t$$

Dar, această soluţie - solutia nulă - nu se poate obţine din soluţia generală prin particularizare, deoarece pentru orice $C \in \mathbb{R}$ avem

$$x(t) = \frac{-1}{\frac{1}{4}t^4 + C} \neq 0$$

În acest caz numim soluţia nulă $x(t) = 0$ pentru orice t , soluţie singulară a ecuaţiei diferenţiale.
Pot exista ecuaţii diferenţiale care nu au soluţii singulare.
Nu există o metodă generală prin care se determină soluţiile singulare, dacă acestea există.
Pentru fiecare tip de ecuaţie diferenţială se folosesc tehnici specifice.

Interpretare geometrică.

Reprezentarea grafică a unei funcţii de o variabilă, este considerată o interpretare geometrică sau vizualizare geometrică a modului în care variază acea funcţie.

De exemplu graficul evoluţiei temperaturii de-a lungul unei perioade de timp, sau graficul evoluţiei precipitaţiilor sau graficul de evoluţie al schimbului valutar.

Am început cu notaţia $E(t, x(t), x'(t)) = 0$ pentru forma canonică şi $x'(t) = G(t, x(t))$ pentru forma normală, pentru a sugera mai clar legătura cu fenomene fizice care evoluează în timp.

În cele ce urmează schimbăm notaţia, căutând funcţii $y = y(x)$ prin asociere cu puncte din plan de coordonate (x, y).

Să considerăm o ecuaţie diferenţială în formă normală

$$y'(x) = E(x, y(x))$$

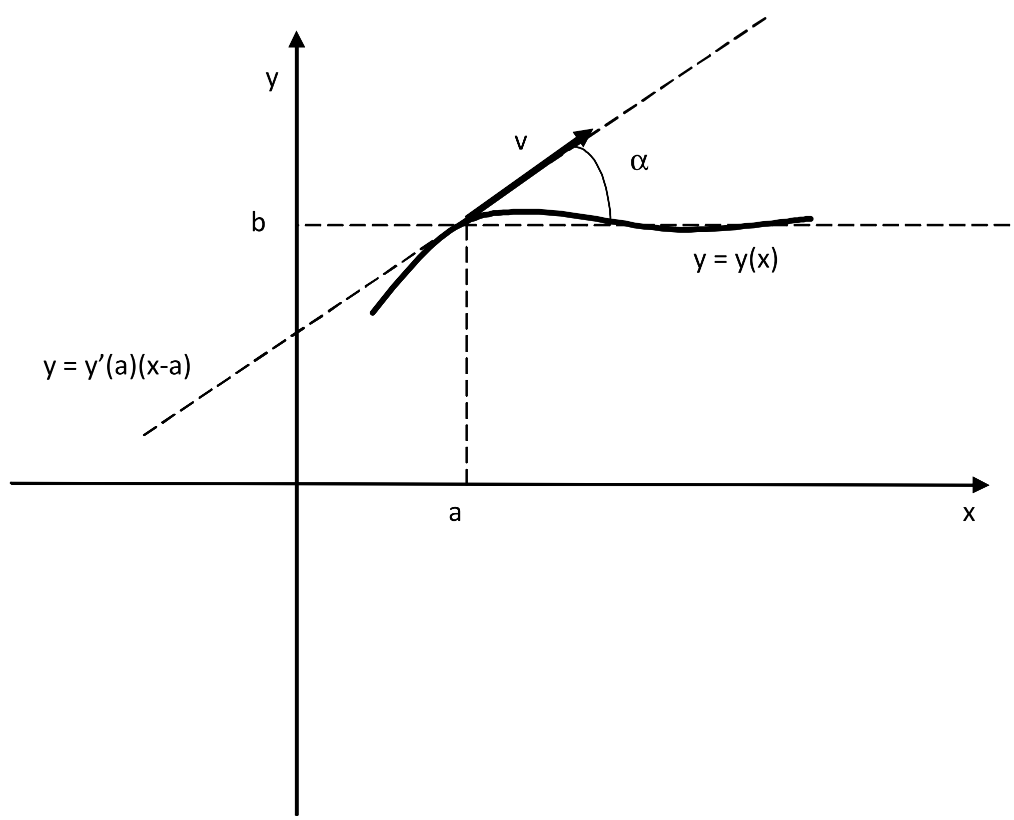
în acest caz se caută soluţii $y = y(x)$,

asociem în mod natural un "plan" cu reper cartezian de coordonate xOy cu puncte de coordonate carteziene (x, y)

presupunem că pentru orice punct de coordonate (a, b) ecuaţia diferenţială are solutie unică $y = y(x)$
adică verifică ecuatia diferenţială $y'(x) = E(x, y(x))$ şi trece prin punctul (a, b) , adică $y(a) = b$
Tangenta la graficul funcţiei $y = y(x)$ în punctul (a, b) are ecuaţia

$$y - b = y'(a)(x - a)$$

cu alte cuvinte, "panta" dreptei tangente la grafic este $y'(a) = \operatorname{tg} \alpha$, unde α este unghiul făcut de dreapta tangenta cu axa Ox



Vectorul director al tangentei la grafic este $\overrightarrow{v} = (a, y'(a)) = (a, E(a, y(a))$ deoarece $y'(a) = E(a, y(a))$

Prin urmare, se poate spune că ecuaţia diferenţială descrie un "câmp vectorial" în plan sau "câmp de direcţii".

O soluţie a ecuaţiei diferenţiale $y = y(x)$ reprezintă o curbă în plan, cu proprietatea că în fiecare punct al curbei $(a, y(a))$ adică (a, b),

vectorul câmpului $\overrightarrow{v} = (a, y'(a))$ este tangent la curbă.

Aveste curbe se numesc "curbe integrale" deoarece sunt obţinute prin rezolvarea (integrarea) ecuaţiei diferenţiale,

sau "linii de câmp" , denumire justificată de exemplul concret al câmpului vitezelor unui lichid care curge,

curbele reprezintă exact traiectoriile moleculelor acelui lichid, sau pentru un câmp magnetic, curbele sunt excat liniile după care se orienteaza particulele magnetizate.

Soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = E(x, y(x)) & \text{(ED)} \\ y(a) = b & \text{(CI)} \end{cases}$$

reprezintă acea curbă care trece prin punctul (a, b) şi este tangentă la vectorii câmpului în fiecare punct al său.

De exemplu, ecuaţia diferenţială

$$2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0$$

se "integrează"

$$\int [2x + 2y(x) \cdot y'(x)]\, dx = C \quad \Leftrightarrow \quad \int 2xdx + \int 2y(x) \cdot y'(x)dx = C$$

şi duce la soluţiile (curbele integrale)

$$x^2 + y^2(x) = C \quad , \quad C \geq 0$$

aceste curbe integrale, reprezintă cercuri concentrice, cu centrul în origine O şi de rază $r = \sqrt{C}$

de exemplu

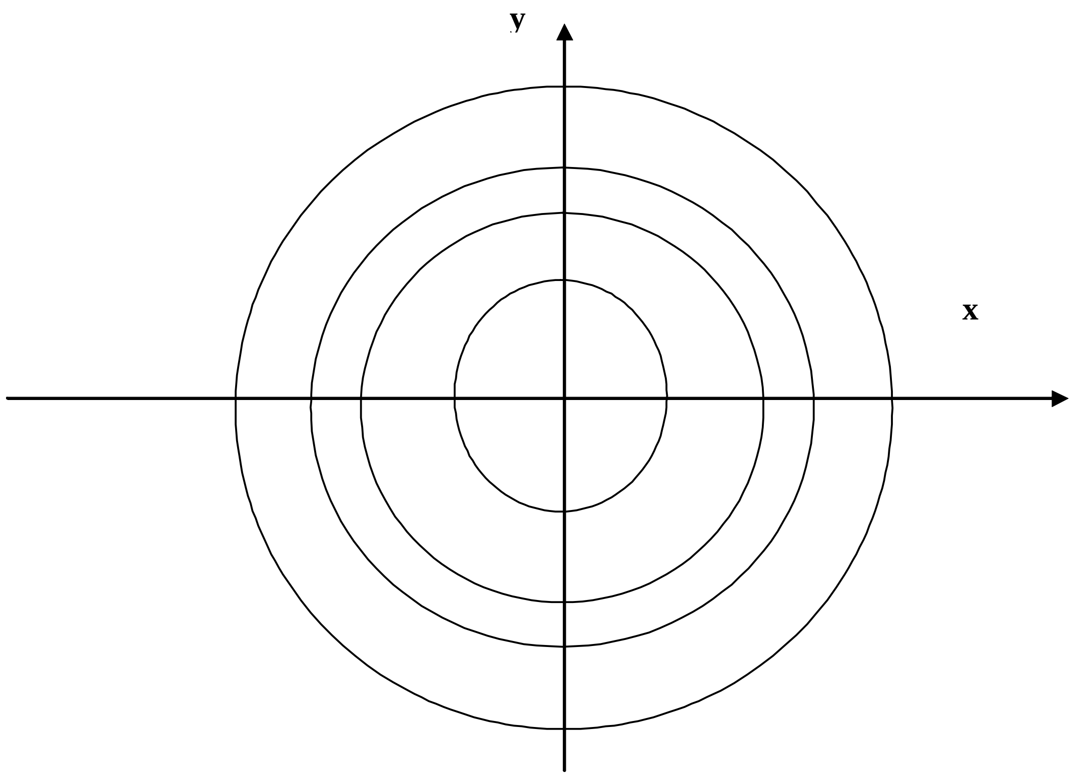
$$\text{pentru } C = 1 \text{ cercul } x^2 + y^2 = 1 \text{ rază } r = 1$$

$$\text{pentru } C = 2 \text{ cercul } x^2 + y^2 = 2 \text{ rază } r = \sqrt{2}$$

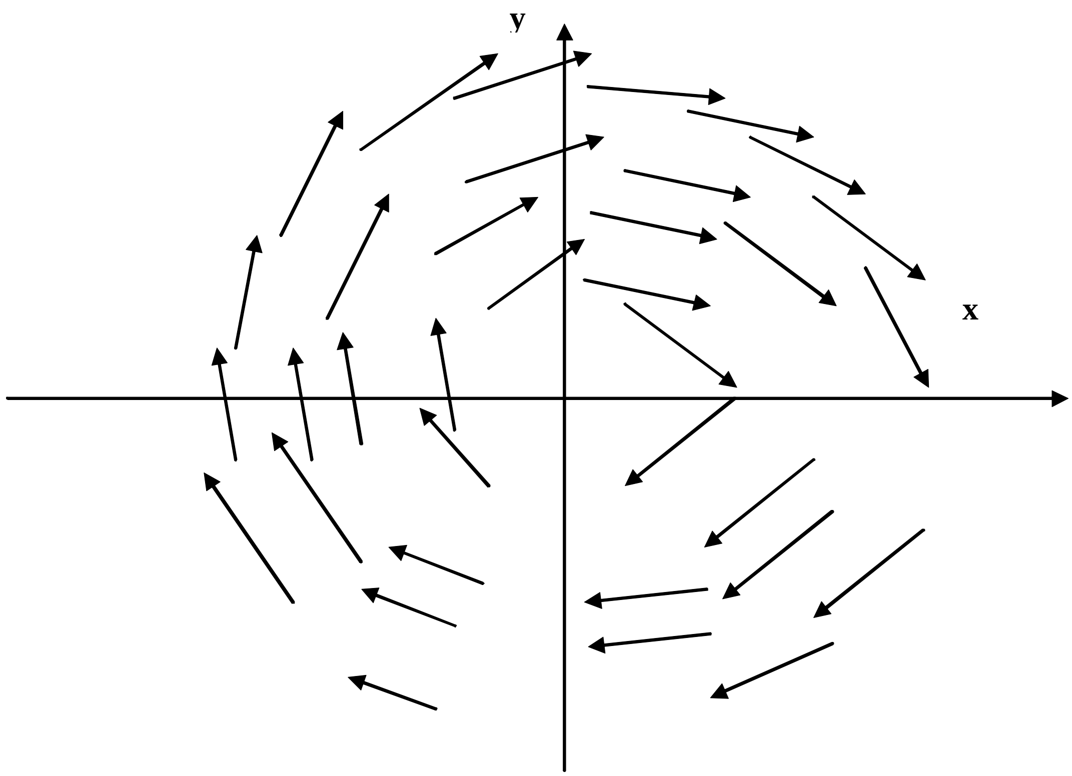
$$\text{pentru } C = 4 \text{ cercul } x^2 + y^2 = 1 \text{ rază } r = 2$$

$$\text{pentru } C = 5 \text{ cercul } x^2 + y^2 = 1 \text{ rază } r = \sqrt{5}$$

iată cum arată aceste curbe integrale în plan (schiţă aproximativă)



şi iată cum arată "câmpul vectorial" sau "câmpul de direcţii" asociat ecuaţiei diferenţiale (schiţă aproximativă)



Considerând câmpul vectorial asociat ecuaţiei diferenţiale ca un câmp în 3 dimensiuni,
în coordonate (x, y, z) obţinem câmpul vectorial

$$v(x,y,z) = (x, -\frac{x^2}{y}, 0)$$

expresia are sens pentru cadranul I, adică pentru $x, y > 0$
atunci rotorul acestui câmp este

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & -\frac{x^2}{y} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \overrightarrow{i}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(0)}_{0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{x^2}{y}\right)}_{0}\right) - \overrightarrow{j}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(0)}_{0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(x)}_{0}\right) + \overrightarrow{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2}{y}\right) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x)}_{0}\right)$$

$$\operatorname{rot} v = \left(0, 0, -\frac{2x}{y}\right) = \left(-\frac{2x}{y}\right)\overrightarrow{k}$$

ceea ce poate avea ca interpretare fizică - rotaţia în sens invers trigonometric induce înaintarea unui "burghiu drept" în sensul $-\overrightarrow{k}$

Interpretare fizică.
Valoarea (mărimea) $x(t)$ reprezintă starea unui sistem fizic la momentul t ,
Ecuaţia diferenţială $x'(t) = E(t, x(t))$ reprezintă viteza de schimbare a stării x la momentul t
O soluţie $x = x(t)$ a ecuaţiei diferenţiale reprezintă traiectoria sau orbita de evoluţie a sistemului.
Exemple de fenomene a căror evoluţie poate fi descrisă folosind ecuaţii diferenţiale - oscilatorul armonic (pendul elastic) , pendulul gravitaţional, un circuit RLC, un model demografic, dezintegrarea unei substanţe radioactive, propagarea unei epidemii, un model pentru sinteza autocatalitică.

Ecuaţiile direnţiale sunt folosite intens pentru a descrie fenomene din fizică, astronomie (mecanică cerească), geologie (modelarea meteorologică), chimie (viteze de reactie), biologie (boli infecţioase, variaţii genetice), ecologie şi modele de populaţie, economie (evoluţia bursei, variaţia dobanzilor, echilibrul pieţei, variaţia preţurilor).

Din punct de vedere istoric, se consideră că primele ecuaţii diferenţiale au fost numite astfel şi rezolvate de Leibniz şi Newton 1675-1676, evoluţia ulterioară a implicat aproape toţi matematicienii indiferent de domeniul specific din matematică în care au lucrat, aceasta deoarece orice problemă sau noţiune ce implică "variaţie" a unuia sau mai multor parametri, conduce în mod natural la utilizarea ecuaţiilor diferenţiale. Chiar şi pentru variaţii discrete (semnale digitizate) sunt folosite ecuaţii diferenţiale asociind parametri cu variaţie "continuă".

1. Ecuaţii diferenţiale "Elementare"

De fapt este vorba despre ecuaţii diferenţiale care pot fi integrate prin metode elementare, metode relativ simple, care nu necesită o pregatire teoretică specială.

Prezentăm doar metoda prin care se rezolvă ecuaţia diferenţială. Condiţia iniţială este adăugată numai la ecuaţii cu variabile separabile. În toate celelalte cazuri am adăugat o condiţie iniţială numai în exemplele numerice rezolvate.

1.1 Ecuaţii diferenţiale cu "variabile separabile"

Ecuaţiile diferenţiale cu "**variabile separabile**" sunt ecuaţii diferenţiale de forma

$$(1.1.1) \qquad x'(t) = \frac{dx}{dt} = A(t) \cdot B(x(t)) \qquad \text{sau pe scurt} \qquad x' = A(t) \cdot B(x)$$

unde $A : I_1 \to \mathbb{R}$, $B : I_2 \to \mathbb{R}$, sunt funcţii continue pe intervalele I_1, I_2 şi $B(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I_2$.

Denumirea este justificată de "separarea" într-un produs de două funcţii care depind
una de "t" $A = A(t)$, iar cealaltă de "x" $B = B(x)$,

Scrisă în forma $x' = A(t) \cdot B(x)$ ecuaţia crează impresia că t şi x sunt "variabile" separate în produs de funcţii.

<u>Problema Cauchy</u> corespunzătoare este

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = A(x) \cdot B(x(t)) \quad , \quad \text{cu condiţia inţială} \quad x(t_0) = b \ , \ t_0 \in I_1$$

Ecuaţia diferenţială (1.1.1) se rescrie

$$\frac{x'(t)}{B(x(t))} = A(t)$$

şi prin integrare obţinem

$$G(x(t)) = \int \frac{x'(t)}{B(x(t))} dt = \int A(t) dt \ \Rightarrow$$

sau cu schimbarea de variabilă $x(t) = y$ se obţine $x'(t)dt = dy$ şi deci

$$G(y) = \int \frac{1}{B(y)} dy$$

$$G(x(t)) = \int A(t) dt + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

care este o <u>ecuaţie implicită</u> din care se obţine funcţia în mod explicit $x(t) = ...$, atunci când se poate efectiv explicita.

Constanta "de integrare" $C \in \mathbb{R}$ se determină punând condiţia ca soluţia să verifice condiţia inţială $x(t_0) = b$.

$$G(x(t_0)) = b$$

Comentariu.

Condiţia (ipoteza) $B(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I_2$, asigură existenţa fracţiei $\frac{x'(t)}{B(x(t))}$ şi corectitudinea algoritmului de rezolvare.

Considerând că funcţia $B(x)$ poate lua şi valoarea 0 în diverse puncte, problema se complică mult.

caz (i) dacă $B(x) = 0$ pentru orice $x \in I_2$, atunci din ecuaţia diferenţială rezultă că $x'(t) = 0$ pentru orice $t \in I_1$ şi deci soluţia este o funcţie constantă $x(t) = C$ pentru orice $t \in I_1$

o funcţie constantă descrie un fenomen care nu variază, nu evoluează în timp, deci nu prezintă interes.

caz (ii) există un punct δ în intervalul I_1 pentru care $B(\delta) = 0$ şi $B(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq \delta$

atunci intervalul I_1se poate scrie $I_1 = (\alpha, \delta) \cup \{\delta\} \cup (\delta, \beta)$ ca o reuniune de două intervale

pe care funcţia $B(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (\alpha, \delta) \cup (\delta, \beta)$

folosind exact algoritmul descris mai înainte, se determină soluţiile pentru fiecare inetrval în parte (α, δ) respectiv (δ, β)

se pune problema dacă soluţiile astfle gasite au limite laterale egale în punctul $t = \delta$,

deasemenea şi derivatele acestora să aibe limite laterale 0 în punctul $t = \delta$

atunci problema Cauchy admite şi astfel de soluţii.

Dacă însă aceste condiţii nu sunt verificate de soluţiile găsite pentru intervalele (α, δ) respectiv (δ, β)

atunci problema nu admite astfel de soluţii.

Se observă astfel că o ecuaţie diferenţială relativ simplă implică o discuţie extrem de complicată pentru a o rezolvă complet.

În majoritatea cazurilor, ne vom limita la a descrie metode care determină doar soluţii în cazuri simple, fară a analiza în detaliu toate cazurile posbile.

Algoritm de rezolvare.

Pasul I se separă "variabilele" (x şi y sunt considerate "variabile")

$$\frac{x'(t)}{B(x(t))} = A(t)$$

Pasul II se integrează

$$\int \frac{x'(t)}{B(x(t))} dt = \int A(t) dt$$

(dacă se pot calcula primitivele-antiderivatele corespunzătoare)

Pasul III se obţine $x(t) = ...$ din ecuaţia implicită (dacă este posibil) prin "explicitare" , adică rezolvarea ecuaţiei.

Exemplu 1.1a. Să se rezolve problema Cauchy

$$(1.1.2) \qquad x'(t) = t^3 \cdot x^2(t) \quad , \text{ cu condiţia iniţială } x(0) = 1$$

Soluţie. Procedăm conform algoritmului. Separăm "variabilele"

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = t^3$$

integrăm şi obţinem

$$\int \frac{x'(t)}{x^2(t)} dt = \int t^3 dt \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ -\frac{1}{x(t)} = \frac{1}{4}t^4 + C \ , C \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ x(t) = \frac{-1}{\frac{1}{4}t^4 + C}$$

Apoi din condiţia inţială obţinem $1 = x(0) = -\frac{1}{C} \Rightarrow C = -1$.

Deci soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \frac{-1}{\frac{1}{4}t^4 - 1}$$

Este evident că apare o restricţie asupra domeniului parametrului t ,

$$\frac{1}{4}t^4 - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \neq \pm\sqrt{2} \quad , \quad \text{deci} \quad t \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

Deoarece condiţia iniţială se referă la valoarea mărimii x pentru $t = 0$, alegem acel interval care conţine 0 , deci $t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, deci soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \frac{-1}{\frac{1}{4}t^4 - 1} \quad , \quad t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

■

Observaţie 1. Soluţia efectivă a unei probleme Cauchy, poate duce la restricţii aparent neaşteptate dacă se consideră doar ecuaţia diferenţială.

Nu vom insista asupra acestui aspect în continuare, dar este de mare importanţă în orice problemă practică.

Observaţie 2. Este uşor de observat că funcţia $x = x(t) = 0$ pentru orice t , este soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1.1.2).

Deci problema Cauchy corespunzătoare are condiţia iniţială $x(0) = 0$.

Folosind acestă condiţie iniţială pentru soluţia determinată mai înainte obţinem

$$0 = x(0) = \frac{-1}{\frac{1}{4}0^4 + C} = -\frac{1}{C}$$

ecuaţie ce nu are soluţii oricare ar fi $C \in \mathbb{R}$

Prin urmare, modul de rezolvare descris nu include şi soluţia "nulă" $x = x(t) = 0$ pentru orice t .

Aparent se "pierde" o posibilă soluţie şi prin urmare ar trebui adăugată.

Totuşi, din punct de vedere fizic, soluţia "nulă" nu prezintă interes. Ea corespunde situaţiei în care mărimea x este constantă, deci nu variază în raport cu parametrul t.

Interesante sunt soluţiile pentru care mărimea x variază în raport cu t .

O asemenea situaţie se întâlneşte la multe ecuaţii diferenţiale sau probleme Cauchy.

De cele mai multe ori, modul de rezolvare prezentat nu ia în considerare soluţia "nulă".

Nu vom mai insista asupra menţionării existenţei unei soluţii "nule", dar trebuie avut în vedere că această posibilitate există.

Familia de soluţii pentru ecuaţia diferenţială se numeşte "**soluţia generală**" a ecuaţiei.

Soluţia (care nu se obţine prin algoritmul "standard") se numeşte soluţie "**singulară**".

Din punct de vedere fizic,

- soluţia generală descrie o familie de soluţii care depind de unul sau mai mulţi parametri
- soluţia singulară descrie o situaţie specială (singulară), dar care este totuşi soluţie a ecuaţiei diferenţiale

Nu vom insista în mod deosebit asupra acestor aspecte.

Doar în cazul ecuaţiilor de tip Clairaut şi de tip Lagrange am insistat să precizăm noţiunile de soluţie generală, soluţie singulară, pentru a justifica aceste denumiri şi a nu le folosi doar în mod pur formal.

Exemplu 1.1b. Viteza de creştere a populaţiei.

Un model pentru creşterea populaţiei (considerând natalitatea şi mortalitatea) este reprezentat de ecuaţia diferenţială

$$P'(t) = kP(t) \quad , \text{ unde } P = P(t) \text{ reprezintă populaţia la momentul } t \quad , \quad k > 0$$

Populatia este o funcţie cu valori pozitive, deci $P(t) > 0$ pentru orice t.

Soluţie. Procedăm conform algoritmului. Separăm "variabilele"

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = k$$

integrăm şi obţinem

$$\int \frac{P'(t)}{P(t)} dt = \int k dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln(P(t)) = kt + C \quad \Leftrightarrow \quad P(t) = e^{kt+C} = e^C \cdot e^{kt}$$

confom acestui model creşterea populaţiei este "exponenţială" sau ritmul de creştere al populaţiei este exponenţial.

Considerând strict doar ecuaţia diferenţială $P'(t) = kP(t)$, acesta admite şi soluţia nulă $P(t) = 0$ pentru orice t.

Dar aceasta nu este o soluţie ce poate reprezenta populaţia, care este nenulă.

■

1.2 Ecuaţii diferenţiale "omogene"

Ecuaţiile diferenţiale **omogene** sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$(1.2.1) \qquad x'(t) = \frac{dx}{dt} = A(\frac{x}{t}) \quad , \quad \text{unde } A : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ este funcţie continuă}, \quad t \neq 0$$

Prin urmare, se caută soluţii
fie pentru $t > 0$ adică soluţii definte pe un interval $(0, \delta)$,
fie pentru $t > 0$ adică soluţii definte pe un interval $(-\delta, 0)$ unde $\delta > 0$ sau $\delta = +\infty$

Rezolvare
Se procedează astfel: facem schimbarea de funcţie

$$y(t) = \frac{x(t)}{t} \Leftrightarrow x(t) = t \cdot y(t) \Rightarrow x'(t) = t \cdot y'(t) + y(t)$$

înlocuind în ecuaţia (1.2.1) obţinem

$$t \cdot y'(t) + y(t) = A(y(t)) \Leftrightarrow y'(t) = \frac{A(y(t)) - y(t)}{t}$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile şi se rezolvă conform algoritmului prezentat anterior.
Soluţiile obţinute sunt definite pe intervale ce nu conţin punctul $t = 0$, deci fie $(0, \delta)$, fie $(-\delta, 0)$

Algoritm de rezolvare.
Pasul I notăm

$$y(t) = \frac{x(t)}{t}$$

Pasul II rezolvăm ecuaţia cu variabile separabile obţinută

$$y'(t) = \frac{A(y(t)) - y(t)}{t}$$

integrăm .

$$\int \frac{y'(t)}{A(y(t)) - y(t)} dt = \int \frac{1}{t} dt$$

şi obţinem o soluţie explicită, dacă este posibilă explicitarea

$$y(t) = ...$$

sau soluţia rămâne în formă implicită.
Apoi obţinem soluţia

$$x(t) = ty(t)$$

Exemplu 1.2 Să se rezolve problema Cauchy

$$(1.2.2a) \qquad x'(t) = \frac{x^2}{t^2} + \frac{x}{t} \ , \text{ cu condiţia iniţială } x(1) = 2$$

Soluţie. Rescriem ecuaţia, pentru a observa că este o ecuaţie omogenă

$$x'(t) = \left(\frac{x}{t}\right)^2 + \frac{x}{t}$$

notăm

$$y(t) = \frac{x(t)}{t} \Leftrightarrow x(t) = t \cdot y(t) \Rightarrow x'(t) = t \cdot y'(t) + y(t)$$

înlocuim şi obţinem

$$t \cdot y'(t) + y(t) = y^2(t) + y(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad y'(t)\frac{1}{y^2(t)} = \frac{1}{t} \Rightarrow$$

$$\int \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = \int \frac{1}{t} dt \qquad \Leftrightarrow -\frac{1}{y(t)} = \ln|t| + K \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x(t)}{t} = y(t) = \frac{-1}{\ln|t| + K}$$

deci soluţia generală a ecuaţiei (1.2.2a) este

$$x(t) = \frac{-t}{\ln|t| + K} \ , \ K \in \mathbb{R}$$

punând şi condiţia iniţială obţinem

$$2 = x(1) = \frac{-1}{\ln|1| + K} \Rightarrow K = -\frac{1}{2}$$

Dar căutăm soluţii doar într-un interval ce conţine condiţia iniţială,
adică în vecinătatea lui $t = 1$, deci $t > 0$ şi $|t| = t$

$$x(t) = \frac{-t}{\ln t - \frac{1}{2}}$$

în plus apare în mod natural şi condiţia

$$\ln t - \frac{1}{2} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln t \neq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t \neq e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Din faptul că $0 < 1 < \sqrt{e}$
soluţia problemei Cauchy este definită pe intervalul $0 < t < \sqrt{e}$

$$x(t) = \frac{-t}{\ln|t| - \frac{1}{2}} \quad , \quad t \in (0, \sqrt{e})$$

■

Observaţie. Deşi algoritmul de rezolvare funcţionează doar pentru $t \neq 0$, totuşi soluţia obţinută are limită în $t = 0$

$$\lim_{t \to 0} x(t) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{-t}{\ln|t| + K} \right) = \frac{0}{-\infty} = 0$$

deci soluţia se poate prelungi şi în $t = 0$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{-t}{\ln|t| + K} & , \quad t \neq 0 \\ 0 \ , & t = 0 \end{cases}$$

Ecuaţia se poate rescrie

$$t^2 x'(t) = x^2(t) + t x(t)$$

o condiţie iniţială în $t = 0$ verifică

$$0^2 \cdot x'(0) = x^2(0) + 0 \cdot x(0) \quad \Rightarrow \quad x(0) = 0$$

Problema Cauchy corespunzătoare, cu condiţie iniţială în $t = 0$ este

$$(1.2.2b) \qquad t^2 x'(t) = x^2(t) + t x(t) \ , \ \text{cu condiţia iniţială} \ x(0) = 0$$

care are ca soluţie prelungirea definită mai înainte

$$x(t) = \begin{cases} \frac{-t}{\ln|t| + K} & , \quad t \neq 0 \\ 0 \ , & t = 0 \end{cases}$$

Totuşi ecuaţia 1.2.2b are ca soluţie şi funcţia nulă $x(t) = 0$ pentru orice t , soluţie considerată "singulară" .
Prin urmare, algoritmul de rezolvare nu produce şi soluţia singulară. Fapt observat şi în exemplul 1.1b.

■

1.3 Ecuaţii diferenţiale liniare (de ordin 1)

Ecuaţiile diferenţiale **liniare** sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$(1.3.1) \qquad x'(t) = \frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x(t) + B(t) \quad , \text{ unde } A, B : I \to \mathbb{R} \text{ sunt funcţii continue}$$

$$\text{sau pe scurt} \qquad x' = A(t) \cdot x + B(t)$$

unde I reprezintă un interval.
Unele prezentări, numesc **ecuaţie afină** (ecuaţia 1.3.1) şi **ecuaţie liniară** (ecuaţia 1.3.1*)

Uneori, rezolvarea într-un caz particular, poate fi utilă.
În acest cazul acestei ecuaţii, pentru $B(t) = 0$ obţinem ecuaţia diferenţială liniară, numită **ecuaţia liniară omogenă** asociată

$$(1.3.1^*) \qquad x'(t) = A(t) \cdot x(t)$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile.
Putem să determina precis toate soluţiile acestei ecuaţii diferenţiale, folosind algoritmul deja prezentat.
Deci integrăm ecuaţia

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = A(t)$$

şi obţinem

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int A(t)dt \Leftrightarrow \ln|x(t)| = \int A(t)dt + K \ , K \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow$$

$$|x(t)| = e^{A(t)dt+K} = e^K \cdot e^{\int A(t)dt} \ , K \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad x(t) = \pm e^K \cdot e^{\int A(t)dt} \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = C \cdot e^{\int A(t)dt} \quad , \text{ unde } \pm e^K = C \in \mathbb{R}$$

Ultima relaţie reprezintă **soluţia generală** a ecuatiei diferenţiale liniare omogene.

Observaţie 1. Să remarcăm faptul că în acest caz pentru $C = 0$ obţinem şi soluţia nulă, deşi aparent modul de rezolvare exclude cazul $x(t) = 0$.

Observaţie 2. În plus, mulţimea acestor soluţii formează un spaţiu vectorial,
deoarece pentru orice două soluţii $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ care verfică ecuaţia liniară omogenă

$$x'(t) = A(t) \cdot x(t) \quad , \quad y'(t) = A(t) \cdot y(t)$$

suma lor $x(t) + y(t)$ şi $\alpha x(t)$ $\alpha \in \mathbb{R}$, sunt de asemenea soluţii ale ecuaţiei liniare omogene

$$x'(t) + y'(t) = A(t) \cdot x(t) + A(t) \cdot y(t) = A(t)(x(t) + y(t)) \quad \Leftrightarrow \quad (x + y)' = A(t)(x + y)$$

$$(\alpha x(t))' = \alpha x'(t) = \alpha A(t)x(t) = A(t)(\alpha x(t)) \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha x)' = A(t)(\alpha x)$$

■

Observaţie 3. Dacă x şi y sunt două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (1.3.1) (ecuaţia "neomogenă")

$$x'(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \quad , \quad y'(t) = A(t) \cdot y(t) + B(t)$$

atunci diferenţa lor verifică ecuaţia diferenţială omogenă asociată

$$[x(t) - y(t)]' = A(t) \cdot [x(t) - y(t)]$$

Observaţie 4.
i) Dacă $z(t)$ este soluţie a ecuaţiei liniare omogene (1.3.1*)
şi $x_0(t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei liniare (1.3.1) atunci suma lor

$$x(t) = z(t) + x_0(t)$$

este soluţie a ecuaţiei liniare (1.3.1).
ii) orice soluţie a ecuaţiei liniare (1.3.1) este de această formă $x(t) = z(t) + x_0(t)$

Demonstraţie.

i) Într-adevăr, dacă derivăm obţinem

$$x'(t) = z'(t) + x_0'(t) = A(t) \cdot z(t) + A(t) \cdot x_0(t) + B(t) = A(t) \cdot \left[\underbrace{z(t) + x_0(t)}_{x(t)} \right] + B(t)$$

deci

$$x'(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t)$$

adică $x(t) = z(t) + x_0(t)$ este soluţie a ecuaţiei liniare.

ii) deoarece diferenţa a două soluţii $x(t) - x_0(t) = z(t)$ este soluţie a ecuaţiei liniare omogene conform Observaţiei 3

■

În concluzie, dacă se cunoaşte o soluţie particulară $x_0(t)$ a ecuaţiei liniare (soluţie obţinută prin orice mijloace), iar $z(t)$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene,
soluţiile ecuaţiei liniare (1.3.1) sunt exact funcţiile de forma,
sau cu alte cuvinte, soluţia generală a ecuaţiei liniare este

$$x(t) = z(t) + x_0(t)$$

Nu este însă uşor de găsit o soluţie particulară $x_0(t)$, nu există o metodă "universală" pentru aşa ceva.

Din acest motiv, pentru rezolvarea ecuaţiilor liniare folosim o altă metodă, numită **metoda variaţiei constantelor**.

Iată etapele algoritmului de rezolvare a unei ecuaţii diferenţiale liniare.

Pasul I. Se rezolvă ecuaţia **liniară omogenă** asociată:

$$x'(t) = A(t) \cdot x(t)$$

obţinem soluţia generală de forma

$$x(t) = C \cdot e^{\int A(t)dt} \quad , \text{ unde } \ C \in \mathbb{R}$$

Pasul II. Folosim **metoda variaţiei constantelor**.
Aceasta constă în a căuta soluţia generală a ecuaţiei liniare, de forma

$$x(t) = C(t) \cdot e^{\int A(t)dt}$$

înlocuind în (1.3.1) obţinem

$$x'(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t)$$

$$\left(C(t) \cdot e^{\int A(t)dt} \right)' = A(t) \cdot C(t) \cdot e^{\int A(t)dt} + B(t)$$

$$C'(t) \cdot e^{\int A(t)dt} + C(t) \cdot e^{\int A(t)dt} \cdot A(t) = A(t) \cdot C(t) \cdot e^{\int A(t)dt} + B(t) \ \Leftrightarrow$$

$$C'(t) = B(t) \cdot e^{-\int A(t)dt}$$

de unde rezultă prin integrare

$$C(t) = \int \left(B(t) \cdot e^{-\int A(t)dt} \right) dt + K$$

Pentru a nu crea ambiguităţi, putem înlocui (primitiva) antiderivata arbitrară $\int A(t)dt$ cu forma ceva mai precisă $\int\limits_{t_0}^{t} A(u)du$.

Atunci **soluţia generală a ecuaţiei liniare** este

$$x(t) = \underbrace{\left(\int\limits_{t_0}^{t} B(s) \cdot e^{-\int\limits_{t_0}^{s} A(u)du} ds + K \right)} \cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t} A(u)du} \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

Algoritm de rezolvare.
Pasul I se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată
Pasul II se aplică metoda variaţiei constantelor pentru a determina soluţia ecuaţiei liniare (neomogene)

Exemplu 1.3 Să se rezolve problema Cauchy

(1.3.2) $$x'(t) \cdot \cos t = 1 - x(t) \cdot \sin t \quad \text{, cu condiţia iniţială} \quad x(\pi) = 1$$

Soluţie. Ecuaţia se rescrie (pentru a pune în evidenţă faptul că este o ecuaţie liniară)

$$x'(t) = x(t)\frac{-\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\cos t}$$

Pasul I. Rezolvăm ecuaţia liniară omogenă asociată

$$x'(t) = x(t)\frac{-\sin t}{\cos t} \Leftrightarrow \frac{x'(t)}{x(t)} = -\operatorname{tg} t \Rightarrow \int \frac{x'(t)}{x(t)}dt = -\int \operatorname{tg} t dt \Leftrightarrow$$

$$\ln|x(t)| = \ln|\cos t| + K \ , \ K \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |x(t)| = |\cos t| \cdot e^K \Leftrightarrow x(t) = \pm e^K \cos t$$

$$x(t) = C \cos t \ , \ C \in \mathbb{R}$$

Pasul II. Aplicăm metoda variaţiei constantelor:
căutăm soluţia generală a ecuaţiei liniare de forma $x(t) = C(t) \cdot \cos t$
înlocuind în ecuaţie şi derivând obţinem

$$x'(t) = C'(t) \cdot \cos t + C(t) \cdot (-\sin t) = C(t) \cdot \cos t \frac{-\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\cos t} \quad \Leftrightarrow$$

$$C'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \Rightarrow C(t) = \int \frac{1}{\cos^2 t}dt = \operatorname{tg} t + K$$

Deci soluţia generală a ecuaţiei liniare este

$$x(t) = (\operatorname{tg} t + K) \cos t = \sin t + K \cos t \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

Din condiţia iniţială obţinem

$$1 = x(\pi) = \sin \pi + K \cos \pi \Rightarrow K = -1$$

şi deci soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \sin t - \cos t \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Să remarcăm faptul că deşi în paşii intermediari apare restricţia $\cos t \neq 0$, acestă restricţie dispare în forma finală, deci $t \in \mathbb{R}$.

■

1.4 Ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli

Pe scurt ecuaţii diferenţiale **Bernoulli,** acestea sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

(1.4.1) $$x'(t) = \frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot x^\alpha \quad \text{, unde } A, B : I \to \mathbb{R} \text{ sunt funcţii continue, iar } \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$$

$$\text{pe scurt} \qquad x' = A(t) \cdot x + B(t) \cdot x^\alpha$$

Pentru $\alpha = 1$ sau $\alpha = 0$ se obţine o ecuaţie liniară, a cărei rezolvare este deja cunoscută.
Expresia " x^α " reprezintă funcţia putere, deci în mod implicit se presupune că $x(t) > 0$ pentru orice $t \in I$
Dacă însă α este număr întreg, atunci se face o alegere între cazurile
i) $x(t) > 0$ pentru orice $t \in I$ sau
ii) $x(t) < 0$ pentru orice $t \in I$, peste tot I reprezintă un interval.

Denumirea este asociată cu Jacob Bernoulli
Jacob Bernoulli (sau James , Jacques) (1654 – 1705) matematician elveţian, membru al familiei Bernoulli.

Sunt asociate de asemenea "testul Bernoulli" în teoria probabilităţilor şi "numerele Bernoulli"

Rezolvare

Se face schimbarea de funcţie

$$y(t) = (x(t))^{1-\alpha} \text{ , pe scurt } \quad y = x^{1-\alpha}$$

care duce la o ecuaţie liniară.

Într-adevăr avem

$$x(t) = (y(t))^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \Rightarrow \quad x'(t) = \frac{1}{1-\alpha} y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot y'(t)$$

Înlocuind în ecuaţia (1.4.1) obţinem

$$\frac{1}{1-\alpha} y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot y'(t) = A(t) \cdot (y(t))^{\frac{1}{1-\alpha}} + B(t) \cdot (y(t))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha} \cdot y'(t) = A(t) \cdot y(t) + B(t)$$

care este în mod evident o ecuaţie liniară şi se rezolvă conform algoritmului corespunzător.

Algoritm de rezolvare.

Pasul I se face schimbarea de funcţie $y = x^{1-\alpha}$

Pasul II se rezolvă ecuaţia liniară obţinută

Pasul III soluţia este

$$x(t) = [y(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Exemplu 1.4 Să se rezolve problema Cauchy

$$(1.4.2) \qquad x'(t) = \frac{x(t)}{2t} + \frac{t^2}{2x(t)} \quad , \quad \text{cu condiţia iniţială } \ x(1) = 1$$

Soluţie. Putem rescrie ecuaţia

$$x'(t) = \frac{1}{2t} x(t) + \frac{t^2}{2} x(t)^{-1} \quad \text{, deci "}\alpha\text{"} = -1$$

Din condiţia iniţială $x(1) = 1$, deducem că $x(t) > 0$ pentru orice t

Facem schimbarea de funcţie

$$x(t) = (y(t))^{\frac{1}{1-(-1)}} = (y(t))^{1/2} \qquad \Rightarrow \quad x'(t) = \frac{1}{2} (y(t))^{-1/2} \cdot y'(t)$$

şi înlocuind în ecuaţie obţinem

$$x'(t) = \frac{1}{2} (y(t))^{-1/2} \cdot y'(t) = \frac{(y(t))^{1/2}}{2t} + \frac{t^2}{2} \ (y(t))^{-1/2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ y'(t) = \frac{y(t)}{t} + t^2$$

care este o ecuaţie liniară şi se rezolvă conform algoritmului prezentat.

Pasul I. Rezolvăm ecuaţia liniară omogenă asociată

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t} \Leftrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{t} \ \Rightarrow \ \int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int \frac{1}{t} dt \ \Leftrightarrow \ \ln|y(t)| = \ln|t| + K \ , \ K \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \ |y(t)| = |t| \cdot e^K \ , \ K \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ y(t) = \pm e^K t = C \cdot t \ , \ C \in \mathbb{R}$$

Pasul II. Aplicăm metoda variaţiei constantelor.

Soluţia generală a ecuaţiei liniare este de forma $y(t) = C(t) \cdot t$, obţinem

$$y'(t) = C'(t) \cdot t + C(t) = \frac{C(t) \cdot t}{t} + t^2 \Leftrightarrow \ C'(t) = t \Rightarrow C(t) = \frac{t^2}{2} + K \ , \ K \in \mathbb{R}$$

soluţia generală a ecuaţiei liniare este

$$y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + K\right) \cdot t = \frac{t^3}{2} + K \cdot t$$

iar soluţia ecuatiei Bernoulli este

$$x(t) = (y(t))^{1/2} = \sqrt{\frac{t^3}{2} + K \cdot t} \quad , K \in \mathbb{R}$$

Ţinând cont de condiţia iniţială obţinem

$$1 = x(1) = \sqrt{\frac{1}{2} + K} \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

Deci soluţia problemei Cauchy (1.4.2) este

$$x(t) = \sqrt{\frac{t^3}{2} + \frac{1}{2}t} \quad , \quad t > 0$$

■

1.5 Ecuaţii diferenţiale de tip Riccati

Pe scurt ecuaţii diferenţiale **Riccati**, acestea sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$(1.5.1) \qquad x'(t) = A(t) \cdot x^2(t) + B(t) \cdot x(t) + C(t)$$

unde $A, B, C : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe intervalul I .

$$\text{pe scurt} \quad x' = A(t) \cdot x^2 + B(t) \cdot x + C(t)$$

Jacopo Francesco Riccati (1676 - 1754) matematician italian, în prezent cunoscut pentru acest tip de ecuaţii.

Dacă se cunoaşte o soluţie particulară $x_0(t)$ a ecuaţiei (1.5.1), atunci schimbarea de funcţie

$$y(t) = x(t) - x_0(t)$$

duce la o ecuaţie Bernoulli cu $\alpha = 2$ care se rezolvă după algoritmul corespunzător.

Demonstraţie.

Într-adevăr

$$x(t) = y(t) + x_0(t) \;\; \text{şi} \;\; x'(t) = y'(t) + x_0'(t)$$

înlocuind obţinem

$$y'(t) + x_0'(t) = A(t) \cdot [y(t) + x_0(t)]^2 + B(t) \cdot [y(t) + x_0(t)] + C(t)$$

ţinând cont de faptul că $x_0(t)$ este soluţie, adică

$$x_0'(t) = A(t) \cdot x_0^2(t) + B(t) \cdot x_0(t) + C(t)$$

rezultă ecuaţia de tip Bernoulli

$$y'(t) = A(t) \cdot y^2(t) + 2A(t) \cdot x_0(t) \cdot y(t) + B(t) \cdot y(t) \quad \Leftrightarrow$$

$$y'(t) = A(t) \cdot y^2(t) + [2A(t) \cdot x_0(t) + B(t)] \cdot y(t)$$

unde se face schimbarea de funcţie pentru $\alpha = 2$,

$$z(t) = y^{1-2}(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{x(t) - x_0(t)}$$

Pe scurt, putem indica direct schimbarea de funcţie

$$x(t) = x_0(t) + \frac{1}{z(t)}$$

care duce la o ecuaţie liniară. Derivând rezultă

$$x'(t) = x_0'(t) - \frac{z'(t)}{z^2(t)}$$

şi înlocuind în ecuaţia (1.5.1) obţinem

$$x'(t) = x_0'(t) - \frac{z'(t)}{z^2(t)} = A(t) \cdot \left(x_0(t) + \frac{1}{z(t)}\right)^2 + B(t) \cdot \left(x_0(t) + \frac{1}{z(t)}\right) + h(t)$$

dar $x_0(t)$ este soluţie, adică

$$x_0'(t) = A(t) \cdot x_0^2(t) + B(t) \cdot x_0(t) + C(t)$$

şi după simplificări obţinem

$$-\frac{z'(t)}{z^2(t)} = 2A(t) \cdot x_0(t) \cdot \frac{1}{z(t)} + A(t) \cdot \frac{1}{z^2(t)} + B(t) \cdot \frac{1}{z(t)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -z'(t) = [2A(t) \cdot x_0(t) + B(t)] \cdot z(t) + A(t)$$

care este o ecuaţie liniară ce se rezolvă conform cu algoritmul corespunzător.

Exemplu 1.5. Să se rezolve problema Cauchy

$$x'(t) = tx^2(t) - 2t^2x(t) + t^3 + 1 \quad , \quad \text{cu condiţia iniţială} \quad x(0) = 3 \tag{1.5.2}$$

ştiind că o soluţie particulară este $x_0(t) = t$.

Soluţie. Este uşor de verificat faptul că $x_0(t) = t$ este soluţie:

$$1 = (t)' = t \cdot t^2 - 2t^2 \cdot t + t^3 + 1$$

Facem schimbarea de funcţie

$$x(t) = t + \frac{1}{z(t)}$$

şi obţinem

$$x'(t) = 1 - \frac{z'(t)}{z^2(t)}$$

înlocuind în ecuaţie rezultă

$$1 - \frac{z'(t)}{z^2(t)} = t\left(t + \frac{1}{z(t)}\right)^2 - 2t^2\left(t + \frac{1}{z(t)}\right) + t^3 + 1 \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{z'(t)}{z^2(t)} = t^3 + 2t^2\frac{1}{z(t)} + \frac{t}{z^2(t)} - 2t^3 - \frac{2t^2}{z(t)} + t^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow z'(t) = -t \;\Leftrightarrow\; z(t) = -\frac{t^2}{2} + K \quad \text{şi} \quad x(t) = t + \frac{2}{-t^2 + 2K} \;, \; K \in \mathbb{R}$$

Din condiţia iniţială

$$3 = x(0) = 0 + \frac{2}{0 + 2K} \quad \Rightarrow \quad 2K = \frac{2}{3}$$

şi deci soluţia problemei Cauchy (1.5.2) este

$$x(t) = t + \frac{2}{-t^2 + \frac{2}{3}} \quad , \quad t \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Din condiţia $-t^2 + \frac{2}{3} \neq 0$ rezultă $t \neq -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$, deci soluţiile pot fi definite pe intervalele

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \text{ sau } \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \text{ sau } \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$$

alegem intervalul de definiţie pentru soluţie $t \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, deoarece acesta conţine $t = 0$ din condiţia initială.
Considerând condiţia iniţială $x(3) = 2$, obţinem

$$2 = x(3) = 3 + \frac{2}{3 + 2K} \quad \Rightarrow \quad 2K + 3 = -2 \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{5}{2}$$

şi deci soluţia problemei Cauchy (1.5.2) este

$$x(t) = t + \frac{2}{-t^2 - \frac{5}{3}} \quad , \quad t \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$$

$t \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$, deoarece acesta conţine $t = 3$ din condiţia initială.
În mod asemănător, pentru condiţia iniţială $x(-2) = 1$, obţinem o soluţie definită pe intervalul $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.
■

1.6 Ecuaţii diferenţiale de tip Clairaut

Pe scurt ecuaţii diferenţiale **Clairaut**, acestea sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$(1.6.1) \qquad x(t) = t \cdot x'(t) + B(x'(t))$$

unde $B : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1. Se caută soluţii $x = x(t)$ de clasă C^2.

Alexis Claude de Clairault (sau Clairaut) (1713 – 1765) matematician şi astronom francez.

Procedăm astfel: derivăm ecuaţia (1.6.1) şi obţinem

$$x'(t) = x'(t) + t \cdot x''(t) + B'(x'(t)) \cdot x''(t) \iff$$

$$[t + B'(x')] \cdot x''(t) = 0$$

Avem de a face cu funcţii continue, deci dacă nu sunt nule într-un punct t_0 , atunci nu sunt nule pe o întreagă vecinătate a lui t_0,
adică pe un întreg interval, în acest caz I
Prin urmare: ori $[t + B'(x')] \neq 0$ pentru orice $t \in I$ şi atunci $x''(t) = 0$ pentru orice $t \in I$
ori $x''(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$ şi atunci $t + B'(x'(t)) = 0$ pentru orice $t \in I$
i) În primul caz obţinem

$$x''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x'(t) = a \quad \Rightarrow \quad x(t) = at + b \quad \text{cu} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

înlocuind în ecuaţia (1.6.1) rezultă

$$at + b = t \cdot a + B(a) \quad \Rightarrow \quad b = B(a)$$

Se obţine astfel **soluţia generală** a ecuaţiei Clairaut $x = x(t)$ de forma unei familii de funcţii ce depind de un parametru $a \in \mathbb{R}$

$$x(t) = at + B(a) \quad \text{cu} \quad a \in \mathbb{R}$$

ii) În al doilea caz obţinem

$$t + B'(x'(t)) = 0$$

ţinând seama de ecuaţia iniţială

$$x(t) = t \cdot x'(t) + B(x'(t))$$

se obţine astfel **soluţia singulară** a ecuaţiei Clairaut $x = x(t)$, care se scrie sub formă de ecuaţii parametrice:

$$\begin{cases} t = -B'(p) \\ x(t) = t \cdot p + B(p) \end{cases}$$

unde am notat $p \overset{not}{=} x'(t)$, şi deci p este "parametrul".

Prezentăm în continuare o definiţie "geometrică" pentru ceea ce am numit soluţie singulară, pentru a justifica denumirile folosite (soluţie generală, soluţie singulară) şi a nu le folosi doar în mod formal.

Definiţie. O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale se numeşte "**singulară**",
dacă această soluţie este "**tangentă**" la orice altă soluţie din familia soluţiilor "generale".
Mai precis: $x_S(t)$ este soluţie singulară,
dacă pentru orice $x = x(t)$ soluţie generală,
există un punct "t_0" astfel încât graficele celor două soluţii $x_S(t)$ şi $x(t)$ au aceeaşi dreaptă tangentă

$$x_S(t_0) = x(t_0) \quad \text{şi} \quad x'_S(t_0) = x'(t_0)$$

În cazul ecuaţiei Clairaut aceste relaţii sunt verificate, ceea ce justifică denumirile de soluţie generală, soluţie singulară.

Demonstraţie
Pentru o soluţie "generală" $x(t) = at + B(a)$ cu $a \in \mathbb{R}$, alegem $t_0 = -B'(a)$, deci $p = a$
avem $x'_S(t_0) = p = a = x'(t_0)$, urmează $x_S(t_0) = t_0 \cdot x'_S(t_0) + B(a) = t_0 \cdot a + B(a) = x(t_0)$
Deci soluţia singulară

$$\begin{cases} t = -B'(p) \\ x_S(t) = t \cdot p + B(p) \end{cases}$$

este tangentă la soluţia "generală" $x(t) = at + B(a)$.

Exemplu 1.6. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$(1.6.2) \qquad x(t) = tx'(t) + 3(x')^2$$

Soluţie.
Derivăm şi obţinem

$$x'(t) = x'(t) + tx''(t) + 6x'(t) \cdot x''(t) \Leftrightarrow$$
$$x''(t) \cdot [t + 6x'(t)] = 0$$

deci ori $x''(t) = 0$ şi rezultă soluţia generală $x(t) = at + b$ cu $b = 3a^2$, $a \in \mathbb{R}$,
ori $[t + 6x'(t)] = 0$ şi soluţia singulară sub formă parametrică (cu p parametru $p = x'(t)$) este

$$\begin{cases} t = -6p \\ x = t \cdot p + 3p^2 \end{cases}$$

■

1.7 Ecuaţii diferenţiale de tip Lagrange

Pe scurt ecuaţii diferenţiale **Lagrange**, acestea sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$(1.7.1) \qquad x(t) = t \cdot A(x'(t)) + B(x'(t))$$

unde $A, B : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^1. Se caută soluţii $x = x(t)$ de clasă C^2.

Joseph-Louis Lagrange (1736 − 1813) matematician şi astronom italian-francez. Contribuţii fundamentale în analiză, mecanică clasică şi mecanică cerească. Lui i se datorează metoda "variaţiei constantelor", metoda "multiplicatorilor lui Lagrange", a aplicat calculul diferenţial în teoria probabilităţilor, a transformat mecanica newtoniană într-o ramură a mecanicii "lagrangiene".

Procedăm astfel: derivăm ecuaţia (1.7.1) şi obţinem o ecuaţie diferenţială de ordin 2 (apare derivata de ordin 2 , x'')

$$x'(t) = A(x') + tA'(x') \cdot x''(t) + B'(x') \cdot x''(t)$$

notăm $x'(t) = p(t)$, deci $x''(t) = p'(t)$ şi obţinem o ecuaţie diferenţială de ordin 1

$$(1.7.1^*) \qquad p(t) = A(p(t)) + tA'(p(t)) \cdot p'(t) + B'(p(t)) \cdot p'(t)$$

Cazul 1) Dacă $p'(t) = 0$ pentru orice t , obţinem **soluţia singulară**

$$p'(t) = 0 \Leftrightarrow x''(t) = 0 \Rightarrow x'(t) = a \quad \Rightarrow x(t) = at + b$$

Pe care o înlocuim în ecuaţia (1.7.1) şi obţinem

$$at + b = t \cdot A(a) + B(a) \quad \text{pentru orice } t$$

ceea ce duce la $a = A(a)$ şi $b = B(a)$.
Deci în final obţinem soluţia $x(t) = at + B(a)$, cu $a = A(a)$.
Această soluţie există numai dacă ecuaţia algebrică $a = A(a)$ are soluţii reale.

Cazul 2) Dacă $p'(t) \neq 0$, pentru orice t (într-un anumit interval)
atunci $p'(t)$ are semn constant (deoarece este funcţie continuă) şi deci funcţia $p(t)$ este strict monotonă.
Rezultă că este şi inversabilă cu inversa de asemenea derivabilă.
Notăm această inversă cu $t = t(p)$, atunci

$$t'(p) = \frac{1}{p'(t)} \quad \text{sau} \quad \frac{dt}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dt}}$$

deoarece $t \circ p = id$ (id este funcţia identică $id(t) = t$) , avem $t(p(t)) = t$. Derivând obţinem

$$[t(p(t))]' = (t)' \quad \Leftrightarrow \quad t'(p) \cdot p'(t) = 1$$

.
Deci practic în ecuaţia (1.7.1*) "schimbăm rolul variabilelor" p şi t (din $p = p(t)$ în $t = t(p)$) şi obţinem

$$p = A(p) + t(p) \cdot A'(p) \frac{1}{t'(p)} + B'(p) \frac{1}{t'(p)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t'(p) = \frac{t(p) \cdot A'(p) + B'(p)}{p - A(p)} \Leftrightarrow$$

$$t'(p) = t(p) \frac{A'(p)}{p - A(p)} + \frac{B'(p)}{p - A(p)}$$

care este o ecuaţie liniară.
Se rezolvă această ecuaţie şi rezultă $t(p) = ...$ în funcţie de cel puţin un parametru (constanta de integrare)
Soluţia generală a ecuaţiei Lagrange se scrie sub formă parametrică (cu p parametru)

$$\begin{cases} x(t) = t \cdot A(p) + B(p) \\ t = t(p) \end{cases}$$

În cazul ecuatiei Lagrange denumirile de soluţie generală, soluţie singulară sunt justificate.
Demonstraţie
Pentru o soluţie generală

$$\begin{cases} x(t) = t \cdot A(p) + B(p) \\ t = t(p) \end{cases}$$

alegem $t_0 = t(a)$, deci $p = a$ şi $a = A(a)$
urmează $x_S(t_0) = at_0 + B(a) = t_0 A(a) + B(a) = x(t_0)$ şi $x_s'(t_0) = a = p = x'(t_0)$
Deci soluţia singulară $x_S(t) = at + B(a)$

este "tangentă" la soluţia generală

$$\begin{cases} x(t) = t \cdot A(p) + B(p) \\ t = t(p) \end{cases}$$

Exemplu 1.7. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$x(t) + 2tx'(t) + (x'(t))^2 = 0 \tag{1.7.2}$$

Soluţie.
Ecuaţia se rescrie

$$x(t) = t[-2x'(t)] - (x'(t))^2$$

derivăm şi obţinem

$$x'(t) = -2x'(t) - t \cdot 2x''(t) - 2x'(t) \cdot x''(t)$$

notăm $x'(t) = p(t)$, $x''(t) = p'(t)$ şi obţinem ecuaţia

$$p = -2p - 2tp' - 2pp' \quad \Leftrightarrow$$

$$3p + 2(t+p) \cdot p' = 0 \tag{1.7.3}$$

cazul 1)

$$p'(t) = 0$$

rezultă soluţia singulară

$$x(t) = at + b$$

Înlocuind în ecuaţia (1.7.2) obţinem

$$at + b + 2ta + (a)^2 = 0$$

din care rezultă $a = 0$ şi $b = 0$
deci soluţia singulară este soluţia nulă $x(t) = 0$ pentru orice t

cazul 2) $p'(t) \neq 0$. "Schimbăm rolul variabilelor" t şi p , avem

$$p'(t) = \frac{1}{t'(p)}$$

înlocuim şi obţinem ecuaţia

$$3p + 2\frac{t(p) + p}{t'(p)} = 0 \Leftrightarrow t'(p) = -\frac{2}{3p}t(p) - \frac{2}{3}$$

ecuaţie liniară care se rezolvă în mod "standard":
Pasul 1) se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată

$$t'(p) = -\frac{2}{3}t(p)\frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{t'(p)}{t(p)}dp = -\frac{2}{3}\int \frac{1}{p}dp \quad \Rightarrow \quad \ln|t(p)| = -\frac{2}{3}\ln|p| + K \text{ , } K \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad |t(p)| = |p|^{-\frac{2}{3}} \cdot e^K \Rightarrow t(p) = \pm e^K |p|^{-\frac{2}{3}} = C|p|^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

Soluţiile sunt funcţiiderivabile, deci continue, să presupunem că $p(t) = p$ are semn constant, de exemplu $p > 0$
Pasul 2) aplicăm metoda variaţiei constantelor, căutând soluţii de forma

$$t(p) = C(p)p^{-\frac{2}{3}}$$

şi înlocuind în ecuaţie obţinem

$$C'(p)p^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}C(p)p^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3p}C(p)p^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$C'(p) = -\frac{2}{3}p^{\frac{2}{3}} \Rightarrow C(p) = -\frac{2}{5}p^{\frac{5}{3}} + K \text{ , } K \in \mathbb{R}$$

rezultă

$$t(p)=\left(-\frac{2}{5}p^{\frac{5}{3}}+K\right)p^{-\frac{5}{3}}$$

şi soluţia generală a ecuaţiei Lagrange în formă parametrică este

$$\begin{cases} x=-2tp-p^2 \\ t=-\frac{2}{5}p+Kp^{-\frac{5}{3}} \end{cases}$$

Constanta " K " se poate determina dacă se cunoaşte (putem măsura) mărimea $t=x(t)$ la un "moment" t_0 , $x(t_0)=b$ (o condiţie "iniţială")

prin rezolvarea sistemului algebric

$$\begin{cases} x(t_0)=b=-2t_0\cdot p-p^2 \\ t_0=-\frac{2}{5}p+K\cdot p^{-\frac{5}{3}} \end{cases}$$

Din prima ecuaţie se determină soluţiile reale $p=...$, care se inlocuiesc în a doua ecuaţie , din care apoi se determină $K=...$

De exemplu, pentru condiţia iniţială $x(0)=1$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} x(0)=1=-2\cdot 0\cdot p-p^2 \\ 0=-\frac{2}{5}p+K\cdot p^{-\frac{5}{3}} \end{cases} \Rightarrow \quad 1=-p^2 \text{ care nu are soluţii reale}$$

Deci nu orice condiţie iniţială admite soluţii. Este un fapt la care merita reflectat.

Considerăm altă condiţie iniţială $x(0)=-1$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} x(0)=-1=-2\cdot 0\cdot p-p^2 \\ 0=-\frac{2}{5}p+K\cdot p^{-\frac{5}{3}} \end{cases} \Rightarrow \quad -1=-p^2 \text{ care are soluţiile } p_1=1\ ,\ p_2=-1$$

Acceptăm doar soluţia pozitivă $p_1=1$, deoarece am determinat soluţii pentru cazul $p>0$.

Înlocuind în a doua ecuaţie obţinem

$$0=-\frac{2}{5}\cdot 1+K\cdot 1^{-\frac{5}{3}} \quad \Rightarrow \quad K=\frac{2}{5}$$

şi deci în final obţinem soluţia problemei Cauchy (ecuaţia diferenţială plus condiţia iniţială) , sub formă parametrică

$$\begin{cases} x=-2tp-p^2 \\ t=-\frac{2}{5}p+\frac{2}{5}p^{-\frac{5}{3}} \end{cases}$$

■

1.8 Ecuaţii diferenţiale cu diferenţiale totale

Definiţie. Ecuaţia diferenţială de forma

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

se numeşte **ecuaţie cu diferenţiale totale** sau **ecuaţie Pfaff**,

unde $P,Q:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^1 pe domeniul D.

O ecuaţie de formă mai stranie, nici în formă canonică, nici în formă normală.

O funcţie $y=y(x)$ este soluţie pentru ecuaţia Pfaff dacă verifică

$$P(x,y(x))+Q(x,y(x))\cdot y'(x)=0 \text{ pentru orice } x$$

sau o funcţie $x=x(y)$ care verifică

$$P(x(y),y)\cdot x'(y)+Q(x(y),y)=0 \text{ pentru orice } y$$

Ecuaţia Pfaff se numeşte **exactă** dacă există o funcţie $F:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ aşa încât

$$\operatorname{grad}F=(P,Q) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right)=(P,Q)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \ \ , \ \ \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$$

Comentariu.
Ecuaţia Pfaff este doar o scriere formală, care înlocuieşte cele două situaţii

$$\text{i)} \quad P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x,y(x)) + Q(x,y(x)) \cdot y'(x) = 0$$

$$\text{ii)} \quad P(x,y)\frac{dx}{dy} + Q(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x(y),y) \cdot x'(y) + Q(x(y),y) = 0$$

Observaţie
O ecuaţie Pfaff exactă se rescrie

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

prin urmare $y = y(x)$ este soluţie înseamnă

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x)) \cdot y'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[F(x,y(x)\right] = 0 \ \Leftrightarrow \ F(x,y(x)) = ct$$

la fel $x = x(y)$ este soluţie înseamnă

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x(y),y) \cdot x'(y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(y),y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dy}\left[F(x(y),y\right] = 0 \ \Leftrightarrow \ F(x(y),y) = ct$$

În ambele cazuri constatăm că funcţia F defineşte în mod implicit soluţiile ecuaţiei Pfaff exacte, prin relaţia

$$F(x,y) = ct$$

Aici "ct" desemnează o constantă reală.
Se pune problema
- cum determinăm dacă o ecuaţie Pfaff este exactă sau nu şi
- cum determinăm o funcţie F cu $\operatorname{grad} F = (P,Q)$

Comentariu.
Soluţiile nu apar în formă explicită $y = y(x) = ...$ aşa cum se întâmplă la foarte multe ecuaţii diferenţiale, ci doar în forma implicită $F(x,y) = ct$.
Totuşi se consideră că ecuaţia implicită $F(x,y) = ct$ este mai "simplă" decât ecuaţia diferenţială $Pdx + Qdy = 0$

Observaţie.
Dacă ecuaţia Pfaff este exactă, atunci

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Demonstraţie.
Ecuaţia este exactă, deci $\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (P,Q)$, deci

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \qquad \text{şi} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Funcţiile P,Q sunt de clasă C^1 deci funcţia F este de clasă C^2 şi conform teoremei lui Schwarz

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \overset{\text{T Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

■

Să observăm că problema este echivalentă cu problema pentru câmpuri vectoriale.

Ecuaţia Pfaff exactă , este echivalent cu câmpul vectorial $v = (P, Q)$ este câmp de gradienţi.

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (P, Q) = v$$

Sunt folosiţi în mod echivalent termenii
- forma diferenţială $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ este exactă
- ecuaţia Pfaff $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ este exactă
- câmpul vectorial $v(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ este câmp de gradienţi

pentru a exprima faptul că

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (P, Q) = v$$

sau
- forma diferenţială $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ este închisă
- ecuaţia Pfaff $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ verifică $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
- câmpul vectorial $v(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ este un câmp conservativ

pentru a exprima faptul că

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Are loc aceeaşi teoremă ca şi pentru câmpuri vectoriale.

Teoremă.
Dacă $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^1 pe un domeniu simplu conex D, atunci
i) ecuaţia Pfaff $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ este exactă
$\Leftrightarrow$ ii) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

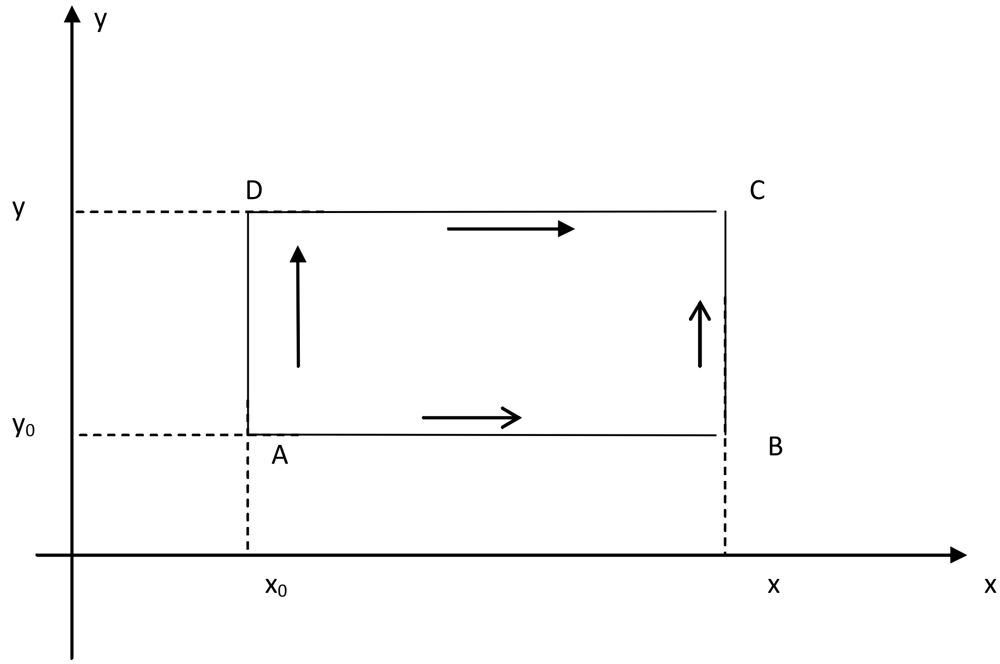
Funcţionează aceleaşi metode de a determina o funcţie F cu $\operatorname{grad} F = (P, Q)$ (un potenţial scalar).

$$F(x,y) = \int_A^{(x,y)} Pdx + Qdy = \int_A^{(x,y)} \overline{v} \cdot d\overline{r}$$

Integrala curbilinie nu depinde de drum ci numai de capetele drumului (deoarece D este simplu conex), deci putem alege orice punct $A = (x_0, y_0) \in D$

Cazuri particulare.

1. D este un dreptunghi



Pentru astfel de domeniu putem alege două tipuri de drumuri, care eventual pot simplifica calcularea integralei curbilinii.

i) segmentul AB reunit cu segmentul BC

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt$$

ii) segmentul AD reunit cu segmentul DC

$$F(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt+\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt$$

<u>Demonstraţie</u>.
i) segmentul AB se parametrizează : $x(t)=t\in[x_0,x]$, $y(t)=y_0$, $x'(t)=1$, $y'(t)=0$
segmentul BC se parametrizează : $x(t)=x$, $y(t)=t\in[y_0,y]$, $x'(t)=0$, $y'(t)=1$
deci integrala curbilinie devine

$$F(x,y)=\int_{A}^{(x,y)}Pdx+Qdy=\overbrace{\int_{x_0}^{x}[P(t,y_0)\underbrace{x'(t)}_{1}+Q(t,y_0)\underbrace{y'(t)}_{0}]dt}^{AB}+\overbrace{\int_{x_0}^{x}[P(x,t)\underbrace{x'(t)}_{0}+Q(x,t)\underbrace{y'(t)}_{1}]dt}^{BC}=$$

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt$$

ii) segmentul AD se parametrizează : $x(t)=x_0$, $y(t)=t\in[y_0,y]$, $x'(t)=0$, $y'(t)=1$
segmentul DC se parametrizează : $x(t)=t\in[x_0,x]$, $y(t)=y$, $x'(t)=1$, $y'(t)=0$
deci integrala curbilinie devine

$$F(x,y)=\int_{A}^{(x,y)}Pdx+Qdy=\overbrace{\int_{y_0}^{y}[P(x_0,t)\underbrace{x'(t)}_{0}+Q(x_0,t)\underbrace{y'(t)}_{1}]dt}^{AD}+\overbrace{\int_{x_0}^{x}[P(t,y)\underbrace{x'(t)}_{1}+Q(t,y)\underbrace{y'(t)}_{0}]dt}^{DC}=$$

$$F(x,y)=\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt+\int\limits_{x_0}^{x} P(t,y)dt$$

■

2. <u>D este convex sau stelat</u>, deci există un punct $(x_0,y_0)\in D$ aşa încât
segmentul ce uneşte (x_0,y_0) cu (x,y) este inclus în domeniul D (pentru orice punct $(x,y)\in D$)
segmentul ce uneşte (x_0,y_0) cu (x,y) se parametrizează $t\in[0,1]$
$x(t)=x_0+t(x-x_0)$, $y(t)=y_0+t(y-y_0)$, $x'(t)=(x-x_0)$, $y'(t)=(y-y_0)$
integrala curbilinie devine

$$F(x,y)=\int\limits_{A}^{(x,y)} Pdx+Qdy=\int\limits_{0}^{1}[P(x(t),y(t))\underbrace{x'(t)}_{(x-x_0)}+Q(x(t),y(t))\underbrace{y'(t)}_{(y-y_0)}]dt$$

Exemplu.
Să se determine soluţiile ecuaţiei diferenţiale

$$(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$$

<u>Soluţie</u>.
În acest caz $P(x,y)=x+y+1$ şi $Q(x,y)=x-y^2+3$
Calculăm

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x+y+1)=1$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x-y^2+3\right)=1$$

Pe de altă parte funcţiile P şi Q sunt definite pe $\mathbb{R}^3$, un domeniu simplu conex, deci ecuaţia Pfaff este exactă.
Putem integra pe drumuri de tip "dreptunghi" , alege orice punct $(x_0,y_0)=(0,0)$ şi obţinem

$$F(x,y)=\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt+\int\limits_{x_0}^{x} P(t,y)dt$$

$$F(x,y)=\int\limits_{0}^{y} Q(0,t)dt+\int\limits_{0}^{x} P(t,y)dt=\int\limits_{0}^{y}(-t^2+3)dt+\int\limits_{0}^{x}(t+y+1)dt=$$
$$F(x,y)=(-\frac{t^3}{3}+3t)\Big|_{t=0}^{t=y}+(\frac{t^2}{2}+yt+t)\Big|_{t=0}^{t=x}=$$
$$F(x,y)=-\frac{y^3}{3}+3y+\frac{x^2}{2}+yx+x$$

deci soluţiile sunt definite în mod implicit de relaţia

$$\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^3}{3}+x+3y=C$$

■

Ecuaţii diferenţiale complet integrabile

Ecuaţiile Pfaff care nu verifică $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, nu sunt exacte. În anumite condiţii, pot fi rezolvate la fel ca şi ecuaţiile exacte.

Definiţie. O ecuaţie Pfaff $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ se numeşte **complet integrabilă**, dacă există o funcţie $\mu : D \to \mathbb{R}$, numită **factor integrant**, astfel încât

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

sau astfel încât ecuaţia Pfaff să fie exactă

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

Să observăm că dacă domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ este simplu conex, atunci ultimele două condiţii sunt echivalente. Este apoi evident că cele două ecuaţii Pfaff au aceleaşi soluţii.

$$Pdx + Qdy = 0 \;\; \text{şi} \quad \mu Pdx + \mu Qdy = 0$$

Funcţia $\mu = \mu(x,y)$ este într-adevăr doar un factor, care nu influenţează soluţiile.

Ecuaţia Pfaff $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$ fiind exactă, există o funcţie F astfel încât

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (\mu P, \mu Q)$$

Deci ecuaţia Pfaff se poate rescrie

$$\underbrace{\mu(x,y(x)P(x,y(x))}_{\frac{\partial F}{\partial x}} + \underbrace{\mu(x,y(x))Q(x,y(x))}_{\frac{\partial F}{\partial y}}y'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left[F(x,y(x))\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y(x)) = ct$$

Prin urmare soluţiile ecuaţiei Pfaff $Pdx + Qdy = 0$ sunt definite în mod implicit de $F(x,y) = ct$

Ecuaţiile Pfaff care nu sunt exacte dar sunt complet integrabile se rezolvă astfel.
Nu există o "reţetă" pentru
- a determina dacă o ecuaţie Pfaff admite factor integrant sau
- cum anume arată un asemenea factor integrant.

Tot ce se poate face este să încercăm dacă ecuaţia Pfaff admite ca factor integrant o funcţie de anumită formă: $\mu(x+y)$, $\mu(xy)$, $\mu(x^2+y^2)$ ...
Odată determinat un factor integrant, se determină o funcţie $F(x,y)$ (un potenţial scalar) astfel încât

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (\mu P, \mu Q)$$

Exemplu.
Sâ se determine soluţiile ecuaţiei

$$(xy - x^2)dy - y^2dx = 0$$

ştiind că admite un factor integrant

$$\mu(x,y) = \frac{-1}{x^2 y}$$

<u>Soluţie</u>.
În acest caz $P(x,y) = -y^2$ şi $Q(x,y) = xy - x^2$
Să verificăm acest factor integrant.

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{x^2y}(-y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{x^2y}(xy - x^2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x^2}$$

Deci într-adevăr ecuaţia Pfaff adimite factorul integrant $\mu(x,y) = \frac{-1}{x^2 y}$
Să determinăm o funcţie $F(x,y)$ cu

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (\mu P, \mu Q) = \left(\frac{y}{x^2}, \frac{-1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

Să remarcăm faptul că $x \neq 0$ şi $y \neq 0$ deci domeniul de definiţie este unul din cele patru cadrane, de exemplu cadranul I $x > 0$, $y > 0$, care este domeniu simplu conex.
Putem alege $(x_0, y_0) = (1, 1)$ şi folosind drum de tip "dreptunghi" obţinem

$$F(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} \mu(x_0,t) Q(x_0,t) dt + \int\limits_{x_0}^{x} \mu(t,y) P(t,y) dt =$$

$$= \int\limits_{1}^{y} \mu(1,t) Q(1,t) dt + \int\limits_{1}^{x} \mu(t,y) P(t,y) dt = \int\limits_{1}^{y} \left(\frac{-1}{1} + \frac{1}{t}\right) dt + \int\limits_{1}^{x} \left(\frac{y}{t^2}\right) dt =$$

$$= (-t + \ln t)\Big|_{t=1}^{t=y} + \left(-\frac{y}{t}\right)\Big|_{t=1}^{t=x} = -y + \ln y - (-1) - \ln 1 + \left(-\frac{y}{x}\right) - \left(-\frac{y}{1}\right)$$

$$F(x,y) = -y + \ln y + 1 - \frac{y}{x} + y$$

Soluţiile sunt definite în mod implicit de relaţia

$$\ln y - \frac{y}{x} = C$$

■

1.9 Ecuaţii Reductibile la ordinul 1 / Ecuatii implicite

lklklklk

1.10 Exemple Rezolvate

E 1.10.1 Să se determine $x = x(t)$ soluţia problemei Cauchy

$$x'(t) = \operatorname{tg} t \cdot x(t) \quad , \quad \text{cu condiţia iniţială} \quad x(0) = 3$$

Soluţie.
Ecuaţia diferenţială $x'(t) = tgt \cdot x(t)$, este o ecuaţie cu variabile separabile.
Se rezolvă conform algoritmului corespunzător :

$$x'(t) = \operatorname{tg} t \cdot x(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x'(t)}{x(t)} = \operatorname{tg} t \quad \Rightarrow \quad \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int \operatorname{tg} t \; dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt$$

$$\ln|x(t)| = -\ln|\cos t| + K \quad \Leftrightarrow \quad |x(t)| = e^{-\ln|\cos t| + K} = e^{-\ln|\cos t|} \cdot e^K = e^K \cdot \frac{1}{e^{\ln|\cos t|}}$$

$$x(t) = \underbrace{\pm e^K}_{C} \cdot \frac{1}{|\cos t|} = \frac{C}{|\cos t|}$$

Condiţia iniţială este $x(0) = 3 > 0$, deci soluţia problemei Cauchy este definită în vecinătatea lui $t = 0$, funcţia cos este pozitivă în vecinătatea lui $t = 0$, de exemplu pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
prin urmare pe acest interval $|\cos t| = \cos t > 0$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \frac{C}{\cos t} \quad \text{cu} \quad x(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = x(0) = \frac{C}{\cos 0} \quad \Leftrightarrow \quad C = 3$$

În final obţinem soluţia

$$x(t) = \frac{3}{\cos t}$$

■

E 1.10.2 Să se determine funcţiile $x = x(t)$ respectiv , $y = y(x)$, care sunt soluţiile problemelor Cauchy :

$$\frac{dx}{dt} = \sin t \cos^2 x \quad , \; x(0) = 2$$

<u>Soluţie.</u>

$$\frac{dx}{dt} = \sin t \cos^2 x \quad , \; x(0) = 2 \;\; , \quad x = x(t)$$

Este o ecuaţie diferenţială cu <u>variabile separabile</u>. Folosim algoritmul corespunzător.

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \sin t \cos^2 x(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x'(t)}{\cos^2 x(t)} = \sin t$$

Apoi integrăm

$$\int \frac{x'(t)}{\cos^2 x(t)} dt = \int \sin t dt \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}[x(t)] = \cos t + C \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \mathrm{arctg}\,(\cos t + C)$$

Apoi folosim condiţia iniţială $x(0) = 2$

$$2 = x(0) = \mathrm{arctg}\left(\underbrace{\cos 0}_{1} + C\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \mathrm{arctg}\,(1 + C) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + C = \mathrm{tg}(2) \quad \Leftrightarrow \quad C = \mathrm{tg}(2) - 1$$

şi obţinem soluţia problemei Cauchy

$$x(t) = \mathrm{arctg}\,(\cos t + \mathrm{tg}(2) - 1)$$

■

E 1.10.3 Să se determine soluţiile $x = x(t)$, ale problemelor Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \frac{x^3}{t^3} \quad , \qquad x(1) = 2$$

<u>Soluţie</u>.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \frac{x^3}{t^3} \quad , \qquad x(1) = 2 \quad , \quad x = x(t)$$

Este o ecuaţie de <u>tip Bernoulli</u> cu "$\alpha = 3$" Folosim algoritmul corespunzător, cu schimbarea de funcţie

$$y(t) = [x(t)]^{1-\alpha} = [x(t)]^{1-3} = [x(t)]^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{[x(t)]^2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{y(t)}}$$

Derivăm şi obţinem

$$x'(t) = \frac{d}{dt}[x(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\sqrt{y(t)}}\right] = \frac{d}{dt}\left[y(t)^{-1/2}\right] = \frac{-1}{2} y(t)^{-1/2-1} \cdot y'(t)$$

$$x'(t) = \frac{-1}{2} \frac{y'(t)}{y(t)^{3/2}}$$

Înlocuind în ecuaţia diferenţială obţinem

$$\frac{-1}{2}\frac{y'(t)}{y(t)^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{y(t)}} + \frac{1}{t^3}\left[\frac{1}{\sqrt{y(t)}}\right]^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{2}y'(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{t}\frac{y(t)^{3/2}}{\sqrt{y(t)}} + \frac{1}{t^3}\frac{1}{y(t)^{3/2}} \cdot y(t)^{3/2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{2}y'(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{t}y(t) + \frac{1}{t^3} \;\Leftrightarrow\; \quad y'(t) = -\frac{1}{t}y(t) - \frac{2}{t^3}$$

Am obţinut o ecuaţie diferenţială liniară.
Pas I Se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată

$$y'(t) = -\frac{1}{t}y(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y'(t)}{y(t)}dt = \int -\frac{1}{t}dt \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln|y(t)| = -\ln|t| + K \quad \Leftrightarrow \quad |y(t)| = e^{-\ln|t|+K} = -\left|\frac{1}{t}\right| \cdot e^K$$

$$y(t) = C \cdot \frac{1}{t}$$

Pas II Folosim metoda "variaţiei constantelor" , căutăm soluţii pentru ecuaţia liniară neomogenă $y'(t) = -\frac{1}{t}y(t) - \frac{2}{t^3}$
de forma

$$y(t) = C(t) \cdot \frac{1}{t}$$

Calculăm derivata

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left[C(t) \cdot \frac{1}{t}\right] = C'(t) \cdot \frac{1}{t} + C(t) \cdot \left(\frac{-1}{t^2}\right)$$

Înlocuim în ecuaţia liniară neomogenă şi obţinem

$$C'(t) \cdot \frac{1}{t} + C(t) \cdot \left(\frac{-1}{t^2}\right) = -\frac{1}{t}C(t) \cdot \frac{1}{t} - \frac{2}{t^3} \quad \Leftrightarrow \quad C'(t) \cdot \frac{1}{t} = -\frac{2}{t^3} \quad \Leftrightarrow \quad C'(t) = -\frac{2}{t^2}$$

Integrăm şi obţinem

$$C(t) = \int C'(t)dt = \int \left(-\frac{2}{t^2}\right) dt = \frac{2}{t} + K$$

deci

$$y(t) = C(t) \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{2}{t} + K\right)$$

Revenim la schimbarea de funcţie

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{y(t)}} = x(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t}\left(\frac{2}{t} + K\right)}}$$

Folosim condiţia iniţială $x(1) = 2$

$$2 = x(1) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1}\left(\frac{2}{1} + K\right)}} \quad \Leftrightarrow \quad 4 = \frac{1}{\frac{1}{1}\left(\frac{2}{1} + K\right)} \quad \Leftrightarrow \quad 2 + K = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{7}{4}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t}\left(\frac{2}{t} - \frac{7}{4}\right)}}$$

■

E 1.10.4 Să se determine funcţiile $x = x(t)$ care verifică problema Cauchy

$$x'(t) = x(t) + t^2 \quad , \quad x(1) = 2$$

Solutie
Este o ecuatie liniară neomogenă.

Pas 1. Se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată

$$x'(t) = x(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x'(t)}{x(t)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int 1 dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x(t)| = t + K$$

$$\Rightarrow \quad |x(t)| = e^{t+K} = e^t \cdot e^K \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \pm e^K \cdot e^t = C \cdot e^t$$

Pas 2. Folosim metode "variatiei constantelor" , căutam soluţii pentru ecuaţia liniară neomogenă, de forma

$$x(t) = C(t) \cdot e^t$$

Derivata este

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left[C(t) \cdot e^t\right] = C'(t) \cdot e^t + C(t) \cdot \frac{d}{dt} e^t = C'(t) \cdot e^t + C(t) \cdot e^t$$

Inlocuim în ecuaţia diferenţială

$$x'(t) = x(t) + t^2$$

obţinem

$$C'(t) \cdot e^t + C(t) \cdot e^t = C(t) \cdot e^t + t^2 \quad \Leftrightarrow \quad C'(t) \cdot e^t = t^2 \quad \Leftrightarrow \quad C'(t) = t^2 \cdot e^{-t}$$

Integrăm pentru a determina funcţia $C(t)$

$$C(t) = \int C'(t) dt = \int t^2 \cdot e^{-t} dt \overset{\text{prin parti}}{=} t^2 \cdot e^t - \int 2t \cdot e^t dt \overset{\text{prin parti}}{=}$$

$$= t^2 e^t - 2\left[t \cdot e^t - \int 1 \cdot e^t dt\right] = t^2 e^t - 2te^t + e^t + K$$

Deci soluţiile sunt de forma

$$x(t) = C(t) \cdot e^t = \left[t^2 e^t - 2te^t + e^t + K\right] e^t$$

Apoi folosim condiţia iniţială

$$2 = x(1) = \left[1^2 e^1 - 2 \cdot 1 \cdot e^1 + e^1 + K\right] e^1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = Ke^1 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{2}{e}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \left[t^2 e^t - 2te^t + e^t + \frac{2}{e}\right] e^t = t^2 e^{2t} - 2te^{2t} + e^{2t} + 2$$

■

E 1.10.5 Să se determine soluţia problemei Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = y^2(x) \cdot \sin x + y(x) \cdot \cos x \qquad y(0) = 2 \qquad , \quad y = y(x)$$

Soluţie.
Avem o ecuaţie de tip Bernoulli, cu "$\alpha = 2$". Deci facem schimbarea de funcţie

$$z(x) = [y(x)]^{1-\alpha} = [y(x)]^{1-2} = [y(x)]^{-1} = \frac{1}{y(x)} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{z(x)}$$

Calculăm derivata

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z(x)}\right) = -\frac{z'(x)}{[z(x)]^2}$$

Înlocuind în ecuaţie obţinem

$$-\frac{z'(x)}{[z(x)]^2} = \left[\frac{1}{z(x)}\right]^2 \cdot \sin x + \frac{1}{z(x)} \cdot \cos x$$

$$-z'(x) = \sin x + z(x) \cdot \cos x \quad \Leftrightarrow \quad z'(x) = -z(x) \cdot \cos x - \sin x$$

Am obţinut o ecuaţie liniară neomogenă.
Pas I Se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată

$$z'(x) = -z(x) \cdot \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z'(x)}{z(x)} = -\cos x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{z'(x)}{z(x)} dx = \int -\cos x dx$$

integrăm

$$\ln|z(x)| = -\sin x + K \quad \Leftrightarrow \quad |z(x)| = e^{-\sin x + K} = e^{-\sin x} \cdot e^K \quad \Leftrightarrow \quad z(x) = \pm e^K \cdot e^{-\sin x}$$

obţinem soluţia ecuaţiei liniare omogene

$$z(x) = C \cdot e^{-\sin z}$$

Pas II Folosim metoda "variaţiei constantelor" , căutăm soluţii pentru ecuaţia liniară neomogenă $z'(x) = -z(x) \cdot \cos x - \sin x$
de forma

$$z(x) = C(x) \cdot e^{-\sin z}$$

Calculăm derivata

$$z'(x) = \frac{d}{dx}\left(C(x) \cdot e^{-\sin z}\right) = C'(x) \cdot e^{-\sin x} + C(x) \cdot e^{-\sin x}(-\cos x)$$

Înlocuim în ecuaţia liniară neomogenă $z'(x) = -z(x) \cdot \cos x - \sin x$ şi obţinem

$$C'(x) \cdot e^{-\sin x} + C(x) \cdot e^{-\sin x}(-\cos x) = -C \cdot e^{-\sin z} \cdot \cos x - \sin x$$

$$C'(x) \cdot e^{-\sin x} = -\sin x \quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = -\sin x \cdot e^{\sin x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int C'(x) dx = -\int \sin x \cdot e^{\sin x} dx$$

Soluţia ecuaţiei liniare neomogene este

$$z(x) = e^{-\sin x}\left(-\int \sin x \cdot e^{\sin x} dx\right)$$

Revenind la schimbarea de funcţie obţinem soluţia ecuaţiei de tip Bernoulli

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = e^{\sin x}\left(-\int \sin x \cdot e^{\sin x} dx\right)^{-1}$$

sau folosind forma de integrală definită pentru antiderivată

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = e^{\sin x}\left(-\int_0^x \sin t \cdot e^{\sin t} dt + K\right)^{-1}$$

Folosim condiţia iniţială $y(0) = 2$

$$2 = y(0) = \frac{1}{z(0)} = e^{\sin 0}\left(-\int_0^0 \sin t \cdot e^{\sin t} dt + K\right)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \frac{1}{K} \quad \Leftrightarrow \quad K = \frac{1}{2}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = e^{\sin x}\left(-\int_0^x \sin t \cdot e^{\sin t} dt + \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

şi rămâne în acestă formă integrală, deoarece nu se poate calcula antiderivata.
■

E 1.10.6 Să se arate că $y(x) = x$ este soluţie pentru ecuaţia diferenţială

$$\frac{dy}{dx} = xy^2(x) - x^3 + 1 \quad , \quad y = y(x)$$

apoi să se rezolve această ecuaţie diferenţială.

Soluţie.
Calculăm derivata

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

înlocuim în ecuaţie

$$1 = x \cdot (x)^2 - x^3 + 1$$

Deci $y(x) = x$ este soluţie (particulară) pentru ecuaţia diferenţială, care este o ecuaţie diferenţială de tip Riccati.
Aplicăm algoritmul corespunzător.
Facem schimbarea de funcţie, unde soluţia particulară este $y_0(x) = x$

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)} = x + \frac{1}{z(x)}$$

Calculăm derivata

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{z(x)}\right) = 1 - \frac{z'(x)}{[z(x)]^2}$$

Înlocuind în ecuaţia Riccati obţinem

$$1 - \frac{z'(x)}{[z(x)]^2} = x \cdot \left(x + \frac{1}{z(x)}\right)^2 - x^3 + 1$$

$$-\frac{z'(x)}{[z(x)]^2} = x \cdot \left(x^2 + 2x\frac{1}{z(x)} + \frac{1}{[z(x)]^2}\right) - x^3$$

$$-\frac{z'(x)}{[z(x)]^2} = 2x\frac{1}{z(x)} + \frac{1}{[z(x)]^2} \quad \Leftrightarrow \quad z'(x) = -2xz(x) - 1$$

Am obţinut o ecuaţie liniară care se rezolvă conform algoritmului standard.
Pas I Mai întâi ecuaţia omogenă

$$z'(x) = -2xz(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z'(x)}{z(x)} = -2x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{z'(x)}{z(x)}dx = \int -2xdx$$

$$\ln|z(x)| = -x^2 + K \quad \Rightarrow \quad |z(x)| = e^{-x^2+K} = e^{-x^2} \cdot e^K$$

$$z(x) = C \cdot e^{-x^2}$$

Pas II II Folosim metoda "variaţiei constantelor" , căutăm soluţii pentru ecuaţia liniară neomogenă $z'(x) = -2x \cdot z(x) - 1$
de forma

$$z(x) = C(x) \cdot e^{-x^2}$$

Calculăm derivata

$$z'(x) = \frac{d}{dx}\left(C(x) \cdot e^{-x^2}\right) = C'(x) \cdot e^{-x^2} + C(x) \cdot e^{-x^2}(-2x)$$

Înlocuim în ecuaţia liniară neomogenă $z'(x) = -2x \cdot z(x) - 1$ şi obţinem

$$C'(x) \cdot e^{-x^2} + C(x) \cdot e^{-x^2}(-2x) = -2xC(x) \cdot e^{-x^2} - 1$$

$$C'(x) \cdot e^{-x^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = -e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int C'(x)dx = -\int e^{x^2}dx$$

Soluţia ecuaţiei liniare neomogene este

$$z(x) = e^{-x^2}\left(-\int e^{x^2}dx\right)$$

Revenind la schimbarea de funcţie onţinem soluţia ecuaţiei Riccati

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)} = x + \frac{1}{z(x)} = x + e^{x^2}\left(-\int e^{x^2}dx\right)^{-1}$$

■

E 1.10.7 Să se determine soluţiile ecuaţiilor diferenţiale

$$y(x) = xy'(x) + \frac{5}{y'(x)} \quad , \quad y = y(x)$$

Soluţie.
Este o ecuaţie de tip Clairaut. Folosim algoritmul corespunzător.
Derivăm ecuaţia

$$y'(x) = y'(x) + x\cdot y''(x) - \frac{5}{[y'(x)]^2}y''(x) \quad \Rightarrow \quad 0 = x\cdot y''(x) - \frac{5}{[y'(x)]^2}y''(x)$$

$$y''(x)\left[x - \frac{5}{[y'(x)]^2}\right] = 0$$

i) pentru $y''(x) = 0 \;\Rightarrow\; y'(x) = a \;\Rightarrow\; y(x) = ax + b$ obţinem soluţia generală a ecuaţiei Clairaut,
Înlocuind în ecuaţie obţinem

$$\underbrace{y(x)}_{ax+b} = x\underbrace{y'(x)}_{a} + \frac{5}{y'(x)} \quad \Leftrightarrow \quad ax + b = ax + \frac{5}{a} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5}{a}$$

Deci soluţia generală este

$$y(x) = ax + \frac{5}{a} \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R} \;,\; a \neq 0$$

ii) pentru

$$x - \frac{5}{[y'(x)]^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{[y'(x)]^2}$$

obţinem soluţia singulară sub formă parametrică , $p \overset{not}{=} y'(x)$

$$\begin{cases} y = xp + \frac{5}{p^2} \\ x = \frac{5}{p^2} \end{cases}$$

■

2 Teoreme de existenţă şi unicitate, Teoreme de Stabilitate

lkjlkjlkj

3 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior

Ecuaţiile diferenţiale de ordin superior sunt ecuaţii în care apar şi derivate de ordin mai mare ca 1. Ordinul unei astfel de ecuaţii este cel mai mare ordin de derivată care apare în expresia ecuaţiei. În forma cea mai generală sau canonică (sau implicită)

$$E(t, x(t), x'(t), x''(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0$$

unde $x^{(n)}(t)$ reprezintă derivata de ordin " n " a funcţiei $x = x(t)$
Ecuaţiile de ordin 2 sunt cele mai des folosite în aplicaţii, deoarece pot descrie cu destulă acurateţe majoritatea fenomenelor reale.

Funcţia $x = x(t)$ reprezintă evoluţia mărimii "x" , derivata $x'(t)$ reprezintă viteza de evoluţie, iar derivata a 2a reprezintă acceleraţia.

În forma normală (sau explicită) ecuaţiile de ordin 2 se scriu

$$x''(t) = E(t, x(t), x'(t))$$

relaţie ce descrie cum variază acceleraţia în funcţie de $t, x(t)$ şi $x'(t)$

De exemplu pentru oscilatorul armonic (pendul elastic) avem ecuaţia (de ordin 2)

$$x''(t) = -k \cdot x(t)$$

unde $k > 0$ este o constantă de elasticitate, specifică materialului din care este confecţionat pendulul elastic.

În cele ce urmează prezentăm metode de rezolvare a unor ecuaţii diferenţiale în care derivata de ordin n se scrie ca o combinaţie liniară a derivatelor sale de ordin mai mic.

Pentru a nu creea obişnuinta cu un singur mod de notaţie, în această secţiune vom folosi notaţia

$$y = y(x) \quad , \quad y'(x) \quad , y''(x) \quad , \quad ... \quad , y^{(n)}(x)$$

Definiţie. O ecuaţie diferenţială de forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_2(x)y^{''} + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (3.1.1)$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară de ordin** n, ($a_n \neq 0$), unde "**coeficienţii**" $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0$ sunt funcţii de clasă C^1, iar funcţia f este continuă (cel puţin).

O **soluţie** este o funcţie $y = y(x)$ de clasă C^n care (împreună cu derivatele sale $y', y'', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}$) verifică ecuaţia (3.1.1).

Definiţie. O funcţie $y = y(x)$ se numeşte
- d**e clasă** C^1 dacă funcţia este derivabilă şi are derivata continuă,
- **de clasă** C^2 dacă este de două ori derivabilă şi derivata de ordin 2 este continuă,
- **de clasă** C^n dacă este de n-ori derivabilă şi derivata de ordin n este continuă

(toate derivatele de ordin mai mic ale funcţiei sunt şi acestea continue deoarece sunt funcţii derivabile).

Ne limităm la a descrie algoritmul de rezolvare a **ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi** (funcţiile $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0$ sunt constante). Prezentăm doar motivaţiile cele mai simple care justifică acest algoritm.

Considerăm deci ecuaţii de forma

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x) \quad (3.1.2)$$

unde $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ şi coeficientul $a_n \neq 0$.

Mai întâi considerăm ecuaţiile "**omogene**" , adică cele pentru care funcţia f este nulă

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0 \quad (3.1.3)$$

3.1 Exemple ...

Pentru a înţelege mai bine situaţia să considerăm câteva cazuri particulare mai simple, în care se pot observa mai uşor anumite fapte.

Iată un exemplu din mecanică: oscilatorul armonic are ecuaţia de mişcare $\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$, $k > 0$,
unde $x = x(t)$ reprezintă elongaţia faţă de poziţia de repaus, $\dot{x}(t)$ reprezintă viteza, iar $\ddot{x}(t)$ acceleraţia, t timpul.

Exemple.

Prezentăm rezolvarea a trei exemple de ecuaţii diferenţiale de ordin 2.

Ex 1 $\quad y''(x) - 4y(x) = 0 \qquad$ Ex 2 $\quad y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0 \qquad$ Ex 3 $\quad y''(x) + 4y(x) = 0$

Soluţii.

Să observăm mai întâi că mulţimea soluţiilor acestor ecuaţii diferenţiale este în fiecare din cazuri un spaţiu vectorial.

i) Funcţia nulă $y(x) = 0$ pentru orice x, este o soluţie, deoarece $y'(x) = 0$, $y''(x) = 0$ şi este evident că acestea verifică ecuaţiile diferenţiale Ex 1, Ex 2, Ex 3.

Soluţia nulă, nu este foarte interesantă din puncte de vedere fizic, deoarece corespunde situaţiei în care funcţia y nu variază.

Totuşi este o soluţie importantă. Este elementul neutru faţă de adunarea funcţiilor.

ii) Dacă $y_1 = y_1(x)$ şi $y_2 = y_2(x)$ sunt două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale Ex 1, adică verifică ecuaţia diferenţială

$$y_1''(x) - 4y_1(x) = 0 \quad \text{şi} \quad y_2''(x) - 4y_2(x) = 0$$

atunci şi suma lor $y_1 + y_2$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale, deoarece

$$(y_1 + y_2)'' - 4(y_1 + y_2) = y_1'' + y_2'' - 4y_1 - 4y_2 = \underbrace{y_1''(x) - 4y_1(x)}_{0} + \underbrace{y_2''(x) - 4y_2(x)}_{0} = 0$$

La fel şi pentru ecuatiile diferenţiale Ex 2 şi Ex 3

- Dacă $y_1 = y_1(x)$ şi $y_2 = y_2(x)$ sunt două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale Ex 2, adică verifică ecuaţia diferenţială

$$y_1''(x) - 6y_1'(x) + 9y_1(x) = 0 \quad \text{şi} \quad y_2''(x) - 6y_2'(x) + 9y_2(x) = 0$$

atunci şi suma lor $y_1 + y_2$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale, deoarece

$$(y_1 + y_2)'' - 6(y_1 + y_2)' + 9(y_1 + y_2) = y_1'' + y_2'' - 6(y_1' + y_2') + 9(y_1 + y_2) =$$

$$= \underbrace{y_1''(x) - 6y_1'(x) + 9y_1(x)}_{0} + \underbrace{y_2''(x) - 6y_2'(x) + 9y_2(x)}_{0} = 0$$

- Dacă $y_1 = y_1(x)$ şi $y_2 = y_2(x)$ sunt două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale Ex 3, adică verifică ecuaţia diferenţială

$$y_1''(x) + 4y_1(x) = 0 \quad \text{şi} \quad y_2''(x) + 4y_2(x) = 0$$

atunci şi suma lor $y_1 + y_2$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale, deoarece

$$(y_1 + y_2)'' + 4(y_1 + y_2) = y_1'' + y_2'' + 4(y_1' + y_2') = \underbrace{y_1''(x) + 4y_1(x)}_{0} + \underbrace{y_2''(x) + 4y_2(x)}_{0} = 0$$

iii) În fne, dacă $y = y(x)$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale Ex 1, atunci şi $\alpha y(x)$ este soluţie, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, deoarece

$$(\alpha y)''(x) - 4(\alpha y)(x) = \alpha y''(x) - 4\alpha y(x) = \alpha \left[\underbrace{y''(x) - 4y(x)}_{0}\right] = 0$$

şi exact la fel şi pentru ecuaţiile din Ex 2 şi Ex 3

$$(\alpha y)''(x) - 6(\alpha y)'(x) + 9(\alpha y)(x) = \alpha y''(x) - 6\alpha y'(x) + 9\alpha y(x) = \alpha \left[\underbrace{y''(x) - 6y'(x) + 9y(x)}_{0}\right] = 0$$

$$(\alpha y)''(x) + 4(\alpha y)(x) = \alpha y''(x) + 4\alpha y(x) = \alpha \left[\underbrace{y''(x) + 4y(x)}_{0}\right] = 0$$

Se arată că aceste <u>spaţii vectoriale au dimensiune 2</u> (exact cât este ordinul acestor ecuaţii diferenţiale)

Deci există baze ale acestor spaţii vectoriale, cu câte două elemente (2 funcţii liniar independente şi care sunt soluţii).

Prin urmare <u>este suficient</u> să determinăm în fiecare din cazuri, <u>două soluţii liniar independente y_1, y_2</u> pentru a scrie orice altă soluţie ca o combinaţie liniară a acestora

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_1 \cdot y_2(x) \quad , \text{ unde } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Căutăm soluţii de tip "exponenţial", de forma $y(x) = e^{\lambda x}$, derivatele sunt

$$y'(x) = (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x} \quad , \quad y''(x) = (e^{\lambda x})'' = (\lambda e^{\lambda x})' = \lambda\lambda e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Pentru Ex 1 înlocuind derivatele în ecuaţie obţinem

$$y''(x) - 4y(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} - 4e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^2 - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 - 4) = 0$$

(deoarece $e^{\lambda x} \neq 0$ pentru orice x şi orice λ)
Ecuaţia algebrică $(\lambda^2 - 4) = 0$ are două soluţii $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, deci obţinem două soluţii pentru ecuaţia diferenţială

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2x} \quad \text{şi} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-2x}$$

Acestea sunt liniar independente.
Atunci, conform observaţiei de mai înainte, orice soluţie pentru Ex 1 este o combinaţie liniară a acestor două soluţii
cu alte cuvinte, soluţia generală a ecuaţiei din Ex1. este

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \quad , \text{ unde } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Pentru Ex 2 înlocuind derivatele în ecuaţie obţinem

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = \lambda^2 e^{\lambda} - 6\lambda e^{\lambda} + 9e^{\lambda} = e^{\lambda}(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 3)^2 = 0$$

(deoarece $e^{\lambda x} \neq 0$)
Ecuaţia algebrică $(\lambda - 3)^2 = 0$ are două soluţii $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (sau o soluţie dublă),
deci obţinem doar o soluţie pentru ecuaţia diferenţială

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{3x}$$

o altă soluţie, liniar independentă de aceasta este

$$y_2(x) = xe^{3x}$$

Să verificăm faptul că aceasta este soluţie a ecuaţiei diferenţiale
Derivatele sunt

$$y_2'(x) = (xe^{3x})' = e^{3x} + x \cdot 3e^{3x} = e^{3x}(1 + 3x)$$

$$y_2''(x) = (xe^{3x})'' = \left[e^{3x}(1 + 3x)\right]' = e^{3x} \cdot 3 + 3e^{3x}(1 + 3x) = e^{3x}(6 + 9x)$$

Înlocuind obţinem

$$y_2''(x) - 6y_2'(x) + 9y_2(x) = e^{3\lambda}(6 + 9x) - 6e^{3\lambda}(1 + 3x) + 9xe^{3\lambda} = e^{3\lambda}(\underbrace{6 + 9x - 6 - 18x + 9x}_{0}) = 0$$

Atunci, conform observaţiei de mai înainte, orice soluţie pentru Ex 2 este o combinaţie liniară a acestor două soluţii
cu alte cuvinte, soluţia generală a ecuaţiei din Ex2. este

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = C_1 e^{3x} + C_2 xe^{3x} \quad , \text{ unde } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Pentru Ex 3 înlocuind derivatele în ecuaţie obţinem

$$y''(x) + 4y(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^2 + 4) = 0$$

(deoarece $e^{\lambda x} \neq 0$)
Ecuaţia algebrică $\lambda^2 + 4 = 0$ are două soluţii complexe $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$
deci obţinem două "soluţii" pentru ecuaţia diferenţială, dar acestea au valori complexe

$$y(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2xi} \quad \text{şi} \quad y(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-2xi}$$

deci aparent fără interes, de vreme ce căutăm în mod evident ca soluţii, funcţii cu valori reale.
Să separăm partea reală şi partea imaginară şi să derivăm o astfel de soluţie cu valori complexe $y = y(x)$

$$y(x) = \underbrace{A(x)}_{\text{Re}} + i\underbrace{B(x)}_{\text{Im}}$$

$$y'(x) = A'(x) + iB'(x) \quad \text{şi} \quad y''(x) = A''(x) + iB''(x)$$

înlocuind în ecuaţia diferenţială obţinem

$$0 = y''(x) + 4y(x) = A''(x) + iB''(x) + 4[A(x) + iB(x)] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{A''(x) + 4A(x)}_{\text{Re}} + i[\underbrace{B''(x) + 4B(x)}_{\text{Im}}] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A''(x) + 4A(x) = 0 \\ B''(x) + 4B(x) = 0 \end{cases}$$

Deci atât partea reală $A = \operatorname{Re} y$ cât şi partea imaginară $B = \operatorname{Im} y$ a soluţiei complexe, sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale.

Pentru $y(x) = e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$ obţinem

$$\begin{cases} y_1(x) = A(x) = \operatorname{Re}(y(x)) = \operatorname{Re}(e^{2xi}) = \cos 2x \\ y_2(x) = B(x) = \operatorname{Im}(y(x)) = \operatorname{Im}(e^{2xi}) = \sin 2x \end{cases}$$

Prin urmare funcţiile $\cos 2x$ şi $\sin 2x$ sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (Ex 3),
de asemenea liniar independente, deci formează o bază pentru spaţiul vectorial al soluţiilor.
Putem deci scrie orice soluţie în forma

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \quad , \text{ unde } \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

sau

$$y(x) = C_1 \cdot \operatorname{Re}(e^{2xi}) + C_2 \cdot \operatorname{Im}(e^{2xi}) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \quad , \text{ unde } \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

cu alte cuvinte, soluţia generală a ecuaţiei din Ex3. este

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \quad , \text{ unde } \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Să observăm că soluţia corespunzătoare pentru rădăcina conjugată $\lambda_2 = -2i$, produce şi ea două soluţii liniar independente .

Pentru $y(x) = e^{-2xi} = \cos(-2x) + i \sin(-2x) = \cos 2x - i \sin 2x$ obţinem

$$\begin{cases} A(x) = \operatorname{Re}(y(x)) = \operatorname{Re}(e^{-2xi}) = \cos 2x \\ B(x) = \operatorname{Im}(y(x)) = \operatorname{Im}(e^{-2xi}) = -\sin 2x \end{cases}$$

Funcţiile $\cos 2x$ şi $-\sin 2x$ sunt de asemenea soluţii liniar independente
Dar folosindu-le pe acestea, obţinem exact acelaşi mod de descriere a soluţiei generale şi anume

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2(-\sin 2x) = C_1 \cos 2x + C_3 \sin 2x \quad , \text{ unde } C_3 = -C_2 \; , \quad C_1, C_3 \in \mathbb{R}$$

■

Aceste trei exemple arată că putem obţine soluţiile liniar independente necesare, dar în mod diferit în funcţie de natura rădăcinilor ecuaţiilor algebrice obţinute.

3.3 Ecuatii diferentiale liniare de ordin 2 cu coeficienti variabili

se poate si pt pt ordin mai mare

3.4 Ecuatii diferentiale liniare cu coeficienti constanti, omogene si neomogene. Metoda variatiei constantelor

Revenim acum la cazul general.

Observaţie.
O funcţie de forma $y(x) = e^{\lambda x}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale omogene

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

dacă şi numai dacă λ este rădăcină reală a polinomului asociat ecuaţiei diferenţiale (polinom numit "**polinom carateristic**")

$$a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + ... + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0 \quad (2.4)$$

În plus soluţiile corespunzătoare la rădăcini distincte sunt liniar independente.
Deci dacă toate cele n rădăcini $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sunt reale şi distincte,
atunci într-adevăr cele n soluţii asociate (de tip exponenţial) $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, ..., e^{\lambda_n x}$ sunt liniar independente şi deci formează o bază pentru spaţiul vectorial al tuturor soluţiilor.

Dacă însă unele rădăcini sunt multiple, sau nu sunt reale (ci complexe) , atunci trebuie folosită altă modalitate de a găsi n soluţii liniar independente.

Suntem acum în măsură să prezentăm algoritmul de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordin superior cu coeficienţi constanţi.

Pasul I.
Se rezolvă ecuaţia omogenă asociată

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0 \quad , \quad a_n \neq 0 \qquad (2.3)$$

Teoremă. Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n omogene, este un spaţiu vectorial de dimensiune n.

Demonstraţie. Fie $y = y(x)$ şi $z = z(x)$ două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (3), adică

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

$$a_n \cdot z^{(n)} + a_{n-1} \cdot z^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot z^{''} + a_1 \cdot z' + a_0 \cdot z = 0$$

Derivăm

$$(y+z)' = y' + z' \quad , \quad (y+z)'' = y'' + z'' \quad , ... \ (y+z)^{(n)} = y^{(n)} + z^{(n)}$$

Apoi

$$a_n(y+z)^{(n)} + a_{n-1}(y+z)^{(n-1)} + ... + a_2(y+z)^{''} + a_1(y+z)' + a_0(y+z) =$$
$$= a_n[y^{(n)} + z^{(n)}] + a_{n-1}[y^{(n-1)} + z^{(n-1)}] + ... + a_2[y'' + z^{''}] + a_1[y' + z'] + a_0[y+z] =$$
$$= [\underbrace{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_2 y^{''} + a_1 y' + a_0 y}_{0}] + [\underbrace{a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + ... + a_2 z^{''} + a_1' z + a_0 z}_{0}] = 0$$

Deci suma celor două soluţii este de asemenea soluţie a ecuaţiei diferenţiale omogene.
În plus, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ funcţia $\alpha \cdot y(x)$ este de asemenea soluţie deoarece

$$[\alpha y(x)]' = \alpha y'(x) \quad , \quad [\alpha y(x)]'' = \alpha y''(x) \quad , \quad ... \ [\alpha y(x)]^{(n)} = \alpha y^{(n)}(x)$$

Înlocuind în ecuaţie obţinem

$$a_n[\alpha y(x)]^{(n)} + a_{n-1}[\alpha y(x)]^{(n-1)} + ... + a_2[\alpha y(x)]^{''} + a_1[\alpha y(x)]' + a_0[\alpha y(x)] =$$
$$= a_n \alpha y^{(n)}(x) + a_{n-1} \alpha y^{(n-1)}(x) + ... + a_2 \alpha y''(x) + a_1 \alpha y'(x) + a_0 \alpha y(x) =$$
$$= \alpha[\underbrace{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_2 y^{''} + a_1 y' + a_0 y}_{0}] = 0$$

În concluzie mulţimea tuturor soluţiilor unei ecuţii diferenţiale omogene este un spaţiu vectorial.
Nu demonstrăm faptul că acest spaţiu vectorial are dimensiune n (egală cu ordinul ecuaţiei).
■

Deci sunt suficiente n soluţii liniar independente pentru a descrie toate soluţiile ecuaţiei omogene.
Iată algoritmul care produce astfel de soluţii.

Pasul I.1 Se consideră **polinomul carateristic** asociat, care are grad $P = n$, deoarece $a_n \neq 0$

$$P(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + ... + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

Se rezolvă **ecuaţia caracteristică** asociată

$$a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + ... + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$$

Fie $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ cele n rădăcini (reale sau complexe). Coeficienţii sunt numere reale $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, deci rădăcinile complexe sunt conjugate două câte două.

Teoremă.

i) Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$, este rădăcină reală de ordin 1 (simplă) , atunci funcţia $y = y(x) = e^{\lambda x}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale omogene (2.3)

ii) Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$, este rădăcină reală multiplă de ordin k , atunci cele k funcţii $y_1, y_2, ...y_k$

$$\begin{aligned}
&y_1(x) = e^{\alpha x}\\
&y_2(x) = xe^{\alpha x}\\
&y_3(x) = x^2 e^{\alpha x}\\
&...\\
&y_k(x) = x^{k-1} e^{\alpha x}
\end{aligned}$$

sunt k soluţii liniar independente pentru ecuaţia diferenţială omogenă (2.3)

iii) Dacă $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ este rădăcină complexă de ordin 1 (simplă) , atunci funcţiile z şi w

$$z(x) = \mathrm{Re}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad , \quad w(x) = \mathrm{Im}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

sunt soluţii liniar independente pentru ecuaţia diferenţială omogenă (2.3)

iv) Dacă $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ este rădăcină complexă multiplă de ordin k , atunci cele $2k$ funcţii $z_1, z_2, ...z_k$, $w_1, w_2, ...w_k$

$$\begin{aligned}
&z_1(x) = \mathrm{Re}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x}\cos\beta x && w_1(x) = \mathrm{Im}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x}\sin\beta x\\
&z_2(x) = \mathrm{Re}(xe^{\lambda x}) = xe^{\alpha x}\cos\beta x && w_2(x) = \mathrm{Im}(xe^{\lambda x}) = xe^{\alpha x}\sin\beta x\\
&z_3(x) = \mathrm{Re}(x^2e^{\lambda x}) = x^2e^{\alpha x}\cos\beta x && w_3(x) = \mathrm{Im}(x^2e^{\lambda x}) = x^2e^{\alpha x}\sin\beta x\\
&... && ...\\
&z_k(x) = \mathrm{Re}(x^{k-1}e^{\lambda x}) = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x && w_k(x) = \mathrm{Im}(x^{k-1}e^{\lambda x}) = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x
\end{aligned}$$

sunt soluţii liniar independente pentru ecuaţia diferenţială omogenă (3).

Demonstraţie.

i) Calculăm mai întâi derivatele succesive

$$y(x) = e^{\lambda x} \ \ , \ \ y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \ \ , \ \ y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \ \ , \ \ y'''(x) = \lambda^3 e^{\lambda x} \ \ ... \ \ y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

prin urmare înlocuind în ecuaţia diferenţială (3) obţinem

$$\begin{aligned}
a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y =\\
= a_n\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + ... + a_2\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} =\\
= e^{\lambda x}(\underbrace{a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0}_{0}) = 0
\end{aligned}$$

deorece λ este rădăcină a polinomului caracteristic. Deci funcţia $y(x) = e^{\lambda x}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale omogene.

iii) Calculul derivatelor este identic cu cel pentru cazul i)

$$y(x) = e^{\lambda x} \ \ , \ \ y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \ \ , \ \ y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \ \ , \ \ y'''(x) = \lambda^3 e^{\lambda x} \ \ ... \ \ y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

şi deci înlocuind în ecuaţia diferenţială obţinem

$$\begin{aligned}
a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y =\\
= e^{\lambda x}(\underbrace{a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0}_{0}) = 0
\end{aligned}$$

Separăm partea reală şi partea imaginară

$$y(x) = e^{\lambda x} = \underbrace{A(x)}_{\mathrm{Re}\, y} + i\underbrace{B(x)}_{\mathrm{Im}\, y}$$

derivăm
$$y' = A' + iB' \ \ , \ \ y'' = A'' + iB'' \ \ , \ \ y''' = A''' + iB''' \ \ , \ \ ... \quad y^{(n)} = A^{(n)} + iB^{(n)} \ \ ,$$
şi obţinem
$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$a_n(A^{(n)} + iB^{(n)}) + a_{n-1}(A^{(n-1)} + iB^{(n-1)}) + ... + a_2(A'' + iB'') + a_1(A' + iB') + a_0(A + iB) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(\underbrace{a_nA^{(n)} + a_{n-1}A^{(n-1)} + ... + a_2A'' + a_1A' + a_0A}_{\text{Re}}) + i(\underbrace{a_nB^{(n)} + a_{n-1}B^{(n-1)} + ... + a_2B'' + a_1B' + a_0B}_{\text{Im}}) = 0$$
De unde rezultă
$$\begin{cases} a_nA^{(n)} + a_{n-1}A^{(n-1)} + ... + a_2A'' + a_1A' + a_0A = 0 \\ a_nB^{(n)} + a_{n-1}B^{(n-1)} + ... + a_2B'' + a_1B' + a_0B = 0 \end{cases}$$
Ceea ce arată că atât partea reală $z = A = \operatorname{Re} y = \operatorname{Re}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \cos \beta x$
cât şi partea imaginară $w = B = \operatorname{Im} y = \operatorname{Im}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \sin \beta x$
sunt soluţii pentru ecuaţia diferenţială omogenă.
Atenţie coeficienţii $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ (sunt reali). Altfel nu are loc descompunerea în parte reală şi imaginară aşa cum apare mai înainte (separând funcţiile A şi B).
ii) , iv) omitem demonstraţia acestora.
■

Practic procedăm astfel.
- Pentru fiecare rădăcină reală simplă (de ordin 1) $\lambda \in \mathbb{R}$ se asociază soluţia
$$y = y(x) = e^{\lambda x}$$
- Pentru fiecare rădăcină reală $\lambda \in \mathbb{R}$ multiplă de ordin k , se asociază k soluţii liniar independente $y_1, y_2, ...y_k$
$$y_1(x) = e^{\lambda x} \ , \ y_2(x) = xe^{\lambda x} \ , \ y_3(x) = x^2e^{\lambda x} \ , \ ... \ , \ y_k(x) = x^{k-1}e^{\lambda x}$$
- Pentru fiecare rădăcină complexă simplă (de ordin 1) $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ şi conjugata ei $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ se asociază 2 soluţii liniar independente z şi w
$$z(x) = \operatorname{Re}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad , \quad w(x) = \operatorname{Im}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$
- Pentru fiecare rădăcină complexă multiplă de ordin k , $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ şi conjugata ei $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, se asociază $2k$ soluţii liniar independente
$$\begin{array}{ll} z_1(x) = \operatorname{Re}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \cos \beta x & w_1(x) = \operatorname{Im}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \sin \beta x \\ z_2(x) = \operatorname{Re}(xe^{\lambda x}) = xe^{\alpha x} \cos \beta x & w_2(x) = \operatorname{Im}(xe^{\lambda x}) = xe^{\alpha x} \sin \beta x \\ z_3(x) = \operatorname{Re}(x^2e^{\lambda x}) = x^2e^{\alpha x} \cos \beta x & w_3(x) = \operatorname{Im}(x^2e^{\lambda x}) = x^2e^{\alpha x} \sin \beta x \\ ... & ... \\ z_k(x) = \operatorname{Re}(x^{k-1}e^{\lambda x}) = x^{k-1}e^{\alpha x} \cos \beta x & w_k(x) = \operatorname{Im}(x^{k-1}e^{\lambda x}) = x^{k-1}e^{\alpha x} \sin \beta x \end{array}$$

Teoremă. Dacă $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_k$ sunt rădăcinile reale sau complexe distincte, (fiecare cu ordinul său de multiplicitate), atunci cele n soluţii asociate conform procedeului descris mai înainte sunt liniar independente.
Omitem demonstraţia.
Pasul I.2 În final orice soluţie a ecuaţiei omogene se scrie sub forma
$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot y_j(x)$$
unde $y_1, y_2, ...y_n$ sunt cele n soluţii liniar independente asociate conform algoritmului descris.
Altfel spus aceasta este forma "**soluţiei generale**" pentru ecuaţia diferenţială omogenă (2.3).

Pasul II. Se rezolvă ecuaţia neomogenă iniţială (2.2) folosind **metoda variaţiei constantelor**.

şi anume se caută soluţii de forma

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \cdot y_j(x)$$

Se demonstrează că derivatele funcţiilor necunoscute $C_1(x), C_2(x), .., C_n(x)$ verifică sistemul liniar algebric

$$\begin{array}{c} \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'(x) \cdot y_j(x) = 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'(x) \cdot y_j'(x) = 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'(x) \cdot y_j''(x) = 0 \\ \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'(x) \cdot y_j^{(n-1)}(x) = f(x) \end{array} \qquad (2.4)$$

Acesta este un sistem liniar cu necunoscute funcţiile $C_1'(x), C_2'(x), .., C_n'(x)$. Are determinantul diferit de zero, deci are soluţie unică. Se rezolvă sistemul, apoi se integreaza funcţiile $C_j'(x)$, $\overline{j=1,n}$ şi obţinem

$$C_j(x) = \int C_j'(x)dx + K_j \quad , \quad \overline{j=1,n}$$

În final se obţin soluţiile ecuaţiei diferenţiale neomogene (2) de forma

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} (\int C_j'(x)dx + K_j) \cdot y_j(x) \quad , \quad K_1, K_2, ..., K_n \in \mathbb{R}$$

■

Comentariu. Întreg algoritmul porneşte de la ipoteza că rădăcinile polinomului caracteristic se pot determina foarte uşor. În caz contrar se apelează la algoritmi de calcul numeric.

Exemple. (ecuaţii liniare omogene)
Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale

a) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$ b) $y'''(x) + 3y''(x) + 3y'(x) + y(x) = 0$

c) $y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$ d) $y'''(x) + y(x) = 0$

Soluţii.
a) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$
Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordin 2, deci mulţimea soluţiilor este un spaţiu vectorial de dimensiune 2.
Este deci suficient să determinăm 2 soluţii liniar independente, pentru a descrie toate soluţiile.
Pasul I.1 Rezolvăm ecuaţia caracteristică asociată

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Pasul I.2 Asociem 2 soluţii liniar independente corespunzătoare

$$y_1(x) = e^{2x} \quad \text{şi} \quad y_2(x) = e^x$$

Orice soluţie se scrie ca o combinaţie liniară a acestor 2 soluţii.
Deci soluţia "generală" este

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$\blacksquare$

b) $\qquad y'''(x) + 3y''(x) + 3y'(x) + y(x) = 0$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordin 3, deci mulţimea soluţiilor este un spaţiu vectorial de dimensiune 3.

Este deci suficient să determinăm 3 soluţii liniar independente, pentru a descrie toate soluţiile.

Pasul I.1 Rezolvăm ecuaţia caracteristică asociată

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda+1)^3 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

Pasul I.2 Asociem 3 soluţii liniar independente corespunzătoare

$$y_1(x) = e^{-x} \quad , \quad y_2(x) = xe^{-x} \qquad \text{şi} \qquad y_1(x) = x^2 e^{-x}$$

Orice soluţie se scrie ca o combinaţie liniară a acestor 3 soluţii.

Deci soluţia "generală" este

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_3(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} \quad , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

$\blacksquare$

c) $\qquad y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordin 2, deci mulţimea soluţiilor este un spaţiu vectorial de dimensiune 2.

Este deci suficient să determinăm 2 soluţii liniar independente, pentru a descrie toate soluţiile.

Pasul I.1 Rezolvăm ecuaţia caracteristică asociată

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Folosim $\operatorname{Re}(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-1}{2}$ şi $\operatorname{Im}(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pasul I.2 Asociem 2 soluţii liniar independente corespunzătoare

$$y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \quad \text{şi} \quad y_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

Orice soluţie se scrie ca o combinaţie liniară a acestor 2 soluţii.

Deci soluţia "generală" este

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$\blacksquare$

d) $\qquad y'''(x) + y(x) = 0$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordin 3, deci mulţimea soluţiilor este un spaţiu vectorial de dimensiune 3.

Este deci suficient să determinăm 3 soluţii liniar independente, pentru a descrie toate soluţiile.

Pasul I.1 Rezolvăm ecuaţia caracteristică asociată

$$\lambda^3 + 1 = 0$$

$$\lambda^3 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{şi} \quad \lambda_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

Folosim $\operatorname{Re}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}$ şi $\operatorname{Im}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pasul I.2 Asociem 3 soluţii liniar independente corespunzătoare

$$y_1(x) = e^{-x} \quad , \quad y_2(x) = e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \quad \text{şi} \quad y_1(x) = e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

Orice soluţie se scrie ca o combinaţie liniară a acestor 3 soluţii.
Deci soluţia "generală" este

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_3(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_3e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \quad , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

■

Exemplu. (ecuaţii neomogene)
Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^{2x} \quad (*)$$

Soluţie.
Pasul I. Rezolvăm mai întâi ecuaţia diferenţială omogenă.

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0$$

Mulţimea soluţiilor este un spaţiu vectorial de dimensiune 2.
Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -2 \ , \ \lambda_2 = -3$$

Se asociază 2 soluţii liniar independente

$$y_1(x) = e^{-2x} \quad , \quad y_2(x) = e^{-3x}$$

Orice soluţie a ecuaţiei omogene se scrie

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} \ , \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Pasul II. Folosind metoda variaţiei constantelor determinăm soluţiile ecuaţiei neomogene (*)

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = e^{2x}$$

căutându-le de forma

$$y(x) = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-3x}$$

Derivatele funcţiilor necunoscute $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ verifică sistemul liniar (2.4)

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)e^{-3x} = 0 \\ C_1'(x)(e^{-2x})' + C_2'(x)(e^{-3x})' = e^{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)e^{-3x} = 0 \\ -2C_1'(x)e^{-2x} - 3C_2'(x)e^{-3x} = e^{2x} \end{cases}$$

Rezolvăm acest sistem liniar. De exemplu înmulţim prima ecuaţie cu 2 şi adunăm la a doua ecuaţie, obţinem

$$\begin{cases} 2C_1'(x)e^{-2x} + 2C_2'(x)e^{-3x} = 0 \\ -2C_1'(x)e^{-2x} - 3C_2'(x)e^{-3x} = e^{2x} \end{cases}$$

$$-C_2'(x)e^{3x} = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad C_2'(x) = -e^{-x}$$

înlocuind în prima ecuaţie rezultă

$$C_1'(x)e^{-2x} = -(-e^{-x}e^{-3x}) \quad \Rightarrow \quad C_1'(x) = e^{-4x}$$

Integrând obţinem

$$C_1(x) = \int e^{-4x}dx = \tfrac{-1}{4}e^{-4x} + K_1$$
$$C_2(x) = \int -e^{-x}dx = e^{-x} + K_2$$

Soluţiile ecuaţiei diferenţiale (neomogene) sunt deci de forma

$$y(x) = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-3x} = [\frac{-1}{4}e^{-4x} + K_1]e^{-2x} + [e^{-x} + K_2]e^{-3x}$$

$$y(x) = \frac{-1}{4}e^{-6x} + K_1 e^{-2x} + e^{-4x} + K_2 e^{-3x} \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

■

3.5 Problema Cauchy asociată unei ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi.

Teoremă. (**de existenţă şi unicitate**)
Problema Cauchy asociată undei ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

$$\begin{cases} a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot y^{''} + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x) \quad (2.2) \\ y(x_0) = b_0 \ , \ y'(x_0) = b_1 \ , \ y''(x_0) = b_2 \ , \ ... \ , \ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \quad \text{condiţii iniţiale} \end{cases}$$

are o unică soluţie, pentru orice condiţii iniţiale, adică orice $x_0 \in \mathbb{R}$ şi orice $b_0, b_1, ..., b_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie.
Ideea demonstraţiei este simplă. Se arată că un anume sistem algebric liniar are determinantul diferit de zero, deci are soluţie unică.

Cazul i) dacă $f(x) = 0$, adică ecuaţia diferenţială este omogenă. În acest caz soluţiile sunt de forma

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot y_j(x)$$

Condiţiile iniţiale formează un sistem algebric liniar

$$\begin{cases} y(x_0) = b_0 \\ y'(x_0) = b_1 \\ y''(x_0) = b_2 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases} \quad (2.5)$$

cu necunoscute $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{R}$ şi care are determinantul diferit de zero (nu demonstrăm), deci are soluţie unică, ceea ce înseamnă că există un unic sistem de constante $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că soluţia corespunzătoare

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot y_j(x)$$

verifică condiţiile iniţiale.

Cazul ii) dacă $f(x) \neq 0$, adică ecuaţia diferenţială nu este omogenă. În acest caz soluţiile sunt de forma

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} (\int C_j'(x)dx + K_j) \cdot y_j(x)$$

Condiţiile iniţiale formează un sistem algebric liniar

$$\begin{cases} y(x_0) = b_0 \\ y'(x_0) = b_1 \\ y''(x_0) = b_2 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases}$$

cu necunoscute cele n constante (de integrare) $K_1, K_2, ..., K_n$ şi care are determinantul diferit de zero (nu demonstrăm), deci are soluţie unică, ceea ce înseamnă că există un unic sistem de constante $K_1, K_2, ..., K_n \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că soluţia corespunzătoare

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} (\int C_j'(x)dx + K_j) \cdot y_j(x)$$

verifică condiţiile iniţiale.

■

Algoritm de rezolvare a problemei Cauchy.

Se rezolvă mai întâi ecuaţia diferenţială şi apoi se determină constantele de integrare K_j , $j = \overline{1,n}$ rezolvând sistemul liniar obţinut din condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} y(x_0) = b_0 \\ y'(x_0) = b_1 \\ y''(x_0) = b_2 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases}$$

Este necesară calcularea derivatelor de ordin $1, 2, ..., (n-1)$ pentru

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} (\int C_j'(x)dx + K_j) \cdot y_j(x)$$

ceea ce necesită un efort deosebit.le

În principiu se utilizează diferite programe de calcul dedicate sau algoritmi de rezolvare numerică aproximativă a soluţiilor.

Comentariu. Pot exista situaţii reale în care "condiţiile iniţiale" să arate complet diferit. Nu mai sunt neapărat "iniţiale" ci de exemplu

$$\begin{cases} y(x_1) = b_1 \\ y(x_2) = b_2 \\ y(x_3) = b_2 \\ ... \\ y(x_n) = b_n \end{cases} \qquad (2.6)$$

adică se cunosc (se măsoară) valorile funcţiei $y = y(x)$ în n puncte diferite $x_1, x_2, ..., x_n$. Pentru a obţine o unică soluţie care verifică acest tip de condiţii, este necesar ca sistemul algebric liniar format (2.6) să aibe soluţie unică, ceea ce se întâmplă numai dacă are determinantul diferit de zero.

Faptul că cele n soluţii $y_1, y_2, ..., y_n$ sunt liniar independente, asigură că doar sistemul (2.5) (corespunzător unor condiţii iniţiale "standard") are determinantul diferit de zero.

Pentru sistemul liniar (2.6) nu mai există o asemenea "garanţie", deci nu mai există neapărat soluţie unică.

Pentru alte tipuri de condiţii "iniţiale" este posibil

(a) să nu existe soluţie pentru problema Cauchy

(b) să existe mai multe soluţii

(c) să existe soluţie unică.

Exemplu.

1. Să se determine soluţia problemei Cauchy (ecuaţie liniară omogenă)

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0 \quad , \quad \text{cu} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Soluţie.

Rezolvăm mai întâi ecuaţia diferenţială. Mulţimea soluţiilor este un spaţiu vectorial de dimensiune 2.

Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = -2$$

Se asociază 2 soluţii liniar independente

$$y_1(x) = e^{-x} \quad , \quad y_2(x) = e^{-2x}$$

Orice soluţie se scrie

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

care trebuie să verifice şi condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Calculăm derivata

$$y'(x) = [C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}]' = C_1(-1)e^{-x} + C_2(-2)e^{-2x}$$

Deci sistemul algebric liniar corespunzător este

$$\begin{cases} y(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = 1 \\ y'(0) = C_1(-1)e^0 + C_2(-2)e^0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 2C_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

adunăm cele două ecuaţii şi obţinem $C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 1$.

Deci soluţia problemei Cauchy este

$$y(x) = e^{-x}$$

■

2. Să se determine soluţia problemei Cauchy (ecuaţie liniară neomogenă)

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^x \quad (*) \ , \quad \text{cu} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Soluţie.

Pasul I. Rezolvăm mai întâi ecuaţia diferenţială omogenă.

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$$

Mulţimea soluţiilor este un spaţiu vectorial de dimensiune 2.

Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = 3$$

Se asociază 2 soluţii liniar independente

$$y_1(x) = e^{2x} \quad , \quad y_2(x) = e^{3x}$$

Orice soluţie a ecuaţiei omogene se scrie

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Pasul II. Folosind metoda variaţiei constantelor determinăm soluţiile ecuaţiei neomogene (*)

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^x$$

căutându-le de forma

$$y(x) = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{3x}$$

Derivatele funcţiilor necunoscute $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ verifică sistemul liniar (6)

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)e^{3x} = 0 \\ C_1'(x)(e^{2x})' + C_2'(x)(e^{3x})' = e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)e^{3x} = 0 \\ 2C_1'(x)e^{2x} + 3C_2'(x)e^{3x} = e^x \end{cases}$$

Rezolvăm acest sistem liniar. De exemplu înmulţim prima ecuaţie cu -2 şi adunăm la a doua ecuaţie, obţinem

$$\begin{cases} -2C_1'(x)e^{2x} - 2C_2'(x)e^{3x} = 0 \\ 2C_1'(x)e^{2x} + 3C_2'(x)e^{3x} = e^x \end{cases}$$

$$C_2'(x)e^{3x} = e^x \quad \Rightarrow \quad C_2'(x) = e^{-2x}$$

înlocuind în prima ecuaţie rezultă

$$C_1'(x)e^{2x} = -e^{-2x}e^{3x} \quad \Rightarrow \quad C_1'(x) = -e^{-x}$$

Integrând obţinem

$$C_1(x) = \int -e^{-x}dx = e^{-x} + K_1$$
$$C_2(x) = \int e^{-2x}dx = -\tfrac{1}{2}e^{-2x} + K_2$$

Soluţiile ecuaţiei diferenţiale (neomogene) sunt deci de forma

$$y(x) = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{3x} = [e^{-x} + K_1]e^{2x} + [-\frac{1}{2}e^{-2x} + K_2]e^{3x}$$

$$y(x) = e^{x} + K_1e^{2x} - \frac{1}{2}e^{x} + K_2e^{3x} \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{x} + K_1e^{2x} + K_2e^{3x} \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

În fine, ca să fie soluţie a problemei Cauchy, mai trebuie să verifice şi condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Calculăm derivata

$$y'(x) = [\frac{1}{2}e^{x} + K_1e^{2x} + K_2e^{3x}]' = \frac{1}{2}e^{x} + 2K_1e^{2x} + 3K_2e^{3x}$$

înlocuind în condiţiile iniţiale obţinem sistemul algebric liniar

$$\begin{cases} 1 = y(0) = \frac{1}{2} + K_1 + K_2 \\ -1 = y'(0) = \frac{1}{2} + 2K_1 + 3K_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} K_1 + K_2 = \frac{1}{2} \\ 2K_1 + 3K_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

care se rezolvă şi rezultă

$$K_2 = -\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad K_1 = 3$$

În final soluţia problemei Cauchy este

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{x} + K_1e^{2x} + K_2e^{3x} = \frac{1}{2}e^{x} + 3e^{2x} - \frac{5}{2}e^{3x}$$

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{x} + 3e^{2x} - \frac{5}{2}e^{3x}$$

■

3. Să se determine soluţia problemei Cauchy

$$y^{iv}(x) - 5y'''(x) + 12y''(x) - 3y'(x) + y(x) = -7 \quad , \quad \text{cu} \quad \begin{cases} y(1) = -7 \\ y'(1) = 0 \\ y''(1) = 0 \\ y'''(1) = 0 \end{cases}$$

Soluţie.
Ordinul este 4, relativ mare. Ecuaţia carateristică

$$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 12\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

nu are soluţii numere raţionale şi nici nu pare posibil de rezolvat relativ uşor.

Se poate încerca "ghicirea" soluţiei, dacă e posibil (şi are formă simplă).

Dacă reuşim, atunci conform unei teoreme anterioare aceasta este soluţia problemei Cauchy (soluţia este unică).

Faptul că în condiţiile initiale derivatele sunt zero în $x = 1$, poate "sugera" ideea că soluţia este eventual o funcţie constantă (sau un polinom de grad mic).

Faptul că toate derivatele sunt zero doar în punctul $x = 1$ nu înseamnă că aceste derivate sunt zero şi în orice alt punct.

Totuşi putem încerca să vedem dacă ecuaţia admite ca soluţie o funcţie constantă

$$y = y(x) = K \quad \Rightarrow \quad y' = y'' = y''' = y^{iv} = 0$$

deci înlocuind în ecuatia diferenţială obţinem

$$y^{iv}(x) - 5y'''(x) + 12y''(x) - 3y'(x) + y(x) = -7 \quad \Leftrightarrow \quad 0 - 0 + 0 - 0 + K = -7$$

deci funcţia constantă $y(x) = -7$ verifică ecuaţia diferenţială şi în mod evident verifică şi condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} y(1) = -7 \\ y'(1) = 0 \\ y''(1) = 0 \\ y'''(1) = 0 \end{cases}$$

Prin urmare aceasta este soluţia problemei Cauchy enunţate.
■

Scopul acestui ultim exemplu, este de a remarca unicitatea soluţiei unei probleme Cauchy.

3.6 Ecuaţii diferenţiale liniare de tip Euler

În cele ce urmează prezentăm un tip special de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi neconstanţi.

Definiţie. Ecuaţiile diferenţiale liniare de ordin n de forma

$$a_n x^n \cdot y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 \cdot y^{''} + a_1 x \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x) \quad (6)$$

se numesc **ecuaţii de tip Euler.** Aici $a_n \neq 0$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

Leonhard Paul Euler (1707 – 1783) matematician şi fizician eleveţian şi-a petrecut viaţa în Germania şi Rusia. Cu contribuţii majore, este considerat unul din marii matematicieni din istorie. Introduce teminologia modernă în matematică, în special în analiză matematică. De exemplu noţiunea de "funcţie", notaţia actuală pentru funcţiile trigonometrice, simbolurile $\sum$, π , i (numere complexe) e (numărul lui Euler) Este renumit pentru lucrări în mecanică, dinamica fluidelor, optică, astronomie.

Pentru $x > 0$, facem schimbarea de variabilă $x = e^t$ şi de funcţie $z(t) = y(e^t)$ şi obţinem o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi, care se rezolvă conform algoritmului corespunzător.

Pentru $x < 0$ se procedează analog punând $x = -e^t$. Nu determinăm soluţii definite pe intervale ce conţin punctul 0 .Să facem primele calcule, derivând succesiv (ca funcţii compuse) obţinem

$$z'(t) = [y(e^t)]' = y'(e^t)e^t \quad , \text{ deci } \quad y' = y'(e^t) = \frac{z'(t)}{e^t}$$

$$[y'(e^t)] = \left[\frac{z'(t)}{e^t}\right]' \quad \Leftrightarrow \quad y''(e^t)e^t = \frac{z''e^t - z'e^t}{e^{2t}} \quad , \text{deci } \ y'' = \frac{z'' - z'}{e^{2t}}$$

şi aşa mai departe obţinem derivatele de ordin superior.

Rezolvăm ecuaţia diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi cu soluţiile $z = z(t)$. Apoi revenim la schimbarea de variabilă $t = \ln x$ şi de funcţie pentru a obţinem soluţia ecuaţiei de tip Euler de forma

$$y = y(x) = z(\ln x)$$

Exemple.

E 1. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$

Soluţie.
Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de tip Euler.
Pentru $x > 0$, facem schimbarea de variabilă $x = e^t$ şi de funcţie $z(t) = y(e^t)$ şi obţinem

$$z'(t) = [y(e^t)]' = y'(e^t)e^t \quad , \text{ deci } \quad y' = y'(e^t) = \frac{z'(t)}{e^t}$$

$$[y'(e^t)] = \left[\frac{z'(t)}{e^t}\right]' \quad \Leftrightarrow \quad y''(e^t)e^t = \frac{z''(t)e^t - z'(t)e^t}{e^{2t}} \quad , \text{deci } \ y'' = \frac{z''(t) - z'(t)}{e^{2t}}$$

Înlocuind în ecuaţia diferenţială de tip Euler, obţinem o ecuaţie diferenţială liniară de ordin 2

$$(e^t)^2 \frac{z''(t) - z'(t)}{e^{2t}} - e^t \frac{z'(t)}{e^t} + z(t) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad z''(t) - z'(t) - z'(t) + z(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0$$

Rezolvăm acestă ecuaţie diferenţială conform algoritmului descris mai înainte.
Pasul I.1 Asociem ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Pasul I.2 Asociem 2 soluţii liniar independente corespunzătoare

$$z_1(t) = e^t \quad \text{şi} \quad z_2(t) = te^t$$

Orice soluţie se scrie ca o combinaţie liniară a acestor 2 soluţii.
Deci soluţia "generală" a ecuaţiei liniare este

$$z(t) = C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) = C_1 e^t + C_2 te^t \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Soluţia ecuaţiei de tip Euler se obţine revenind la schimbarea de variabilă $t = \ln x$, $x = e^t$

$$y(x) = z(\ln x) = C_1 x + C_2 x \ln x \quad , x > 0 \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

■

E 2. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3$$

<u>Soluţie</u>.
Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară neomogenă de tip Euler.
Pentru $x > 0$, facem schimbarea de variabilă $x = e^t$ şi de funcţie $z(t) = y(e^t)$. Derivatele sunt exact cele deja calculate la exemplul 1.

$$y' = y'(e^t) = \frac{z'(t)}{e^t} \quad , \quad y'' = \frac{z''(t) - z'(t)}{e^{2t}}$$

Înlocuind în ecuaţia diferenţială de tip Euler, obţinem o ecuaţie diferenţială liniară (neomogenă) de ordin 2

$$(e^t)^2 \frac{z''(t) - z'(t)}{e^{2t}} - 2e^t \frac{z'(t)}{e^t} + 2z(t) = (e^t)^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad z''(t) - z'(t) - 2z'(t) + 2z(t) = e^{3t} \quad \Leftrightarrow \quad z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = e^{3t}$$

Rezolvăm acestă ecuaţie diferenţială liniară conform algoritmului descris mai înainte.
Pasul I. rezolvăm mai întâi ecuaţia liniară omogenă

$$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = 0$$

Pasul I.1 Asociem ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 2$$

Pasul I.2 Asociem 2 soluţii liniar independente corespunzătoare

$$z_1(t) = e^t \quad \text{şi} \quad z_2(t) = e^{2t}$$

Orice soluţie se scrie ca o combinaţie liniară a acestor 2 soluţii.
Deci soluţia "generală" a ecuaţiei liniare omogene este

$$z(t) = C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Pasul II. Folosind metoda variaţiei constantelor determinăm soluţiile ecuaţiei neomogene

$$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = e^{3t}$$

căutându-le de forma

$$z(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{2t}$$

Derivatele acestor funcţii necunoscute $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ verifică sistemul liniar (6)

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{2t} = 0 \\ C_1'(t)(e^t)' + C_2'(t)(e^{2t})' = e^{3t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{2t} = 0 \\ C_1'(t)e^t + 2C_2'(t)e^{2t} = e^{3t} \end{cases}$$

Rezolvăm acest sistem liniar. De exemplu înmulţind prima ecuaţie cu -1 , adunând la a doua ecuaţie obţinem

$$\begin{cases} -C_1'(t)e^t - C_2'(t)e^{2t} = 0 \\ C_1'(t)e^t + 2C_2'(t)e^{2t} = e^{3t} \end{cases}$$

$$C_2'(t)e^{2t} = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad C_2'(t) = e^t$$

înlocuind în prima ecuaţie rezultă

$$C_1'(t)e^t = -e^t e^{2t} = -e^{2t}$$

Integrăm şi obţinem

$$C_1(t) = \int -e^{2t} dt = \tfrac{-1}{2} e^{2t} + K_1$$
$$C_2(t) = \int e^t dt = e^t + K_2$$

Soluţiile sunt deci de forma

$$z(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{2t} = [\frac{-1}{2}e^{2t} + K_1]e^t + [e^t + K_2]e^{2t}$$

$$z(t) = \frac{-1}{2}e^{3t} + K_1 e^t + e^{3t} + K_2 e^{2t} \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

$$z(t) = K_1 e^t + \frac{1}{2}e^{3t} + K_2 e^{2t} \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Soluţia ecuaţiei de tip Euler se obţine revenind la schimbarea de variabilă $t = \ln x \quad , \quad x = e^t$

$$e^{3t} = x^3 \quad , \quad e^{2t} = x^2 \quad ,$$

$$y(x) = z(\ln x) = K_1 x + \frac{1}{2}x^3 + K_2 x^2 \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

■

E 3. Să se determine soluţia problemei Cauchy

$$x^2 y''(x) - 2xy(x) + 2y(x) = x^3 \quad , \quad \text{cu} \quad \begin{cases} y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Soluţie.
Rezolvăm mai întâi ecuaţia diferenţială (de tip Euler)

$$x^2 y''(x) - 2xy(x) + 2y(x) = x^3$$

Conform calculelor din exemplul anterior soluţiile sunt de forma

$$y(x) = z(\ln x) = K_1 x + \frac{1}{2}x^3 + K_2 x^2 \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Apoi mai trebui să verifice şi condiţiile iniţiale. Calculăm derivata

$$y'(x) = K_1 + \frac{3}{2}x^2 + K_2 \cdot 2x$$

Determinăm soluţia problemei Cachy rezolvând sistemul liniar al condiţiilor iniţiale

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 = y(1) = K_1 + \frac{1}{2} + K_2 \\ 0 = y'(1) = K_1 + \frac{3}{2} + K_2 \cdot 2 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} K_1 + K_2 = \frac{3}{2} \\ K_1 + 2K_2 = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad K_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{9}{2}$$

Deci soluţia problemei Cachy este

$$y(x) = \frac{9}{2}x + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$$

■

3.7 Exemple Rezolvate

E 3.7.1 Să se determine $y = y(x)$ soluţia problemei Cauchy

$$y^{(5)}(x) + y^{(4)}(x) + 7y''(x) - y(x) = 0$$

cu condiţiile iniţiale

$$y(2) = 0 \quad , \quad y'(2) = 0 \quad , \quad y''(2) = 0 \quad , \quad y^{(3)}(2) = 0 \quad , \quad y^{(4)}(2) = 0$$

Soluţie.
Ecuaţia diferenţială

$$y^{(5)}(x) + y^{(4)}(x) + 7y''(x) - y(x) = 0$$

este o ecuaţie diferenţială liniară de ordin 5 cu coeficienţi constanţi.
Dacă încercăm să aplicăm algoritmul corespunzător, obţinem un polinom caracteristic de grad 5, iar determinarea rădăcinilor acestuia poate fi dificilă.
Problema Cauchy are soluţie unică.
Prin urmare, dacă reuşim să găsim o soluţie - o funcţie (indiferent prin ce mijloace) care verifică atât ecuaţia diferenţială cât şi condiţiile iniţiale, atunci aceea este soluţia căutată.

Soluţia problemei Cauchy , din condiţiile iniţiale are toate derivatele nule în punctul $x = 2$.
Aceasta nu înseamnă că soluţia este neapărat o funcţie constantă.
Totuşi merită încercat dacă o funcţie constantă $y(x) = C$ pentru orice x , poate fi soluţie.
În mod evident, pentru o funcţie constantă, toate derivatele de orice ordin sunt nule,
deci înlocuind în ecuaţia diferenţială obţinem

$$\underbrace{y^{(5)}(x)}_{0} + \underbrace{y^{(4)}(x)}_{0} + 7\underbrace{y''(x)}_{0} - \underbrace{y(x)}_{C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -C = 0$$

Prin urmare funcţia constantă $y = y(x) = 0$ pentru orice x verifică ecuaţia diferenţială, şi în mod evident şi condiţiile iniţiale.
Deci este soluţia problemei Cauchy.
■

E 3.7.2 Să se determine funcţia $x = x(t)$ care verifică problema Cauchy

$$x'''(t) - 7x''(t) + x'(t) - 7x(t) = 0 \ , \ x(0) = 0 \ , \ x'(0) = 0 \ , \ x''(0) = 1$$

Soluţie.

Ataşăm ecuaţia carateristică

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + \lambda - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda^2+1) - 7(\lambda^2+1) = 0$$

$$(\lambda^2+1)(\lambda-7) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2+1=0 \ \text{ sau } \ \lambda - 7 = 0$$

obţinem rădăcinile

$$\lambda - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 7 \quad , \quad \lambda^2+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = i \quad , \quad \lambda_3 = -i$$

Asociem 3 soluţii liniar independente

$$x_1(t) = e^{7t}$$

$$x_2(t) = \mathrm{Re}\left(e^{it}\right) = \mathrm{Re}(\cos t + i\sin t) = \cos t \quad , \quad x_2(t) = \mathrm{Im}\left(e^{it}\right) = \mathrm{Im}(\cos t + i \sin t) = \sin t$$

Soluţiile ecuaţie diferenţiale sunt de forma

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + C_3x_3(t)$$

$$x(t) = C_1e^{7t} + C_2\cos t + C_3 \sin t$$

Folosim condiţiile iniţiale.
Mai întâi calculăm derivatele

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left[C_1e^{7t} + C_2\cos t + C_3\sin t\right] = C_17e^{7t} - C_2\sin t + C_3\cos t$$

$$x''(t) = [x'(t)] = \frac{d}{dt}\left[C_17e^{7t} - C_2\sin t + C_3\cos t\right] = C_17\cdot 7e^{7t} - C_2\cos t - C_3\sin t$$

Obţinem sistemul liniar

$$\begin{cases} 0 = x(0) = C_1e^{7\cdot 0} + C_2\cos 0 + C_3\sin 0 \\ 0 = x'(0) = C_17e^{7\cdot 0} - C_2\sin 0 + C_3\cos 0 \\ 1 = x''(0) = C_17\cdot 7e^{7\cdot 0} - C_2\cos 0 - C_3\sin 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 7C_1 + C_3 = 0 \\ 49C_1 - C_2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_3 = -7C_1 \\ C_2 = 49C_1 - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 49C_1 - 1 = -C_1 \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{1}{50} \quad , \quad C_2 = -\frac{1}{50} \quad , \quad C_3 = -\frac{7}{50}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \frac{1}{50}e^{7t} - \frac{1}{50}\cos t - \frac{7}{50}\sin t$$

■

E 3.7.3 Să se determine mărimile scalare $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ care verifică problema Cauchy

$$x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = e^t \ , \ x(0) = 1 \ , \ x'(0) = 0$$

Soluţie.
Este o ecuaţie liniară de ordin 2. Folosim algoritmul corespunzător.
Pas I   Se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată

$$x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 0$$

Ecuaţia carateristică ataşată este

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 3 = 4$$

Rădăcinile sunt

$$\lambda_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$$

Asociem două soluţii liniar independente

$$x_1(t) = e^{3t} \quad \text{şi} \quad x_2(t) = e^t$$

Soluţiile ecuaţiei liniare omogene sunt de forma

$$x(t) = C_1 \cdot x_1(t) + C_2 \cdot x_2(t) = C_1 \cdot e^{3t} + C_2 \cdot e^t$$

Pas II Folosim metoda variaţiei constantelor.
Căutăm soluţii pentru ecuaţia neomogenă $x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = e^t$
de forma

$$x(t) = C_1(t) \cdot e^{3t} + C_2(t) \cdot e^t$$

Deivatele funcţiilor necunoscute $C_1'(t)$, $C_2'(t)$ verifică sistemul liniar

$$\begin{cases} C_1'(t) \cdot e^{3t} + C_2'(t) \cdot e^t = 0 \\ C_1'(t) \cdot \left(e^{3t}\right)' + C_2'(t) \cdot \left(e^t\right)' = e^t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_2'(t) \cdot e^t = -C_1'(t) \cdot e^{3t} \\ C_1'(t) \cdot 3e^{3t} + C_2'(t) \cdot e^t = e^t \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$C_2'(t) = -C_1'(t) \cdot e^{2t} \quad \Rightarrow \quad C_1'(t) \cdot 3e^{3t} + \left[-C_1'(t) \cdot e^{2t}\right] \cdot e^t = e^t$$

$$C_1'(t) \cdot 2e^{3t} = e^t \quad \Rightarrow \quad C_1'(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$C_1(t) = \int C_1'(t)dt = \int \frac{1}{2}e^{-2t}dt = \frac{1}{2}\int e^{-2t}dt = \frac{1}{2}\frac{e^{-2t}}{-2} + K_1 = -\frac{1}{4}e^{-2t} + K_1$$

$$C_2'(t) \cdot e^t = -C_1'(t) \cdot e^{3t} = -\frac{1}{2}e^{-2t} \cdot e^{3t} = -\frac{1}{2}e^t \quad \Rightarrow \quad C_2'(t) = -\frac{1}{2}$$

$$C_2(t) = \int C_2'(t)dt = \int \frac{-1}{2}dt = -\frac{1}{2}t + K_2$$

Souţia ecuaţiei neomogene este

$$x(t) = \left(-\frac{1}{4}e^{-2t} + K_1\right) \cdot e^{3t} + \left(-\frac{1}{2}t + K_2\right) \cdot e^t$$

Calculăm derivata

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left[\left(-\frac{1}{4}e^{-2t} + K_1\right) \cdot e^{3t} + \left(-\frac{1}{2}t + K_2\right) \cdot e^t\right] = \frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{4}e^t + K_1 \cdot e^{3t} - \frac{1}{2}t \cdot e^t + K_2 \cdot e^t\right]$$

$$x'(t) = \left[-\frac{1}{4}e^t + K_1 \cdot 3e^{3t} - \frac{1}{2} \cdot e^t - \frac{1}{2}t \cdot e^t + K_2 \cdot e^t\right]$$

Folosim condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

$$1 = x(0) = \left(-\frac{1}{4}e^{-2\cdot 0} + K_1\right) \cdot e^{3\cdot 0} + \left(-\frac{1}{2} \cdot 0 + K_2\right) \cdot e^0$$

$$0 = x'(0) = \left[-\frac{1}{4}e^0 + K_1 \cdot 3e^{3\cdot 0} - \frac{1}{2} \cdot e^0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot e^0 + K_2 \cdot e^0\right]$$

obţinem sistemul liniar

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} + K_1 + K_2 = 1 \\ \left[-\frac{1}{4} + K_1 \cdot 3 - \frac{1}{2} + K_2\right] = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} K_2 = \frac{3}{4} - K_1 \\ K_1 \cdot 3 + \frac{3}{4} - K_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$2K_1 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad K_1 = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{3}{4} - K_1 = \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \left(-\frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}\right) \cdot e^{3t} + \left(-\frac{1}{2}t + \frac{5}{4}\right) \cdot e^t$$

■

E 3.7.4 Să se determine soluţia $y = y(x)$ problemei Cauchy

$$x^2 y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0 \quad , \quad \text{cu condiţiile iniţiale } \; y(1) = 0 \quad , \quad y'(1) = 2$$

Soluţie.
Avem o ecuaţie de tip Euler.
Condiţiile iniţiale sunt în punctul $x = 1$, deci căutăm soluţii în vecinătatea lui 1 .
Putem presupune deci că $x > 0$.
Facem schimbarea de variabilă $x = e^t$, $y(x) = y(e^t) = z(t)$
Calculăm derivatele

$$\frac{d}{dt}\left[y(e^t)\right] = z'(t) \quad \Leftrightarrow \quad y'(e^t)\cdot e^t = z'(t) \quad \Rightarrow \quad y'(e^t) = \frac{z'(t)}{e^t}$$

Apoi derivăm încă odată

$$\frac{d}{dt}\left[\, y'(e^t)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{z'(t)}{e^t}\right] \quad \Leftrightarrow \quad y''(e^t)\cdot e^t = \frac{z''(t)\cdot e^t - z'(t)\cdot e^t}{(e^t)^2}$$

$$y''(e^t) = \frac{z''(t) - z'(t)}{(e^t)^2}$$

Înlocuim în ecuţia difereţială şi obţinem

$$(e^t)^2 \cdot \frac{z''(t) - z'(t)}{(e^t)^2} - e^t \cdot \frac{z'(t)}{e^t} - z(t) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$z''(t) - z'(t) - z'(t) - z(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z''(t) - 2z'(t) - z(t) = 0$$

Aceasta este o ecuaţie liniară de ordin 2.
Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1) = 8$$

Rădăcinile sunt

$$\lambda_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$$

Ataşăm 2 soluţii liniar independente

$$z_1(t) = e^{(1+\sqrt{2})t} \quad \text{şi} \quad z_1(t) = e^{(1-\sqrt{2})t}$$

Soluţiile ecuaţiei liniare sunt de forma

$$z(t) = C_1\cdot z_1(t) + C_2\cdot z_2(t) = C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})t}$$

Revenim la schimbarea de variabilă $x = e^t$, $t = \ln x$
şi obţinem soluţiile ecuaţiei diferenţiale iniţiale

$$y(x) = z(\ln x) = C_1 e^{(1+\sqrt{2})\ln x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})\ln x}$$

$$e^{(1+\sqrt{2})\ln x} = \left[e^{\ln x}\right]^{(1+\sqrt{2})} = [x]^{(1+\sqrt{2})} \quad , \quad e^{(1-\sqrt{2})\ln x} = \left[e^{\ln x}\right]^{(1-\sqrt{2})} = [x]^{(1-\sqrt{2})}$$

Deci

$$y(x) = C_1 x^{(1+\sqrt{2})} + C_2 x^{(1-\sqrt{2})}$$

derivata este

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left[C_1 x^{(1+\sqrt{2})} + C_2 x^{(1-\sqrt{2})}\right] = C_1(1+\sqrt{2})x^{(1+\sqrt{2})-1} + C_2(1-\sqrt{2})x^{(1-\sqrt{2})-1}$$

$$y'(x) = C_1(1+\sqrt{2})x^{\sqrt{2}} + C_2(1-\sqrt{2})x^{-\sqrt{2}}$$

Folosim condiţiile iniţiale $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$

$$0 = y(1) = C_1 \cdot 1^{(1+\sqrt{2})} + C_2 \cdot 1^{(1-\sqrt{2})}$$

$$2 = y'(1) = C_1(1+\sqrt{2}) \cdot 1^{\sqrt{2}} + C_2(1-\sqrt{2}) \cdot 1^{-\sqrt{2}}$$

obţinem sistemul

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1(1+\sqrt{2}) + C_2(1-\sqrt{2}) = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_2 = -C_1$$

$$C_1(1+\sqrt{2}) - C_1(1-\sqrt{2}) = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot 2\sqrt{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} x^{(1+\sqrt{2})} - \frac{1}{\sqrt{2}} x^{(1-\sqrt{2})}$$

■

4 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordin 1

Definiţie. Prin **sistem liniar de ecuatii diferenţiale** (de ordinul I) se înţelege un sistem liniar (scris în formă "vectorială" sau "matricială")

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t) \qquad (*)$$

unde $X(t) = (x_1(t), x_2(t), ...x_n(t))$, $X'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), ...x_n'(t))$, $B(t) = (b_1(t), b_2(t), ...b_n(t))$, iar $A(t)$ este matrice pătrată $n \times n$,

matricea "coeficienţilor", coeficienţii fiind elementele matricii $a_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & ... & a_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

cu $a_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$ şi $b_i(t)$ funcţii de clasă C^1, definite pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}$.

Putem scrie sistemul în şi forma

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ ... \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij}(t) & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ ... \\ b_n(t) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

sau în mod "explicit"

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t) \cdot x_1(t) + a_{12}(t) \cdot x_2(t) + ... + a_{1n}(t) \cdot x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t) \cdot x_1(t) + a_{22}(t) \cdot x_2(t) + ... + a_{2n}(t) \cdot x_n(t) + b_2(t) \\ .... \\ x_n'(t) = a_{n1}(t) \cdot x_1(t) + a_{n2}(t) \cdot x_2(t) + ... + a_{nn}(t) \cdot x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \qquad (*)$$

Prin urmare, derivatele de ordin 1, sunt combinaţii liniare ale funcţiilor.

Prin **soluţie a sistemului** se înţelege un sistem de funcţii (mărimi scalare) $x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)$ de clasă C^1, care verifică sistemul (*).

Problema Cauchy constă în sistemul liniar de ecuaţii diferenţiale (*) împreună cu condiţii iniţiale :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t) & (*) \\ \begin{pmatrix} x_1(t_0) = \beta_1 \\ x_2(t_0) = \beta_2 \\ ... \\ x_n(t_0) = \beta_n \end{pmatrix} & (CI) \end{cases}$$

Prin **soluţie a Problemei Cauchy** se înţelege un sistem de funcţii (mărimi scalare) $x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)$ de clasă C^1, care verifică sistemul (*) şi condiţiile iniţiale (CI).

Din punct de vedere fizic, condiţiile iniţiale reprezintă valori măsurate ale mărimilor scalare $x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)$ în t_0,

la "momentul "t_0" dacă t reprezintă "timpul". t_0 poate fi efectiv un moment "iniţial" , sau moment "final" în evoluţia unui sistem.

Esenţial este faptul că cele n mărimi scalare sunt măsurate toate în acelaşi moment, sau acelaşi punct t_0.

4.1 Sisteme de ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi omogene şi neomogene. Metoda variaţiei constantelor

În cele ce urmează ne vom limita la a descrie algoritmul de rezolvare a sistemelor liniare cu coeficienţi constanţi.

Un sistem liniar are "**coeficienţi constanţi**", dacă funcţiile $a_{ij}(t) \overset{not}{=} a_{ij}$ sunt constante.

Fie deci un sistem liniar cu coeficienţi constanţi.

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B(t) \quad (**)$$

Pasul I. Se rezolvă sistemul liniar omogen asociat

$$X'(t) = A \cdot X(t)$$

Să observăm că aceste soluţii sunt de fapt de clasă C^∞ (adică indefinit derivabile).

Observaţie. Mulţimea soluţiilor pentru un sistem liniar omogen, formează un spaţiu vectorial de dimensiune n.

Demonstraţie.

Să observăm că $X(t) = 0$ pentru orice t este soluţie.

Altfel spus sistemul de funcţii nule

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)) = (0, 0, ..., 0)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = 0 \\ \quad ... \\ x_n(t) = 0 \end{cases} \quad \text{pentru orice } t$$

verifică sistemul.

Acest fapt este total nerelevant din punct de vedere fizic, deoarece descrie situaţia în care mărimile scalare $x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)$ sunt constant nule.

Dar funcţia nulă este elementul neutru pentru un spaţiu vectorial de funcţii.

Considerăm două soluţii ale sistemului $X = X(t)$ şi $Y = Y(t)$, deci

$$X'(t) = A \cdot X(t) \;\; \text{şi} \quad Y'(t) = A \cdot Y(t)$$

adunând cele două relaţii obţinem

$$X'(t) + Y'(t) = A \cdot X(t) + A \cdot Y(t) \quad \Leftrightarrow \quad [X(t) + Y(t)]' = A \cdot [X(t) + Y(t)]$$

deci suma soluţiilor este de asemenea o soluţie a sistemului.

Înmulţind cu un scalar obţinem

$$\alpha X'(t) = \alpha A \cdot X(t) \quad \Leftrightarrow \quad [\alpha X]'(t) = A \cdot [\alpha X(t)]$$

deci şi $\alpha X(t)$ este de asemenea soluţie a sistemului. Deci mulţimea soluţiilor pentru un sistem liniar omogen este un spaţiu vectorial.

Nu prezentăm şi demonstraţia faptului că acest spaţiu vectorial are dimensiune n.

■

Prin urmare sunt suficiente n soluţii liniar independente pentru a descrie toate soluţiile unui sistem liniar omogen.

Forma de scriere "vectorială" este asemănătoare cu o ecuaţie liniară

$$x'(t) = a \cdot x(t) \ , \ \text{cu}$$

ale cărei soluţii se obţin astfel

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a \quad \Rightarrow \quad \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int a dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x(t)| = at + k \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = e^{at} \cdot c \ \ , \ \ c = \pm e^k$$

Acest fapt duce la ideea de a căuta soluţii pentru sistemul liniar omogen de formă "exponenţială"

$$X(t) = e^{\lambda t} v \ \ , \ v \text{ vector din } \mathbb{R}^n$$

Derivând obţinem

$$X'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} v\right) = \lambda e^{\lambda t} v$$

înlocuind în sistemul liniar obţinem

$$X'(t) = A \cdot X(t) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda e^{\lambda t} v = A \cdot \left(e^{\lambda t} v\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda t} \lambda v = e^{\lambda t} (A \cdot v) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda v = (A \cdot v)$$

deoarece $e^{\lambda t} \neq 0$.
Ultima relaţie obţinută $A \cdot v = \lambda v$ reprezintă în algebra liniară, faptul că
- v este vector propriu pentru matricea A (dacă $v \neq 0$)
- λ este valoare proprie pentru matricea A

Rescriem acestă relaţie în forma

$$(A - \lambda I) v = 0 \ \ , \ \ I \text{ este matricea unitate}$$

Reprezintă un sistem liniar algebric, matricea sistemului este $A - \lambda I$. Discuţia unui astfel de sistem algebric este cunoscută.
- sistemul algebric are unica soluţie $v = 0$ dacă şi numai dacă $\det(A - \lambda I) \neq 0$
- sistemul algebric are soluţii nenule $v \neq 0$ dacă şi numai dacă $\det(A - \lambda I) = 0$

Prin urmare funcţii de forma $X(t) = e^{\lambda t} v$ sunt soluţii pentru sistemul liniar omogen de ecuaţii diferenţiale (**) dacă şi numai dacă
- λ este soluţie pentru ecuaţia $\det(A - \lambda I) = 0$
- v este soluţie a sistemului liniar algebric $(A - \lambda I) v = 0$

În continuare descriem cum se obţin n soluţii liniar independente. (metoda vectorilor şi valorilor proprii).
Iată principalele etape.
1. <u>Se determină valorile proprii ale matricii A</u> rezolvând ecuaţia $\det(A - \lambda I) = 0$,
$\det(A - \lambda I)$ este un polinom de grad n , deci are n rădăcini (reale sau complexe).
Polinomul are coeficienţi reali, deci rădăcinile complexe sunt conjugate două câte două.
Fie $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ aceste valori proprii (rădăcini reale sau complexe).
2. Pentru fiecare <u>valoare proprie reală de ordin 1 (simplă)</u> $\lambda \in \mathbb{R}$
- se determină o <u>soluţie a sistemului algebric $(A - \lambda I) v = 0$</u>
  adică un vector propriu $v \in \mathbb{R}^n$
- se asociază soluţia

$$X(t) = e^{\lambda t} v$$

3. Pentru fiecare <u>valoare proprie complexă ordin 1 (simplă)</u> $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ şi conjugata ei $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$
- se determină o <u>soluţie a sistemului algebric $(A - \lambda I) v = 0$</u>
  adică un vector propriu complex $w \in \mathbb{C}^n$
- se asociază două soluţii

$$X_1(t) = \text{Re}(e^{\lambda t} w) \quad , \quad X_2(t) = \text{Im}(e^{\lambda t} w)$$

4. Pentru fiecare <u>valoare proprie reală</u> $\lambda \in \mathbb{R}$ <u>multiplă de ordin k</u> , se calculează rangul matricii $rang(A - \lambda I)$
i) dacă <u>$n - rang(A - \lambda I) = k$</u> , atunci
- se determină k soluţii liniar independente ale sistemului algebric $\det(A - \lambda I) = 0$
  k vectori proprii liniar independenţi $v_1, v_2, ...v_k \in \mathbb{R}^n$ şi
- se asociază k soluţii liniar independente corespunzătoare

$$X_1(t) = e^{\lambda t} v_1 \ , \ X_2(t) = e^{\lambda t} v_2 \ , \ ... \ , \ X_k(t) = e^{\lambda t} v_k$$

ii) dacă $n - rang(A - \lambda I) < k$, atunci se caută soluţie de forma

$$X(t) = e^{\lambda t} P(t)$$

unde $P(t)$ este polinom de grad $k-1$ cu coeficienţi în $\mathbb{R}^n$.
Faptul că soluţia $X(t) = e^{\lambda t} P(t)$ verifică sistemul $X'(t) = A \cdot X(t)$ înseamnă

$$\lambda e^{\lambda t} P(t) + e^{\lambda t} P'(t) = e^{\lambda t} P(t) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda P(t) + P'(t) = P(t) \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)P(t) + P'(t) = 0$$

Apoi se identifică coeficienţii necunoscuţi şi se obtine un sistem liniar algebric cu $k \cdot n$ necunoscute reale.
Rangul sistemului este $k(n-1)$, deci fie $c_1, c_2, ..., c_k$ necunoscutele secundare.
Se rezolvă sistemul algebric exprimând necunoscutele principale în funcţie de cele secundare şi se rescrie soluţia $X(t)$ în forma

$$X(t) = e^{\lambda t} P(t) = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot X_j(t)$$

Funcţiile $X_j(t)$ obţinute sunt cele k soluţii liniar independente căutate.

5. Pentru fiecare valoare proprie complexă $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ (şi conjugata ei $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$) , multiple de ordin k ,
se calculează rangul $rang(A - \lambda I)$, apoi
i) dacă $n - rang(A - \lambda I) = \dim(\ker(A - \lambda I) = k$, atunci se pot determina k vectori liniari independenţi $w_1, w_2, ...w_k \in \mathbf{C}^n$ şi
se asociază $2k$ soluţii liniar independente corespunzătoare

$$X_1(t) = \mathrm{Re}(e^{\lambda t} w_1) \ , \ X_2(t) = \mathrm{Re}(e^{\lambda t} w_2) \ , \ ... \ , \ X_k(t) = \mathrm{Re}(e^{\lambda t} v_k)$$
$$Y_1(t) = \mathrm{Im}(e^{\lambda t} w_1) \ , \ Y_2(t) = \mathrm{Im}(e^{\lambda t} w_2) \ , \ ... \ , \ Y_k(t) = \mathrm{Im}(e^{\lambda t} w_k)$$

ii) dacă $\dim(\ker(A - \lambda I)) < k$, atunci se procedează exact ca pentru rădăcini reale multiple, adica se caută soluţii de forma

$$Y(t) = e^{\lambda t} P(t)$$

unde însă $P(t)$ este polinom de grad $k-1$ cu coeficieni în $\mathbb{C}^n$,
se identifică coeficienţii, se rezolvă sistemul liniar algebric rezultat, obţinând k necunoscute secundare complexe, se rescrie soluţia în funcţie de necunoscutele secundare

$$Y(t) = e^{\lambda t} P(t) = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot Y_j(t)$$

şi în final se obţin $2k$ soluţii liniar independente $\mathrm{Re}(Y_j(t))$, $\mathrm{Im}(Y_j(t))$, $j = \overline{1,k}$

6. În final soluţia "generală" se scrie ca o combinaţie liniară a tuturor soluţiilor obţinute anterior

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot X_j(t)$$

Pasul II. Se aplică metoda variaţiei constantelor pentru a determină soluţiile sistemului nemogen (**) iniţial, şi anume se caută soluţii de forma

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) \cdot X_j(t)$$

care înlocuite în (**) produc sistemul liniar algebric

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t) \cdot X_j(t) = B(t)$$

cu necunoscute $c_j'(t)$, $j = \overline{1,n}$, rescris în forma

$$c_1'(t) \begin{pmatrix} \\ X_1(t) \end{pmatrix} + c_1'(t) \begin{pmatrix} \\ X_2(t) \end{pmatrix} + ... + c_1'(t) \begin{pmatrix} \\ X_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ ... \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

se rezolvă sistemul (ca un sistem algebric)
se integrează functiile $c_j'(t)$ obţinute

$$c_j(t) = \int c_j'(t)dt + K_j$$

soluţia finală se scrie

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) \cdot X_j(t)$$

Nu mai ramane decat să menţionăm **problema Cauchy** ataşată unui sistem liniar

$$\begin{array}{lr} X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t) & (*) \\ X_1(t_0) = \beta_1 \ , X_2(t_0) = \beta_2 \ , \ldots \ , X_n(t_0) = \beta_n & \text{(CI)} \end{array}$$

pentru care se rezolvă sistemul liniar, iar apoi din condiţiile iniţiale (CI) se determină constantele (de integrare) $K_j \ , j = \overline{1,n}$.

Exemple.

1. Să se determine funcţiile $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ care verifică problema Cauchy, definită de sistemul liniar

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) - z(t) \\ y'(t) = y(t) - x(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) - z(t) \end{cases}$$

şi de condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $z(0) = 3$

Soluţie.
Sistemul de ecuaţii diferenţiale are coeficienţi constanţi, aplicăm algoritmul descris mai înainte.
Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se determină valorile proprii ale matricii A rezolvând ecuaţia $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A-\lambda I) = 0 \ \Leftrightarrow \ \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ -(\lambda-1)^2(\lambda+1) - 2 - (\lambda-1) - 2(-1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\lambda-1)^2(\lambda+1) + \lambda + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ (\lambda+1)(-\lambda^2 + 2\lambda - 1 + 1) = 0$$

valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$
Determinăm 3 soluţii liniar independente.
Determinăm câte un vector propriu corespunzător fiecărei valori proprii,
adică un vector $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ care verifică $Av = \lambda v \ \Leftrightarrow \ (A - \lambda I)v = 0$
Pentru $\lambda = 0$, determinăm soluţia sistemului liniar algebric $(A - 0I)v = 0$,
unde $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, obţinem sistemul

$$Av = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

adunând primele două ecuaţii obţinem $y = 0$, iar din ultima ecuaţie $x = z = \alpha$
Deci vectorii proprii sunt $v = (x, y, z) = (\alpha, 0, \alpha) = \alpha(1, 0, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
în particular, pentru $\alpha = 1$ obţinem un vector propriu $v_1 = (1, 0, 1)$
se asociază soluţia (în acest caz o funcţie care este constantă)

$$X_1(t) = e^{\lambda t} v_1 = e^{0t}(1, 0, 1) = (1, 0, 1)$$

Pentru $\lambda = 2$, determinăm soluţia sistemului liniar algebric $(A - 2I)v = 0$, unde $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, obţinem sistemul

$$(A-2I)=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -x-2y-z=0 \\ -x-y+z=0 \\ x-3z=0 \end{cases}$$

adunând primele două ecuaţii obţinem $-2x-3y=0 \Rightarrow \; y=-\frac{2}{3}x$, iar din ultima ecuaţie $x=3z=3\alpha$
Deci vectorii propri sunt $v=(x,y,z)=(3\alpha,-2\alpha,\alpha)=\alpha(3,-2,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$
în particular pentru $\alpha=1$ obţinem un al doilea vector propriu $v_2=(3,-2,1)$ şi
se asociază soluţia

$$X_2(t)=e^{\lambda t}v_2=e^{2t}(3,-2,1)$$

Pentru $\lambda=-1$, determinăm soluţia sistemului liniar algebric $(A-(-1)I)v=0 \;\Leftrightarrow\; (A+I)v=0$
unde $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, obţinem sistemul

$$(A+I)=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2x-2y-z=0 \\ -x+2y+z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

din ultima ecuaţie $x=0$, iar din prima ecuaţie obţinem $z=-2y$, $y=\alpha$
Deci vectorii propri sunt $v=(x,y,z)=(0,\alpha,-2\alpha)=\alpha(0,1,-2)$, $\alpha\in\mathbb{R}$
în particular pentru $\alpha=1$ obţinem un al treilea vector propriu $v_3=(0,1,-2)$ şi
se asociază soluţia

$$X_3(t)=e^{\lambda t}v_3=e^{-t}(0,1,-2)$$

În final soluţia ”generală” se scrie ca o combinaţie liniară a tuturor soluţiilor obţinute anterior

$$X(t)=\sum_{j=1}^{3}c_j\cdot X_j(t) \quad\Leftrightarrow\quad X(t)=c_1\cdot(1,0,1)+c_2\cdot e^{2t}(3,-2,1)+c_3\cdot e^{-t}(0,1,-2)$$

sau scriind vectorii "pe coloană"

$$X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Deci soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale sunt

$$\begin{aligned} x(t)&=c_1+3c_2e^{2t}+c_3\cdot 0=c_1+3c_2e^{2t} \\ y(t)&=c_1\cdot 0+c_2(-2e^{2t})+c_3e^{-t}=c_2(-2e^{2t})+c_3e^{-t} \\ z(t)&=c_1+c_2e^{2t}+c_3(-2e^{-t}) \end{aligned}$$

Acum ţinând seama de condiţiile iniţiale obţinem sistemul liniar algebric

$$\begin{aligned} 1&=x(0)=c_1+3c_2e^{2\cdot 0} \\ -1&=y(0)=c_2(-2e^{2\cdot 0})+c_3e^{-0} \\ 3&=z(0)=c_1+c_2e^{2\cdot 0}+c_3(-2e^{-0}) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c_1+3c_2=1 \\ -2c_2+c_3=-1 \\ c_1+c_2-2c_3=3 \end{cases}$$

Din prima ecuaţie $2c_1=1-3c_2$, din a doua ecuaţie $c_3=-1+2c_2$
înlocuim în ultima eciaţie $1-3c_2+c_2-2(-1+2c_2)=3$
obţinem $c_2=0$, $c_1=1$, $c_3=-1$
Soluţia problemei Cauchy este

$$\begin{aligned} x(t)&=1 \\ y(t)&=-e^{-t} \\ z(t)&=1+2e^{-t} \end{aligned}$$

■

2. Să se determine funcţiile $x = x(t)$, $y = y(t)$, care verifică sistemul liniar de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + t^2 \\ y'(t) = x(t) - y(t) + t \end{cases}$$

<u>Soluţie.</u>
<u>Pasul I</u> Rezolvăm mai întâi sistemul liniar omogen asociat

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se determină valorile proprii ale matricii A rezolvând ecuaţia $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1 + 1 = 0$$

Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, sau $\lambda = 0$ este rădăcină dublă
În acest caz $rang(A - 0I)) = rangA = 1 < 2$, unde 2 este ordinul rădăcinii.
Deci se caută soluţie de forma

$$X(t) = e^{0t}P(t) = (a,b)t + (c,d) = (at, bt) + (c,d) = (at + c, bt + d)$$

unde $P(t)$ este polinom de grad $= 2 - 1$ cu coeficienţi în $\mathbb{R}^2$.
Înlocuind în sistem obţinem

$$X'(t) = AX(t) \quad \Leftrightarrow \quad P'(t) = AP(t) \quad \Leftrightarrow \quad (a,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at + c \\ bt + d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a,b) = (at + c - bt - d, at + c - bt - d)$$

Rezultă sistemul liniar algebric

$$\begin{cases} at + c - bt - d = a \\ at + c - bt - d = b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a-b)t + c - d = a \\ (a-b)t + c - d = b \end{cases}$$

Identificăm coeficienţii şi obţinem alt sistem liniar algebric

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ c - d = a \\ a - b = 0 \\ c - d = b \end{cases}$$

Rezultă $a = b = \alpha$, $c - d = \alpha$, deci soluţiile sunt $a = b = \alpha$, $c = \beta$, $d = \beta - \alpha$,
iar soluţiile pentru sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$X(t) = P(t) = (a,b)t + (c,d) = (\alpha,\alpha)t + (\beta, \beta - \alpha) = \alpha \left[\underbrace{(1,1)t + (0,-1)} \right] + \beta \left[\underbrace{(1,1)} \right]$$

Deci asociem două soluţii

$$X_1(t) = (1,1)t + (0,-1) = (t, t-1) \quad , \quad X_2(t) = (1,1)$$

Soluţia generală a sistemului omogen se scrie ca o combinaţie liniară

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X(t) = c_1 \left[(1,1)t + (0,-1) \right] + c_2 (1,1)$$

Pasul II Folosim metoda variaţiei constantelor, căutăm soluţii de forma

$$X(t) = c_1(t) \cdot X_1(t) + c_2(t) \cdot X_2(t)$$

care înlocuite în sistemul neomogen produc sistemul liniar algebric

$$c_1'(t) \cdot X_1(t) + c_2'(t) \cdot X_2(t) = B(t) = (t^2, t)$$

$$c_1'(t) \cdot \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} + c_2'(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) = t^2 \\ c_1'(t) \cdot (t-1) + c_2'(t) = t \end{cases}$$

Scădem ecuaţiile şi obţinem

$$c_1'(t) = t^2 - t \quad \Rightarrow \quad c_2'(t) = t^2 - tc_1'(t) = t^2 - t^3 + t^2 = 2t^2 - t^3$$

Integrăm şi obţinem

$$c_1(t) = \int (t^2 - t)dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + K_1$$

$$c_2(t) = \int (2t^2 - t^3)dt = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + K_2$$

Soluţiile sistemului liniar de ecuaţii diferenţiale sunt

$$X(t) = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + K_1\right] \cdot X_1(t) + \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + K_2\right] \cdot X_2(t)$$

sau

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + K_1\right] \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} + \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + K_2\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

separând $x(t)$ şi $y(t)$ obţinem

$$x(t) = t\left[\frac{1}{3}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + K_1 t\right] + \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + K_2\right]$$

$$y(t) = (t-1)\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + K_1\right] + \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + K_2\right]$$

■

3. Să se determine soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$$

cu condiţiile iniţiale $x(0) = 3$, $y(0) = -4$

Soluţie.
Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Se determină valorile proprii ale matricii A rezolvând ecuaţia $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1 + 2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda^2 + 1 = 0$$

Rădăcinile sunt complexe $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$
Se determină un vector propriu complex $w \in \mathbb{C}^2$, $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}^2$, $w = (a + ib, c + id)$

$$(A - \lambda I)w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix} = 0$$

Obţinem un sistem liniar algebric

$$\begin{cases} (1-i)(a+ib)-(c+id)=0 \\ 2(a+ib)+(-1-i)(c+id)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c+i(-a+b-d)=0 \\ 2a-c+d+i(2b-c-d)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b-c=0 \\ -a+b-d=0 \\ 2a-c+d=0 \\ 2b-c-d=0 \end{cases}$$

Rangul sistemului este 2 , folosim doar ultimele două ecuaţii

$$\begin{cases} c-d=2a \\ c+d=2b \end{cases}$$

le adunăm şi obţinem $c=a+b$, $d=b-a$, deci $w=(a+ib,a+b+i(b-a))=(a,a+b)+i(b,b-a)$
Pentru $a=1$ şi $b=1$ obţinem $w=(1,2)+i(1,0)=u+iv$
şi se asociază două soluţii

$$X_1(t)=\mathrm{Re}(e^{\lambda t}w)=\mathrm{Re}\left(e^{it}(u+iv)\right)=\mathrm{Re}\left[(\cos t+i\sin t)(u+iv)\right]=\cos t\cdot u-\sin t\cdot v$$

$$X_2(t)=\mathrm{Im}(e^{\lambda t}w)=\mathrm{Im}\left(e^{it}(u+iv)\right)=\mathrm{Im}\left[(\cos t+i\sin t)(u+iv)\right]=\cos t\cdot v+\sin t\cdot u$$

$$X_1(t)=\cos t\cdot u-\sin t\cdot v=\cos t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\sin t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t-\sin t\\2\cos t\end{pmatrix}$$

$$X_2(t)=\cos t\cdot v+\sin t\cdot u=\cos t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sin t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t+\sin t\\2\sin t\end{pmatrix}$$

Soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale este o combinaţie liniară

$$X(t)=c_1X_1(t)+c_2X_2(t)$$

sau

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\cos t-\sin t\\2\cos t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\cos t+\sin t\\2\sin t\end{pmatrix}$$

separând $x(t)$ şi $y(t)$ obţinem

$$x(t)=c_1\left(\cos t-\sin t\right)+c_2(\cos t+\sin t)$$
$$y(t)=c_1 2\cos t+c_2 2\sin t$$

Folosind condiţiile iniţiale obţinem sistemul liniar algebric

$$3=x(0)=c_1\left(\cos 0-\sin 0\right)+c_2(\cos 0+\sin 0)$$
$$-4=y(0)=c_1 2\cos 0+c_2 2\sin 0$$

$$\begin{cases} c_1+c_2=3 \\ 2c_1=-4 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1=-2 \quad \Rightarrow \quad c_2=5$$

Iar soluţia problemei Cauchy este

$$x(t)=-2\left(\cos t-\sin t\right)+5(\cos t+\sin t)=3\cos t+7\sin t$$
$$y(t)=-2\cdot 2\cos t+5\cdot 2\sin t=-4\cos t+10\sin t$$

■
exemplu
Să se determine soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} x'(t)=2x(t)+y(t) \\ y'(t)=x(t)+2y(t) \end{cases} \quad , \quad \text{cu} \quad x(0)=1\ ,\ y(0)=2$$

Soluţie.
Scriem matricea sistemului liniar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

calculăm valorile proprii

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

rădăcinile sunt reale $\lambda = 1$ şi $\lambda = 3$ şi de ordinul 1.
Determinăm vectorii proprii corespunzători
Pentru $\lambda = 1$

$$(A - 1 \cdot I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obţinem sistemul liniar

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b = -a$$

deci vectorii proprii sunt de forma $v = (a, -a)$, alegem vectorul $v_1 = (1, -1)$
Procedăm analog şi pentru $\lambda = 3$

$$(A - 3 \cdot I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obţinem sistemul liniar

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b = a$$

deci vectorii proprii sunt de forma $v = (a, a)$, alegem vectorul $v_2 = (1, -1)$
se asociază soluţiile (liniar independente) scrise vectorial

$$X_1(t) = e^t v_1 \ , \quad X_2(t) = e^{3t} v_2$$

soluţia sistemul este o combinaţie liniară

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) = C_1 e^t v_1 + C_2 e^{3t} v_2$$

sau scris explicit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sau

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$$
$$y(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}$$

constantele C_1, C_2 se determină din condiţiile iniţiale $x(0) = 2$, $y(0) = 2$

$$1 = x(0) = C_1 e^0 + C_2 e^{3 \cdot 0} = C_1 + C_2$$
$$2 = y(0) = -C_1 e^0 + C_2 e^{3 \cdot 0} = -C_1 + C_2$$

deci

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$$

care duce la $C_2 = 3/2$ şi $C_1 = -1/2$
deci soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \frac{-1}{2} e^t + \frac{3}{2}_2 e^{3t}$$
$$y(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{3}{2} e^{3t}$$

4.2 Metoda reducerii la o ecuatie liniara de ordin superior

Observaţie.
Orice sistem de ecuaţii diferenţiale liniare (de ordin 1) cu coeficienţi constanţi, se poate "reduce" la o ecuaţie liniară de ordin superior cu coeficienţi constanţi.

Exemplu. Să rezolvăm problema Cauchy anterioară

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases} \quad \text{cu} \;\; x(0) = 3 \;,\; y(0) = -4$$

Din prima ecuaţie $y(t) = x(t) - x'(t)$, înlocuind în a doua ecuatie obţinem

$$[x(t) - x'(t)]' = 2x(t) - [x(t) - x'(t)]$$

$$x'(t) - x''(t) = x(t) + x'(t) \quad \Leftrightarrow \quad x''(t) + x(t) = 0$$

Care se poate rezolva conform algoritmului corespunzător.
Polinomul caracteristic este $\lambda^2 + 1 = 0$, rădăcinile sunt $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$,
deci se asociază două soluţii liniar independente

$$x_1(t) = \mathrm{Re}(e^{it}) = \cos t \quad , \quad x_2(t) = \mathrm{Im}(e^{it}) = \sin t$$

iar soluţia generală este $x(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t$
rezultă şi soluţia pentru $y(t) = x(t) - x'(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t - (-k_1 \sin t + k_2 \cos t) = (k_1 - k_2) \cos t + (k_1 + k_2) \sin t$
Acum folosim condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} 3 &= x(0) = k_1 \cos 0 + k_2 \sin 0 \\ -4 &= y(0) = (k_1 - k_2) \cos 0 + (k_1 + k_2) \sin 0 \end{aligned}$$

$$k_1 = 3 \quad , \quad -4 = 3 - k_2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 7$$

Deci soluţia problemei Cauchy este

$$\begin{cases} x(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t = 3 \cos t + 7 \sin t \\ y(t) = (k_1 - k_2) \cos t + (k_1 + k_2) \sin t = -4 \cos t + 10 \sin t \end{cases}$$

Am obţinut deci exact aceeaşi soluţie ca în exemplul 3.
■

4.3 Exemple Rezolvate

3. Să se determine mărimile scalare $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ care verifică problema Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases} \quad , \;\; x(0) = 1 \;,\; y(0) = 1$$

Soluţie.
Pas I
Se determină valorile proprii ale matricii A rezolvând ecuaţia $\det(A - \lambda I) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 9$$

Valorile proprii sunt

$$\lambda_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2} = \frac{5+3}{2} = 4 \quad , \quad \lambda_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

Determinăm 3 soluţii liniar independente.
Determinăm câte un vector propriu corespunzător fiecărei valori proprii,
adică un vector $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ care verifică $Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$
Pentru $\lambda = 4$, determinăm soluţia sistemului liniar algebric $(A - 4I)v = 0$, obţinem sistemul

$$(A - 4I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-4 & 2 \\ 1 & 2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y$$

Deci vectorii proprii sunt de forma $v = (x, y) = (2y, y)$
în particular, pentru $y = 1$ obţinem un vector propriu $v_1 = (2, 1)$
se asociază soluţia corespunzătoare

$$X_1(t) = e^{\lambda t} v_1 = e^{4t}(2, 1)$$

Pentru $\lambda = 1$, determinăm soluţia sistemului liniar algebric $(A - 1 \cdot I)v = 0$, obţinem sistemul

$$(A - 1 \cdot I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y$$

Deci vectorii proprii sunt de forma $v = (x, y) = (-y, y)$
în particular, pentru $y = 1$ obţinem un vector propriu $v_2 = (-1, 1)$
se asociază soluţia corespunzătoare

$$X_2(t) = e^{\lambda t} v_2 = e^{t}(-1, 1)$$

În final soluţia "generală" se scrie ca o combinaţie liniară a tuturor soluţiilor obţinute anterior

$$X(t) = \sum_{j=1}^{2} C_j \cdot X_j(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(t) = C_1 \cdot e^{4t}(2, 1) + C_2 \cdot e^{t}(-1, 1)$$

sau scriind vectorii "pe coloană"

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

Deci soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale sunt

$$x(t) = C_1 \cdot 2e^{4t} - C_2 \cdot e^{t}$$
$$y(t) = C_1 \cdot e^{4t} + C_2 \cdot e^{t}$$

Acum ţinând seama de condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $y(0) = 1$
obţinem sistemul liniar algebric

$$1 = x(0) = C_1 \cdot 2e^{4 \cdot 0} - C_2 \cdot e^{0}$$
$$1 = y(0) = C_1 \cdot e^{4 \cdot 0} + C_2 \cdot e^{0}$$

$$\begin{cases} 2C_1 - C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_2 = -C_1 \Rightarrow 2C_1 - C_2 = 2C_1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{3} \ , \ C_2 = -\frac{1}{3}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \frac{2}{3}e^{4t} + \frac{1}{3}e^{t}$$
$$y(t) = \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^{t}$$

■

5. Să se determine mărimile scalare $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ care verifică problema Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) + e^{t} \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) + e^{4t} \end{cases} , \ x(0) = 1 \ , \ y(0) = 2$$

Soluţie.

Este un sistem liniar neomogen.
Matricial se scrie

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

Pas I
Se rezolvă sistemul liniar omogen asociat.

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

Obsevăm că este exact sistemul rezolvat deja la problema 3.
Preluăm soluţiile deja obţinute.

$$x(t) = C_1 \cdot 2e^{4t} - C_2 \cdot e^t$$
$$y(t) = C_1 \cdot e^{4t} + C_2 \cdot e^t$$

Pas II
Folosim metoda variaţiei constantelor.
Căutăm soluţii ale sistemului liniar neomogen de forma

$$x(t) = C_1(t) \cdot 2e^{4t} - C_2(t) \cdot e^t$$
$$y(t) = C_1(t) \cdot e^{4t} + C_2(t) \cdot e^t$$

Care înlocuite în sistemul neomogen duc la sistemul algebric,
cu $C_1'(t)$, $C_2'(t)$ ca necunoscute

$$\begin{pmatrix} C_1'(t) \cdot 2e^{4t} - C_2'(t) \cdot e^t \\ C_1'(t) \cdot e^{4t} + C_2'(t) \cdot e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1'(t) \cdot 2e^{4t} - C_2'(t) \cdot e^t = e^t \\ C_1'(t) \cdot e^{4t} + C_2'(t) \cdot e^t = e^{4t} \end{cases}$$

adunând cele două ecuaţii obţinem

$$C_1'(t) \cdot 3e^{4t} = e^t + e^{4t} \quad \Rightarrow \quad C_1'(t) = \frac{1}{3}\left(e^{-3t} + 1\right)$$

$$C_2'(t) \cdot e^t = e^{4t} - C_1'(t) \cdot e^{4t} \quad \Rightarrow \quad C_2'(t) = e^{3t} - C_1'(t) \cdot e^{3t} = e^{3t} - \frac{1}{3}\left(e^{-3t} + 1\right) \cdot e^{3t}$$

$$C_2'(t) = \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{1}{3}$$

Calculăm antiderivatele (integrăm)

$$C_1(t) = \int C_1'(t)dt = \int \frac{1}{3}\left(e^{-3t} + 1\right)dt = -\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t + K_1$$

$$C_2(t) = \int C_2'(t)dt = \int \left(\frac{2}{3}e^{3t} - \frac{1}{3}\right)dt = \frac{2}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}t + K_2$$

Soluţia sistemului neomogen este

$$x(t) = \left(-\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t + K_1\right) \cdot 2e^{4t} - \left(\frac{2}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}t + K_2\right) \cdot e^t$$
$$y(t) = \left(-\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t + K_1\right) \cdot e^{4t} + \left(\frac{2}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}t + K_2\right) \cdot e^t$$

Folosim condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $y(0) = 2$

obţinem sistemul liniar algebric

$$1 = x(0) = \left(-\frac{1}{9}e^{-3\cdot 0} + \frac{1}{3}\cdot 0 + K_1\right)\cdot 2e^{4\cdot 0} - \left(\frac{2}{9}e^{3\cdot 0} - \frac{1}{3}\cdot 0 + K_2\right)\cdot e^0$$
$$2 = y(0) = \left(-\frac{1}{9}e^{-3\cdot 0} + \frac{1}{3}\cdot 0 + K_1\right)\cdot e^{4\cdot 0} + \left(\frac{2}{9}e^{3\cdot 0} - \frac{1}{3}\cdot 0 + K_2\right)\cdot e^0$$

$$-\frac{2}{9} + 2K_1 - \frac{2}{9} - K_2 = 1$$
$$-\frac{1}{9} + K_1 + \frac{2}{9} + K_2 = 2$$

adunând cele două ecuaţii obţinem

$$-\frac{3}{9} + 3K_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{10}{9} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{9} + \frac{10}{9} + \frac{2}{9} + K_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{7}{9}$$

Soluţia problemei Cauchy (sistemul liniar neomogen cu condiţiile iniţiale) este

$$x(t) = \left(-\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t + \frac{10}{9}\right)\cdot 2e^{4t} - \left(\frac{2}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}t + \frac{7}{9}\right)\cdot e^t$$
$$y(t) = \left(-\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t + \frac{10}{9}\right)\cdot e^{4t} + \left(\frac{2}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}t + \frac{7}{9}\right)\cdot e^t$$

■

Ecuaţii Diferenţiale - Întrebări "Test"

Iată câteva întrebări simple, cu care puteţi "verifica" capacitatea de a vă "orienta" asupra ecuaţiilor diferenţiale. Puteţi adăuga şi alte întrebări ce vi se par relevante.

1. Câte soluţii distincte poate avea o ecuaţie diferenţială ?
2. Câte soluţii distincte poate avea o problemă Cauchy ?
3. Ce semnificaţie fizică au condiţiile iniţale ?
4. O ecuaţie liniară omogenă are ca soluţie o funcţie constantă. Ce puteţi spune despre acea constantă ?
5. O ecuaţie liniară de ordin 2. Polinomul caracteristic are două rădăcini complexe conjugate.
   $\lambda = a + ib$, $\overline{\lambda} = a - ib$ câte soluţii liniar independente se asociază acestor rădăcini ?
6. Ce dimensiune are spaţiul (vectorial) al soluţiilor unei ecuaţii liniare omogene de ordin 4 ?
7. Ce dimensiune are spaţiul (vectorial) al soluţiilor unei ecuaţii liniare neomogene de ordin 2 ?
8. Puteţi determina (fără calcule multe) soluţia problemei Cauchy $x^{(21)}(t) - x(t) = 23$
   cu condiţiile iniţiale $x(1) = -23$, $x^{(k)}(1) = 0$ pentru orice $k = \overline{1, 20}$?
9. Rezolvând ecuaţia diferenţială $x''(t) + 4x(t) = 0$ prin două metode diferite obţinem
   - prin metoda 1 soluţia generală $x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
   - prin metoda 2 $x(t) = k_1(\cos 2t + \sin 2t) + k_2(\cos 2t - \sin 2t)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$
   aparent cele două familii de soluţii sunt diferite. Da sau Nu ?
10. Dacă un polinom caracteristic are o rădăcină complexă $\lambda = a + ib$, atunci are ca rădăcină şi conjugata $\overline{\lambda} = a - ib$
    din ce motiv ?
11. De câte ori se foloseşte polinomul caracteristic şi rădăcinile sale, pentru orice rădăcină complexă $\lambda = a + ib$ se asociază două soluţii liniar independente.
    Dar şi conjugata $\overline{\lambda} = a - ib$ este rădăcină pentru polinomul caracteristic (care are coeficienţi reali)
    de ce nu se asociază două soluţii liniar independente şi pentru rădăcina $\overline{\lambda} = a - ib$?
12. Considerăm ecuaţia diferenţială $x'(t) = x(t) + \cos^2(x'(t))$.
    Este adevărat că funcţiile $x(t) = at + b$ sunt soluţii pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$?
13. Considerăm sistemul liniar de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$$

funcţiile $x(t) = t^{32} + \cos 5t$, $y(t) = t^{23} - \sin 5t$ pot fi soluţii ale sistemului ? (calculaţi doar derivatele)

14. Forma generală e unei ecuaţii de tip Riccati este $x'(t) = A(t) \cdot x^2(t) + B(t) \cdot x(t) + C(t)$
ce tip de ecuaţie obţinem dacă $C(t) = 0$ pentru orice t ?
15. Considerăm problema Cauchy definită de ecuaţia diferenţială $x''(t) + 5x(t) = 0$
şi condiţiile iniţiale $x(0) = 1, x'(0) = 1, x''(0) = 5$, câte soluţii are această problemă ?
16. În curs am rezolvat sistemul liniar $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$

i) mai întâi cu algoritmul specific sistemelor liniare şi am obţinut soluţia generală de forma

$$(*) \quad \begin{cases} x(t) = c_1 (\cos t - \sin t) + c_2(\cos t + \sin t) \\ y(t) = c_1 2 \cos t + c_2 2 \sin t \end{cases} \quad \text{cu} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ii) apoi am redus sistemul al o ecuaţie liniară de ordin 2 şi rezolvând-o cu algoritmul spefic acestor ecuaţii am obţinut soluţia generală de forma

$$(**) \quad \begin{cases} x(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t \\ y(t) = (k_1 - k_2) \cos t + (k_1 + k_2) \sin t \end{cases} \quad \text{cu} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

sunt aceste două familii de soluţii diferite ?

Întrebarea este legitimă. Ar trebui ca soluţiile să nu depindă de metoda de rezolvare.

3.1 Analiză Fourier - Serii Trigonometrice (Serii Fourier)

(Analiza semnalelor periodice folosind metoda lui Fourier)

Cuprins.

1. **Introducere "istorică"**

Foarte multe fenomene sunt descrise folosind funcţii (semnale) periodice: comportamentul particulelor elementare din fizica cuantică, curentul electric alternativ, toate fenomenele ondulatorii "clasice" (lumina din spectrul vizibil, ultraviolete, infraroşii, sunete în spectrul audibil, ultrasunete, infrasunete, unde radio), procesarea semnalelor, procesarea imaginilor, analiza vibraţiilor.

Oscilatorul armonic are ecuaţia de mişcare $\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$, $k > 0$.

Această ecuaţie diferenţială (rezolvată în capitolul Ecuaţii Diferenţiale) are soluţiile de forma

$$x(t) = C_1 \cos(t\sqrt{k}) + C_2 \sin(t\sqrt{k}) \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Acesta este doar un exemplu care arată cum funcţiile "trigonometrice" sin , cos pot descrie un fenomen periodic.

În esenţă metoda (ideea) lui Fourier constă în reprezentarea unui semnal periodic ca suma unei serii de funcţii trigonometrice.

Jean Baptiste Joseph Fourier $(1768 - 1830)$ matematician şi fizician francez, iniţiator al studiului seriilor trigonometrice. Este creditat şi cu descoperirea efectului de seră. În cinstea sa, seriile trigonometrice sunt numite şi serii Fourier, la fel şi transformarea "Fourier".

Această metodă este numită şi principiul "suprapunerii efectelor" sau "descompunerii unui semnal în armonice".

Fourier a folosit această metodă pentru a rezolva "ecuaţia căldurii"

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$$

o ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale care descrie distribuţia căldurii $u = u(x, y, t)$ într-un domeniu din spaţiu descris de coordonate (x, y, z) şi în functie de timp t . Înaintea lucrărilor lui Fourier, se cunoşteau soluţii pentru ecuatia căldurii doar în cazuri particulare în care sursa de căldură se comporta ca o undă decrisă de o funcţie sin sau cos. Ideea lui Fourier a fost de a descrie o sursă de căldură complicată, prin suprapunerea efectelor (o combinaţie linară) produse de unde simple sin şi cos. Această suprapunere sau combinaţie liniară a dus la serii trigonometrice (serii Fourier).

Deşi iniţial ideea a fost concepută numai pentru rezolvarea ecuaţiei căldurii, s-a putut aplica cu succes la o mare diversitate de probleme din matematică şi fizică, a dus la o adevărată "revoluţie" în matematică, determinând matematicienii să reexamineze fundamentele multor teorii, de exemplu teoria integrării Lebesgue.

I. Pe de o parte unei funcţii (semnal continuu) i se asociază seria Fourier (o serie trigonometrică)

Se pune problema de a determina condiţii în care seria Fourier converge (punctual sau uniform) la funcţia din care provine.

II. Pe de altă parte se pot considera serii trigonometrice arbitrare (nu neapărat asociate unei funcţii)

Se pune problema de a determina condiţii în care

o serie trigonometrică converge punctual, uniform, în norma $\|\|_2$ de spaţiu Hilbert.

Pentru a înţelege utilizarea seriilor trigonometrice în studiul semnalelor periodice, este necesară prezentarea contextului "natural" şi anume spaţii Hilbert cu bază numărabilă (sau spaţii Hilbert separabile). De asemenea sunt necesare noţiuni elementare despre convergenţă punctuală şi convergenţă uniformă pentru şiruri de funcţii.

Am considerat util să adăugăm scurte referinţe (sursa: wikipedia) asupra unor matematicieni, al căror nume este legat în mod tradiţional de anumite rezultate menţionate în text. Totuşi aceste denumiri au valoare mai mult "istorică". Am încercat denumiri alternative, care să sugereze mai clar ideea fundamentală a rezultatelor.

În plus faţă de un text "tradiţional", am adăugat în expunere comentarii pentru a justifica ideile, ca fiind cât se poate de naturale, practice.

2. Ingrediente tehnice - funcţii

Funcţii Periodice

Începem cu cateva detalii privind funcţiile periodice.

Definiţie. O funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte **periodică**, dacă există un număr $T \neq 0$ astfel încât

$$f(x + T) = f(x) \text{ pentru orice } x \in D \quad \text{şi} \quad x + T \in D$$

Numărul T se numeşte **perioadă** pentru funcţie.

Dacă există o cea mai mică perioadă $T > 0$, atunci aceasta se numeşte **perioadă principală**.

Observaţie.

În general se consideră $T > 0$. O asemenea presupunere nu este însă neapărat necesară.
Este uşor de observat că putem înlocui "x" cu "$x - T$" (evident numai dacă $(x - T) \in D$) şi obţinem

$$f(x) = f(x + x - T) = f(x - T) \text{ pentru orice } x \in D \quad \text{şi} \quad x - T \in D$$

Relaţia obţinută arată ca şi numărul $-T$ este perioadă.
Pentru funcţii periodice definite fără restricţii semnificative $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se constată cu uşurinţă că dacă numărul $T \neq 0$ este perioadă, atunci toţi multiplii acestuia $\{kT\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$ sunt de asemenea perioade.

$$f(x + kT) = f(x) \text{ pentru orice } k \in \mathbb{Z} \text{ şi } x \in \mathbb{R}$$

Observaţie.
i) O funcţie constantă verifică definiţia $f(x + T) = f(x)$ pentru orice x şi orice T , deci este considerată periodică.
Dar nu există o cea mai mică perioadă , de vreme ce orice număr poate fi perioadă. Deci o funcţie constantă nu are perioadă principală.
ii) O funcţie periodică şi continuă (şi neconstantă) are o cea mai mică perioadă.
Nu demonstrăm acest fapt.

Considerăm funcţii periodice $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care sunt şi integrabile.
De exemplu funcţii periodice care sunt şi continue.
Se subînţelege faptul că "integrabilă" înseamnă funcţie integrabilă pe orice interval închis $[a, b] \subset \mathbb{R}$

Observaţie.
Pentru funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodice, cu periodă $T > 0$, integrabile, avem

$$\int_0^T f = \int_T^{2T} f = \int_{2T}^{3T} f = ... = \int_{nT}^{nT+T} f = \int_A^{A+T} f = \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}\ ,\ A \in \mathbb{R}$$

Demonstraţie.
Facem schimbarea de variabilă $y = x - nT \quad \Rightarrow \quad x = y + nT$ şi obţinem

$$\int_{nT}^{nT+T} f(x)dx = \int_0^T \underbrace{f(y + nT)}_{f(y)}dy = \int_0^T f(y)dy$$

Indiferent dacă $A > T$ sau $A < T$, putem scrie

$$\int_A^{A+T} f = \int_A^T f + \int_T^{A+T} f$$

Facem schimbarea de variabilă $y = x - T \quad \Rightarrow \quad x = y + T$ şi obţinem

$$\int_T^{A+T} f(x)dx = \int_0^A \underbrace{f(y + T)}_{f(y)}dy = \int_0^A f(y)dy$$

Adunând obţinem

$$\int_A^{A+T} f = \int_A^T f + \int_T^{A+T} f = \int_A^T f + \int_0^A f = \int_0^T f$$

în particular pentru $A = -\frac{1}{2}T$ obţinem

$$\int_A^{A+T} f = \int_{-\frac{1}{2}T}^{-\frac{1}{2}T+T} f = \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f$$

$\blacksquare$

Funcţiile pare şi impare sunt de asemenea importate. Amintim câteva proprietăţi.

Definiţie. O funcţie $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ sau $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţie "**pară**" , dacă pentru orice x din domeniu

$$f(-x) = f(x)$$

Exemple.

1. Denumirea este justificată de funcţiile de tip "putere" $f(x) = x^{2k}$ ($x^0, x^2, x^4, x^6, ...$) cu exponent număr par.
Acestea sunt în mod evident funcţii pare deoarece $(-x)^{2k} = x^{2k}$
Deci în particular orice funcţie constantă este funcţie pară.

2. Orice polinom cu toţi coeficienţii puterilor impare nuli, este o funcţie pară.

$$1 + x^2 \ , \ 2 - x^4 + 3x^6 \ \ , \ \ x^2 + x^6 - x^{10} + x^{12}$$

3. Suma unei serii de puteri cu toţi coeficienţii puterilor impare nuli, este o funcţie pară.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \text{pentru orice } x \in (-1, 1)$$

Dacă un polinom este funcţie pară, atunci toţi coeficienţii puterilor impare sunt nuli.

Demonstraţie.
Fie $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$. Relaţia $p(x) = p(-x)$ devine în acest caz

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n (-x)^n = p(-x)$$

Puterile pare se simplifică şi obţinem

$$2a_1 x + 2a_3 x^3 + 2a_5 x^5 + ... = 0$$

ceea ce duce la

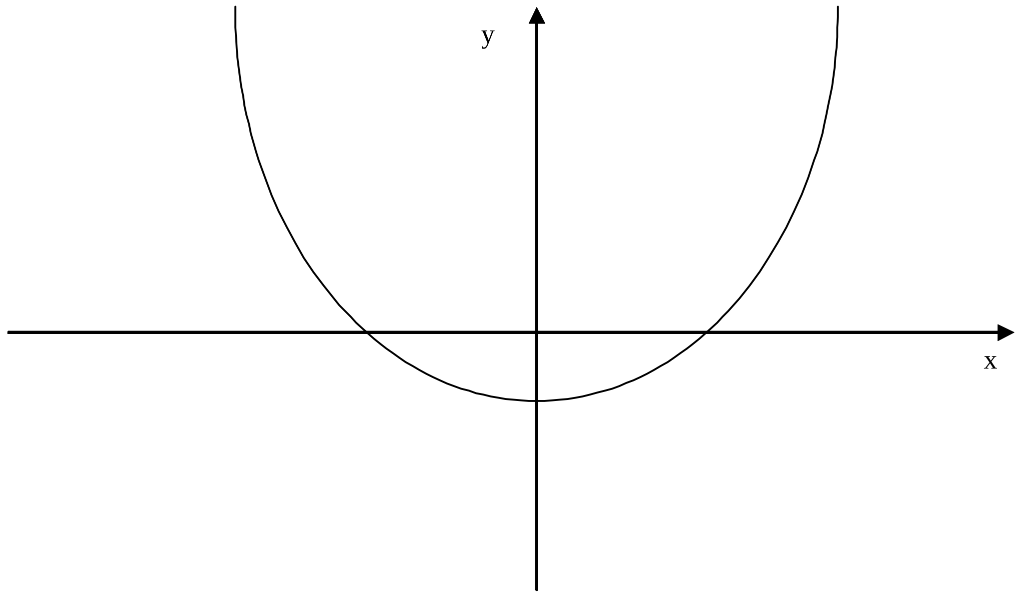
$$a_1 = 0 \ , \ a_3 = 0 \ , \ a_5 = 0 \ , \ ...$$

iar polinomul se scrie

$$p(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + ...$$

$\blacksquare$

Dacă suma unei serii de puteri este funcţie pară, atunci toţi coeficienţii puterilor impare sunt nuli.
Demonstraţia este similară cu cea de mai înainte.
Să observăm că din punct de vedere geometric, relaţia $f(-x) = f(x)$ arată
o simetrie a graficului funcţiei f faţă de axa Oy .



Funcţie pară - simetrie faţă de axa Oy

Definiţie. O funcţie $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ sau $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţie "**impară**" ,
dacă pentru orice x din domeniu

$$f(-x) = -f(x)$$

Exemple.

1. Denumirea este justificată de funcţiile de tip "putere" $f(x) = x^{2k+1}$ ($x, x^3, x^5, ...$) cu exponent număr impar.
Acestea sunt în mod evident funcţii impare deoarece $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$
Funcţia constantă zero (funcţia nulă) este funcţie impară. Este singura funcţie care este şi pară şi impară.

2. Orice polinom cu toţi coeficienţii puterilor pare nuli, este o funcţie impară.

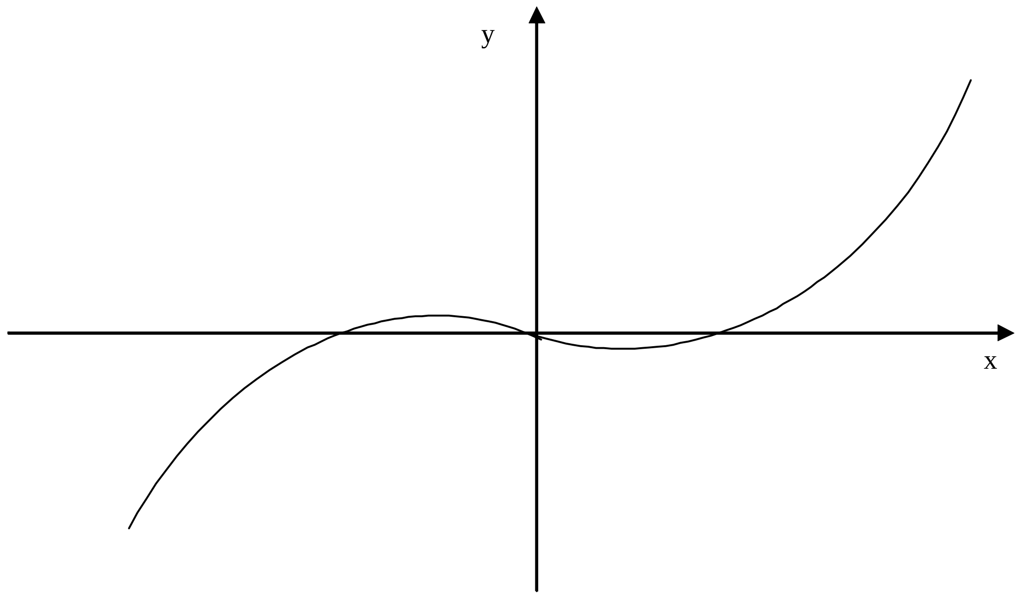
$$x + x^3 \text{ , } 2x - x^5 + 3x^7 \text{ , } x^3 + x^7 - x^9 + x^{13}$$

3. Suma unei serii de puteri cu toţi coeficienţii puterilor pare nuli, este o funcţie impară.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} \quad \text{pentru orice } x \in (-1, 1)$$

Dacă un polinom este funcţie impară, atunci toţi coeficienţii puterilor pare sunt nuli.
Dacă suma unei serii de puteri este funcţie impară, atunci toţi coeficienţii puterilor pare sunt nuli.
Demonstraţia este similară ce cea pentru funcţii pare.
Să observăm, că pentru o funcţie impară $f(0) = 0$
deoarece $f(-0) = -f(0) \Leftrightarrow f(0) = -f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$
Să observăm că din punct de vedere geometric, relaţia $f(-x) = -f(x)$ arată
o simetrie a graficului funcţiei f faţă de "origine" .



Funcţie impară - simetrie faţă de origine

Proprietăţi.
1. Funcţiile se clasifică în
i) funcţii pare ii) funcţii impare iii) funcţii care nu sunt nici pare, nici impare (sau "else")

1. Suma a două funcţii pare este tot o funcţie pară.

$$pară + pară = pară$$

Suma a două funcţii impare este tot o funcţie pară.

$$impară + impară = impară$$

Suma dintre o funcţie pară şi o funcţie impară nu este nici pară, nici impară

$$pară + impară = \text{"}else\text{"}$$

2. Produsul a două funcţii

$$\begin{array}{rl} \text{i)} & pară \cdot pară = pară \\ \text{ii)} & impară \cdot impară = pară \\ \text{iii)} & pară \cdot impară = impară \end{array}$$

Demonstraţia foloseşte doar definiţia funcţiilor pare, impare.

Considerăm acum funcţii pare sau impare care sunt şi integrabile. De exemplu funcţii continue pare sau impare.

Observaţie.
Fie $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ sau $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţie integrabilă.
i) dacă f este funcţie impară, atunci

$$\int_{-A}^{A} f = 0$$

ii) dacă f este funcţie pară, atunci

$$\int_{-A}^{A} f = 2\int_{0}^{A} f$$

Demonstraţie.
i) putem descompune integrala

$$\int_{-A}^{A} f = \int_{-A}^{0} f + \int_{0}^{A} f$$

facem schimbarea de variabilă $y = -x$ şi obţinem

$$\int_{-A}^{0} f(x)dx = \int_{A}^{0} \underbrace{f(-y)}_{-f(y)}(-dy) = -\int_{0}^{A} f(y)dy$$

adunând obţinem

$$\int_{-A}^{A} f = \int_{-A}^{0} f + \int_{0}^{A} f = -\int_{0}^{A} f + \int_{0}^{A} f = 0$$

ii) folosim aceeaşi descompunere şi aceeaşi schimbare de variabilă, în acest caz obţinem

$$\int_{-A}^{0} f(x)dx = \int_{A}^{0} \underbrace{f(-y)}_{f(y)}(-dy) = \int_{0}^{A} f(y)dy$$

$$\int_{-A}^{A} f = \int_{-A}^{0} f + \int_{0}^{A} f = \int_{0}^{A} f + \int_{0}^{A} f = 2\int_{0}^{A} f$$

■

Observaţie.
O funcţie $f : [0, A] \to \mathbb{R}$ se poate prelungi pe intervalul $[-A, A]$ ca o funcţie
i) pară astfel

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ pentru } x \geq 0 \\ f(-x) & , \text{ pentru } x < 0 \end{cases}$$

ii) impară astfel

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ pentru } x \geq 0 \\ -f(-x) & , \text{ pentru } x < 0 \end{cases}$$

Exemple.
1. Funcţia $f(x) = x \in [-\pi, \pi]$ este o funcţie impară.
Dar restricţia sa $f(x) = x \in [0, \pi]$ se poate prelungi la o funcţie pară astfel

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = x & , \text{ pentru } x \in [0, \pi] \\ f(-x) = -x & , \text{ pentru } x \in [-\pi, 0] \end{cases} = |x|$$

2. Funcţia $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$ este o funcţie pară.
Dar restricţia sa $f(x) = x^2$, $x \in [0, \pi]$ se poate prelungi la o funcţie impară astfel

$$h(x) = \begin{cases} f(x) = x^2 & , \text{ pentru } x \in [0, \pi] \\ -f(-x) = -x^2 & , \text{ pentru } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

În continuare considerăm funcţii periodice $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu perioadă $T = 2\pi$
(doar din motive de simplitate a calculelor)
Analiza funcţiilor periodice (semnalelor) cu alte perioade se poate reduce la acestea.
Este suficient să studiem comportamentul acestor funcţii pe un interval de lungime 2π,
de exemplu intervalul $[-\pi, \pi]$.
Reducerea la acest interval (şi nu altul de exemplu $[0, 2\pi]$) este justificată de faptul că

integralele pe un interval simetric $[-A, A]$ sunt "sensibile" la funcţii pare sau impare.

Funcţiile $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ integrabile formează un spaţiu vectorial
(cu operaţiile naturale de adunare a funcţiilor şi înmulţire cu scalari)
Astfel de spaţii vectoriale sunt numite spaţii de funcţii, deoarece elementele lor sunt funcţii.
În particular funcţiile continue şi funcţiile continue pe porţiuni fac parte din acest spaţiu de funcţii.
Să notăm acest spaţiu cu $\mathcal{L}[-\pi, \pi] = \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann $\}$
Să avem permanent în vedere faptul că aceste funcţii provin din funcţii periodice $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu perioadă $T = 2\pi$
Produsul a două funcţii integrabile pe un interval ($[-\pi, \pi]$) este de asemenea o funcţie integrabilă.

Din acest motiv au sens toate integralele de tip $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ care intervin în cele ce urmează.

3. Prezentarea "traditională" , "istorică" a seriilor Fourier
În mod "tradiţional", se definesc **coeficienţii Fourier** pentru funcţii $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, integrabile astfel

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx \text{ pentru } \ n \geq 0\ , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx \ \text{ pentru } \ n \geq 1$$

Deoarece pentru astfel de funcţii au sens integralele, adică funcţiile corespunzătoare sunt integrabile.

Observaţie.

i) Pentru o funcţie pară, toţi coeficienţii $b_n = 0$, $n \geq 1$ şi $a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx$, $n \geq 0$

ii) Pentru o funcţie impară, toţi coeficienţii $a_n = 0$, $n \geq 0$ şi $b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$, $n \geq 1$

Demonstraţie.
Trebuie doar să observăm care funcţii sunt pare sau impare.
i) pentru o funcţie pară $f(x) = f(-x)$ avem

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{pară}\cdot\underbrace{\sin nx}_{impară}}^{impară}\ dx = 0 \quad \text{şi} \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{pară}\cdot\underbrace{\cos nx}_{pară}}^{pară}\ dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

ii) pentru o funcţie impară $f(x) = -f(-x)$ avem

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{impară}\cdot\underbrace{\cos nx}_{pară}}^{impară}\ dx = 0 \quad \text{şi} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{impară}\cdot\underbrace{\sin nx}_{impară}}^{pară}\ dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

■

Seria Fourier asociată unei funcţii $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, integrabile, este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

În continuare sunt prezentate condiţii suficiente ca
seria Fourier să conveargă punctual la funcţia f din care provine.
Rezultatul "central" este următorul.

Teorema (lui Dirichlet de reprezentare în serie Fourier)
Fie o funcţie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continuă şi derivabilă pe porţiuni (cu derivate laterale în orice punct).
Atunci seria Fourier asociată $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ este convergentă punctual pe intervalul $[-\pi, \pi]$, iar suma ei este

$$(*) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ \text{ pentru orice } \ x \in [-\pi, \pi] \ \text{ în care funcţia este continuă .}$$

În punctele $x \in [-\pi, \pi]$ în care funcţia **nu** este continuă

$$(**) \qquad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ pentru orice } x \in [-\pi, \pi]$$

Aici $f(x+0)$ şi $f(x-0)$ reprezintă limitele laterale ale funcţiei în punctul $x \in [-\pi, \pi]$.

Comentarii.

Atenţie ! funcţia este continuă în punctul $x = \pi$ dacă limita la stanga în $x = \pi$ este egală cu limita la dreapta în $x = -\pi$

$$f(\pi - 0) = f(-\pi + 0)$$

Aceasta deoarece **funcţia provine** dintr-o **funcţie periodică** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu perioadă 2π
O astfel de funcţie este continuă în punctul $x = \pi$ dacă are limitele laterale egale

$$f(\pi - 0) = f(\pi + 0)$$

Dar din cauza periodicităţii valorile funcţiei pe intervalul $(\pi, 3\pi)$ sunt acelaşi cu valorile pe intervalul $(-\pi, \pi)$

$$f(\pi + t) = f(\pi + t - 2\pi) = f(-\pi + t)$$

Deci calculând limitele laterale obţinem

$$f(\pi + 0) = \lim_{t \searrow 0} f(\pi + t) = \lim_{t \searrow 0} f(-\pi + t) = f(-\pi + 0)$$

În cazul acestei teoreme şi numai în cazul acestei teoreme, o funcţie poate fi considerată "continuă" într-un punct x dacă
are limitele laterale egale

$$f(x + 0) = f(x - 0)$$

indiferent cât este valoarea funcţiei în punctul x .

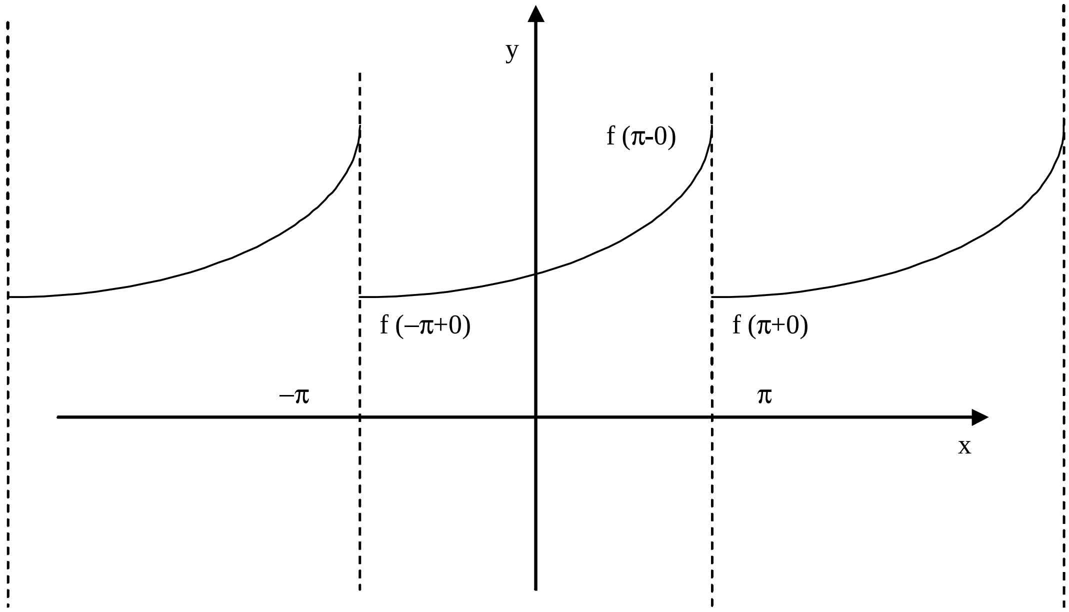
Aceasta deoarece suma seriei Fourier este media (aritmetică) a limitelor laterale, deci valoarea funcţiei în punct "$f(x)$" nu intervine.

Prima relaţie (*) este importantă, deoarece arată că funcţia are dezvoltare în serie Fourier în punctele în care este continuă.

A doua relatie (**) este importantă, deoarece arată că suma seriei Fourier este media (aritmetică) a limitelor laterale.

Consecinţă.(reformulare a teoremei în caz particular)
O funcţie continuă (care are limitele laterale egale în fiecare punct) şi derivabilă $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$
are dezvoltare în serie Fourier în fiecare punct

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ pentru orice } x \in [-\pi, \pi]$$



Funcţie periodică, care nu este continuă în x = π
f (π-0) diferit f (-π+0) = f (π+0)

Comentariu.
Demonstraţia teoremei lui Dirichlet nu este simplă. Sunt implicate multe "ingrediente" tehnice de calcul.
Din acest motiv omitem demonstraţia. Totuşi putem menţiona câteva elemente importante.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) matematician german cu contribuţii importante în matematică (teoria aproximării, analiză Fourier, analiză funcţională, teoria numerelor,...) Multe teoreme îi poartă numele.

Consecinţă. (Principiul localizării)
Fie o funcţie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continuă şi derivabilă pe porţiuni (cu derivate laterale în orice punct) şi seria Fourier asociată.
Convergenţa acestei seriii Fourier într-un punct $x \in [-\pi, \pi]$
depinde numai de valorile funcţiei într-o vecinătate $(x - \delta, x + \delta)$ a punctului x, cu $\delta > 0$ şi oricât de mic.

Acest fapt se poate vedea numai urmărind demonstraţia teoremei "pas cu pas". Convergenţa seriei Fourier depinde de integrala

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left[f(x-t) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right] \frac{\sin\left(nt + \frac{t}{2}\right)}{2\pi \sin \frac{t}{2}} dt$$

Se observă că integrala depinde numai de valorile funcţiei în intervalul $(x - \delta, x + \delta)$.■

Funcţia următoare (utilizată în demonstraţia teoremei)

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(nt + \frac{t}{2}\right)}{2\pi \sin \frac{t}{2}}$$

se numeşte **nucleu Dirichlet**.

Să precizăm din nou denumirile.
Serie trigonometrică , o serie de forma $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Polinom trigonometric $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ (practic suma parţială a unei serii trigonometrice)
(denumire justificată de faptul că funcţiile $\cos nx$, $\sin nx$ se pot scrie ca polinoame în $\cos x$, $\sin x$)

O funcţie are "**dezvoltare în serie Fourier**", dacă
seria Fourier asociată converge punctual sau uniform pe intervalul $[-\pi, \pi]$ şi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ pentru orice } x \in [-\pi, \pi]$$

Se foloseşte şi denumirea funcţia are "**reprezentare în serie Fourier**" sau
"**se poate reprezenta ca suma seriei Fourier asociate**".
Cu alte cuvinte valorile funcţiei sunt sumele (limitela sumelor parţiale) seriei Fourier asociate.
Teorema lui Dirichlet oferă condiţii suficiente ca acest fapt să fie posibil.
Precizăm aceste denumiri, deoarece în continuare apare şi noţiunea de "reprezentare" a elementelor spaţiului Hilbert H ca sumă a unor serii trigonometrice, dar reprezentare în sensul normei $\|\|_2$.

Consecinţe.
Fie o funcţie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continuă şi derivabilă (pe porţiuni).
i) Dacă funcţia este pară, atunci funcţia are dezvoltare în serie de cosinuşi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ pentru orice } x \in [-\pi, \pi]$$

ii) Dacă funcţia este impară, atunci funcţia are dezvoltare în serie de sinuşi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \text{ pentru orice } x \in [-\pi, \pi]$$

Demonstraţie.
Folosim o observaţie anterioară, conform căreia
i) o funcţie pară are toţi coeficienţii $b_n = 0$, iar
ii) o funcţie impară are toţi coeficienţii $a_n = 0$
■

4. **Comparaţie între seriile de puteri şi seriile trigonometrice**.

1. Seriile de puteri au avantaje deosebite:
- sunt derivabile şi integrabile "termen cu termen" pe întreg domeniul de definiţie
- suma lor este o funcţie de clasă C^{∞} ,
- suma lor este limită de polinoame, deci calculabilă folosind doar adunări şi înmulţiri
- sunt extrem de utile în aproximarea valorilor unor funcţii, şi anume a funcţiilor analitice

Dar funcţii cât se poate de simple, nu admit reprezentare (dezvoltare) în serie de puteri pe întreg domeniul de definiţie,
de exemplu funcţia

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

admite dezvoltare în serie de puteri (centrată în 0) numai pe intervalul $(-1, 1)$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \text{ pentru orice } x \in (-1, 1)$$

Există şi excepţii: funcţiile $\exp, \sin, \cos$ au dezvoltare în serie de puteri pe $\mathbb{R}$

2. Seriile trigonometrice sunt mai greu "manevrabile" :
- nu totdeauna sunt derivabile sau integrabile "termen cu termen"
- suma lor este în general doar o funcţie continuă pe porţiuni
- sunt dificil de calculat: se calculează coeficienţii Fourier (prin integrale),

iar sumele lor parţiale sunt formate din funcţii trigonometrice, deci nu uşor de calculat
Dar seriile trigonometrice au avantajul că
- sunt formate cu funcţii ortogonale
- atunci când sunt convergente, reprezintă funcţia pe întreg domeniul de definiţie

- funcţii simple (doar continue şi derivabile) au dezvoltare în serie Fourier

Concluzie
Seriile pe puteri sunt utile în primul rând prin "tehnica" de calcul
(aproximarea valorilor unor funcţii prin calcule algebrice)
Seriile trigonometrice sunt utile din două motive:
i) matematic, arată cum se pot aproxima funcţiile continue cu polinoame trigonometrice
(teorema lui Dirichlet şi teoremele de aproximare ale lui Weierstrass)
ii) fizic, sunt o metodă de analiză a semnalelor periodice

5. **Interpretări fizice**.
Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este un semnal periodic, cu perioadă $2L$ (în loc de 2π) $L > 0$,
continuu şi cu derivată continuă (sau condiţiile din teorema lui Dirichlet),
atunci se pot asocia **coeficienţii Fourier**

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \text{ pentru } n \geq 0\ , \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \text{ penrtu } n \geq 1$$

Iar **seria Fourier** asociată este
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L})$$

Coeficientul $\frac{a_0}{2}$ reprezintă **"media"** semnalului pe intervalul $[-L, L]$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

Termenul
$$a_1\cos\frac{\pi x}{L} + b_1\sin\frac{\pi x}{L}$$
reprezintă **"oscilaţia principală"** a semnalului în jurul poziţiei medii
Termenii
$$a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$
reprezintă **"armonicele oscilaţiei principale"**

Dezvoltarea sau reprezentarea semnalului în serie Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}) \quad \text{pentru orice } x \in [-L, L]$$

se interpretează ca **"descompunerea semnalului în armonice"**
Coeficienţii Fourier $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ...$ formează **"spectrul semnalului"** sau spectrul discret

Se realizează astfel o corespondenţă între
- un semnal periodic continuu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi
- un semnal discret $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ...$ (un şir de numere)

Această corespondentă este bijectivă între
- **semnale periodice** (cu perioadă $2L$) de **"energie finită"** :

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\,dx < \infty$$

- **semnale discrete** de **"energie finită"** , adică şiruri de numere (coeficienţi Fourier) cu

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 < \infty$$

(acest tip de serii Fourier reprezintă elementele din spaţiul Hilbert H definit mai târziu)
(" $< \infty$ " este un mod prescurtat de a spune că seria este convergentă)

Importanţa acestei corespondenţe bijective apare la problema transmiterii unui astfel de semnal.
Cum transmitem la distanţă un semnal periodic continuu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu fidelitate mare ?

i) O metodă este aceea de a transforma semnalul continuu într-unul digital.
Transmiterea unui semnal digital (şir de biţi) se face rapid şi exact.
Deci se "digitizează" semnalul continuu.
Pentru a avea fidelitate mare (rezoluţie bună), este nevoie de o rată mare de eşantionare,
ceea ce duce la un volum mare de date de transmis.
Acest fapt afectează viteza de transmitere.

ii) O altă metodă este de a calcula coeficienţii Fourier ai semnalului continuu
(acest fapt presune viteză de procesare mare - algoritmi de calcul aproximativ rapid)
(de exemplu algoritmul de transformare Fourier rapidă FFT "Fast Fourier Transform")
Apoi se transmit la distanţă doar aceşti coeficienţi - un semnal discret -
În acest caz volumul de date transmise este mic, deci viteza de transmisie foarte mare.
La "destinaţie", se "recompune" semnalul continuu iniţial folosind reprezentarea în serie Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}) \quad \text{pentru orice } \ x \in [-L, L]$$

Este însă nevoie de viteză mare de procesare (calcul aproximativ), dar se poate obţine o fideliate oricât de bună.
Să remarcăm diferenţa dintre **semnal digital** şi **semnal discret**.

Notă. În practică nu aşa se transmit semnalele. Am dorit doar să exemplificăm ideea.
De exemplu un semnal dat de o funcţie polinom, nu se transmite prin digitizare.
Se transmit numai coeficienţii polinomului.
La "destinaţie" se calculează semnalul prin digitizare obţinând orice rezoluţie dorită.

Rămân doar câteva întrebări simple, dar "legitime" pentru înţelegerea celor prezentate.
- de ce au fost considerate funcţiile trigonometrice $\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...$ şi nu altele ?
- de ce coeficienţii Fourier sunt definiţi de acele integrale ?
- de ce acele integrale au factorul $\frac{1}{\pi}$ (respectiv $\frac{1}{L}$) ?
- de ce primul coeficient $\frac{a_0}{2}$ are factorul $\frac{1}{2}$?
- de ce "energia finită" se calculează aşa

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 < \infty$$

Răspunsul necesită prezentarea contextului "natural" : spaţii vectoriale cu produs scalar, spaţii Hilbert,
dar şi prezentarea convergenţei punctuale şi a convergenţei uniforme pentru şiruri de funcţii.

Începem cu lucrul cel mai simplu, menţionarea teoremelor de aproximare ale lui Weierstrass (fără demonstraţie).

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897) matematician german, adesea numit "părintele analizei moderne". Contribuţia în matematică este imensă. El enunţă riguros conceptele de limită, funcţie continuă (aşa cum se definesc în prezent). Multe teoreme îi poartă numele. De exemplu celebra teoremă Stone-Weierstrass de aproximare.

6. **Teoremele de aproximare**

Teorema 1 (Weierstrass). Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă, periodică de perioadă 2π şi seria Fourier asociată.
Notăm şirul sumelor parţiale cu

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ pentru } \ n \geq 0$$

Atunci şirul definit

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(s_0 + s_1 + ... + s_n)$$

converge uniform la funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există un polinom trigonometric σ_n astfel încât

$$\|f - \sigma_n\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon \text{ pentru orice } x \in [-\pi, \pi]$$

(teorema arată că o funcţie continuă şi periodică se aproximează uniform cu polinoame trigonometrice)

Consecinţă.
Dacă o functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă, periodică de perioadă 2π
are toţi coeficienţii Fourier nuli ($a_n = 0$, $n \geq 0$ şi $b_n = 0$, $n \geq 1$),
atunci funcţia f este identic nulă ($f(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$)

Consecinţă. (unicitate a reprezentării în serie Fourier)
Două funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, periodice de perioadă 2π cu aceeaşi coeficienţi Fourier,
sunt neapărat egale $f = g$ ($f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$)

Teorema 2 (Weierstrass)
Orice funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă, se aproximează uniform cu polinoame algebrice.
Adică: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un polinom P_ε astfel încât

$$\|f - P_\varepsilon\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon \text{ pentru orice } x \in [a, b]$$

Acest rezultat arată că valorile unei funcţii continue se pot aproxima cu valorile unor polinoame,
deci numai folosind calcule algebrice (adunări şi înmulţiri).

7. Ingrediente tehnice - spaţii vectoriale

Spaţii vectoriale cu produs scalar, **spaţii Hilbert**

Acum începem prezentarea contextului "natural" pentru serii Fourier: spaţii vectoriale cu produs scalar, spaţii Hilbert.
Reamintim câteva noţiuni despre spaţii vectoriale cu produs scalar (spaţii vectoriale reale).

Definiţie. Fie V un spaţiu vectorial.
Un **produs scalar** pe spaţiul V este o aplicaţie biliniară, simetrică, pozitiv definită $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$.
Mai precis
i) biliniară: pentru orice $x, y, z \in V$ şi orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem

$$< \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, z > +\beta < y, z >$$
$$< z, \alpha x + \beta y >= \alpha < z, x > +\beta < z, y >$$

ii) simetrică: $< y, x >=< x, y >$ pentru orice $x, y \in V$
ii) pozitiv definită: $< x, x >\geq 0$ pentru orice $x \in V$
şi $< x, x >= 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$

Comentarii.
1. Folosind notaţia din fizică, mecanică, definiţia se rescrie astfel :
produsul a doi vectori $x, y \in V$ este un scalar $x \cdot y \in \mathbb{R}$
i) produsul scalar este distributiv faţă de adunarea vectorilor

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \text{şi} \quad \alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$$

pentru orice $x, y, z \in V$ şi orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
ii) produsul scalar este comutativ $x \cdot y = y \cdot x$ pentru orice $x, y \in V$
iii) produsul scalar este pozitiv $x \cdot x \geq 0$ pentru orice $x \in V$
şi $x \cdot x = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$

2. În esenţă, notaţia $< x, y >$ nu este deosebită de notaţia $x \cdot y$
(care este mai familiară în fizică, mecanică).
- folosim paranteze $x \cdot y = (x \cdot y)$ pentru a separa de alte operaţii
- folosim virgula ca separator în loc de $\cdot$ $(x \cdot y) = (x, y)$
- folosim paranteze "ascuţite" în loc de paranteze "rotunde" şi ajungem la $< x, y >$

Vom folosi ambele notaţii, variind în funcţie de context.

3. În general o operaţie algebrică se numeşte "produs" dacă este distributivă faţă de o altă operaţie algebrică (numită adunare)

Exemple.
1. Pe $\mathbb{R}$ produsul obişnuit este un produs scalar
2.Pe $\mathbb{R}^2$ produsul scalar "standard" este $(x, y) \cdot (a, b) = ax + by$
3.Pe $\mathbb{R}^3$ produsul scalar "standard" este $(x, y, z) \cdot (a, b, c) = ax + by + cz$
Un spaţiu vectorial cu produs scalar se numeşte în general **spaţiu euclidian**.

Observaţie. Un produs scalar verifică **inegalitatea lui Schwarz** (inegalitatea fundamentală a unui produs scalar)
Pentru orice $x, y \in V$ are loc inegalitatea

$$|< x, y >|^2 \leq < x, x >< y, y >$$

Demonstraţia este anexată la sfâşitul capitolului.
Inegalitatea este numită şi **Cauchy-Schwarz** sau **Cauchy–Schwarz–Bunyakovsky**
Inegalitatea are multiple aplicaţii în algebra vectorială, spaţii Hilbert, teoria probabilităţilor. Formularea generală a principiului de incertitudine al lui Heisenberg, se face folosind această inegalitate în spatiul Hilbert al stărilor cuantice pure.

Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) matematician francez. A iniţiat priectul formulării şi demonstrării riguroase a teoremelor din calculul diferenţial şi integral, deci un "pionier" al analizei matematice. Are contribuţii importante în analiza complexă şi lucrări ce acoperă majoritatea problemelor din matematică şi fizică matematică.

Victor Yakovlevich Bunyakovsky (1804 – 1889) matematician rus, creditat cu demonstraţia inegalităţii în caz infinit dimensional inaintea lui Schwarz.

Karl Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921) matematician german, cunoscut pentru lucrări în analiza complexă.

Consecinţă. Relaţia $\|x\| \overset{def}{=} \sqrt{< x, x >}$ defineşte o normă, numită **norma asociată produsului scalar**.
Reamintim proprietăţile ce definesc o normă pe un spaţiu vectorial.

Definiţie. O funcţie scalară $\|\| : V \to \mathbb{R}$ defineşte o **normă** pe spaţiul vectorial V dacă
i) $\|x\| \geq 0$ pentru orice $x \in V$ şi $\|x\| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$
ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pentru orice $x \in V$ şi orice $\alpha \in \mathbb{R}$
iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pentru orice $x, y \in V$

Relaţia (iii) se numeşte **inegalitatea normei** sau **inegalitatea triunghiului**.
Denumire justificată de interpretarea geometrică "într-un triunghi, suma lungimii a două laturi este mai mare ca lungimea celei de-a treia laturi"
În fizică vectorii de normă 1 se numesc "**versori**".

Observaţie. Orice vector nenul $x \neq 0$ are norma strict pozitivă $\|x\| > 0$, iar vectorul $\frac{1}{\|x\|}x$ are norma 1 şi este coliniar cu vectorul x
Inegalitatea lui Schwarz se poate rescrie

$$|< x, y >| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \Leftrightarrow \quad \left| < \frac{1}{\|x\|}x, \frac{1}{\|y\|}y > \right| \leq 1$$

Prin urmare produsul scalar al celor doi vectori de normă 1 este un număr real din intervalul $[-1, 1]$,
deci reprezintă valoarea funcţiei cos pentru un unic unghi din intervalul $[0, \pi]$

Definiţie. Pentru doi vectori nenuli, se defineşte unghiul dintre cei doi vectori $\alpha \in [0, \pi]$ prin relaţia

$$\cos \alpha =< \frac{1}{\|x\|}x, \frac{1}{\|y\|}y >$$

În particular doi vectori sunt **ortogonali** "$x \perp y$" dacă produsul lor scalar este nul $< x, y >= 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$
Norma şi unghiul a doi vectori definesc "**geometria**" unui spaţiu euclidian (cu produs scalar).

Teorema lui Pitagora. Dacă doi vectori sunt ortogonali $x \perp y$, atunci

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \left\|y^2\right\|$$

Demonstraţia este un simplu exerciţiu de calcul.

$$\|x+y\|^2 =< x+y, x+y >= (x+y)\cdot(x+y) =$$

$$= x\cdot x + \underbrace{\overset{0}{x\cdot y}} + \underbrace{\overset{0}{y\cdot x}} + y\cdot y = x\cdot x + y\cdot y = \|x\|^2 + \left\|y^2\right\|$$

■

Pitagora (Pythagoras) (aprox 580-572 BC - aprox 500-490 BC) matematician, filozof grec

Din punct de vedere geometric, $x+y$ şi $x-y$ sunt diagonalele dreptunghiului cu laturi x şi y
Se observă că $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \left\|y^2\right\| = \|x-y\|^2$ arată că diagonalele au aceeaşi lungime.
Demonstraţia teoremei lui Pitagora este un simplu exerciţiu de calcul în contextul spaţiilor cu produs scalar, contextul "natural" al teoremei.

Consecinţă. Dacă vectorii $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt ortogonali (oricare doi), atunci

$$\| x_1 + x_2 + ... + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ... + \|x_n\|^2 \quad \text{sau}$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

O familie de vectori $\{x_j\}_j$ se numeşte **familie ortogonală**, dacă oricare doi vectori sunt ortogonali
(se subînţelege că vectorii sunt nenuli). Orice familei ortogonală este şi liniar independentă.
O familie de vectori $\{x_j\}_j$ se numeşte **familie ortonormată**, dacă oricare doi vectori sunt ortogonali şi fiecare are norma 1
Deci produsului scalar i se asociază o normă, iar normei i se asociază o **distanţă** sau **metrică**

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Definitie.
Prin urmare un spaţiu vectorial cu produs scalar este şi un spaţiu metric.
Dacă acest spaţiu metric este complet, atunci se numeşte **spaţiu Hilbert**.

Dacă spaţiul vectorial V nu este spaţiu metric complet (cu metrica asociată produsului scalar),
atunci "completatul" său este spaţiu Hilbert, numit şi **spaţiul Hilbert generat** de spaţiul V.

David Hilbert (1862 – 1943) matematician german, recunoscut ca unul din cei mai influenţi şi "universali" matematicieni ai secolelor 19 şi 20. A descoperit şi dezvoltat idei în foarte multe domenii din matematică: axiomatizarea geometriei, teoria spaţiilor "Hilbert", unul din fondatorii analizei funcţionale.

Reamintim că un spaţiu metric este complet, dacă orice şir fundamental este convergent.
"Completatul" unui spaţiu metric V (care nu e complet) este cel mai mic spaţiu metric complet ce conţine spaţiul V.

Iată exemplul "standard" de spaţiu Hilbert finit dimensional.
Considerăm spaţiul euclidian "clasic" de dimensiune "n" şi anume $\mathbb{R}^n$. Acesta este spaţiu metric complet.
Aici se consideră produsul scalar "canonic"

$$\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)\rangle \overset{def}{=} x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

şi norma asociată (numită norma euclidiană)

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Baza canonică a acestui spaţiu $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$,

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,...,0) \\ e_2 &= (0,1,0,...,0) \\ e_3 &= (0,0,1,0...,0) \\ &... \\ e_n &= (0,0,...,0,1) \end{aligned}$$

este o bază ortonormată (faţă de produsul scalar canonic).
Orice vector se scrie în mod unic

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

Coeficienţii $x_1, x_2, ..., x_n$ vectorului x se obţin din produsele scalare

$$x_1 =< x, e_1 >= (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (1,0,0,...,0)$$

$$x_2 =< x, e_2 >= (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (0,1,0,...,0)$$

$$x_3 =< x, e_3 >= (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (0,0,1,0,...,0)$$

....

$$x_n =< x, e_n >= (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (0,0,0,...,0,1)$$

Acest mod relativ simplu de a determina coeficienţii unui vector, justifică importanţa folosirii unei baze ortonormate.

Observaţie.
Dacă există o familie ortonormată numărabilă $\{e_n\}_{n\geq 1} = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$
atunci are loc o inegalitatea (numită tradiţional - inegalitatea lui Bessel)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |< x, e_n >|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{pentru orice } x$$

Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846) matematician şi astronom german. A sistematizat studiul funcţiilor introduse de Daniel Bernoulli, funcţii care îi poartă numele "funcţii Bessel". Multe alte obiecte matematice îi poartă numele, de exemplu transformarea Bessel, numită şi Fourier-Bessel sau Hankel.

Demonstraţie.
Este suficient să calculăm

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > -x \right\|^2 =$$

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k - f, \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > -x \right\rangle =$$

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k, \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \right\rangle - 2 \left\langle \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k, x \right\rangle + < x, x >=$$

aici folosim în mod esenţial faptul că elementele $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ sunt ortogonaleşi de normă 1

$$= \sum_{k=1}^{n} |< x, e_k >|^2 - 2 \left(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{< x, e_k >< e_k, x >}_{|< x, e_k >|^2} \right) + \|x\|^2 =$$

$$= - \sum_{k=1}^{n} |< x, e_k >|^2 + \|x\|^2$$

În final ţinând seama de faptul că norma este pozitivă obţinem

$$0 \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > -x \right\|^2 = -\sum_{k=1}^{n} |< x, e_k >|^2 + \|x\|^2$$

deci

$$\sum_{k=1}^{n} |< x, e_k >|^2 \leq \|x\|^2$$

Trecem la limită $n \to +\infty$ şi obţinem (inegalitatea lui Bessel)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |< x, e_n >|^2 \leq \|x\|^2$$

■

Să considerăm acum un spaţiu vectorial infinit dimensional H_0, cu bază numărabilă.
Algoritmul Gram-Schmidt produce o bază ortonormată, să o notăm cu $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$.
H_0 este format din toate combinaţiile liniare cu vectori din baza ortonormată $\{e_n\}_n$

$$H_0 = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \quad , \text{orice } a_n \in \mathbb{R} \ , \text{orice } n \geq 1 \right\}$$

Deci orice element $x \in H_0$ se scrie în mod unic $x = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, iar coeficienţii a_k sunt $a_k =< x, e_k >$

Să observăm că produsul scalar este

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k e_k}_{x} , \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k e_k}_{y} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \underbrace{< e_i, e_j >}_{0 \text{ , pentru } i \neq j} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \underbrace{< e_k, e_k >}_{1} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

norma unui vector este

$$\|x\| = \sqrt{<, xx>} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2}$$

Deci putem identifica un vector x cu setul coeficienţilor săi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sau şirul $(a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, ...)$
Astfel spaţiul H_0 se poate identifica cu mulţimea şirurilor (de coeficienţi)
$(a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, ...)$ în care doar un număr finit de termeni sunt nenuli.

Jørgen Pedersen Gram (1850 - 1916) matematician danez şi expert în impactul financiar al fenomenelor de risc şi incertitudine.
Erhard Schmidt (1876 – 1959) matematician german. Împreună cu David Hilbert are contribuţii importante în analiza funcţională.

Să notăm cu H paţiul Hilbert generat de baza ortonormată $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$
Acest spaţiu se identifică cu mulţimea şirurilor $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ cu proprietatea că seria corespunzătoare este convergentă

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

Orice element $x \in H$ se scrie în mod unic $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, iar coeficienţii a_n sunt $a_n =< x, e_n >$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \quad \Leftrightarrow \quad x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \quad \Leftrightarrow \quad \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

Să observăm că produsul scalar este

$$\langle x,y\rangle = \left\langle \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n}_{x} \ , \ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n}_{y} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j \underbrace{< e_i, e_j >}_{0 \text{ , pentru } i \neq j} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \underbrace{< e_n, e_n >}_{1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

norma unui vector este

$$\|x\| = \sqrt{<, xx>} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} = \left(|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + ...\right)^{1/2}$$

Deci spaţiul Hilbert generat de o bază ortonormată se poate identifica şi
cu mulţimea seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ convergente în normă sau (echivalent) cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$

Consecinţă. Şirul coeficienţilor $a_n \to 0$ (conform crtiteriului necesar pentru serii numerice)

Comentariu. Calculul normei unui vector $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ scris în funcţie de o bază ortonotmată $\{e_n\}_n$

$$\|x\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

se poate interpreta ca fiind teorema lui Pitagora în caz infinit dimensional.

8. Prezentarea "modernă" a seriilor Fourier, folosind spaţii Hilbert

În continuare considerăm funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodice cu perioadă $T = 2\pi$.
Este suficient să studiem comportamentul acestor funcţii pe un interval de lungime 2π ,
de exemplu intervalul $[-\pi, \pi]$.
Funcţiile $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ integrabile formează un spaţiu vectorial
(cu operaţiile naturale de adunare a funcţiilor şi înmulţire cu scalari)
Astfel de spaţii vectoriale sunt numite spaţii de funcţii, deoarece elementele lor sunt funcţii.
În particular funcţiile continue şi funcţiile continue pe porţiuni fac parte din acest spaţiu de funcţii.
Să notăm acest spaţiu cu $\mathcal{L}[-\pi, \pi] = \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann $\}$

Definiţie. Integrala următoare defineşte un produs scalar pe acest spaţiu de funcţii.

$$< f, g >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

Să "vizualizăm" norma asociată (în mod obişnuit notată $\|\|_2$ - "norma 2" pentru a o deosebi de alte norme)

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \quad \Leftrightarrow \quad \|f\|_2 = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$$

şi distanţa asociată ("distanţa" dintre două funcţii)

$$\|f - g\|_2 = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$$

Comentariu.
Acest spaţiu vectorial normat este aparent oarecum "straniu".

Conform definiţiei unei norme,

$$\|f-g\|_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2\,dx = 0$$

duce la " $f = g$ " , egalitate doar în sensul normei $\|\|_2$.
Atenţie însă, acest fapt nu inseamnă neapărat $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in [-\pi,\pi]$
Egalitate în sensul normei $\|\|_2$ înseamnă mai precis $f(x) = g(x)$ "aproape peste tot" pe intervalul $[-\pi,\pi]$
Deci identificăm două funcţii pentru care $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2\,dx = 0$
Am obţinut astfel nu chiar un spaţiu de funcţii, ci un spaţiu de "clase de funcţii echivalente".
Exemplu.
Considerăm funcţiile $f, g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{pentru} \quad x \in \{-\pi,0,\pi\} \\ 5 & \text{în rest} \end{cases} \qquad , \qquad g(x) = 5 \;\; \text{pentru orice } x \in [-\pi,\pi]$$

Funcţia f nu este continuă în 3 puncte $\{-\pi,0,\pi\}$, dar este integrabilă pe $[-\pi,\pi]$, la fel şi functia $f-g$ care este

$$f(x)-g(x) = \begin{cases} -2 & \text{pentru} \quad x \in \{-\pi,0,\pi\} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Calculăm norma ţinând seama de faptul că integrala nu se modifică dacă funcţia este nenulă doar într-un număr finit de puncte.

$$\|f-g\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 0dx = 0$$

Deci " $f = g$ " , egalitate doar în sensul normei $\|\|_2$.
Valorile celor două funcţii sunt identice cu excepţia celor 3 puncte $\{-\pi,0,\pi\}$

Această situaţie este cât se poate de naturală.
Două semnale audio care diferă numai în câteva puncte sunt "esenţial" echivalente, chiar dacă nu identice.
La fel două imagini pe monitor, ce diferă doar într-un număr mic de pixeli, sunt practic "la fel de bune".

Observaţie.
Dacă cele două funcţii f şi g sunt funcţii continue, atunci da !
$\|f-g\|_2 = 0$ înseamnă exact $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in [-\pi,\pi]$
Demonstraţia nu este complicată.

Teoremă.
Familia de funcţii $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, ...\}$ este o familie ortonormată (faţă de produsul scalar definit)
Familia de funcţii este numită "sistemul trigonometric".

Demonstraţie.
Mai întâi justificăm necesitatea factorului $\frac{1}{\pi}$ în definirea produsului scalar. Aceasta deoarece şi fără acest factor obţinem un produs scalar.
Am dorit ca funcţiile trigonometrice să aibe norma 1. Iată cum arată calculul fără factorul $\frac{1}{\pi}$

$$\|\cos x\|^2 =< \cos x, \cos x >= \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}2\pi + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \pi + \frac{\sin 2\pi - \sin(-2\pi)}{4} = \pi$$

Pentru a "corecta" acest calcul se alege factorul $\frac{1}{\pi}$ şi atunci avem

$$\|\cos x\|_2^2 =< \cos x, \cos x >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot \cos x dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = ... = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}2\pi + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}\right) = 1$$

<u>Factorul</u> $\frac{1}{\sqrt{2}}$ este şi el <u>justificat de faptul</u> că <u>funcţia constantă 1</u> nu are norma 1 (nu este versor)

$$\|1\|_2^2 =< 1, 1 >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dx = \frac{1}{\pi}2\pi = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \|1\|_2 = \sqrt{2}$$

Conform unei observaţii anterioare, "corectăm" alegând funcţia constantă $\frac{1}{\sqrt{2}}$
În fine pentru a demonstra că familia este ortonormată calculăm următoarele produse scalare ($p, q \in \mathbb{N}$)

$$< \cos px, \cos qx >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cdot \cos qx dx = \begin{cases} 1 & , \ p = q \\ 0 & , \ p \neq q \end{cases}$$

$$< \sin px, \sin qx >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \cdot \sin qx dx = \begin{cases} 1 & , \ p = q \\ 0 & , \ p \neq q \end{cases}$$

$$< \cos px, \sin qx >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{\cos px}_{pară} \cdot \underbrace{\sin qx}_{impară}}^{impară} dx = 0$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos px >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos px dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin px}{p}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin(p\pi)}{p} - \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin(-p\pi)}{p} = 0$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin px >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\sin px}_{impară} dx = 0$$

Iată calculele rămase.
Pentru $p \neq q$ avem

$$< \cos px, \cos qx >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cdot \cos qx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(p+q)x + \cos(p-q)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(p+q)x}{p+q} + \frac{\sin(p-q)x}{p-q}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}\right] = 0$$

Pentru $p = q$ avem

$$< \cos px, \cos px >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 px dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2px}{2} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2px}{2 \cdot 2p}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{2} + 0 = 1$$

Pentru $p \neq q$ avem

$$< \sin px, \sin qx >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \cdot \sin qx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(p-q)x - \cos(p+q)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(p-q)x}{p-q} - \frac{\sin(p+q)x}{p+q}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}\right] = 0$$

Pentru $p=q$ avem

$$< \sin px, \sin px >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 px dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2px}{2} dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2px}{2\cdot 2p}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{2} - 0 = 1$$

■

9. **Reprezentare în serie Fourier în norma $\|\|_2$**

Definiţie.
Notăm cu H_0 spaţiul vectorial generat de familia ortonormată $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, ...\}$
adică mulţimea tuturor combinaţiilor liniare cu elemente din familie,
combinaţii numite "**polinoame trigonometrice**"

$$A\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Acesta este un spaţiu vectorial infinit dimensional inclus în
spaţiul funcţiilor integrabile $\mathcal{L}[-\pi,\pi] = \{f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann $\}$
Ca spaţiu metric însă H_0 nu este complet.
Notăm cu H "completatul" său, adică
spaţiul Hilbert generat de familia ortonormată $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, ...\}$
Se demonstrează că acest spaţiu este un spaţiu de "clase de funcţii echivalente", spaţiul funcţiilor de "pătrat" integrabile

$$H = L^2[-\pi,\pi] = \left\{ f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \text{ , măsurabile cu } \int_{[-\pi,\pi]} |f(x)|^2 < \infty \right\}$$

O funcţie este "măsurabilă" în sensul măsurii Lebesgue, iar integrala este integrala Lebesgue.
Nu prezentăm detalii asupra măsurii Lebesgue, dar menţionăm faptul că
funcţiile integrabile Riemann sunt măsurabile Lebesgue şi pentru acestea

$$\int_{[-\pi,\pi]} |f(x)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

în particular funcţiile continue sau continue pe porţiuni sunt incluse în spaţiul $L^2[-\pi,\pi]$
Produsul scalar pe acest spaţiu este

$$< f, g >= \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)g(x)$$

deci pentru funcţii integrabile Riemann coincide cu produsul definit mai înainte.

Are loc şi în acest caz construcţia descrisă mai înainte folosind şiruri de coeficienţii sau serii formate cu elementele familiei ortonormate.
Deci spaţiul Hilbert $H = L^2[-\pi,\pi]$ se poate identifica cu elementele

$$H_1 = \left\{ A\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ cu } \frac{A^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 < \infty \right\}$$

Numim o astfel de serie, **serie trigonometrică** sau **serie Fourier**

$$A\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Numerele A, a_n şi b_n , $n \geq 1$ sunt **coeficienţii seriei**, sau **coeficienţii Fourier**.

Prin urmare identificăm un element din spatiul $L^2[-\pi,\pi]$, adică o funcţie $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$
(de fapt o clasă de funcţii)
cu o serie Fourier, ai cărei coeficienţii se obţin calculând produse scalare
(dintre f şi elementele bazei ortonormate)

$$A=<f,\frac{1}{\sqrt{2}}> \quad , \quad a_n=<f,\cos nx> \quad , \quad b_n=<f,\sin nx> \quad n\geq 1$$

adică

$$A=<f,\frac{1}{\sqrt{2}}>=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n=<f,\cos nx>=a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx$$

$$b_n=<f,\sin nx>=b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$$

Comentariu.
Pentru a nu avea o formulă specială pentru primul coeficient, se notează

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

(care astfel devine un caz particular al formulei generale pentru a_n).
Primul termen al seriei devine

$$A\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}_{a_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{a_0}{2}$$

Definiţie.
Astfel se justifică forma "standard" a **seriei Fourier** asociate unei funcţii $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ integrabile Riemann.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

şi definirea **coeficienţilor Fourier** (ca integrale - de fapt produse scalare)

$$\underbrace{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx}_{<f,\cos nx>} \text{ pentru } n\geq 0\ , \quad \underbrace{b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx}_{<f,\sin nx>} \text{ pentru } n\geq 1$$

Observaţie.
Identificarea unei funcţii $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ din spaţiul Hilbert $H=L^2[-\pi,\pi]$, cu seria Fourier asociată

$$f\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

se numeşte **"reprezentare în serie Fourier"** în norma $\|\|_2$.
şi înseamnă convergenţa seriei Fourier în norma $\|\|_2$

$$\left\|\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)-f\right\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Este evident că pentru orice funcţie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ din spaţiul Hilbert $H = L^2[-\pi, \pi]$,
(în particular orice funcţie integrabilă Riemann)
norma $\|\|_2$ se calculează ca produs scalar
fie ca integrală

$$\|f\|_2^2 =< f, f >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

fie folosind scrierea în baza ortonormată

$$\|f\|_2^2 =< f, f >= \left\langle A\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \, , \, A\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right\rangle =$$

$$= A^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Deci "inegalitatea lui Bessel" pentru serii Fourier este de fapt egalitate

$$\|f\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

numită şi formula lui Parseval, deşi în mod evident nu reprezintă decât teorema lui Pitagora în caz infinit dimensional.
Seriile trigonometrice pentru care

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) < \infty$$

reprezintă ceea ce în fizică sunt numite **"semnale discrete de energie finită"**.
Deci seriile Fourier asociate unor funcţii integrabile au "energie finită".

Consecinţă (Lema lui Riemann)
Coeficienţii Fourier asociaţi unei funcţii integrabile verifică

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) matematician german cu contribuţii importante în analiză şi geometrie diferenţială care au deschis drumul către teoria relativităţii generale. A enunţat celebra conjectură "ipoteză a lui Riemann", încă nesoluţionată definitiv.

Demonstraţie.
Reamintim criteriul "necesar" pentru serii numerice. Dacă o serie este convergentă atunci termenul "general" tinde la zero.

Pentru orice funcţie, seria coeficienţilor Fourier $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ este convergentă, deci termenul general

$$(a_n^2 + b_n^2) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Aceasta implică imediat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

■
Acest rezultat este utilizat în mod esenţial în demonstrarea teoremei lui Dirichlet. Motiv pentru care îl menţionăm.

Să rezumăm rezultatele de până acum.
Am considerat spaţiul funcţiilor integrabile $\mathcal{L}[-\pi, \pi] = \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann $\}$.

Pe acest spaţiu am definit un produs scalar

$$< f, g >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

Am arătat că familia de funcţii $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, ...\}$ este o familie ortonormată.
- acest fapt explică de ce descompunerea unui semnal periodic se face folosind aceste funcţii trigonometrice şi
- de ce produsul scalar are factorul $1/\pi$

Am notat cu H_0 spaţiul vectorial generat de această familie ortonormată, spaţiu inclus în $\mathcal{L}[-\pi, \pi]$

Am notat cu H spaţiul Hilbert generat de H_0 . Elementele din H au "reprezentare în serie Fourier" ca limită în "norma 2".
- acest fapt explică definirea coeficienţilor Fourier pentru o funcţie integrabilă şi
- de ce primul coeficient este $\frac{a_0}{2}$

Pentru orice funcţie integrabilă se poate asocia o serie Fourier.

Seriile Fourier asociate unei funcţii integrabile au "energie finită".

10. Rezultate anexe

Este necesară precizarea a două tipuri de convergenţă a şirurilor de funcţii.

Ne limităm la enunţarea definiţiilor şi menţionarea unor proprietăţi.

Definiţie.

Un şir de funcţii $f_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ **converge punctual** la funcţia f , pe intervalul $[-\pi, \pi]$, dacă pentru orice $x \in [-\pi, \pi]$ există limita

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \stackrel{not}{=} f(x)$$

Funcţia astfel definită $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ se numeşte **limita şirului de funcţii** f_n

Definiţie.

Pentru o funcţie mărginită $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ relaţia

$$\|f\|_\infty \stackrel{not}{=} \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$$

defineşte o normă, numită **norma supremum** (pe scurt "norma sup") sau **norma "infinit".**

Definiţie.

Un şir de funcţii $f_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ **converge uniform** la funcţia f , pe intervalul $[-\pi, \pi]$, dacă

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Cu alte cuvinte şirul converge în norma supremum.

Observaţie.

Dacă un şir de funcţii converge uniform, atunci şirul converge şi punctual.

Observaţie.

Dacă un şir de funcţii continue converge uniform, atunci limita sa este o funcţie continuă.

Observaţie.

Pentru orice funcţie integrabilă are loc inegalitatea între norma supremum şi norma $\|\|_2$

$$\|f\|_2 \le \sqrt{2} \cdot \|f\|_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \le \sqrt{2} \cdot \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$$

Consecinţă.

Dacă un şir de funcţii converge în norma supremum,
atunci şirul converge şi în norma asociată produsului scalar (norma $\|\|_2$)

Consecinţă.
Funcţiile continue $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ sunt elemente ale spaţiului Hilbert H

Demonstraţie.
Teorema 1 (Weierstrass) arată că şirul

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(s_0 + s_1 + ... + s_n)$$

converge uniform la funcţia continuă f , deci converge şi în "norma 2".
Sumele parţiale $s_0, s_1, ..., s_n$ sunt din spaţiul H_0 (generat de funcţiile trigonmetrice), la fel şi σ_n (ca o combinaţie liniară de elemente din H_0)
Spaţiului Hilbert H fiind spaţiu metric complet, funcţia f este un element al spaţiului Hilbert H ca limită în "norma 2" a unor elemente din H_0.
■

Putem considera serii trigonometrice arbitrare, nu neapărat asociate unor funcţii integrabile sau care reprezintă elementele spaţiului Hilbert H.

O serie trigonometrică $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ poate fi

i) punctual convergentă
ii) uniform convergentă
iii) sau să nu fie convergentă.

Următoarea teoremă oferă condiţii suficiente ca o serie trigonometrică să definească un element al spaţiului Hilbert H

Teoremă.(Parseval)
Dacă o serie trigonometrică este uniform convergentă, atunci suma acestei serii

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

este o funcţie continuă $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ care este inclusă în spaţiului Hilbert H ,
seria Fourier asociată acestei funcţii este exact seria trigonometrică iniţială şi evident are loc egalitatea

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

(Formula lui Parseval)

Marc-Antoine Parseval (1755 - 1836) matematician francez, renumit prin teorema care îi poartă numele.

Demonstraţie.
Convergenţa uniformă înseamnă convergentă şirului sumelor partiale în norma supremum

$$\left\| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) - f \right\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Conform unei observaţii anterioare, convergenţa în norma supremum implică convergenţa în norma $\|\|_2$.
Deci funcţia f este un element al spaţiului Hilbert H (ca limita (suma) unei serii trigonometrice convergente în norma $\|\|_2$)
Deci seria trigonometrică verifică şi

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Pe de altă parte funcţia continuă f are o serie Fourier asociată. Coeficienţii acesteia se calculează

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx =< f, \cos nx >= a_n \quad \text{pentru } \; n \geq 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx =< f, \sin nx >= b_n \quad \text{pentru} \quad n \geq 1$$

Deci sunt exact coeficienţii seriei trigonometrice iniţiale.■

Comentariu.
Să analizăm ultimele două rezultate care aparent se "suprapun" afirmând acelaşi lucru.
Pe de o parte consecinţa la Teorema 1 (Weierstrass) arată că funcţiile continue $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ sunt elemente ale spaţiului Hilbert H,
dar nu spune nimic despre convergenţa seriei Fourier asociate unei funcţii continue.
Pe de altă parte teorema anterioară arată că
seriile trigonometrice uniform convergente sunt dezvoltări Fourier pentru anumite funcţii continue
(funcţiile continue care sunt sume ale unor seriii trigonometrice uniform convergente).

Iată în final un criteriu de convergenţă uniformă.

Criteriu de convergenţă uniformă
Fie o serie trigonometrică $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.
Dacă seria $\sum_{n\geq 1} |a_n| + |b_n|$ este convergentă, atunci seria trigonometrică este uniform convergentă.

12. **Concluzii finale**.
Pentru funcţii integrabile $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ se asociază serii Fourier $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$
Aceste serii sunt "semnale cu energie finită"

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) < \infty$$

Pentru funcţii continue şi derivabile pe porţiuni (cu derivate laterale laterale în fiecare punct)
seria Fourier asociată converge punctual (teorema lui Dirichlet)

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{pentru orice} \quad x \in [-\pi, \pi]$$

În particular funcţiile continue şi derivabile $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ se dezvoltă în serie Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{pentru orice} \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Convergenţa seriei Fourier depinde numai de valorile funcţiei în vecinătatea punctului $x \in [-\pi, \pi]$
(principiul localizării)
Funcţiile continue $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ se aproximează uniform cu polinoame trigonometrice (teorema 1 Weierstrass)
Metoda iniţiată de Fourier constă în descompunerea unui semnal periodic după o familie ortonormată de funcţii trigonometrice

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, ...\}$$

faţă de produsul scalar (a două funcţii integrabile)

$$< f, g >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\ dx$$

Au fost folosite trei tipuri fundamenntal deosebite de convergeţă pentru şiruri de funcţii $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$
- convergenţa punctuală
- convergenţa uniformă, care corespunde normei supremum $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$

- convergenţa în norma $\|\|_2$, care corespunde normei asociate produsului scalar $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \ dx \right)^{1/2}$

Între aceste convergenţe au loc relaţiile:
- convergenţa uniformă implică şi convergenţa punctuală şi convergenţa în norma $\|\|_2$: $\|f\|_2^2 \leq \sqrt{2} \|f\|_\infty$
- convergenţa în norma $\|\|_2$ implică convergenţa punctuală numai pentru "aproape toate punctele".

Inegalitatea lui Schwarz

Din punct de vedere "istoric", inegalitatea a fost cunoscută pentru numere reale în forma

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)$$

pentru orice numere reale $a_k b_k \in R$, $k = \overline{1,n}$ şi orice $n \geq 1$
În această formă inegalitatea este numită "**inegalitatea Cauchy-Schwarz**" sau "**Cauchy-Bunyakovski-Schwarz**".
Să observăm că pentru $n = 1$ are loc egalitate

$$(a_1 b_1)^2 = \left(a_1^2\right) \left(b_1^2\right)$$

Să observăm că pentru $n = 2$ inegalitatea este relativ simplu de demonstrat.
Este suficient să efectuăm calculele

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2\right) \left(b_1^2 + b_2^2\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{(a_1 b_1)^2} + \underbrace{(a_2 b_2)^2} + 2 a_1 b_1 a_2 b_2 \leq \underline{a_1^2 b_1^2} + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + \underbrace{a_2^2 b_2^2}$$

$$0 \leq a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

ultima inegalitate este în mod evident adevărată, deci este adevărată şi inegalitatea Cauchy-Schwarz pentru $n = 2$.

Aparent ar trebui urmat un procedeu de tip inducţie pentru a demonstra că inegalitatea are loc pentru orice seturi de numere reale,
mai precis pentru orice $n \geq 3$.
Nu urmăm acest drum relativ laborios şi nu foarte instructiv.

Considerăm un spaţiu vectorial V cu produs scalar $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$.
Produsul scalar defineşte o normă, "norma asociată" produsului scalar

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

Oricât de multă "încredere" am avea că astfel am definit o normă, este necesară verificarea proprietăţilor normei :

i) $\|x\| \geq 0$ pentru orice $x \in V$ şi $\|x\| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$
ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pentru orice $x \in V$ şi orice $\alpha \in \mathbb{R}$
iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pentru orice $x, y \in V$
proprietţile i) şi ii) sunt relativ uşor de verificat

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} \geq 0 \quad , \quad 0 = \|x\| = \sqrt{< x, x >} \quad \Rightarrow \quad < x, x >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$$\|\alpha x\| = \sqrt{< \alpha x, \alpha x >} = \sqrt{\alpha^2 < x, x >} = |\alpha| \cdot \sqrt{< x, x >} = |\alpha| \cdot \|x\|$$

pentru proprietatea iii) ("inegalitatea normei")

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{< x + y, x + y >} \leq \sqrt{< x, x >} + \sqrt{< y, y >} \quad \Leftrightarrow$$

$$< x+y, x+y > \leq < x,x > + < y,y > +2\sqrt{< x,x >}\cdot\sqrt{< y,y >}$$

$$< x,x > + < y,y > +2 < x,y > \leq < x,x > + < y,y > +2\sqrt{< x,x >}\cdot\sqrt{< y,y >} \qquad \Leftrightarrow$$

$$< x,y > \sqrt{< x,x >}\cdot\sqrt{< y,y >}$$

Putem alege orice vectori $x, y \in V$. Înlocuind y cu $-y$ obţinem

$$< x, -y > \sqrt{< x,x >}\cdot\sqrt{< -y,-y >} \qquad \Leftrightarrow$$

$$- < x,y > \sqrt{< x,x >}\cdot\sqrt{< y,y >}$$

Ultimele două inegalităţi se pot scrie "împreună în forma

$$|< x,y >|^2 \leq \ < x,x > \cdot < y,y >$$

Prin urmare ceea ce am definit ca $\|x\| = \sqrt{< x,x >}$ verifică "inegalitatea normei",
dacă şi numai dacă este adevărată inegalitatea lui Schwarz
Iată din ce motiv această inegalitate este importantă.

Să considerăm cazul în care spaţiul vectorial V are dimensiune finită $\dim V = n$,
de exemplu $V = \mathbb{R}^n$ cu produsul scalar "canonic"

$$< (a_1, a_2, ..., a_n), (b_1, b_2, ..., b_n) >= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Este bine cunoscută norma asociată

$$\|(a_1, a_2, ..., a_n)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$$

numită "norma euclidiană".
Pare de la sine înţeles că aceasta este o normă, cel puţin în cazul "tri-dimensional" $(n = 2)$

$$\|(a_1, a_2, a_3)\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Totuşi calculele anterioare au arătat că norma asociată unui produs scalar verifică "inegalitatea normei"
dacă şi numai dacă are loc inegalitatea lui Schwarz, care în caz finit dimensional
pentru $x = (a_1, a_2, ..., a_n)$ şi $y = (b_1, b_2, ..., b_n)$ avem

$$|< x,y >|^2 = \left| < \underbrace{(a_1, a_2, ..., a_n)}_{x}, \underbrace{(b_1, b_2, ..., b_n)}_{y} > \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$

$$< x,x >=< \underbrace{(a_1, a_2, ..., a_n)}_{x}, \underbrace{(a_1, a_2, ..., a_n)}_{x} >= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)$$

$$< y,y >=< \underbrace{(b_1, b_2, ..., b_n)}_{y}, \underbrace{(b_1, b_2, ..., b_n)}_{y} >= \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

devine inegalitatea în forma "clasică" Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

care nu pare deloc evidentă (pentru $n \geq 3$), sau cel puţin demonstrarea ei pare să implice calcule laborioase.

Teoremă.Produsul scalar verifică **inegalitatea lui Schwarz** (<u>inegalitatea fundamentală a unui produs scalar</u>)

Pentru orice $x, y \in V$ are loc inegalitatea

$$|< x, y >|^2 \leq \ < x, x > \cdot < y, y >$$

Demonstraţie.
Să observăm că inegalitatea implică doar doi vectori x şi y
Prin urmare putem considera cele două cazuri posibile
i) vectorii x şi y sunt "coliniari" : $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$
ii) vectorii x şi y sunt "necoliniari" , adică sunt liniar independenţi
În cazul i) înlocuind $y = \alpha x$ obţinem

$$|< x, \alpha x >|^2 \leq \ < x, x > \cdot < \alpha x, \alpha x > \qquad \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 \, |< x, x >|^2 \leq \ < x, x > \cdot \alpha^2 < x, x >$$

care este de fapt o egalitate.
Rămâne deci cazul ii) în care vectorii x şi y sunt liniar independenţi.
Reamintim că în inegalitate intervin doar cei doi vectori x şi y .
Deci inegalitatea are loc în spaţiul (vectorial) generat de cei doi vectori, spaţiu de dimensiune 2, cei doi vectori fiind liniar independenţi.
Nu este necesar să notăm acest spaţiu.
Dar să observăm că algoritmul Gram-Schmidt produce o bază ortonormată cu doi vectori (spaţiul are dimensiune 2)
Să-i notăm e_1, e_2. În această bază vectorii x şi y se scriu

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 \qquad \text{şi} \qquad y = b_1 e_1 + b_2 e_2$$

iar produsul scalar se scrie

$$< x, y > = < a_1 e_1 + a_2 e_2, b_1 e_1 + b_2 e_2 >$$

folosim scrierea $< x, y > = x \cdot y$ calculele sunt mai clare

$$< x, y > = x \cdot y = (a_1 e_1 + a_2 e_2) \cdot (b_1 e_1 + b_2 e_2) =$$

$$= a_1 e_1 \cdot b_1 e_1 + a_1 e_1 \cdot b_2 e_2 + a_2 e_2 \cdot b_1 e_1 + a_2 e_2 \cdot b_2 e_2 =$$

baza e_1, e_2. este ortonormată, deci

$$= a_{1b_1} \underbrace{e_1 \cdot e_1}_{1} + a_1 b_2 \underbrace{e_1 \cdot e_2}_{0} + a_2 b_1 \underbrace{e_2 \cdot e_1}_{0} + a_2 b_2 \underbrace{e_2 \cdot e_2}_{1} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

la fel obţinem şi

$$< x, x > = x \cdot x = (a_1 e_1 + a_2 e_2) \cdot (a_1 e_1 + a_2 e_2) = a_1^2 + a_2^2$$
$$< y, y > = y \cdot y = (b_1 e_1 + b_2 e_2) \cdot (b_1 e_1 + b_2 e_2) = b_1^2 + b_2^2$$

iar inegalitatea lui Schwarz devine

$$|< x, y >|^2 \leq \ < x, x > \cdot < y, y >$$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2\right) \left(b_1^2 + b_2^2\right)$$

exact inegalitatea "clasică" Cauchy-Schwarz pentru $n = 2$, pe care am demonstrat-o la început.
■

Comentarii.
Această demonstraţie este destul de "naturală", "constructivă", şi
arată că inegalitatea lui Schwarz implică numai doi vectori, deşi este adevărată pentru orice vectori $x, y \in V$
nu contează ce dimensiune are spaţiul V , contează doar faptul că sunt implicaţi numai doi vectori
(care generează un spaţiu de dimensiune 2).

Să refacem "firul" logic al demonstraţiei.
În mod natural am considerat cazurile

i) vectorii x şi y sunt "coliniari" ii) vectorii x şi y sunt "necoliniari" , adică sunt liniar independenţi
În cazul i) avem doar o simplă egalitate.
În cazul ii) inegalitatea lui Schwarz se rescrie în funcţie de coordonatele vectorilor x şi y într-o bază ortonormată şi

obţinem o inegalitate numerică simplu de demonstrat (inegalitatea Cauchy-Schwarz pentru $n = 2$)

Consecinţă.
Norma asociată unui produs scalar este într-adevăr o normă (verifică inegalitatea normei).
În particular :
Norma "euclidiană" asociată produsului scalar "canonic" pe $\mathbb{R}^n$ este într-adevăr o normă (verifică inegalitatea normei).

Comentarii.
Folosind contextul spaţiilor vectoriale cu produs scalar, rezultă că este suficient să demonstrăm "**inegalitatea Cauchy-Schwarz**"

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

doar pentru $n = 2$ şi rezultă că este adevărată pentru orice $n \geq 2$
Un fapt aparent destul de straniu. La "prima vedere" nu este deloc evident că este suficient cazul $n = 2$
Totuşi să interpretăm acest fapt.
Mai întâi un argument de "calcul"

$$\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}_{B}\right)^2 \leq \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}_{A}\right)\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}_{C}\right)$$

inegalitatea afirmă $B^2 \leq A \cdot C$
Nu contează cum se calculează B , A sau C
Al doilea argument, se observă produse scalare în inegalitate

$$\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}_{<x,y>}\right)^2 \leq \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}_{<x,x>}\right)\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}_{<y,y>}\right)$$

Am folosit notaţia $B^2 \leq A \cdot C$, deoarece aceasta sugerează un calcul de tip "Δ" pentru o ecuaţie de gradul 2.
Astfel ajungem să prezentăm şi demonstraţia "tradiţională" pentru inegalitatea lui Schwarz.

Demonstraţie (varianta 2)
În mod "tradiţional" se prezintă o demonstraţie destul de "elegantă", dar folosind un "truc tehnic" nu tocmai evident.
Considerăm produsul scalar

$$< x + \alpha y, x + \alpha y > \ \geq 0 \quad \text{pentru orice } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$< x, x > + < x, \alpha y > + < \alpha y, x > + < \alpha y, \alpha y > \ \geq 0$$

$$< x, x > +\alpha < x, y > +\alpha < y, x > +\alpha^2 < y, y > \ \geq 0$$

$$< x, x > +2\alpha < x, y > +\alpha^2 < y, y > \ \geq 0 \quad \text{pentru orice } \alpha \in \mathbb{R}$$

avem o funcţie de gradul 2 (funcţie de α) care are semn constant, deci neapărat $\Delta \leq 0$
Adică

$$0 \geq \Delta = (2 < x, y >)^2 - 4 < x, x > \cdot < y, y >= 4\left[\underbrace{< x, y >^2}_{B^2} - \underbrace{< x, x >}_{C} \cdot \underbrace{< y, y >}_{A}\right]$$

care este exact inegalitatea lui Schwarz

$$0 \geq \ < x, y >^2 - < x, x > \cdot < y, y > \quad \Leftrightarrow \quad < x, y >^2 \leq \ < x, x > \cdot < y, y >$$

■

Comentariu.
Este de înţeles motivul pentru această variantă de demonstraţie este prezentată în majoritatea textelor.
Simplă, elegantă, scurtă.
Are însă dezavantajul că pare venită de "nicăieri".
Prima variantă de demonstraţie pe care am prezentat-o, este doar aparent mai lungă.
Are însă avantaje:
- foloseşte elemente fundamentale pentru spaţii cu produs scalar (baza ortonormată)
- este "constructivă", sau "naturală" (aşa ar face un "începător")
- semnalează un fapt interesant asupra inegalităţii numerice Cauchy-Schwarz (cazul $n = 2$ este suficient)

3.2 Serii Fourier - Aplicaţii

Corespunzător scurtei prezentări a seriilor Fourier, sunt relativ puţine aplicaţii ale seriilor Fourier disponibile.

1. Reprezentarea în serie trigonometrică (serie Fourier) a unui semnal periodic.
- calculul coeficienţilor Fourier, pentru funcţii periodice de perioadă 2π , integrabile $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx \text{ pentru } \; n \geq 0 \; , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \; dx \;\; \text{ pentru } \;\; n \geq 1$$

- folosirea unui argument pentru ca o funcţie să admită dezvoltare în serie Fourier, de exemplu teorema lui Dirichlet
- cazuri extrem de simple, în care funcţia se poate scrie ca un polinom trigonometric,
  şi deci polinomul reprezintă exact seria Fourier.
- cazul unei funcţii pare, sau impare, care se dezvoltă în serie de cosinuşi , repsectiv serie de sinuşi
- reprezentarea unei funcţii în serie de cosinuşi, sau serie de sinuşi,
  prin prelungerea funcţiei la o funcţie pară sau impară.

2. Calculul sumei unor serii numerice, pentru care folosind serii de puteri rezultă calcule ce nu pot fi finalizate.

Am folosite câteva <u>ingrediente tehnice</u>.
i)

$$\cos n\pi = (-1)^n \quad , \quad \sin n\pi = 0 \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2k \\ (-1)^k & , \quad n = 2k+1 \end{cases} \qquad , \qquad [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -2 & , \; n = 2k+1 \\ 0 & , \; n = 2k \end{cases}$$

ii) o funcţie periodică $f : \mathbb{R}[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ cu perioadă principală 2π , continuă pe $[-\pi, \pi]$ are limitele laterale

$$f(\pi - 0) = f(\pi) \quad , \quad f(\pi + 0) = f(-\pi + 0) = f(-\pi)$$

- dacă este funcţie pară, atunci este continuă şi în punctele π şi $-\pi$, deoarece

$$f(\pi - 0) = f(\pi) = f(-\pi) \quad , \quad f(\pi + 0) = f(-\pi + 0) = f(-\pi)$$

- dacă este funcţie impară, atunci este continuă şi în punctele π şi $-\pi$ doar dacă

$$f(\pi) = 0 = f(-\pi)$$

deoarece în acest caz

$$f(\pi - 0) = f(\pi) = -f(-\pi) \quad , \quad f(\pi + 0) = f(-\pi + 0) = f(-\pi)$$

şi deci limitele laterale egale $f(\pi) = f(-\pi)$ plus $f(\pi) = -f(-\pi)$ duc la $f(\pi) = 0 = f(-\pi)$

Observaţie.
Caculul coeficienţilor Fourier se face folosind integrale, deci este "<u>liniar</u>" în sensul
dacă a_n, b_n şi c_n, d_n sunt coeficienţii Fourier ai funcţiei f respectiv g , atunci
coeficienţii Fourier ai funcţiei $f+g$ sunt $\alpha_n = (a_n + c_n)$, $\beta_n = (b_n + d_n)$

<u>Demonstraţie</u>.

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{[f(x)+g(x)]\cos nx}_{f(x)\cos nx + g(x)\cos nx}\ dx = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx}_{a_n} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\ dx}_{c_n} = a_n + c_n$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{[f(x)+g(x)]\sin nx}_{f(x)\sin nx + g(x)\sin nx}\ dx = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx}_{b_n} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\ dx}_{d_n} = b_n + d_n$$

■

Exemple.

1.Să se determine seria Fourier asociată funcţiei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = -2 - \cos 5x + 3\pi \sin 7x + (\cos x)^2$$

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x \in [0, \pi] \\ -5 & , \quad x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

3. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

4. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

5. Să se dezvolte în serie de cosinuşi funcţia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

6. Să se dezvolte în serie de sinuşi funcţia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

7. Folosind dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei ...
   să se determine suma seriei numerice ...

<u>Soluţii</u>.

1. Să observăm că în caz funcţia se poate scrie ca o sumă finită de funcţii trigonometrice

$$f(x) = -2 - \cos 5x + 3\pi \sin 7x + (\cos x)^2 =$$

$$-2 - \cos 5x + 3\pi \sin 7x + \frac{1 + \cos 2x}{2} = \underbrace{-\frac{3}{2}}_{a_{0/2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_2} \cos 2x + \underbrace{(-1)}_{a_5} \cos 5x + \underbrace{3\pi}_{a_7} \sin 7x$$

adică un polinom trigonometric, care reprezintă exact seria Fourier a funcţiei f .
Coeficienţii Fourier sunt

$$\frac{a_0}{2} = -\frac{3}{2} \ , \ a_2 = \frac{1}{2} \ , \ a_5 = -1 \ , \ a_7 = 3\pi \ ,$$

toţi ceilalţi coeficienţi Fourier sunt nuli

$$a_1 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ a_6 = 0,\ \ a_n = 0 \ \ n \geq 8 \ , \ b_n = 0 \ \ n \geq 1$$

■

2. Calculăm coeficienţii Fourier folosind definiţia lor

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx \quad \text{pentru} \ \ n \geq 0$$

pentru $n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \underbrace{f(x)}_{-5} dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \underbrace{f(x)} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-5)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\ dx = \frac{-5}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{0} dx}_{\pi} + \frac{2}{\pi}\underbrace{\int_{0}^{\pi} dx}_{\pi} = \frac{-5}{\pi}\pi + \frac{2}{\pi}\pi = -5 + 2 = -3$$

pentru $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \underbrace{f(x)}_{-5}\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{2}\cos nx dx =$$

$$= \frac{-5}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx dx + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx dx = \frac{-5}{\pi}\ \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi}\ \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{-5}{\pi}\left(\frac{\sin 0}{n} - \frac{\sin(-n\pi)}{n}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin n\pi}{n} - \frac{\sin 0}{n}\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \underbrace{f(x)}_{-5}\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{2}\sin nx dx =$$

$$= \frac{-5}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx = \frac{-5}{\pi}\ \frac{-\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi}\ \frac{-\cos nx}{n}\Bigg|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{-5}{\pi}\left(\frac{-\cos 0}{n} - \frac{-\cos(-n\pi)}{n}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos n\pi}{n} - \frac{-\cos 0}{n}\right) = \frac{-5}{\pi}\left(\frac{-1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{-(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n}\left[5 - 5(-1)^n - 2(-1)^n + 2\right] = \frac{7}{\pi n}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{7}{\pi n}\cdot 2 & , \ \ n = 2k+1 \\ 0 & , \ \ n = 2k \end{cases}$$

deci în final, deoarece funcţia verifică condiţiile din teorema lui Dirichlet, pentru orice $x \in [-\pi, \pi]$ în care funcţia este continuă obţinem

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}\sin(2k+1)x = \frac{-3}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{7}{\pi(2k+1)}\sin(2k+1)x$$

funcţia nu este continuă în $x = 0$, limitele laterale sunt $f(0-0) = -5$, $f(0+0) = 2$, deci conform teoremei lui Dirichlet pentru $x = 0$ obţinem

$$\frac{-3}{2} = \frac{-5+2}{2} = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{-3}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{7}{\pi(2k+1)}\underbrace{\sin(2k+1)0}_{0} = \frac{-3}{2}$$

de asemenea funcţia nu este continuă în punctele π şi $-\pi$, pentru care obţinem

$$\frac{f(\pi-0) + f(\pi+0)}{2} = \frac{f(\pi-0) + f(-\pi+0)}{2} = \frac{2 + (-5)}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\frac{-3}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{7}{\pi(2k+1)}\underbrace{\sin(2k+1)\pi}_{0}=\frac{-3}{2}$$

■

3. Să observăm că funcţia $f(x)=x\in[-\pi,\pi]$ este o funcţie impară,
deci toţi coeficienţii Fourier $a_n=0$, $n\geq 0$

Rămân de calcultat coeficienţii

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\;dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\;dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\;dx=\quad\text{prin părţi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{-\cos nx}{n}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}-\int_{0}^{\pi}\underbrace{1}_{(x)'}\underbrace{\frac{-\cos nx}{n}}_{\int\sin nx}\;dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\pi\frac{-(-1)^n}{n}+\int_{0}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)$$

$$=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}+\underbrace{\frac{\sin nx}{n^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}}_{0-0}=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Funcţia este continuă în orice punct $x\in(-\pi,\pi)$, deci conform teoremei lui Dirichlet obţinem

$$x=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$$

Funcţia nu este continuă în $x=\pi$, limitele laterale sunt

$$f(\pi-0)=\pi\;,\quad f(\pi+0)=f(-\pi+0)=-\pi$$

şi conform teoremei lui Dirichlet obţinem

$$0=\frac{\pi+(-\pi)}{2}=\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\underbrace{\sin n\pi}_{0}=0$$

■

4. Să observăm că în acest caz funcţia $f(x)=x^2\in[-\pi,\pi]$ este o funcţie pară,
deci toţi coeficienţii $b_n=0$, $n\geq 0$

Rămân de calculat coeficienţii

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\;dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\;dx\ \text{pentru}\ \ n\geq 0$$

pentru $n=0$ obţinem

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\;dx=\frac{2}{\pi}\;\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3}=\frac{2\pi^2}{3}$$

pentru $n\geq 1$ obţinem

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos nx\;dx=\ \text{prin părţi}\quad=\frac{2}{\pi}\left(\underbrace{x^2\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}}_{0-0}-\int_{0}^{\pi}\underbrace{2x}_{(x^2)'}\underbrace{\frac{\sin nx}{n}}_{\int\cos nx}\;dx\right)=$$

$$= \frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\sin nx dx = \text{ prin părţi } = \frac{4}{\pi n}\left(x\frac{-\cos nx}{n}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \underbrace{1}_{(x)'}\underbrace{\frac{-\cos nx}{n}}_{\int \sin nx}dx \right) =$$

$$= \frac{4}{\pi n}\left(\pi\frac{-(-1)^n}{n} + \int_0^\pi \frac{-\cos nx}{n}dx\right) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} - \underbrace{\frac{\sin nx}{n^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}}_{0-0}\right) = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Funcţia este continuă în orice punct $x \in [-\pi, \pi]$, deci conform teoremei lui Dirichlet obţinem

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

■

5. O funcţie are dezvoltare în serie de cosinuşi numai dacă funcţia este pară,
deci în acest caz trebuie să prelungim funcţia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ la o funcţie pară $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \ , \ x \in [0, \pi] \\ f(-x) = -x \ , \ x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Prin urmare coeficienţii b_n sunt toţi nuli. Rămân de calculat coeficienţii

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \ dx \text{ pentru } n \geq 0$$

pemtru $n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \ dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

pentru $n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx \ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx \ dx = \text{ prin părţi } =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{x\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}}_{0-0} - \int_0^\pi \underbrace{1}_{(x)'}\underbrace{\frac{\sin nx}{n}}_{\int \cos nx} \ dx \right) = -\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi \frac{\sin nx}{n}dx\right) = -\frac{2}{\pi} \ \frac{-\cos nx}{n^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} \ , \ n = 2k+1 \\ 0 \ , \ n = 2k \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} \\ 0 \end{cases}$$

Funcţia este continuă în orice punct $x \in [-\pi, \pi]$, deci conform teoremei lui Dirichlet obţinem

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k+1)^2}\cos(2k+1)x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x$$

■

6. O funcţie are dezvoltare în serie de sinuşi numai dacă funcţia este impară,
deci în acest caz trebuie să prelungim funcţia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ la o funcţie impară $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ , \ x \in [0, \pi] \\ -f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 \ , \quad x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Prin urmare coeficienţii a_n sunt toţi nuli. Rămân de calculat coeficienţii

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\ dx = \text{ prin părţi } =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x^2 \frac{-\cos nx}{n}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} \underbrace{2x}_{(x^2)'} \underbrace{\frac{-\cos nx}{n}}_{\int \sin nx} dx \right) = \frac{2}{\pi}\left(\pi^2 \frac{-\cos n\pi}{n} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos nx dx \right) =$$

$$= \text{ prin părţi } = 2\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n}\left(\underbrace{x\sin n|_{x=0}^{x=\pi}}_{0-0} - \int_0^{\pi} \underbrace{1}_{(x)'} \underbrace{\frac{\sin nx}{n}}_{\int \cos nx} dx \right) =$$

$$= 2\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} -\sin nx dx = 2\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^2}\ \frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} =$$

$$= 2\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^2}\left(\frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\cos 0}{n} \right) = 2\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}\left[(-1)^n - 1\right] =$$

$$= 2\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}2 \ \text{ pentru } \ n = 2k+1$$

Funcţia este continuă în orice punct $x \in (-\pi, \pi)$, deci conform teoremei lui Dirichlet obţinem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{k=0}^{\infty}\left[2\pi\frac{(-1)^{2k=1+1}}{2k+1} + \frac{8}{\pi(2k+1)^3} \right]\sin(2k+1)x$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{2\pi}{2k+1} + \frac{8}{\pi(2k+1)^3} \right]\sin(2k+1)x$$

Funcţia nu este continuă în $x = \pi$, limitele laterale sunt

$$f(\pi - 0) = \pi^2 \ , \quad f(\pi + 0) = f(-\pi + 0) = -\pi^2$$

şi conform teoremei lui Dirichlet obtţinem

$$0 = \frac{\pi^2 + (-\pi^2)}{2} = \frac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{2\pi}{2k+1} + \frac{8}{\pi(2k+1)^3} \right]\underbrace{\sin(2k+1)\pi}_{0} = 0$$

■

7. Putem folosi rezultatele obţinute până acum.

În <u>exemplul 3</u> am obţinut pentru $x \in (-\pi, \pi)$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$$

pentru $x = \frac{\pi}{2}$ obţinem

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin n\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1}(-1)^{2k+1+1} \underbrace{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}_{(-1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1}(-1)^k$$

deci am obţinut suma seriei

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}(-1)^k = \frac{\pi}{4}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - .... = \frac{\pi}{4}$$

În exemplul 4 am obţinut pentru $x \in [-\pi, \pi]$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$$

pentru $x = 0$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos n0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{12}$$

Rescriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

şi obţinem

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

pe de altă parte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

deci

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

de unde rezultă

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Putem obţine aceleaşi sume folosind
În exemplul 5 am obţinut pentru $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x$$

deci pentru $x = 0$ obţinem

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \underbrace{\cos(2k+1)0}_{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

rezultă

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}$$

Deci am obţinut o suma unei serii numerice.
Putem obţine şi suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...$$

deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

şi deci

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{S} = \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{S} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}}_{\frac{\pi^2}{8}}$$

rezultă

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$$

În exemplul 6 am obţinut, pentru $x \in (-\pi, \pi)$

$$x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2\pi}{2k+1} + \frac{8}{\pi(2k+1)^3}\right] \sin(2k+1)x$$

deci pentru $x = \frac{\pi}{2}$ obţinem

$$(\frac{\pi}{2})^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2\pi}{2k+1} + \frac{8}{\pi(2k+1)^3}\right] \underbrace{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}_{(-1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi(-1)^k}{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{\pi(2k+1)^3}$$

$$\frac{\pi^2}{4} = 2\pi\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}}_{\frac{\pi}{4}} + \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

deci

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^3}{32} - \frac{\pi}{16}$$

■

Serii Fourier - Întrebări Test

Iată câteva întrebări simple, cu care puteţi "verifica" capacitatea de a vă "orienta" asupra Seriilor Fourier. Puteţi adăuga şi alte întrebări ce vi se par relevante.

Este funcţia $f(x) = \sin 3x - 4\sin 2x$ o funcţie pară ?

Este funcţia $f(x) = \cos 2x + \cos 3x$ o funcţie impară ?

Cum este funcţia $f(x) = \cos 3x - 4\sin 2x$ pară sau impară ?

Cum trebuie prelungită la $[-\pi, \pi]$ funcţia $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ pentru a fi o funcţie impară ?

Cum trebuie prelungită la $[-\pi, \pi]$ funcţia $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ pentru a fi o funcţie pară ?

Care este perioada principală a funcţiei $f(x) = \cos 2x + \sin 3x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Care este seria Fourier asociată unui polinom trigonometric ?

Care este seria Fourier asociată funcţiei $f(x) = 2 - \sin 2x + 5\cos 3x$?

Cât este coeficientul Fourier a_0 pentru funcţia $f(x) = x - 2x^3 + 3x^7$?

Cât este coeficientul Fourier a_8 pentru funcţia $f(x) = x^3 - x^5 + 2x^9$?

Cât este coeficientul Fourier a_1 pentru funcţia $f(x) = 1 + x^2 - x^4 + 2x^6$, $x \in [-\pi, \pi]$?

Cât este coeficientul Fourier a_9 pentru funcţia $f(x) = x^4 - x^6 + 2x^8$, $x \in [-\pi, \pi]$?

Cum arată dezvoltarea în serie de sinuşi a funcţiei $f(x) = 1 + x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$?

Cum arată dezvoltarea în serie de cosinuşi a funcţiei $f(x) = x - x^3$, $x \in [-\pi, \pi]$?

Cât este norma $\|\|_2$ a funcţiei $f(x) = 1 - \cos x - \sin x + \cos 2x + 3\sin 3x$, $x \in [-\pi, \pi]$?

Cât este norma $\|\|_2$ a funcţiei $f(x) = 2$, $x \in [-\pi, \pi]$?

Cât sunt limitele laterale ale funcţiei $f(x) = x - x^3$ în $x = \pi$? Este f continuă în $x = \pi$?

Cât sunt limitele laterale ale funcţiei $f(x) = x^2 - x^4$ în $x = \pi$? Este f continuă în $x = \pi$?

Se prelungeşte funcţia $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ la o funcţie impară pe $[-\pi, \pi]$.
Este prelungirea continuă în $x = 0$?

Are funcţia $f(x) = x^3$ dezvoltare în serie Fourier în punctul $x = \pi$? Folosiţi teorema lui Dirichlet.

Are funcţia $f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \in [0, \pi] \\ x-1 & , x \in [-\pi, 0) \end{cases}$ dezvoltare în serie Fourier în punctul $x = 0$?
Folosiţi teorema lui Dirichlet.

4.1 Tranformata Laplace

Definiţie. Se numeşte funcţie (semnal) **original** sau **original Laplace**, o funcţie $f = f(t)$, care verifică următoarele:

i) $f(t) = 0$ pentru $t < 0$, (dacă t reprezintă "timpul", se poate interpreta că nu considerăm "trecutul")

ii) semnalul este continuu (eventual continuu pe porţiuni) pentru $t \geq 0$

iii) "nu creşte mai repede ca o exponenţială", sau "este majorată de o exponenţială cu exponent de grad 1 e^{bt} " mai precis există constantele $M > 0$ şi $b \geq 0$ astfel încât

$$(*) \qquad |f(t)| \leq M \cdot e^{bt} \text{ pentru orice } t \geq 0 \text{ , unde } M > 0 \text{ şi } b \geq 0$$

Comentariu. Constantele $M > 0$ şi $b \geq 0$, nu sunt unice pentru funcţia f .

Suntem interesaţi în alegerea unei valori cât mai mici pentru $b \geq 0$, chiar dacă aceasta implică alegerea unei valori mari pentru $M > 0$

Vom observa acest fapt în exemplele următoare.

Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749 – 1827) matematician şi astronom francez.
A iniţiat studiul mecanii clasice pe baza calcului diferenţial şi integral. Formulează ecuaţia "Laplace" , transformarea "Laplace" şi operatorul "Laplace" (laplacian) cu largi aplicaţii în matematică.

Exemple.

i) funcţia "treaptă unitate" sau funcţia lui Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ 1 & , \ t \geq 0 \end{cases}$$

Demonstraţie.

Putem alege $M = 1$ şi $b = 0$, obţinem

$$|u(t)| \leq 1 = 1 \cdot e^{ot}$$

ii) funcţiile putere sau polinomiale

$$f(t)=\begin{cases}0 & , \; t<0\\ t^n & , \; t\geq 0\end{cases} \qquad \text{sau} \quad f(t)=\begin{cases}0 & , \; t<0\\ t^\alpha & , \; t\geq 0\end{cases} \qquad , \text{ pentru } \; \alpha>0$$

Demonstraţie.
Folosim limita cunoscută (se calculează folosind l'Hospital în mod succesiv)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^\alpha}{e^{bt}}=0 \;\text{ pentru orice } \alpha>0 \text{ şi } \; b>0$$

Deci pentru orice $b>0$ putem alege $M>0$ astfel încât

$$|t^n|\leq M\cdot e^{bt} \;\text{ pentru orice } t\geq 0 \;\;,\;\; \text{respectiv} \;\; |t^\alpha|\leq M\cdot e^{bt} \;\text{ pentru orice } t\geq 0$$

iii) funcţiile trigonometrice $\sin\alpha t$, $\cos\alpha t$
Demonstraţie.
Putem alege $M=1$ şi $b=0$, obţinem

$$|\sin\alpha t|\leq 1=1\cdot e^{0t}=1 \quad , \quad |\cos\alpha t|\leq 1=1\cdot e^{0t}=1$$

iv) orice funcţie mărginită $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ este original Laplace.
De exemplu

$$\frac{1}{1+t^2} \quad , \quad \frac{t}{t+1} \quad , \quad \operatorname{arctg} t \quad , \quad \frac{1}{1+e^t}$$

Demonstraţie.
o funcţie este mărginită dacă există $M>0$ astfel încât

$$|f(t)|\leq M \qquad \text{pentru orice } t\in[0,+\infty)$$

prin urmare putem alege acest M şi $b=0$ pentru a obţine

$$|f(t)|\leq M=M\cdot e^{0t} \qquad \text{pentru orice } t\in[0,+\infty)$$

v) funcţii care nu sunt original Laplace

$$f(t)=\begin{cases}0 & , \; t<0\\ e^{t^2} & , \; t\geq 0\end{cases} \qquad , \quad g(t)=\begin{cases}0 & , \; t\leq 0\\ \frac{1}{t} & , \; t>0\end{cases}$$

Demonstraţie.
În mod evident e^{t^2} nu este majorată de $M\cdot e^{bt}$, indiferent de alegerea $b>0$ şi $M>0$ deoarece

$$\lim_{t\to\infty}\frac{e^{bt}}{e^{t^2}}=0 \;\text{ pentru orice } \; b\geq 0$$

deci $f=f(t)$ nu este original Laplace.
Funcţia $g=g(t)$ este mărginită la "infinit", dar are limită infinită în $t=0$

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}=\frac{1}{+0}=+\infty \quad , \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}=\frac{1}{+\infty}=0$$

deci nu poate fi majorată de o exponenţială (care este continuă în $t=0$)

$$\frac{1}{t}\leq M\cdot e^{bt} \;\text{ nu are loc pentru } t\in(0,1) \text{ , adică în vecinătatea lui } 0$$

■

Oliver Heaviside (1850 – 1925) inginer, matematician şi fizician englez autodidact. A aplicat numerele complexe la studiul curentului electric. Inventează tehnici matematice pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale - echivalente cu transformarea Laplace. Reformulează ecuaţiile lui Maxwell în termeni de forţe electrice, magnetice şi flux de energie.

Comentariu.

Pratic putem considera că funcţiile original sunt definite numai pentru $t \geq 0$.

Astfel orice funcţie care verifică inegalitatea (*) poate fi considerată original Laplace, dacă se ignoră valorile pentru $t < 0$.

Sau putem înmulţi cu funcţia treaptă unitate $u(t)$ şi astfel obţinem funcţii care sunt constante zero pentru $t < 0$

$u(t) \cdot t^n$, $u(t) \cdot \sin \alpha t$, $u(t) \cdot \cos \alpha t$, $u(t) \cdot e^{\alpha t}$

$$u(t)t^n = \begin{cases} 0 \ , \ t < 0 \\ t^n \ , \ t \geq 0 \end{cases} \quad u(t)\sin \alpha t = \begin{cases} 0 \ , \ t < 0 \\ \sin \alpha t \ , \ t \geq 0 \end{cases} \quad u(t)\cos \alpha t = \begin{cases} 0 \ , \ t < 0 \\ \cos \alpha t \ , \ t \geq 0 \end{cases} \quad u(t)e^{\alpha t} = \begin{cases} 0 \ , \ t < 0 \\ e^{\alpha t} \ , \ t \geq 0 \end{cases}$$

Observaţie.

Mulţimea funcţiilor original este un spaţiu vectorial.

Demonstraţie.

Fie f, g funcţii original cu constantele respective $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$

Putem alege $M = \max(M_1, M_2)$ şi $b = \max(b_1, b_2)$ şi obţinem

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq M_1 \cdot e^{b_1 t} + M_2 \cdot e^{b_2 t} \leq M \cdot e^{bt} + M \cdot e^{bt} = 2M \cdot e^{bt}$$

ceea ce arată că funcţia $f + g$ este original Laplace.

Pentru orice scalar $\beta \in \mathbb{R}$ putem scrie

$$|\beta f(t)| = |\beta| \cdot |f(t)| \leq |\beta| \cdot M_1 \cdot e^{b_1 t}$$

deci funcţia βf este original Laplace.

■

Teoremă. Pentru orice funcţie original f şi orice $z \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re} z > b$, următoarea integrală improprie este convergentă

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt$$

Demonstraţie.

Demonstrăm că integrala improprie este absolut convergentă, deci integrala este convergentă.

Absolut convergentă înseamnă integrala improprie

$$\int_0^{+\infty} \left|f(t)e^{-zt}\right| dt \quad \text{este convergentă}$$

Folosim criteriul de convergenţă de comparaţie cu inegalităţi. Pentru $z = y + iy \in \mathbb{C}$ obţinem

$$e^{-zt} = e^{-(x+iy)t} = e^{-xt}e^{-iyt} \ \text{ şi deci } \ \left|e^{-zt}\right| = \left|e^{-xt}e^{-iyt}\right| = \left|e^{-xt}\right| \cdot \underbrace{\left|e^{-iyt}\right|}_{1} = e^{-xt}$$

Funcţia f este original Laplace, deci $|f(t)| \leq M \cdot e^{bt}$ şi obţinem

$$\text{(i)} \quad \left|f(t)e^{-zt}\right| = |f(t)| \cdot \left|e^{-zt}\right| = |f(t)| \cdot e^{-xt} \leq M \cdot e^{bt} \cdot e^{-xt}$$

iar pentru $x = \operatorname{Re} z > b$ obţinem

$$\text{(ii)} \quad \int_0^{+\infty} M \cdot e^{bt} \cdot e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} M \cdot e^{(b-x)t}dt = M\left[\frac{1}{b-x}e^{(b-x)t}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty}\right] = \frac{M}{b-x}\left[\underbrace{\lim_{t\to+\infty} e^{(b-x)t}}_{0 \text{ deoarece } (b-x)t<0} - e^0\right] = \frac{M}{x-b}$$

Din (i) şi (ii) conform criteriului de comparaţie cu inegalităţi (pentru integrale improprii) rezultă că integrala

$$\int_0^{+\infty} \left|f(t)e^{-zt}\right| dt \quad \text{este convergentă}$$

■

Comentariu.

Integrala improprie depinde de parametrul " z " , care poate avea valori numere complexe.

Deci este o integrală "cu parametru" şi generează o funcţie complexă (funcţie de variabilă complexă şi cu valori complexe)

$$z \longrightarrow \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt$$

Definiţie.

Pentru o funcţie original f cu constante M, b se defineşte **transformata Laplace** a funcţiei f

$$\mathcal{L}(f) \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt \quad \text{pentru} \quad z \in \mathbb{C} \ \text{ cu } \ \operatorname{Re} z > b$$

care este o funcţie cu valori complexe, definită pentru semiplanul $\{\operatorname{Re} z > b\}$.

Pentru a nu complica notaţiile, uneori notăm $L(z) \overset{not}{=} \mathcal{L}(f)$ pentru a evidenţia că este o funcţie complexă de variabilă $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > b$

Se numeşte **operatorul Laplace** sau **transformarea Laplace** , notată $\mathcal{L}$ corespondenţa

$$f \ \text{ funcţie (semnal) original} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}(f) \ \underbrace{\text{transformată Laplace}}_{\text{imagine}}$$

$$f(t) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}(f(t)) \overset{not}{=} L(z)$$

Transformata Laplace $\mathcal{L}(f)$ se mai numeşte şi "**imaginea**" funcţiei original.

Notaţii.

Pornind de la notaţia $f = f(t)$ care înseamnă: mărimea numită " f " depinde de parametrul " t ",

vom folosi:

- $f(t)$ pentru a reprezenta un semnal original (depinde de t)
- $\mathcal{L}(f(t))$ pentru a reprezenta transformata Laplace a semnalului $f(t)$
- $L(z)$ pentru a reprezenta o transformată Laplace atunci când nu este important a cui trasnformată este, dar dorim să marcăm faptul că transformata Laplace este o funcţie complexă de variabilă complexă " z "

Notaţia tradiţională folosită în fizică sau alte domenii tehnice, este "s" în loc de "z" pentru variabila transformatei Laplace.

$$\mathcal{L}(f) \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad \text{pentru} \quad s \in \mathbb{C} \ \text{ cu } \ \operatorname{Re} s > b$$

Având în vedere notaţia folosită în analiza complexă $z = x + iy$ pentru numere complexe,

am considerat că folosirea acestei notaţii poate uşura înţelegerea.

Odată înţelese diferitele aspecte şi proprietăţi ale transformatei Laplace, orice altă notaţie poate fi urmărită relativ uşor.

Tot în mod tradiţional, transformata Laplace a unui semnal original $f(t)$ se notează $F(s)$.

Din nefericire şi transformata Fourier a unui semnal $f(t)$ se notează $F(x)$

Am considerat că este mai sugestiv să notăm

- $f(t)$ şi $\mathcal{L}(f(t)) = L(z)$ pentru transformata Laplace
- $f(t)$ şi $\mathcal{F}(f(t)) = F(x)$ pentru transformata Fourier

Comentariu.

În matematică sunt folosite mai multe denumiri pentru conceptul de " funcţie ", pentru a deosebi mai uşor anumite caracteristici.

Pentru a elimina confuzia generată de denumiri diferite pentru acelaşi concept, precizăm denumirile frecvent utilizate.

- <u>funcţie</u> - <u>aplicaţie</u> - <u>corespondenţă</u> : pentru orice tip de funcţie $f : A \to B$
- <u>funcţie numerică</u> : pentru funcţii cu valori numere (naturale, întregi, raţionale, reale, complexe)

funcţie reală : dacă valorile sunt numere reale
funcţie complexă : dacă valorile sunt numere complexe

- aplicaţie liniară : dacă este "liniară" (pe un spaţiu vectorial = spaţiu liniar) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(\alpha x)=\alpha f(x)$
- funcţională : dacă asociază unei funcţii o valoare numerică, de exemplu "integrala definită" (integrala Riemann) asociază unei funcţii f (integrabile) valoarea integralei $\int_a^b f(t)dt$
- operator : dacă asociază unei funcţii f o altă funcţie g
  de exemplu
  "derivarea" asociază unei funcţii $g(t)$ (derivabile) derivata sa $g'(t)$
  transformarea Laplace asociază unei funcţii $f(t)$ (original) transformata sa Laplace $\mathcal{L}(f(t))$
  transformarea Fourier asociază unei funcţii $f(t)$ transformata sa Fourier $\mathcal{F}(f(t))$

Observaţie.
Atenţie ! fiecare transformată Laplace are propriul domeniu de definiţie, semiplanul corespunzător $\{\operatorname{Re} z > b\}$
Prin urmare putem aduna sau înmulţi transformate Laplace dar având în vedere domeniul comun de definiţie.
Pentru f, g funcţii original cu constantele respective $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$
Putem alege $b = \max(b_1, b_2)$ şi obţinem

$$\mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g) \quad \text{şi} \quad \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

definite pe semiplanul $\{\operatorname{Re} z > b\}$, cu $b = \max(b_1, b_2)$

Observaţie.
Operatorul Laplace (transformarea Laplace) este un operator liniar

$$\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g) \quad , \quad \mathcal{L}(\alpha f) = \alpha \mathcal{L}(f) \quad \text{pentru orice } \alpha \in \mathbb{R}$$

Demonstraţie.
Transformarea Laplace este definită de o integrală, care este operator (aplicaţie) liniar, deci

$$\mathcal{L}(f+g) = \int_0^{+\infty} [f(t)+g(t)]\, e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} \left[f(t)e^{-zt} + g(t)e^{-zt}\right] dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt + \int_0^{+\infty} g(t)e^{-zt} dt = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$$

$$\mathcal{L}(\alpha f) = \int_0^{+\infty} \alpha f(t) e^{-zt} dt = \alpha \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt = \alpha \mathcal{L}(f)$$

■

În cele ce urmează prezentăm transformatele Laplace pentru funcţii original "elementare".

Folosim notaţia "strictă" $u(t) \cdot f$ sau notaţia (mai practică) care omite $u(t)$ şi subînţelege că funcţiile sunt definite numai pentru $t > 0$

$u(t) = 1$, $M = 1$, $b = 0$, $\mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{z}$ definită pe semiplanul $\{\operatorname{Re} z > 0\}$

$u(t) \cdot e^{\alpha t} = e^{\alpha t}$ $\alpha \geq 0$, $M = 1$, $b = \alpha$, $\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \dfrac{1}{z - \alpha}$ definită pe semiplanul $\{\operatorname{Re} z > \alpha\}$

$u(t) \cdot e^{-\alpha t} = e^{-\alpha t}$ $\alpha \geq 0$, $M = 1$, $b = 0$, $\mathcal{L}(e^{-\alpha t}) = \dfrac{1}{z + \alpha}$ definită pe semiplanul $\{\operatorname{Re} z > 0\}$

$u(t) \cdot \cos \alpha t = \cos \alpha t$, $M = 1$, $b = 0$, $\mathcal{L}(\cos \alpha t) = \dfrac{z}{z^2 + \alpha^2}$ definită pe semiplanul $\{\operatorname{Re} z > 0\}$

$u(t) \cdot \sin \alpha t = \sin \alpha t$, $M = 1$, $b = 0$, $\mathcal{L}(\sin \alpha t) = \dfrac{\alpha}{z^2 + \alpha^2}$ definită pe semiplanul $\{\operatorname{Re} z > 0\}$

$u(t){\cdot}t^n = t^n \quad , \quad M>0 \quad , \quad b>0 \quad , \quad \mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{z^{n+1}}$ definită pe semiplanul $\{\operatorname{Re} z > 0\}$

$u(t){\cdot}t^\alpha = t^\alpha \quad \alpha>0 \,, \quad M>0 \quad , \quad b>0 \quad , \quad \mathcal{L}(t^\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}$ definită pe semiplanul $\{\operatorname{Re} z > 0\}$

Pentru funcţia t^n sau t^α pentru orice $b>0$ putem alege $M>0$ suficient de mare, deci domeniul transformatei Laplace este $\{\operatorname{Re} z > 0\}$

Funcţiile complexe obţinute ca transformate Laplace, sunt în mod evident definite pe domenii mai mari din $\mathbb{C}$

Dar ca transformate Laplace, aceste funcţii complexe sunt definite numai pe semiplanele corespunzătoare.

Demonstraţie.

1)

$$\mathcal{L}(u(t)) = \mathcal{L}(1) = \int_0^{+\infty} 1\cdot e^{-zt}dt = \frac{1}{-z}e^{-zt}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{-1}{z}\Bigg[\underbrace{\lim_{t\to+\infty} e^{-zt}}_{0} - e^0\Bigg] = \frac{1}{z}$$

deoarece

$$\lim_{t\to+\infty}\left|e^{-zt}\right| = \lim_{t\to+\infty}\left|e^{-(x+iy)t}\right| = \lim_{t\to+\infty}\left|e^{-xt}\right|\cdot\underbrace{\left|e^{-iyt}\right|}_{1} = \lim_{t\to+\infty} e^{-xt} = e^{-\infty} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to+\infty} e^{-zt} = 0$$

2)

$$\mathcal{L}(u(t)\cdot e^{\alpha t}) = \mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\cdot e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} e^{t(\alpha-z)}dt = \frac{1}{\alpha-z}e^{t(\alpha-z)}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{\alpha-z}\Bigg[\underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{t(\alpha-z)}}_{0} - e^0\Bigg] = \frac{1}{z-\alpha}$$

deoarece $x = \operatorname{Re} z > \alpha$

$$\lim_{t\to+\infty}\left|e^{t(\alpha-z)}\right| = \lim_{t\to+\infty}\left|e^{(\alpha-x-iy)t}\right| = \lim_{t\to+\infty}\left|e^{(\alpha-x)t}\right|\cdot\underbrace{\left|e^{-iyt}\right|}_{1} = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ \text{deoarece } (\alpha-x)t<0}} e^{(\alpha-x)t} = e^{-\infty} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to+\infty} e^{-zt} = 0$$

$$\mathcal{L}(u(t)\cdot e^{-\alpha t}) = \mathcal{L}(e^{-\alpha t}) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cdot e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} e^{t(-\alpha-z)}dt = \frac{1}{-\alpha-z}e^{t(-\alpha-z)}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} =$$

$$= \frac{1}{-\alpha-z}\Bigg[\underbrace{\lim_{t\to+\infty} e^{t(-\alpha-z)}}_{0} - e^0\Bigg] = \frac{1}{z+\alpha}$$

3) integrăm prin părţi ambele integrale ca un "sistem liniar"

$$\mathcal{L}(u(t)\cdot\cos\alpha t) = \mathcal{L}(\cos\alpha t) = \int_0^{+\infty}\cos\alpha t\cdot e^{-zt}dt \overset{\text{părţi}}{=} \underbrace{\left[\cos\alpha t\frac{e^{-zt}}{-z}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty}\right]}_{\frac{1}{z}} - \underbrace{\int_0^{+\infty} -\alpha\sin\alpha t\frac{1}{-z}e^{-zt}dt}_{\frac{\alpha}{z}\mathcal{L}(\sin\alpha t)}$$

$$\mathcal{L}(u(t)\cdot\sin\alpha t) = \mathcal{L}(\sin\alpha t) = \int_0^{+\infty}\sin\alpha t\cdot e^{-zt}dt \overset{\text{părţi}}{=} \underbrace{\left[\sin\alpha t\frac{e^{-zt}}{-z}\right]_{t=0}^{t\to\infty}}_{0} - \underbrace{\int_0^{+\infty}\alpha\cos\alpha t\frac{1}{-z}e^{-zt}dt}_{-\frac{\alpha}{z}\mathcal{L}(\cos\alpha t)}$$

calculăm limitele corespunzătoare, $x = \operatorname{Re} z > 0$

$$\lim_{t\to+\infty}\left|\cos\alpha t\cdot e^{-zt}\right| = \lim_{t\to+\infty}\left|\cos\alpha t\right|\cdot\left|e^{-zt}\right| \le \lim_{t\to+\infty}\left|e^{-zt}\right| = \lim_{t\to+\infty} e^{-xt} = e^{-\infty} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to+\infty}\cos\alpha t\cdot e^{-zt} = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left|\sin\alpha t\cdot e^{-zt}\right| = \lim_{t\to+\infty}\left|\sin\alpha t\right|\cdot\left|e^{-zt}\right| \le \lim_{t\to+\infty}\left|e^{-zt}\right| = \lim_{t\to+\infty} e^{-xt} = e^{-\infty} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to+\infty}\sin\alpha t\cdot e^{-zt} = 0$$

deci

$$0\left[\cos\alpha t\frac{e^{-zt}}{-z}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty}\right]=\lim_{t\to+\infty}\frac{\cos\alpha t\cdot e^{-zt}}{-z}-\cos\alpha 0\frac{e^{-z0}}{-z}=0+\frac{1}{z}$$

$$\left[\sin\alpha t\frac{e^{-zt}}{-z}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sin\alpha t\cdot e^{-zt}}{-z}-\sin\alpha 0\frac{e^{-z0}}{-z}=0-0=0$$

obţinem un sistem liniar

$$\begin{cases}\mathcal{L}(\cos\alpha t)=\frac{1}{z}-\frac{\alpha}{z}\mathcal{L}(\sin\alpha t)\\ \mathcal{L}(\sin\alpha t)=\frac{\alpha}{z}\mathcal{L}(\cos\alpha t)\end{cases}$$

rezultă

$$\mathcal{L}(\cos\alpha t)=\frac{1}{z}-\frac{\alpha}{z}\frac{\alpha}{z}\mathcal{L}(\cos\alpha t)\quad\Rightarrow\quad\mathcal{L}(\cos\alpha t)\left(1+\frac{\alpha^2}{z^2}\right)=\frac{1}{z}\quad\Rightarrow\quad\mathcal{L}(\cos\alpha t)=\frac{z}{z^2+\alpha^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin\alpha t)=\frac{\alpha}{z}\mathcal{L}(\cos\alpha t)=\frac{\alpha}{z}\frac{z}{z^2+\alpha^2}=\frac{\alpha}{z^2+\alpha^2}$$

4) integrăm prin părţi

$$\mathcal{L}(u(t)\cdot t^n)=\mathcal{L}(t^n)=\int_0^{+\infty}t^n\cdot e^{-zt}dt\overset{\text{părţi}}{=}\underbrace{\left[t^n\frac{e^{-zt}}{-z}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty}\right]}_{0}-\int_0^{+\infty}nt^{n-1}\frac{e^{-zt}}{-z}dt=\frac{n}{z}\underbrace{\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-zt}dt}_{\mathcal{L}(t^{n-1})}$$

calculăm limita

$$\lim_{t\to+\infty}\left|t^ne^{-zt}\right|=\lim_{t\to+\infty}t^n\left|e^{-zt}\right|=\lim_{t\to+\infty}t^ne^{-xt}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^n}{e^{xt}}=0$$

deci

$$\left[t^n\frac{e^{-zt}}{-z}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty}\right]=\lim_{t\to+\infty}t^n\frac{e^{-zt}}{-z}-0^n\frac{e^{-z0}}{-z}=0$$

şi în final obţinem o relaţie pe care o aplicăm succesiv

$$\mathcal{L}(t^n)=\frac{n}{z}\underbrace{\mathcal{L}(t^{n-1})}=\frac{n}{z}\frac{n-1}{z}\underbrace{\mathcal{L}(t^{n-2})}=\frac{n}{z}\frac{n-1}{z}\frac{n-2}{z}\underbrace{\mathcal{L}(t^{n-3})}=...=\frac{n(n-1)...2\cdot 1}{z^n}\underbrace{\mathcal{L}(t^{n-n})}_{\mathcal{L}(1)}=\frac{n!}{z^n}\frac{1}{z}=\frac{n!}{z^{n+1}}$$

pentru $\alpha>0$ integrăm prin părţi în acelaşi mod şi obţinem

$$\mathcal{L}(u(t)\cdot t^\alpha)=\mathcal{L}(t^\alpha)=\int_0^{+\infty}t^\alpha\cdot e^{-zt}dt\overset{\text{părţi}}{=}\underbrace{\left[t^\alpha\frac{e^{-zt}}{-z}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty}\right]}_{0}-\int_0^{+\infty}\alpha t^{\alpha-1}\frac{e^{-zt}}{-z}dt=\frac{\alpha}{z}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-zt}dt$$

apoi scriem această relaţie

$$L(z)=\mathcal{L}(t^\alpha)=\frac{\alpha}{x}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-zt}dt$$

pentru $z=x+iy=x>0$ $(y=0)$ şi obţinem

$$L(x)=\frac{\alpha}{x}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-xt}dt=$$

apoi facem schimbarea de variabilă $tx=u$, $t=\frac{1}{x}u$ $dt=\frac{1}{x}du$

$$=\frac{\alpha}{x}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}}u^{\alpha-1}e^{-u}\frac{1}{x}du=\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\underbrace{\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}du}=\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}$$

Am obţinut $L(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}$ pentru $x>0$

$$L(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}} \quad \text{pentru orice} \quad x>0$$

Transformata Laplace $L(z)$ este o functie olomorfă, la fel şi funcţia $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}$,
aceste funcţii coincid pentru orice $z=x+i0$, $x>0$, atunci în mod necesar cele două funcţii olomorfe coincid peste tot

$$\mathcal{L}(t^{\alpha})=L(z)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}} \quad \text{penrtu orice } z \text{ cu } \operatorname{Re} z>0$$

■

Funcţia Γ "gama" se defineşte pentru $\alpha>0$

$$\Gamma(\alpha)\overset{def}{=}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

Teoremă.
Transformata Laplace este o funcţie olomorfă (derivabilă) pe semiplanul de definiţie. $\{\operatorname{Re} z>b\}$

Nu prezentăm, demonstraţia.

Observaţie.
Orice transformată Laplace are limita zero la "infinit"

$$\lim_{\operatorname{Re} z\to+\infty}\mathcal{L}(f)=\lim_{\operatorname{Re} z\to+\infty}L(z)=0$$

Demonstraţie.
Fie deci f original Laplace cu constantele $M>0$ şi $b\geq 0$, $z=x+iy$, $x=\operatorname{Re} z\to+\infty$

$$|\mathcal{L}(f)|=\left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt\right|\leq\int_0^{+\infty}\left|f(t)e^{-zt}\right|dt\leq\int_0^{+\infty} M\cdot e^{bt}e^{-xt}dt=M\int_0^{+\infty} e^{t(b-x)}dt=$$

$$=M\left[\frac{1}{b-x}e^{t(b-x)}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty}\right]=\frac{M}{b-x}\left[\underbrace{\lim_{t\to+\infty}e^{t(b-x)}}_{0}-e^{0}\right]=\frac{M}{x-b}\underset{x=\operatorname{Re} z\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{M}{+\infty}=0$$

■

Proprietăţi de calcul pentru transformarea Laplace.

Toate proprietăţile care urmează, sunt folosite pentru a exprima transformata Laplace a unei "perturbări" sau "modificări" a semnalului $f(t)$
în funcţie de transformata Laplace a semnalului $f(t)$.

Considerăm $f=f(t)$ funcţie original, cu constante $M>0$ şi $b\geq 0$ şi
folosim ambele notaţii $\mathcal{L}(f)$ sau $L(z)$ pentru transformata Laplace a lui f

1. Teorema asemănării.

$$\mathcal{L}(f(\alpha t))=\frac{1}{\alpha}L\left(\frac{z}{\alpha}\right)\overset{sau}{=}\frac{1}{\alpha}\mathcal{L}(f)\left(\frac{z}{\alpha}\right) \quad \text{pentru } \alpha>0$$

2. Teorema deplasării.

$$\mathcal{L}\left(f(t)e^{\alpha t}\right)=\mathcal{L}(f)(z-\alpha)\overset{sau}{=}L(z-\alpha) \quad , \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

3. Teorema întârzierii. Funcţia (semnalul)

$$f_{\alpha}(t)=f(t-\alpha)=\begin{cases} 0 \ , & t-\alpha<0 \\ f(t-\alpha) \ , & t-\alpha\geq 0\end{cases}=\begin{cases} 0 \ , & t<\alpha \\ f(t-\alpha) \ , & t\geq\alpha\end{cases}$$

este considerată <u>semnal "întârziat cu $\alpha > 0$"</u> al semnalului $f(t)$

$$\mathcal{L}(f_\alpha(t)) = \mathcal{L}(f(t-\alpha)) = e^{-\alpha z} L(z) = \frac{1}{e^{\alpha z}} L(z) \overset{sau}{=} \frac{1}{e^{\alpha z}} \mathcal{L}(f) \quad \text{pentru} \quad \alpha > 0$$

4. Teorema derivării imaginii.

$$\mathcal{L}\left(tf(t)\right) = -\frac{d}{dz}\left[\mathcal{L}(f)\right] \overset{sau}{=} -L'(z) \overset{sau}{=} -\frac{d}{dz} L(z)$$

$$\mathcal{L}\left(t^n f(t)\right) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\left[\mathcal{L}(f)\right] \overset{sau}{=} (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} L(z) \ \ \text{pentru} \ \ n \geq 1$$

$$\mathcal{L}\left(t^n f(t)\right) = (-1)^n \left[\mathcal{L}(f)\right]^{(n)} \overset{sau}{=} (-1)^n L^{(n)}(z) \ \ \text{pentru} \ \ n \geq 1$$

unde $\frac{d^n}{dz^n} L(z)$ sau $L^{(n)}(z)$ sunt notaţii pentru derivata de ordin n

5. Teorema integrării originalului.

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{1}{z} L(z) \overset{sau}{=} \frac{1}{z} \mathcal{L}(f)$$

6. Teorema integrării imaginii. (de fapt o rescriere a teoremei de derivare a imaginii)
Dacă funcţia $\frac{f(t)}{t}$ este funcţie original , atunci

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = -\int \mathcal{L}(f) \overset{sau}{=} -\int L(z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dz}\left[\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right] = -\mathcal{L}(f) \overset{sau}{=} -L(z)$$

unde semnul $\int$ (integral) are aici sens de antiderivată şi în plus se alege acea antiderivata care verifică

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} \left[\int L(z)\right] = 0$$

această antiderivată justifică denumirea "teorema integrării imaginii".

7. Teorema derivării originalului.
i) dacă f şi derivata sa $f\ '$ sunt funcţii original, atunci

$$\mathcal{L}(f\ ') = z\mathcal{L}(f) - f(+0) = z \cdot L(z) - f(+0)$$

ii) dacă f şi toate derivatele sale $f', f'', ..., f^{(n)}$ sunt funcţii original, atunci

$$\mathcal{L}(f^{\ (n)}) = z^n \mathcal{L}(f) - z^{n-1} f(+0) - z^{n-2} f'(+0) - ... - z \cdot f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0)$$

unde $f(+0)$ înseamnă limita la dreapta în $t = 0$, se poate folosi orice altă notaţie : $f(0+)$ sau $f(0+0)$
Acest detaliu este nesemnificativ dacă semnalul $f(t)$ este continuu în 0 adică

$$f(+0) = \lim_{t \searrow 0} f(t) = f(0)$$

caz în care scriem mai simplu

$$\mathcal{L}(f\ ') = z\mathcal{L}(f) - f(0) = z \cdot L(z) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f^{\ (n)}) = z^n \mathcal{L}(f) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - ... - z \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

În practică, se consideră semnale continue (deci continue şi în 0),
dar din demonstraţie, în relaţie apare limita la dreapta în zero şi este bine de marcat acest fapt.

8. Transformata Laplace pentru semnalelor periodice.

Dacă $f(t)$ este un semnal original şi periodic cu perioada $T > 0$, atunci

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-zT}} \int_0^T f(t)e^{-zt}dt$$

9. Teorema valorii iniţiale.

Dacă f şi derivata sa $f\,'$ sunt funcţii original, atunci

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} zL(z) = \lim_{t \searrow 0} f(t) = f(+0)$$

Este considerată "valoare iniţială" - limita la dreapta în 0 a funcţiei original $f(+0) = \lim_{t \searrow 0} f(t)$,

Pentru semnale continue în 0 , $f(0) = \lim_{t \searrow 0} f(t)$ este considerată valoarea de la care "începe" semnalul $f(t)$ (în timp t)

10. Teorema valorii finale.

Dacă f şi derivata sa $f\,'$ sunt funcţii original , f' este integrabilă $\left(\text{adică} \int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty \right)$ şi există $\lim_{t \to +\infty} f(t)$, atunci

$$\lim_{z \to 0} zL(z) = \lim_{t \to +\infty} f(t)$$

Este considerată "valoare finală" - limita funcţiei original la $+\infty$, $\lim_{t \to +\infty} f(t)$

cu alte cuvinte valoarea spre care "tinde" semnalul (în timp t)

Demonstraţii.

1. Teorema asemănării, facem schimbarea de variabilă $\alpha t = u$, $t = \frac{1}{\alpha} u$, $dt = \frac{1}{\alpha} du$

$$\mathcal{L}(f(\alpha t) = \int_0^{+\infty} f(\alpha t)e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-z\frac{1}{\alpha}u} \frac{1}{\alpha} du = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-\frac{z}{\alpha}u} du = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}(f)(\frac{z}{\alpha}) \overset{sau}{=} \frac{1}{\alpha} L(\frac{z}{\alpha})$$

apoi interpretăm integrala

$$\int_0^{+\infty} f(u)e^{-\frac{z}{\alpha}u} du$$

ca fiind transformata Laplace a semnalului $f(u)$, calculată în $\frac{z}{\alpha}$

2. Teorema deplasării

$$\mathcal{L}(f((t)e^{\alpha t}) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{\alpha t}e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{\alpha t}e^{-t(z-\alpha)}dt = \mathcal{L}(f)(z - \alpha) \overset{sau}{=} L(z - \alpha)$$

3. Teorema întârzierii, facem schimbarea de variabilă $t - \alpha = u$, $t = u + \alpha$, $dt = du$

$$\mathcal{L}(f_\alpha(t)) = \int_0^{+\infty} f_\alpha(t)e^{-zt}dt = \int_\alpha^{+\infty} f(t-\alpha)e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-z(u+\alpha)}du = e^{-\alpha z} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-zu}du = e^{-\alpha z}\mathcal{L}(f) \overset{sau}{=} e^{-\alpha z}L(z)$$

4. Teorema derivării imaginii, derivata transformatei Laplace revine la derivarea unei integrale cu parametru

$$(\mathcal{L}(f))' = \frac{d}{dz}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt\right) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dz}\left[f(t)e^{-zt}\right] dt = \int_0^{+\infty} f(t)\frac{d}{dz}\left[e^{-zt}\right] dt = \int_0^{+\infty} f(t)(-t)e^{-zt}dt = -\mathcal{L}(tf(t))$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(tf(t)) = -\left(\mathcal{L}(f)\right)' = -\frac{d}{dz}\mathcal{L}(f) = -\frac{d}{dz}L(z)$$

apoi derivăm succesiv şi obţinem

$$(\mathcal{L}(f))'' = \left[-\mathcal{L}(tf(t))\right]' = -\frac{d}{dz}\left(\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt}dt\right) = -\int_0^{+\infty} tf(t)\frac{d}{dz}\left[e^{-zt}\right]dt = -\int_0^{+\infty} tf(t)(-t)e^{-zt}dt =$$

$$= (-1)^2\int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-zt}dt = (-1)^2\mathcal{L}(t^2 f(t))$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(t^2 f(t)) = (-1)^2\left(\mathcal{L}(f)\right)''$$

şi aşa mai departe , inductiv, pentru orice $n \geq 1$ obţinem

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \left(\mathcal{L}(f)\right)^{(n)}$$

Trebuie remarcat faptul că funcţia $t^n f(t)$ este original deoarece produsul a două funcţii original este de asemenea original

$$|t^n f(t)| = \overbrace{|t^n|}\cdot\underbrace{|f(t)|} \leq \overbrace{M_1 e^t}\cdot\underbrace{Me^{bt}}$$

5.Teorema integrării originalului, aratăm mai întâi că funcţia $g(t) \overset{not}{=} \int_0^t f(u)du$ este original

$$\left|\int_0^t f(u)du\right| \leq \int_0^t |f(u)|\, du \leq \int_0^t Me^{bu}du = M\left.\frac{e^{bu}}{b}\right|_{u=0}^{u=t} = \frac{M}{b}\left(e^{bt}-1\right) \leq \frac{M}{b}e^{bt}$$

apoi derivând obţinem

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t f(u)du\right] = f(t)$$

deci

$$\mathcal{L}(g'(t)) = \mathcal{L}(f(t))$$

iar pe de altă parte

$$\mathcal{L}(g'(t)) = \int_0^{+\infty} g'(t)e^{-zt}dt \overset{\text{părţi}}{=} \underbrace{g(t)(-z)e^{-zt}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty}}_{0} - \int_0^{+\infty} g(t)(-z)e^{-zt}dt = z\int_0^{+\infty} g(t)e^{-zt}dt = z\mathcal{L}(g(t))$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left|g(t)e^{-zt}\right| \leq \lim_{t\to+\infty}\frac{M}{b}e^{bt}\cdot e^{-xt} = \lim_{t\to+\infty}\frac{M}{b}e^{t(b-x)} = 0 \text{ deoarece } x = \operatorname{Re} z > b$$

$$g(t)(-z)e^{-zt}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} = \lim_{t\to+\infty} g(t)(-z)e^{-zt} - \underbrace{g(0)}_{0}(-z)e^{-z0} = 0$$

În final obţinem

$$z\mathcal{L}(g(t) = \mathcal{L}(g'(t) = \mathcal{L}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f)$$

6. Teorema integrării imaginii. Am spus deja că aceasta este de fapt o simplă rescriere a teoremei de derivare a imaginii :

$$\mathcal{L}\left(tf(t)\right) = -\frac{d}{dz}\left[\mathcal{L}(f(t))\right]$$

în care înlocuim $f(t)$ cu $\frac{f(t)}{t}$ şi obţinem

$$\mathcal{L}\left(t\frac{f(t)}{t}\right) = -\frac{d}{dz}\left[\mathcal{L}(\frac{f(t)}{t})\right] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\left(f(t)\right) = -\frac{d}{dz}\left[\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right]$$

care înseamnă că transformata Laplace $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)$ este o antiderivată pentru transformata Laplace $\mathcal{L}\left(f(t)\right)$, adică :

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \quad \underbrace{\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)}_{\text{transformată Laplace}} \quad = -\underbrace{\int \mathcal{L}\left(f(t)\right)}_{\text{antiderivată}} = -\int L(z)$$

Singura problemă este ca funcţia $\frac{f(t)}{t}$ să fie un semnal original şi se alege acea antiderivată pentru care

$$\lim_{\mathrm{Re}\, z \to +\infty}\left[\int L(z)\right] = 0$$

deoarece otrice transformată Laplace are limita zero la "infinit".
Comentariu.
De exemplu funcţiile $\sin t$ şi $\frac{\sin t}{t}$ sunt ambele semnale originale şi pentru acestea se poate aplica teorema de integrare a imaginii,
dar funcţiile e^t şi $\frac{e^t}{t}$ nu sunt ambele semnale originale, deci pentru acestea nu se poate aplica teorema de integrare a imaginii.

7. Teorema derivării originalului
i) considerăm f semnal original cu constantele $M, b > 0$ şi $x = \mathrm{Re}\, z > b$

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt \overset{\text{părţi}}{=} \left[f(t)\frac{1}{-z}e^{-zt}\Big|_{t\searrow 0}^{t\to+\infty}\right] - \int_0^{+\infty} f'(t)\frac{1}{-z}e^{-zt}dt = \frac{f(+0)}{z} + \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-zt}dt = \frac{f(+0)}{z} + \frac{1}{z}\mathcal{L}(f')$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left|f(t)e^{-zt}\right| \le \lim_{t\to+\infty}|f(t)|\cdot e^{-xt} \le \lim_{t\to+\infty} Me^{bt}\cdot e^{-xt} = \lim_{t\to+\infty} Me^{(b-x)t} = e^{-\infty} = 0$$

$$\left[f(t)\frac{1}{-z}e^{-zt}\Big|_{t\searrow 0}^{t\to+\infty}\right] = \underbrace{\lim_{t\to+\infty} f(t)\frac{1}{-z}e^{-zt}}_{0} - \lim_{t\searrow 0} f(t)\frac{1}{-z}e^{-zt} = \frac{f(+0)}{z}$$

În final obţinem

$$\mathcal{L}(f) = \frac{f(+0)}{z} + \frac{1}{z}\mathcal{L}(f') \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(f') = z\mathcal{L}(f) - f(+0)$$

ii) procedăm inductiv, dacă egalitatea are loc pentru $k \ge 1$

$$\mathcal{L}(f^{\ (k)}) = z^k\mathcal{L}(f) - z^{k-1}f(+0) - ... - zf^{(k-2)}(+0) - f^{(k-1)}(+0)$$

atunci are loc şi pentru $k+1$, deoarece aplicăm i)

$$\mathcal{L}(f^{\ (k+1)}) = \mathcal{L}(\left[f^{\ (k)}\right]') = z\mathcal{L}(f^{\ (k+1)}) - f^{(k)}(+0) =$$

$$= z\left[z^k\mathcal{L}(f) - z^{k-1}f(+0) - ... - zf^{(k-2)}(+0) - f^{(k-1)}(+0)\right] - f^{(k)}(+0) =$$

$$= z^{k+1}\mathcal{L}(f) - z^k f(+0) - ... - z^2 f^{(k-2)}(+0) - zf^{(k-1)}(+0) - f^{(k)}(+0)$$

8. Transformata Laplace pentru semnale periodice
Deoarece funcţia f este periodică cu perioadă $T > 0$ putem descompune integrala în serie de integrale

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{nT+T} f(t)e^{-zt}dt =$$

facem schimbarea de variabilă $\quad t = nT + u\quad$ şi obţinem

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T \underbrace{f(nT+u)}_{f(u)} e^{-z(nT+u)} du = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^T f(u) e^{-zu} du \right) e^{-znT} = \left(\int_0^T f(u) e^{-zu} du \right) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-znT}}_{\text{serie geometrica}} =$$

$$= \int_0^T f(u) e^{-zu} du \cdot \frac{1}{1 - e^{-zT}}$$

deoarece suma unei serii geometrice este

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-znT} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-zT}\right)^n = 1 + e^{-zT} + \left(e^{-zT}\right)^2 + ... = \frac{1}{1 - e^{-zT}} \qquad \text{pentru} \quad \left|e^{-zT}\right| < 1$$

$$\left|e^{-zT}\right| = \left|e^{-(x+iy)T}\right| = \left|e^{-xT} \cdot e^{-iyT}\right| = \left|e^{-xT}\right| \cdot \left|e^{-iyT}\right| = e^{-xT} < 1$$

deoarece $\ x = \operatorname{Re} z > 0 \ \Rightarrow \ -xT < 0$.
Semnalul este periodic, deci este justificată înlocuirea $\quad f(nT+u) = f(u)\quad$.

9. <u>Teorema valorii iniţiale</u>.
Folosim teorema derivării originalului

$$\mathcal{L}(f') = z\mathcal{L}(f) - f(+0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{L}(f') = z \cdot L(z) - f(+0) \quad \Rightarrow \quad zL(z) = \mathcal{L}(f') + f(+0)$$

şi faptul că o transformată Laplace are limita 0 pentru $\ \operatorname{Re} z \to +\infty$

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} zL(z) = \lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} [\mathcal{L}(f') + f(+0)] = \underbrace{\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} [\mathcal{L}(f')]}_{0} + f(+0) = f(+0) = \lim_{t \searrow 0} f(t)$$

10. <u>Teorema valorii finale</u>
Folosim teorema derivării originalului

$$\mathcal{L}(f') = z\mathcal{L}(f) - f(+0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{L}(f') = z \cdot L(z) - f(+0) \quad \Rightarrow \quad zL(z) = \mathcal{L}(f') + f(+0)$$

$$zL(z) = \mathcal{L}(f') + f(+0) = \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-zt} dt + f(+0)$$

Pe de altă parte pentru $x = \operatorname{Re} z > 0$ avem

$$\left|f'(t) e^{-zt}\right| = |f'(t)| \cdot \left|e^{-zt}\right| = |f'(t)| \cdot e^{-xt} \leq |f'(t)|$$

şi pentru că din ipoteză $\ f'(t)\ $ este integrabilă $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty\ $, trecem la limită

$$\lim_{z \to 0} zL(z) = \lim_{z \to 0} \left[\int_0^{+\infty} f'(t) e^{-zt} dt + f(+0) \right] = \lim_{z \to 0} \left[\int_0^{+\infty} f'(t) e^{-zt} dt \right] + f(+0) = \int_0^{+\infty} f'(t) \underbrace{\lim_{z \to 0} \left[e^{-zt}\right]}_{e^0 = 1} dt + f(+0)$$

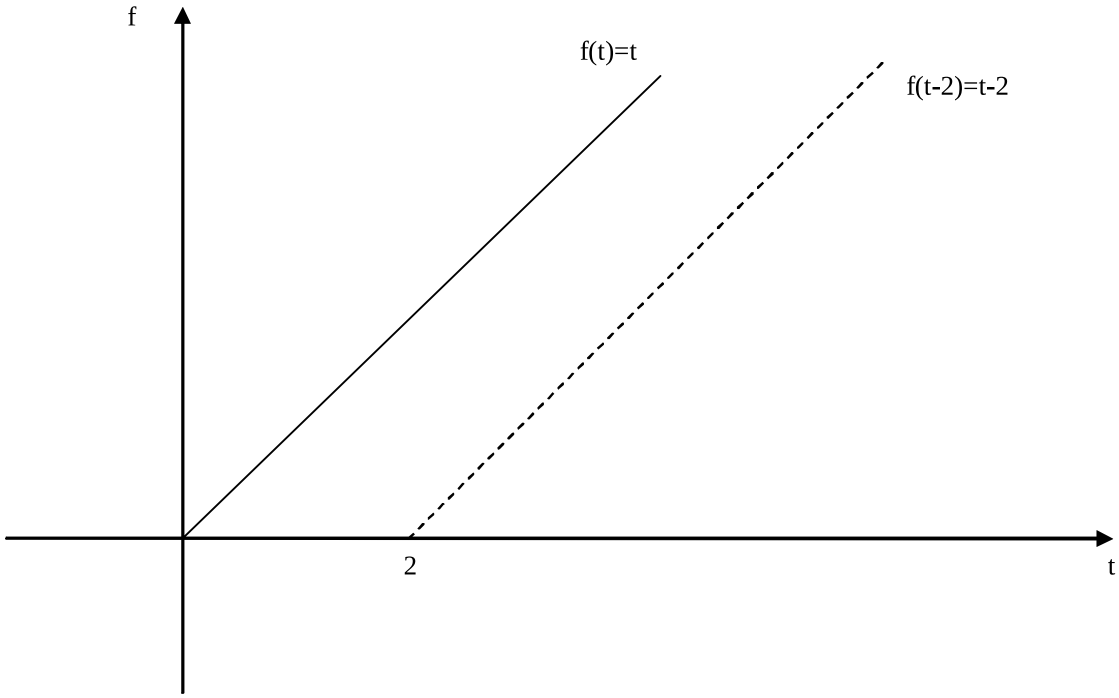
$$\lim_{z \to 0} zL(z) = \int_0^{+\infty} f'(t) dt + f(+0) = [f(t)]_{t \searrow 0}^{t \to +\infty} + f(+0) = \lim_{t \to +\infty} f(t) - \underbrace{\lim_{t \searrow 0} f(t)}_{f(+0)} + f(+0) = \lim_{t \to +\infty} f(t)$$

deci

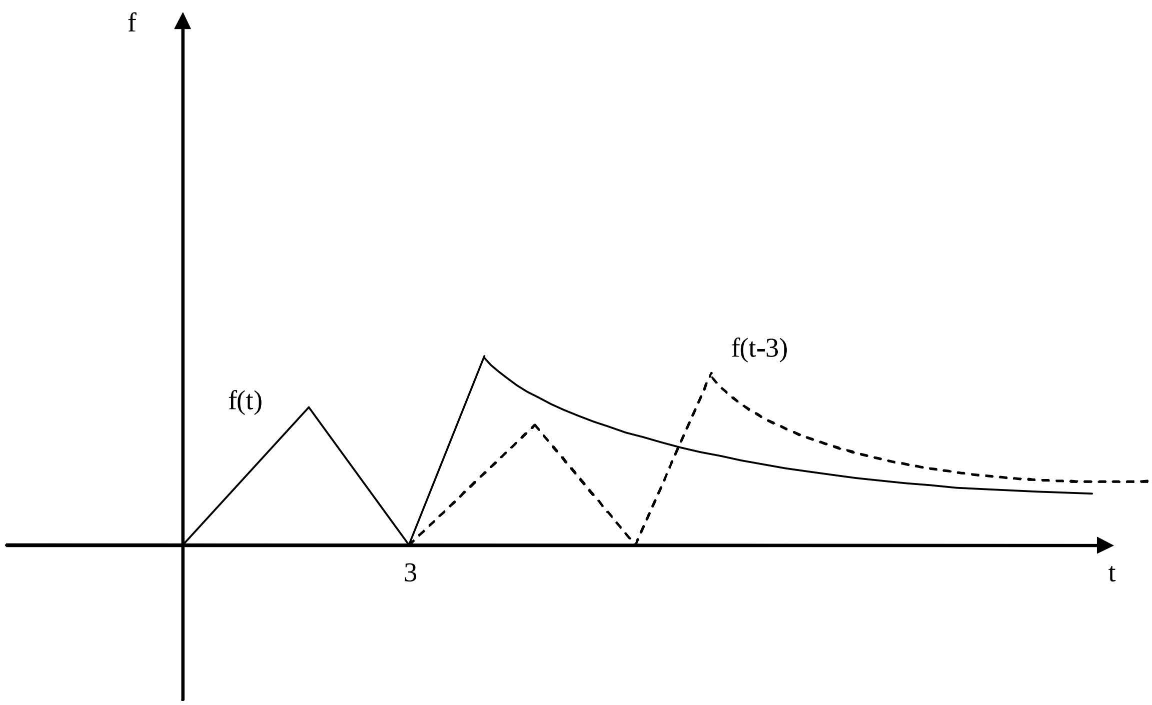
$$\lim_{z \to 0} zL(z) = \lim_{t \to +\infty} f(t)$$

■
Exemple de semnale întârziate.

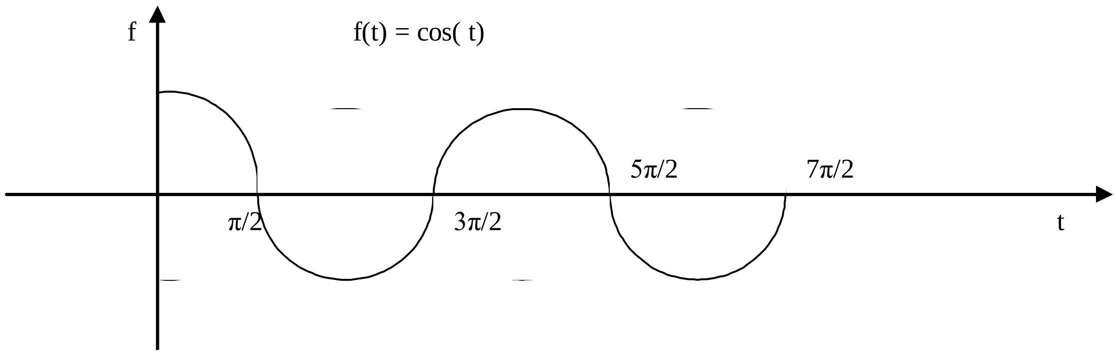
$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ t & , \quad t \geq 0 \end{cases} \quad , \quad f(t-2) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 2 \\ t-2 & , \quad t \geq 2 \end{cases}$$

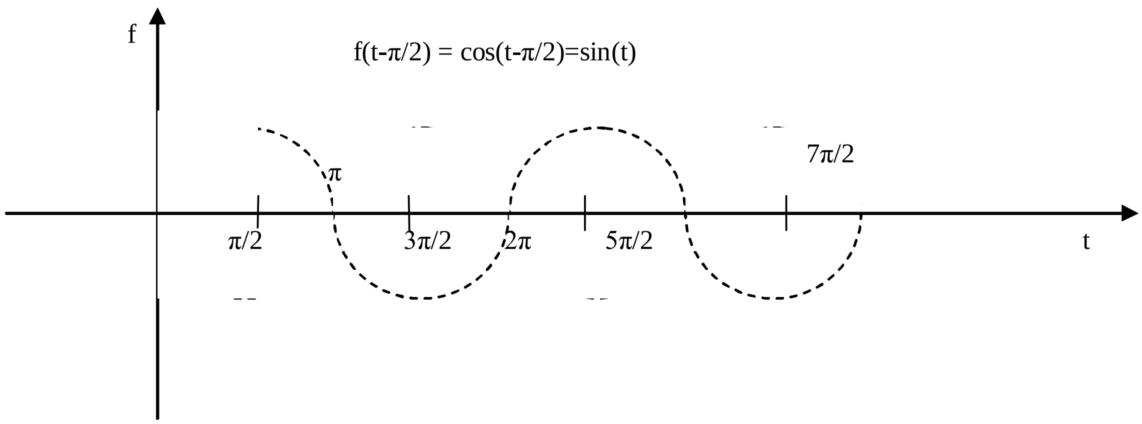


Un semnal $f = f(t)$ şi întârziatul lui $g = f(t-3)$, schiţate doar aproximativ



$$f(t)=u(t)\cdot\cos t=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ \cos t & , \quad t\geq 0\end{cases} \quad , \quad f\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & , \quad t<\frac{\pi}{2}\\ \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) & , \quad t\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}=\begin{cases}0 & , \quad t<\frac{\pi}{2}\\ \sin(t) & , \quad t\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$$





Deci semnalul " sin " este întârziatul cu $\frac{\pi}{2}$ al semnalului " cos ".

Produsul de convoluţie.

Definiţie.

Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţii integrabile în modul pe orice interval închis ($\int\limits_a^b |f| < \infty$, $\int\limits_a^b |g| < \infty$).

Dacă pentru orice $x \in \mathbb{R}$ functia $h(t) = f(t)g(x-t)$ este integrabilă pe $\mathbb{R}$
atunci funcţia $f * g$ definită de

$$(f*g)(x) \overset{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

se numeşte **convoluţia funcţiilor** f , g (sau convoluţia lui f cu g)
sau **produsul de convoluţie** al funcţiilor f şi g

Proprietăţi.
i) convoluţia este comutativă $f * g = g * f$
ii) distributivitate $f * (g + h) = f * g + f * h$
iii) asociativitate $(f * g) * h = f * (g * h)$

Demonstraţie.

i) facem schimbarea de variabilă $x-t=u$, $t=x-u$, $dt=-du$, $t\to-\infty\Rightarrow u\to+\infty$, $t\to+\infty\Rightarrow u\to-\infty$ şi obţinem

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)dt=\int_{+\infty}^{-\infty}f(x-u)g(u)(-du)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-u)g(u)du=(g*f)(x)$$

Nu demonstrăm ii) şi iii) sunt doar un exerciţiu de rutină. ■

Observatie.
Dacă f şi g sunt funcţii original, atunci convoluţia lor $f*g$ este funcţie original şi pentru orice $x>0$ avem

$$(f*g)(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

Demonstraţie.
Funcţiile f,g sunt funcţii original deci sunt continue pe porţiuni.
Integrala ce defineşte convoluţia, în acest caz are de fapt limite de integrare finite

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)dt=\underbrace{\int_{-\infty}^{0}\underbrace{f(t)}_{0}g(x-t)d}_{f(t)=0\ \text{pentru}\ t<0}+\int_0^{+\infty}f(t)g(x-t)d=\int_0^{+\infty}f(t)g(x-t)dt=$$

$$=\int_0^x f(t)g(x-t)dt+\underbrace{\int_x^{+\infty}f(t)\underbrace{g(x-t)}_{0}dt}_{g(x-t)=0\ \text{penrtu}\ t>x}=\int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

- deoarece pentru $t<0$ avem $f(t)=0$
- şi deoarece pentru $t>x$ avem $x-t<0$ şi deci $g(x-t)=0$

În plus, dacă $x<0$ atunci $t<0$ şi deci $f(t)=0$ $\Rightarrow$ $\int_0^x\underbrace{f(t)}_{0}g(x-t)dt=0$,

deci $(f*g)(x)=0$ pentru $x<0$

Ca integrală cu parametru "x", integrala $\int_0^x f(t)g(x-t)dt$ este continuă pe porţiuni.

În fine f,g sunt funcţii original cu constante corespunzătoare $|f(t)|\le M_1e^{b_1t}$, $|g(t)|\le M_2e^{b_2t}$, obţinem

$$|(f*g)(x)|=\left|\int_0^x f(t)g(x-t)dt\right|\le\int_0^x|f(t)g(x-t)|\,dt\le\int_0^x M_1e^{b_1t}M_2e^{b_2(x-t)}dt=$$

$$=M_1M_2e^{b_2x}\int_0^x e^{(b_1-b_2)t}dt=M_1M_2e^{b_2x}\left[\frac{1}{b_1-b_2}e^{(b_1-b_2)t}\right]\Bigg|_{t=0}^{t=x}=\frac{M_1M_2}{b_1-b_2}e^{b_2x}\left[e^{(b_1-b_2)x}-e^0\right]\le$$

$$\le\frac{M_1M_2}{b_1-b_2}e^{b_2x}e^{b_1x}=\frac{M_1M_2}{b_1-b_2}e^{(b_1+b_2)x}$$

deoarece $b_1-b_2\le b_1$

Deci funcţia $(f*g)(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)dt$ este original Laplace.

■

Comentariu.
Produsul de convoluţie este aparent "straniu" sau mai puţin "natural".

Iată un exemplu relativ mai simplu ce poate justifica integrala " $\int\limits_0^x f(t)g(x-t)dt$ "

Să înmulţim două serii de puteri convergente, obţinem tot o serie de puteri

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q x^q\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

cum se obţine coeficientul c_n ? (coeficientul puterii x^n)
de exemplu

$$c_0 = a_0 b_0 \quad , \quad c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 \quad , \quad c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \quad ....$$

deci şi coeficientul c_n se obţine înmulţind coeficienţii corespunzători pentru $x^p x^q = x^{p+q} = x^n$ şi adunând

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^{\infty} a_p b_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$$

deoarece $p+q=n \;\Rightarrow\; q = n-p$, dar $p, q \geq 0$ deci $q = n-p \geq 0 \;\Rightarrow\; p \leq n$
Se observă acum analogia dintre formule

$$\int\limits_0^x f(t)g(x-t)dt \qquad < \; .... \; > \qquad \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$$

integrala reprezintă sume nenumărabile.

Teoremă
Dacă f şi g sunt funcţii original, atunci

$$\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

Demonstraţie.

$$\mathcal{L}(f*g) = \int\limits_0^{+\infty} (f*g)(x)e^{-zx}dx = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^x f(t)g(x-t)dt\right) e^{-zx}dx = \iint\limits_D f(t)g(x-t)e^{-zx}dtdx = A$$

ultima integrală fiind integrala dublă pe domeniul $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \;\; , 0 < t < x\}$
Pe de altă parte

$$\mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) = \left(\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt\right) \cdot \left(\int\limits_0^{+\infty} g(u)e^{-zu}du\right) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} \left(\int\limits_0^{+\infty} g(u)e^{-zu}du\right) dt =$$

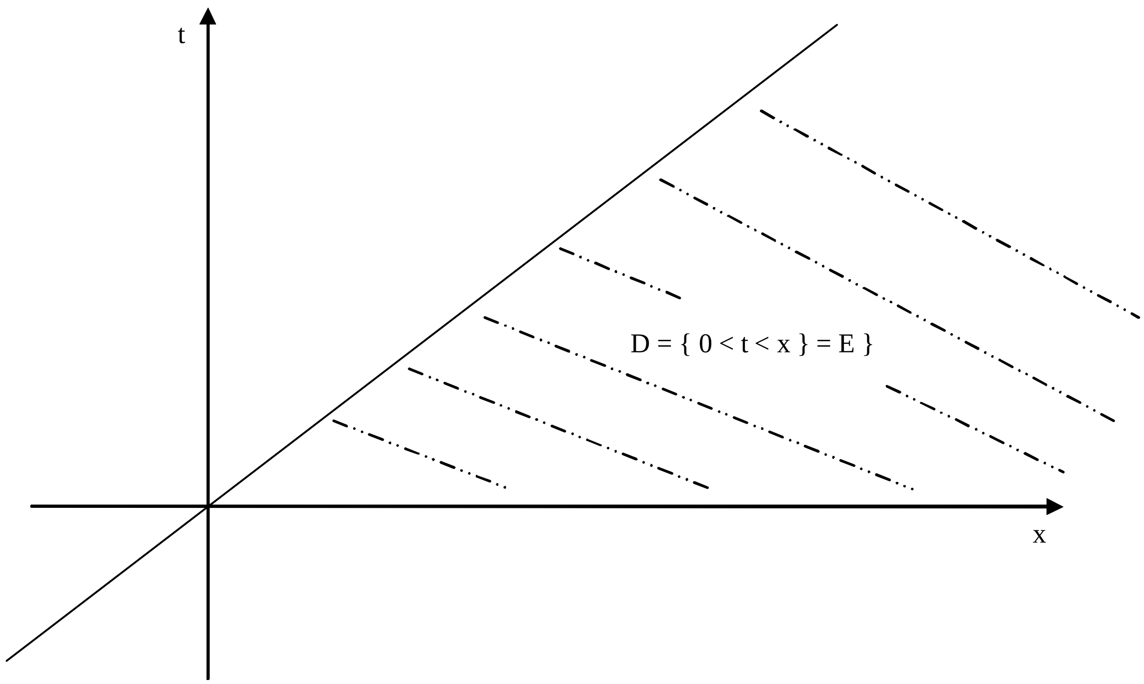
$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}g(u)e^{-zu}du\right) dt = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} f(t)g(u)e^{-z(t+u)}du\right) dt =$$

facem schimbarea de variabilă $u = x - t$, $x = u + t$, $du = dx$, $u = 0 \Rightarrow x = t$, $u \to +\infty \Rightarrow \;\; x \to +\infty$, obţinem

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_t^{+\infty} f(t)g(x-t)e^{-zx}dx\right) dt = \iint\limits_E f(t)g(x-t)e^{-zx}dxdt = B$$

integrală dublă pe domeniul plan $E = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \;\; , 0 < t < x\}$

$$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \; , 0 < t < x\} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \; , 0 < t < x\} = E$$



Cele două domenii plane D şi E coincid, deci integralele sunt egale $A = B$ şi deci $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$
■

Observaţie.
Convoluţia cu funcţia treaptă unitate $u(t)$ duce la

$$(f * u)(x) = \int_0^x f(t)\underbrace{u(x-t)}_{1}dt = \int_0^x f(t)dt$$

am obţinut $\int_0^x f(t)dt$ care este acea antiderivată (primitivă) a funcţiei f care se anulează în $x = 0$
Acest fapt are loc numai pentru funcţii original care au antiderivate (primitive).
■

Observaţie.
Folosind teorema anterioară putem demonstra teorema integrării originalului.

$$\mathcal{L}(f * u) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(u) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \mathcal{L}(f) \cdot \underbrace{\mathcal{L}(u)}_{1/z} = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f)$$

■

În final menţionăm "formula lui Duhamel"

Teoremă. (Formula lui Duhamel)
Dacă f şi g sunt funcţii original şi g este derivabilă, atunci

$$z\mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) = \mathcal{L}\left[f(t)g(0+) + (f * g')(t)\right] = \mathcal{L}\left(f(t)g(+0) + \underbrace{\int_0^t f(u)g'(t-u)du}_{(f*g')(t)}\right)$$

unde $g(+0) = \lim_{t \searrow 0} g(t)$ este limita la dreapta.

Demonstraţie.

Să observăm că funcţia $(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$ este derivabilă şi derivata este

$$(f * g)'(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t f(u)g(t-u)du\right] = f(t)\underbrace{\lim_{u \nearrow 0} g(t-u)}_{g(+0)} + \int_0^t f(u)g'(t-u)(-1)du = f(t)g(+0) - \underbrace{\int_0^t f(u)g'(t-u)du}_{f*g'}$$

deci

$$(f * g)'(t) = f(t)g(+0) + (f * g')(t)$$

aplicăm transformarea Laplace

$$\mathcal{L}\left[(f * g)'(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t)g(+0) + (f * g')(t)\right]$$

apoi teorema derivării originalului

$$\mathcal{L}\left[(f * g)'\right] = z \cdot \mathcal{L}[(f * g)] - \underbrace{(f * g)(+0)}_{0} = z \cdot \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

şi înlocuind obţinem

$$z\mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) = \mathcal{L}\left[(f * g)'\right] = \mathcal{L}\left[f(t)g(+0) + (f * g')(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t)g(+0)\right] + \mathcal{L}[(f * g')(t)]$$

Deci

$$z\mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) = \mathcal{L}\left[f(t)g(+0) + (f * g')(t)\right] = \mathcal{L}\left(f(t)g(+0) + \underbrace{\int_0^t f(u)g'(t-u)du}_{(f*g')(t)}\right)$$

■

4.2 Transformata Laplace - Aplicaţii

Transformata Laplace se poate folosi pentru a rezolva :

- ecuaţii diferenţiale de ordin superior, liniare cu coeficienţi constanţi, sau unor ecuaţii cu coeficienţi neconstanţi.
- sisteme liniare de ecuaţii diferenţiale (de ordin1) cu coeficienţi constanţi
- unele ecuaţii integrale, sau "integro - diferenţiale"

Ideea fundamentală este următoarea: aplicând transformarea Laplace unor astfel de ecuaţii,
(presupunând că acestea admit ca soluţii funcţii care sunt de tip original Laplace)
aceste ecuaţii se transformă în ecuaţii algebrice având ca funcţie necunoscută transformata Laplace $\mathcal{L}(x(t)) \overset{not}{=} L(z)$.

În unele cazuri ecuaţia algebrică obţinută se poate rezolva relativ simplu.
Apoi se foloseşte faptul că transformarea Laplace este inversabilă (deci injectivă),
adică cunoscând $L(z)$ se poate "recupera" (în mod unic) funcţia original Laplace $x(t)$
- (acest fapt este demonstrat folosind transformata Fourier prin teorema Mellin-Fourier)

În cazuri concrete (simple) nu folosim formula (relativ complicată) oferită de teorema Mellin-Fourier,
ci pur şi simplu citim "invers" tabelul cu transformatele Laplace ale funcţiilor elementare.

De exemplu

$$\mathcal{L}(\cos 3t) \overset{not}{=} L(z) = \frac{z}{z^2 + 3^2}$$

se poate citi

i) " $\longrightarrow$ " "transformata Laplace a funcţiei $x(t) = \cos 3t$ este funcţia complexă $L(z) = \frac{z}{z^2+3^2}$
sau
ii) " $\longleftarrow$ " funcţia complexă $L(z) = \frac{z}{z^2+3^2}$ provine prin transformare Laplace din funcţia $x(t) = \cos 3t$

În general algoritmul este următorul :

Pasul I. se calculează transformata Laplace a ecuaţiei diferenţiale, integrale, ...
- folosim tabelul cu transformatele Laplace ale funcţiilor elementare şi teoremele de calcul pentru transformata Laplace

Pasul II. rezolvăm ecuaţia, sistemul algebric obţinut (atunci când este posibil) şi obţinem $L(z) = ...$

Pasul III. "inversăm" transformarea Laplace, determinând a cui transformată Laplace este funcţia $L(z)$.
În acest scop se încearcă descompunerea funcţiei complexe $L(z)$ în funcţii complexe care sunt deja cunoscute ca fiind transformate Laplace
De exemplu, dacă funcţia $L(z)$ este o funcţie raţională se încearcă descompunerea funcţiei complexe $L(z)$ în "fracţii simple"
adică în acele funcţii raţionale care sunt transformatele Laplace ale unor funcţii elementare.

Textul de faţă prezintă doar câteva exemple simple în care se aplică transformarea Laplace.
Am inclus numai câteva tehnici de calcul ca exemplu.
Pentru o prezentare în detaliu, recomandăm :
- Trandafir T. Bălan "*Capitole de Matematici Aplicate - Transformata Laplace*"
  Edit. Universitaria Craiova - 2001

Ingrediente tehnice.

Pasul I necesită tehnici de calcul al transformatei Laplace pentru diferite funcţii.
Exemple I.
Să se calculeze transformata Laplace pentru următoarele funcţii

$$\text{i)}\ \mathcal{L}\left(te^t\right) \quad \text{ii)}\ \mathcal{L}\left(\int_0^t u^2 e^{-u} du\right) \quad \text{iii)}\ \mathcal{L}\left(\int_0^t e^{t-u}\sin u du\right) \quad \text{iv)}\ \mathcal{L}\left[(t-2)^2 u(t-2)\right] \quad \text{v)}\ \mathcal{L}\left[(t-2)^2 u(t)\right]$$

Pasul II necesită tehnici de calcul pentru "inversarea" transformatei Laplace.

Exemple II.
Să se determine funcţia original $f(t)$ pentru următoarele transformate Laplace.

$$\text{i)}\ \frac{1}{z(z^2+1)} \quad \text{ii)}\ \frac{1}{z^2-2} \quad \text{iii)}\ \frac{1}{(z^2+1)^2} \quad \text{iv)}\ \frac{z}{(z^2-1)^2} \quad \text{v)}\ \frac{1}{\left(z^2+\alpha^2\right)^2} \quad \text{vi)}\ \frac{1}{z^2(z^2+1)^2}$$

Soluţii. I

i) Folosim teorema derivării imaginii

$$\mathcal{L}\left(te^t\right) = (-1)\left[\mathcal{L}\left(e^t\right)\right]' = (-1)\left[\frac{1}{z-1}\right]' = (-1)\frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}$$

ii) Folosim teorema integrării originalului , apoi teorema derivării imaginii

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t u^2 e^{-u} du\right) = \frac{1}{z}\mathcal{L}\left(t^2 e^{-t}\right) = \frac{1}{z}(-1)^2\left[\mathcal{L}\left(e^{-t}\right)\right]'' = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]'' = \frac{1}{z}\left[\frac{-1}{(z+1)^2}\right]' = \frac{1}{z}\frac{2}{(z+1)^3}$$

iii) Precizăm notaţiile folosite la teorema deplasării $L(z) \overset{not}{=} \mathcal{L}\left[f(t)\right]$

$$\mathcal{L}\left[f(t)e^{\alpha t}\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right](z-\alpha) = L(z-\alpha)$$

$\mathcal{L}\left[f(t)\right](z-\alpha)$ reprezintă transformata Laplace a funcţiei $f(t)$ calculată nu în "z" ci în punctul "$z-\alpha$"

Folosim teorema deplasării

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{t-u}\sin u du\right) = \mathcal{L}\left(e^t\cdot\int_0^t e^{-u}\sin u du\right) = \underbrace{\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{-u}\sin u du\right)(z-1)}_{\text{transformata calculată în (z-1)}} =$$

apoi teorema integrării originalului şi teorema deplasării

$$= \frac{1}{z-1}\underbrace{\mathcal{L}\left(e^{-t}\sin t\right)(z-1)}_{\text{transformata calculată în (z-1)}} = \frac{1}{z-1}\left[\underbrace{\mathcal{L}\left(\sin t\right)(z+1)}_{\text{transformata calculată în (z+1)}}\right](z-1) =$$

$$= \frac{1}{z-1}\underbrace{\left[\frac{1}{(z+1)^2+1}\right](z-1)}_{\text{transformata calculată în (z-1)}} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{(z-1+1)^2+1} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{z^2+1}$$

iv) Mai întâi funcţia $(t-2)^2u(t-2)$ este "întârziata" pentru $(t)^2u(t)=t^2$, deci folosim teorema întârzierii

$$\mathcal{L}\left[(t-2)^2u(t-2)\right] = e^{-2z}\mathcal{L}\left[(t)^2u(t)\right] = e^{-2z}\mathcal{L}\left[t^2\right] = e^{-2z}\frac{2!}{z^3} = 2e^{-2z}\frac{1}{z^3}$$

v) Descompunem în funcţii original elementare

$$\mathcal{L}\left[(t-2)^2u(t)\right] = \mathcal{L}\left[(t-2)^2\right] = \mathcal{L}\left[t^2-4t+4\right] = \mathcal{L}\left[t^2\right] - 4\mathcal{L}\left[t\right] + 4\mathcal{L}\left[1\right] =$$

$$= \frac{2}{z^3} - 4\frac{1}{z^2} + 4\frac{1}{z}$$

■

Soluţii II.

i) Descompunem în fracţii simple

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1} = \mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(\cos t) = \mathcal{L}(1-\cos t)$$

Deci originalul corespunzător este

$$f(t) = 1-\cos t$$

ii) Descompunem în fracţii simple, apoi folosim teorema deplasării

$$\frac{1}{z^2-2} = \frac{1}{(z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{(z-\sqrt{2})} - \frac{1}{(z+\sqrt{2})}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\mathcal{L}(e^{\sqrt{2}t}\cdot 1) - \mathcal{L}(e^{-\sqrt{2}t}\cdot 1)\right] = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}\right]\right)$$

Deci originalul corespunzător este

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}\right]$$

iii) Folosim produsul de convoluţie

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z^2+1)}\cdot\frac{1}{(z^2+1)} = \mathcal{L}(\sin t)\cdot\mathcal{L}(\sin t) = \mathcal{L}(\sin t * \sin t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \sin u\cdot\sin(t-u)du\right)$$

Deci originalul corespunzător este

$$f(t) = \int_0^t \sin u\cdot\sin(t-u)du = \int_0^t \frac{1}{2}\left[\cos(u-t+u) - \cos(u+t-u)\right]du =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2}\left[\cos(2u-t)-\cos(t)\right]du = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2u-t)}{2u-t} - u\cos t\right]\Bigg|_{u=0}^{u=t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(t)}{t} - t\cos t - \frac{\sin(-t)}{-t} + 0\right)$$

$$f(t) = \frac{-1}{2}\left(t\cos t\right)$$

iv) Observăm că funcţia este o derivată

$$\frac{z}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{-2}\frac{-2z}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{-2}\left(\frac{1}{z^2-1}\right)' = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{(z-1)(z+1)}\right)' =$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right]\right)' = \frac{-1}{4}\left(\mathcal{L}(e^t\cdot 1) - \mathcal{L}(e^{-t}\cdot 1)\right)' = \frac{-1}{4}\left(\mathcal{L}(e^t - e^{-t})\right)' =$$

apoi folosim teorema derivării imaginii

$$= \frac{1}{4}\mathcal{L}\left[t(e^t - e^{-t})\right]$$

Deci originalul corespunzător este

$$f(t) = \frac{1}{4}t(e^t - e^{-t})$$

v) Folosim produsul de convoluţie

$$\frac{1}{(z^2+\alpha^2)^2} = \frac{1}{(z^2+\alpha^2)}\cdot\frac{1}{(z^2+\alpha^2)} = \mathcal{L}(\frac{\sin\alpha t}{\alpha})\cdot\mathcal{L}(\frac{\sin\alpha t}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha^2}\mathcal{L}(\sin\alpha t * \sin\alpha t) = \frac{1}{\alpha^2}\mathcal{L}\left(\int_0^t \sin\alpha u\cdot\sin\alpha(t-u)du\right)$$

Deci originalul corespunzător este

$$f(t) = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^t \sin\alpha u\cdot\sin\alpha(t-u)du = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^t \frac{1}{2}\left[\cos\alpha(u-t+u) - \cos\alpha(u+t-u)\right]du =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\int_0^t \frac{1}{2}\left[\cos\alpha(2u-t) - \cos\alpha(t)\right]du = \frac{1}{2\alpha^2}\left[\frac{\sin\alpha(2u-t)}{\alpha(2u-t)} - u\cos\alpha t\right]\Bigg|_{u=0}^{u=t} =$$

$$= \frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha t} - t\cos\alpha t - \frac{\sin\alpha(-t)}{-\alpha t} + 0\right)$$

$$f(t) = \frac{-1}{2\alpha^2}\left(t\cos\alpha t\right)$$

vi) Descompunem în fracţii simple

$$\frac{1}{z^2(z^2+1)^2} = \left[\frac{1}{z(z^2+1)}\right]^2 = \left[\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1}\right]^2 = \frac{1}{z^2} - 2\frac{1}{z}\frac{z}{z^2+1} + \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{z^2} - 2\frac{1}{z^2+1} + \frac{z}{(z^2+1)}\cdot\frac{z}{(z^2+1)} = \mathcal{L}(t) - 2\mathcal{L}(\sin t) + \mathcal{L}(\cos t)\cdot\mathcal{L}(\cos t)$$

apoi folosim produsul de convoluţie

$$= \mathcal{L}(t) - 2\mathcal{L}(\sin t) + \mathcal{L}(\cos t * \cos t) = \mathcal{L}(t - 2\sin t + \cos t * \cos t)$$

Deci originalul corespunzător este

$$f(t) = t - 2\sin t + \cos t * \cos t = t - 2\sin t + \int_0^t \cos u\cdot\cos(t-u)du =$$

$$= t - 2\sin t + \int_0^t \frac{1}{2}\left[\cos(u+t-u) + \cos(u-t+u)\right]du = t - 2\sin t + \frac{1}{2}\int_0^t \left[\cos(t) + \cos(2u-t)\right]du =$$

$$= t - 2\sin t + \frac{1}{2}\left[u\sin(t) + \frac{\sin(2u-t)}{2u-t}\right]\Bigg|_{u=0}^{u=t} = t - 2\sin t + \frac{1}{2}\left[t\sin t + \frac{\sin(t)}{t} - 0 - \frac{\sin(-t)}{-t}\right]$$

$$f(t) = t - 2\sin t + \frac{1}{2}t\sin t$$

■

Aplicaţii ale transformării Laplace

Exemple.

1. Ecuaţii diferenţiale liniare (de ordin superior) cu coeficienţi constanţi $x = x(t)$ cu

$$x''(t) - 5x(t) + 6x(t) = 0 \text{ cu condiţiile iniţiale } x(0) = 1 \ , \ x'(0) = -1$$

2. Ecuaţii diferenţiale (de ordin superior) cu coeficienţi neconstanţi $x = x(t)$

$$tx''(t) + 2x'(t) = t - 1 \text{ cu condiţiile iniţiale } \quad x(0) = 3 \quad , \quad x'(0) = -\frac{1}{2}$$

Să observăm că în acest caz, $x'(0) = -\frac{1}{2}$ nu este o condiţie iniţială aleasă arbitrar, ci este "obligatorie" din însăşi ecuaţia diferenţială , în care pentru $t = 0$ obţinem

$$0 \cdot x''(0) + 2x'(0) = 0 - 1 \quad \Rightarrow \quad x'(0) = -\frac{1}{2}$$

3. Sisteme liniare de ecuaţii diferenţiale (de ordin 1) cu coeficienţi constanţi.

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = -9x(t) + 3y(t) \end{cases} \quad , \ x(0) = 1 \ , \ y(0) = 0$$

4. Ecuaţii integrale.

$$y(t) - 2\int_0^t y(t-u)\sin u du = \cos t$$

5. Ecuaţii "integro-diferenţială".

$$y'(t) + \int_0^t u \cdot y(t-u)du = t \quad \text{cu} \ \ y(0) = -1$$

6. Integrale improprii care se obţin pentru valori particulare $z = a$ ale unei transformate Laplace

pentru $f(t)$ funcţie original şi $\mathcal{L}[f(t)] \overset{not}{=} L(z)$ transformata sa Laplace, în anumite condiţii se pot calcula integralele improprii

$$\text{A)} \quad \int_0^{+\infty} f(t)dt \qquad \text{B)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt \qquad \text{C)} \quad \int_0^{+\infty} t^n f(t)dt$$

Comentarii.

Toate aplicaţiile transformării Laplace funcţionează numai pentru ecuaţii ale căror soluţii sunt funcţii original.

De exemplu:

- toate ecuaţiile diferenţiale de ordin superior, liniare cu coeficienţi constanţi

$$E(x, x', x'', ..., x^{(n)}) = f(t)$$

numai dacă "termenul" $f(t)$ este original Laplace

pentru rezolvarea ecuaţiei următoare nu se poate folosi transformarea Laplace, e^{t^2} nu este original Laplace

$$x''(t) - x(t) + 2x(t) = e^{t^2}$$

- toate sistemele liniare de ecuaţii diferenţiale (de ordin 1) cu coeficienţi constanţi

$$X' = AX + B(t) \quad , \quad X(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$$

numai dacă funcţiile $B(t) = (b_1(t), b_2(t), ..., b_n(t))$ sunt original Laplace

Dacă coeficienţii nu sunt constanţi, atunci doar anumite ecuaţii sau sisteme de ecuaţii diferenţiale pot fi rezolvate folosind transformarea Laplace.

Soluţii.

1. Mai întâi câteva consideraţii valabile pentru toate exemplele ce urmează.

Interpretăm egalitatea $x''(t) - 5x(t) + 6x(t) = 0$ ca fiind adevărată pentru orice $t \geq 0$,
presupunem că funcţiile $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$ sunt funcţii original,
interpretăm condiţiile iniţiale ca limite laterale $x(0) = x(+0) = \lim_{t \searrow 0} x(t)$, $x'(0) = x'(+0) = \lim_{t \searrow 0} x(t)$,
deci $x(+0) = 1$, $x'(+0) = -1$
În "stânga" avem o sumă de funcţii original " $x''(t) - 5x(t) + 6x(t)$ " , iar
în "dreapta" funcţia constantă 0

Pasul I.
Aplicăm transformarea Laplace ecuaţiei diferenţiale, folosim faptul că este o aplicaţie liniară (operator liniar)

$$\mathcal{L}[x''(t) - 5x'(t) + 6x(t)] = \mathcal{L}[0] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}[x''(t)] - 5\mathcal{L}[x'(t)] + 6\mathcal{L}[x(t)] = 0$$

apoi folosim teorema "derivării originalului"

$$\mathcal{L}[x'(t)] = z\mathcal{L}[x(t)] - \underbrace{x(+0)}_{1} \quad , \quad \mathcal{L}[x''(t)] = z^2\mathcal{L}[x(t)] - z \cdot \underbrace{x(+0)}_{1} - \underbrace{x'(+0)}_{-1}$$

adunând obţinem ecuaţia algebrică

$$z^2\mathcal{L}[x(t)] - z + 1 - 5\left(z\mathcal{L}[x(t)] - 1\right) + 6\mathcal{L}[x(t)] = 0$$

Pasul II. care se rezolvă

$$\left(z^2 - 5z + 6\right)\mathcal{L}[x(t)] = z - 1 - 5$$

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{z-6}{z^2 - 5z + 6}$$

Pasul III. "inversăm" transformata Laplace.
Descompunem numitorul în factori $z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$
Descompunem în fracţii simple

$$\frac{z-6}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z-6}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$$

Înmulţim cu $z - 2$ şi obţinem

$$\frac{z-6}{(z-3)} = A + \frac{B(z-2)}{z-3}$$

Pentru $z - 2$ rezultă

$$A = \frac{2-6}{2-3} = 4$$

Înmulţim cu $z - 3$ şi obţinem

$$\frac{z-6}{(z-2)} = \frac{A(z-3)}{z-2} + B$$

Pentru $z = 3$ rezultă

$$B = \frac{3-6}{3-2} = -3$$

Deci în final obţinem descompunerea

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{z-6}{z^2-5z+6} = \frac{4}{z-2} + \frac{-3}{z-3}$$

Căutând în tabelul cu transformatele Laplace ale funcţiilor elementare găsim

$$\frac{1}{z-2} = \mathcal{L}[e^{2t}] \quad , \quad \frac{1}{z-3} = \mathcal{L}[e^{3t}]$$

Folosim faptul că transformatrea Laplace este liniară şi obţinem

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{4}{z-2} + \frac{-3}{z-3} = 4\mathcal{L}[e^{2t}] - 3\mathcal{L}[e^{3t}] = \mathcal{L}[4e^{2t} - 3e^{3t}]$$

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[4e^{2t} - 3e^{3t}]$$

Acum ţinem seama de faptul că transformarea Laplace este injectivă şi obţinem

$$x(t) = 4e^{2t} - 3e^{3t}$$

care este soluţia problemei Cauchy : ecuaţia diferenţială $x''(t) - 5x(t) + 6x(t) = 0$ cu condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.

■

Comentariu.
Ecuaţia se poate rezolva şi folosind algoritmul corespunzător descris în capitolul 2 Ecuaţii Diferenţiale.
Să rezolvăm şi în acest mod.
Se asociază polinomul carateristic

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

care are rădăcinile $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ pentru care asociem soluţiile (liniar independente)

$$x_1(t) = e^{2t} \quad , \quad x_2(t) = e^{3t}$$

Soluţia generală a ecuatiei diferenţiale este o combinatie liniară a acestora

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

Folosim şi condiţiile iniţiale obţinem

$$1 = x(0) = C_1 e^{2\cdot 0} + C_2 e^{3\cdot 0} = C_1 + C_2$$

$$-1 = x'(0) = C_1 2e^{2\cdot 0} + C_2 3e^{3\cdot 0} = 2C_1 + 3C_2$$

deoarece $x'(t) = \left(C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}\right)' = C_1 2e^{2t} + C_2 3e^{3t}$
rezolvăm sistemul liniar obţinut

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + 3C_2 = -1 \end{cases}$$

$C_2 = 1 - C_1 \quad \Rightarrow \quad 2C_1 + 3(1 - C_1) = -1 \quad \Rightarrow \quad 2C_1 + 3 - 3C_1 = -1 \quad \Rightarrow \; C_1 = 4 \; \Rightarrow \; C_2 = 1 - 4 = -3$
În final obţinem soluţia

$$x(t) = 4e^{2t} - 3e^{3t}$$

■

Este evident că folosirea transformatei Laplace duce la un volum mai mare de calcule.
Acesta însă este doar un exemplu simplu în care se pot folosi ambele metode.
Dacă însă ecuaţia diferenţială nu are coeficienţi constanţi, atunci folosirea transformatei Laplace este o metodă de interes real.

2. Ecuaţie diferenţială de ordin 2 cu coeficienţi neconstanţi $x = x(t)$

$$t x''(t) + 2x'(t) = t - 1 \;\; \text{cu} \quad x(0) = 3 \quad , \quad x'(0) = -\frac{1}{2}$$

Avem în vedere toate consideraţiile menţionate în exemplul 1.
Presupunem că funcţia $x = x(t)$ şi derivata ei $x'(t)$ sunt continue în 0 , avem

$$x(+0) = x(0) = 3 \quad \text{şi} \quad x'(+0) = x'(0) = -\frac{1}{2}$$

Aplicăm transformarea Laplace şi obţinem

$$\mathcal{L}[tx''(t) + 2x'(t)] = \mathcal{L}[t - 1]$$

apoi folosim liniaritatea

$$\mathcal{L}[tx''(t)] + 2\mathcal{L}[x'(t)] = \mathcal{L}[t - 1]$$

şi calculăm separat aplicând teorema derivării imaginii, apoi teorema derivării originalului

$$\mathcal{L}[tx''(t)] = (-1)\left[\mathcal{L}(x'')\right]' = (-1)\left[z^2\mathcal{L}(x) - z \cdot x(+0) - x'(+0)\right]' =$$

$$= (-1)\left[2z \cdot \mathcal{L}(x) + z^2 \cdot (\mathcal{L}(x))' - \underbrace{x(0)}_{3}\right] = -2z \cdot \mathcal{L}(x) - z^2 \cdot (\mathcal{L}(x))' + 3$$

$$\mathcal{L}[x'(t)] = z \cdot \mathcal{L}(x) - x(0) = z \cdot \mathcal{L}(x) - 3$$

$$\mathcal{L}[t - 1] = \mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(1) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}$$

în final, adunând obţinem

$$-2z \cdot \mathcal{L}(x) - z^2 \cdot (\mathcal{L}(x))' + 3 + 2[z \cdot \mathcal{L}(x) - 3] = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}$$

$$-2z \cdot \mathcal{L}(x) - z^2 \cdot (\mathcal{L}(x))' + 3 + 2z \cdot \mathcal{L}(x) - 6 = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}$$

$$-z^2 \cdot (\mathcal{L}(x))' = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 3$$

$$(\mathcal{L}(x))' = -\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} - 3\frac{1}{z^2}$$

integrăm această egalitate

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{2z^2} + 3\frac{1}{z} + C$$

Reamintin că orice transformată Laplace are limita

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} \mathcal{L}(x) = 0$$

prin urmare

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} \left(\frac{1}{3z^3} - \frac{1}{2z^2} + 3\frac{1}{z} + C\right) = 0 - 0 + 0 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

deci

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{2z^2} + 3\frac{1}{z}$$

Acum "inversăm" transformarea Lalace şi obţinem

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{2z^2} + 3\frac{1}{z} = \frac{1}{3}\mathcal{L}(\frac{1}{2}t^2) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(t) + 3\mathcal{L}(1) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{2}t + 3\right)$$

şi din injectivitatea transformării Laplace

$$x(t) = \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{2}t + 3$$

Putem verifica rezultatul obţinut.

i) verificăm condiţiile iniţiale:

$$x(0) = \frac{1}{6} \cdot 0^2 - \frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3$$

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{2}t + 3\right) = \frac{2}{6}t - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x'(0) = \frac{2}{6} \cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

ii) verifică ecuaţia diferenţială :

$$x''(t) = \frac{d}{dt}\left(x'(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$tx''(t) + 2x'(t) = t \cdot \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{2}\right) = t - 1$$

■

3. Aplicăm transformarea Laplace sistemul liniar

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = -9x(t) + 3y(t) \end{cases}, \ x(0) = 1 \ , \ y(0) = 0$$

şi obţinem

$$\begin{cases} \mathcal{L}[x'(t)] = \mathcal{L}[3x(t) - y(t)] \\ \mathcal{L}[y'(t)] = \mathcal{L}[-9x(t) + 3y(t)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}[x'(t)] = 3\mathcal{L}[x(t)] - \mathcal{L}[y(t)] \\ \mathcal{L}[y'(t)] = -9\mathcal{L}[x(t)] + 3\mathcal{L}[y(t)] \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[x'(t)] = z\mathcal{L}[x(t)] - \underbrace{x(0)}_{1} \quad , \quad \mathcal{L}[y'(t)] = z\mathcal{L}[y(t)] - \underbrace{y(0)}_{0}$$

Pentru a simplifica notaţiile, notăm $L_x = \mathcal{L}[x(t)]$, $L_y = \mathcal{L}[y(t)]$,
obţinem un sistem liniar algebric

$$\begin{cases} zL_x - 1 = 3L_x - L_y \\ zL_y = -9L_x + 3L_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z-3)L_x - 1 = -L_y \\ (z-3)L_y = -9L_x \end{cases}$$

înlocuim L_y din prima ecuaţie în a doua ecuaţie

$$(z-3)[-(z-3)L_x + 1] = -9L_x \quad \Leftrightarrow \quad -(z-3)^2 L_x + (z-3) + 9L_x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[-z^2 + 6z - 9 + 9\right] L_x + (z-3) = 0$$

$$L_x = \frac{-(z-3)}{-z^2 + 6z} = \frac{z-3}{z^2 - 6z} \quad \Rightarrow \quad L_y = \frac{-9L_x}{z-3} = \frac{-9}{z^2 - 6z}$$

Descompunem în fracţii simple

$$\mathcal{L}[x(t)] = L_x = \frac{z-3}{z^2 - 6z} = \frac{z-3}{z(z-6)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-6} = \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-6}$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = L_y = \frac{-9}{z^2 - 6z} = -9\frac{1}{z(z-6)} = -9\left[\frac{A}{z} + \frac{B}{z-6}\right] = -9\left[\frac{-1}{6z} + \frac{1}{6(z-6)}\right]$$

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-6} \quad \text{şi} \quad \mathcal{L}[y(t)] = -\frac{9}{6}\frac{1}{z} + \frac{-9}{6}\frac{1}{(z-6)} = \frac{3}{2}\frac{1}{z} + \frac{-3}{2}\frac{1}{(z-6)}$$

Apoi "inversăm" transformarea Laplace

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{2}\mathcal{L}(1) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{6t}) = \mathcal{L}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{6t})$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{3}{2}\mathcal{L}(1) - \frac{3}{2}\mathcal{L}(e^{6t}) = \mathcal{L}\left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{6t}\right]$$

Deoarece

$$\frac{1}{z} = \mathcal{L}(1) \ \text{ şi } \ \frac{1}{z-6} = \mathcal{L}(e^{6t})$$

În final obţinem soluţiile

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{6t} \quad , \quad y(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{6t}$$

■

4. Aplicăm transformarea Laplace ecuaţiei integrale

$$y(t) - 2\int_0^t y(t-u)\sin u du = \cos t$$

şi obţinem

$$\mathcal{L}\left[y(t) - 2\int_0^t y(t-u)\sin u du\right] = \mathcal{L}[\cos t] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}[y(t)] - 2\mathcal{L}\left[\int_0^t y(t-u)\sin u du\right] = \mathcal{L}[\cos t]$$

observăm că integrala reprezintă un produs de convoluţie

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{\int_0^t y(t-u)\sin u du}_{y(t)*\sin t}\right] = \mathcal{L}\left[y(t) * \sin t\right] = \mathcal{L}[y(t)] \cdot \mathcal{L}[\sin t]$$

înlocuind în ecuaţie rezultă

$$\mathcal{L}[y(t)] - 2\mathcal{L}[y(t)] \cdot \mathcal{L}[\sin t] = \mathcal{L}[\cos t]$$

$$\mathcal{L}[y(t)] - 2\mathcal{L}[y(t)] \cdot \frac{1}{z^2+1} = \frac{z}{z^2+1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[y(t)] \cdot \left[1 - \frac{2}{z^2+1}\right] = \frac{z}{z^2+1}$$

$$\mathcal{L}[y(t)] \cdot \frac{z^2-1}{z^2+1} = \frac{z}{z^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}[y(t)] = \frac{z}{z^2-1}$$

Acum "inversăm" transformarea Laplace.

Descompunem în "fracţii simple" , de fapt funcţii raţionale care sunt transformatele Laplace ale unor funcţii elementare.

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{z}{z^2-1} = \frac{z}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-t}) = \mathcal{L}(\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t})$$

Deci

$$y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$$

■

5. Aplicăm transformarea Laplace ecuaţiei integrale. Unele texte numesc astfel de ecuaţii "integro - diferenţiale" ,

deoarece funcţia necunoscută $y = y(t)$ apare şi ca derivată $y'(t)$ şi "sub" o integrală.

$$y'(t) + \int_0^t u \cdot y(t-u)du = t \quad \text{cu} \quad y(0) = -1$$

Obţinem

$$\mathcal{L}\left[y'(t) + \int_0^t u \cdot y(t-u)du\right] = \mathcal{L}[t] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\left[y'(t)\right] + \mathcal{L}\left[\underbrace{\int_0^t u \cdot y(t-u)du}_{t*y(t)}\right] = \mathcal{L}[t]$$

folosim teorema derivării originalului

$$\mathcal{L}\left[y'(t)\right] = z\mathcal{L}\left[y(t)\right) - \underbrace{y(+0)}_{y(0)} = z\mathcal{L}\left[y(t)\right) - \underbrace{y(0)}_{-1} = z\mathcal{L}\left[y(t)\right) - (-1) = z\mathcal{L}\left[y(t)\right) + 1$$

observăm că integrala reprezintă un produs de convoluţie

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{\int_0^t u\cdot y(t-u)du}_{t*y(t)}\right] = \mathcal{L}\left[t*y(t)\right] = \mathcal{L}(t)\cdot\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{z^2}\cdot\mathcal{L}[y(t)]$$

înlocuind în ecuaţia integrală obţinem

$$z\mathcal{L}\left[y(t)\right) + 1 + \frac{1}{z^2}\cdot\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{z^2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}[y(t)]\cdot\left[z+\frac{1}{z^2}\right] = \frac{1}{z^2} - 1$$

$$\mathcal{L}[y(t)]\cdot\left[\frac{z^3+1}{z^2}\right] = \frac{1-z^2}{z^2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}[y(t)] = \frac{1-z^2}{z^3+1} = \frac{(1-z)(1+z)}{(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{1-z}{z^2-z+1}$$

Scriem numitorul ca sumă de "pătrate"

$$z^2 - z + 1 = z^2 - 2\cdot\frac{1}{2}z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 =$$

$$= \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

apoi descompunem în fracţii simple, de fapt funcţii raţionale care pot fi transformatele Laplace ale unot funcţii elementare

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1-z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Folosim teorema deplasării şi transformata Laplace pentru sin

$$\mathcal{L}[e^{\beta t}\cdot f(t)] = \mathcal{L}[f(t)](z-\beta) \quad , \quad \mathcal{L}[\sin\alpha t] = \frac{\alpha}{z^2+\alpha^2} \quad , \quad \mathcal{L}[\cos\alpha t] = \frac{z}{z^2+\alpha^2}$$

în acest caz teorema deplasării arată astfel

$$\mathcal{L}[e^{\beta t}\sin\alpha t] = \frac{\alpha}{(z-\beta)^2+\alpha^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{\beta t}\cos\alpha t] = \frac{z-\beta}{(z-\beta)^2+\alpha^2}$$

obţinem

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \mathcal{L}\left(e^{1/2t}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

analog pentru transformata Laplace pentru cos

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}\cdot f(t)] = \mathcal{L}[f(t)](z-\alpha) \quad , \quad \mathcal{L}[\cos\beta t] = \frac{z}{z^2+\beta^2}$$

obţinem

$$\frac{z-\frac{1}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \mathcal{L}\left(e^{1/2t}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

În final

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{z-\frac{1}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{z-\frac{1}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}\left(e^{1/2t}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \mathcal{L}\left(e^{1/2t}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{1/2t}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - e^{1/2t}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{1/2t}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - e^{1/2t}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

■

6. Anumite integrale improprii se obţin dintr-o transformată Laplace pentru " $z = 0$ " , sau altă valoare particulară pentru z

Considerăm $f(t)$ funcţie original cu " $b = 0$ " (sau $\inf b = 0$) şi $\mathcal{L}[f(t)] \overset{not}{=} L(z)$ transformata sa Laplace.

(A) Dacă integrala improprie este absolut convergentă

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt < \infty$$

atunci

$$\text{A)}\qquad \int_0^{+\infty} f(t)dt = \left[\underbrace{\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt}_{\mathcal{L}[f(t)]}\right]_{z\to 0} = \lim_{z\to 0} L(z)$$

(B) Dacă integrala improprie este absolut convergentă

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < \infty$$

şi funcţia $\frac{f(t)}{t}$ este original Laplace, atunci folosind teorema integrării originalului obţinem

$$\text{B)}\qquad \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \left[\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-zt}dt}_{\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]}\right]_{z\to 0} = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]_{z\to 0} = \lim_{z\to 0}\left[-\int L(z)\right]$$

(C) Dacă integrala improprie este absolut convergentă

$$\int_0^{+\infty} |t^n f(t)|\,dt < \infty$$

atunci folosind teorema derivării imaginii obţinem

$$\text{C)}\qquad \int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = \left[\underbrace{\int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-zt}dt}_{\mathcal{L}[t^n f(t)]}\right]_{z\to 0} = \lim_{z\to 0}\left[(-1)^n\left[L(z)\right]^{(n)}\right]$$

Exemple.
(A)

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\cos\alpha t dt = \left[\underbrace{\int_0^{+\infty} \cos\alpha t\cdot e^{-zt}dt}_{\mathcal{L}[\cos\alpha t]}\right]_{z\to\beta} = \left[\frac{z}{z^2+\alpha^2}\right]_{z\to\beta} = \frac{\beta}{\beta^2+\alpha^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\sin\alpha t dt = \left[\underbrace{\int_0^{+\infty} \sin\alpha t\cdot e^{-zt}dt}_{\mathcal{L}[\sin\alpha t]}\right]_{z\to\beta} = \left[\frac{\alpha}{z^2+\alpha^2}\right]_{z\to\beta} = \frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}$$

Pentru $\alpha = 1$, $\beta = 1$ obţinem

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos\alpha t dt = \left[\underbrace{\int_0^{+\infty} \cos\alpha t\cdot e^{-zt}dt}_{\mathcal{L}[\cos\alpha t]}\right]_{z\to 1} = \left[\frac{z}{z^2+\alpha^2}\right]_{z\to 1} = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin\alpha t dt = \left[\underbrace{\int_0^{+\infty} \sin\alpha t\cdot e^{-zt}dt}_{\mathcal{L}[\sin\alpha t]}\right]_{z\to 1} = \left[\frac{\alpha}{z^2+\alpha^2}\right]_{z\to 1} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

4.3 Transformarea "Z" - (Transformarea Laplace Discretă)

Definiţie.
Se numeşte **semnal discret** o funcţie $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, practic un şir indexat după numere întregi

$$x_n = x(n) \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad , \quad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

Un semnal discret are **suport pozitiv** dacă $x_n = x(n) = 0$ pentru $n < 0$ şi
suport finit dacă $x_n = x(n) = 0$ pentru $|n| > M$, cu alte cuvinte şirul are un <u>număr finit de termeni nenuli</u>.

În electronică, procesarea semnalelor, teoria controlului, statistică, un semnal discret reprezintă şirul valorilor unui semnal măsurat la momente "discrete" de timp. Spre deosebire de un semnal continuu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, care reprezintă valorile unui semnal "măsurat" în timp continuu.

"Domeniu timp" sau reprezentarea (graficul) unui semnal în "domeniu timp" arată variaţia unui semnal în timp.
- fie ca funcţie definită pe $\mathbb{R}$ ca timp continuu
- fie ca şir (semnal discret) definit pe $\mathbb{Z}$ ca timp discret

"Domeniu frecvenţă" , termen folosit pentru a descrie analiza matematică a funcţiilor sau semnalelor în raport de frecvenţă.

În matematică şi procesarea semnalelor, transformata Z

transformă un semnal - reprezentare în domeniu timp discret (un şir de numere)
într-o funcţie complexă - reprezentare în domeniu frecvenţă.
Transformata Z este un echivalent discret al transformatei Laplace.

Folosim adunarea "naturală" a şirurilor

$$(x+y)(n) = x(n) + y(n) = x_n + y_n$$

şi înmulţirea cu scalari $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(\alpha x)(n) = \alpha x(n) = \alpha x_n$$

Astfel mulţimea tututor semnalelor discrete şi a semnalelor cu suport pozitiv sunt spaţii vectoriale.
Din punct de vedere fizic, adunarea a două semnale discrete are semnificaţie : "suprapunerea efectelor" celor două semnale,
iar înmulţirea cu scalari, semnifică "potenţiometru" liniar :
- pentru $\alpha > 1$ se obţine amplificarea semnalului

a	v	c
	b	
a	c	n

- pentru $\alpha \in (0,1)$ se obţine diminuarea semnalului.

Exemple.

1. semnalul discret unitate $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

$$u(n) = \begin{cases} 0 & , \ n < 0 \\ 1 & , \ n \geq 0 \end{cases}$$

"corespunde" semnalului "treaptă unitate" - funcţia lui Heaviside $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ 1 & , \ t \geq 0 \end{cases}$$

2. impuls unitar discret la "momentul k"

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 0 & , \ n \neq k \\ 1 & , \ n = k \end{cases}$$

pentru $k = 0$ notăm $\delta \overset{not}{=} \delta_0$

Putem asocia semnalul discret unitate cu un semnal (luminos)
în starea "stins" care de la momentul 0 trece în starea "aprins".
Impulsul unitar se poate asocia cu un semnal luminos care se aprinde doar la momentul "k" (ca un flash).

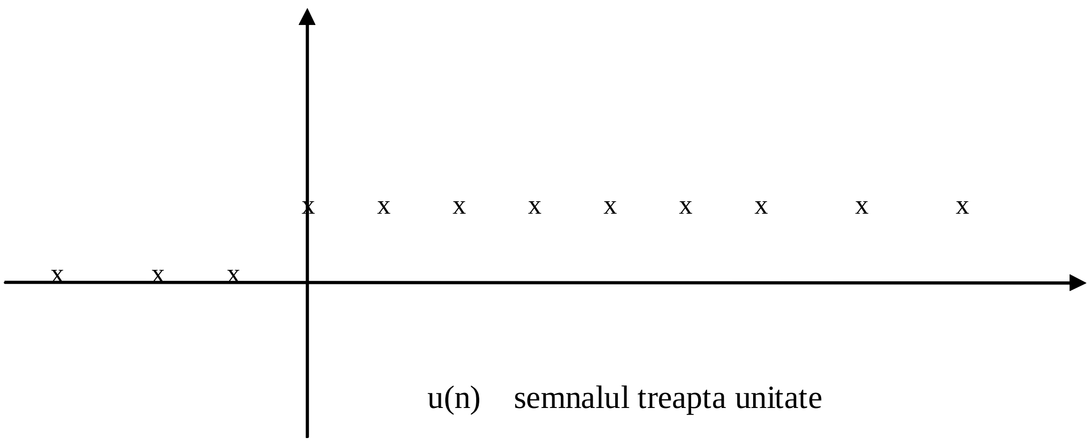
Definiţie.
Numim întârziatul lui x cu $k-$momente, semnalul discret

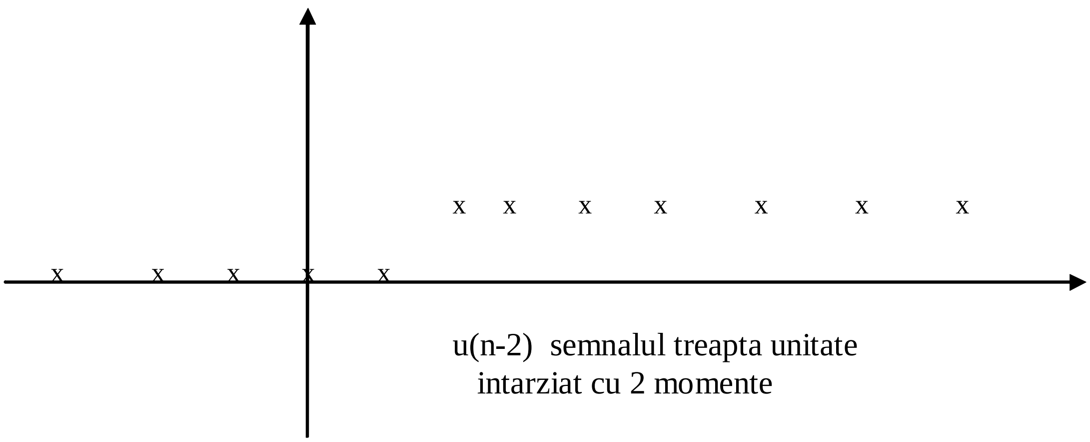
$$y = (x_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}} \quad \Leftrightarrow \quad y_n = x_{n-k}$$

cu alte cuvinte întârziatul lui x se obţine prin "deplasarea" (întâzierea) semnalului cu $k-$momente.
Sugestia de "întârziere" are sens numai pentru $k > 0$.
Pentru $k < 0$ semnalul $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ este întârziatul lui $y = (x_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}}$
"Deplasare" se referă la faptul că graficul întârziatului se obţine
prin deplasarea (shiftarea) la dreapta a graficului lui x

Exemplu.
întârziatul semnalului discret unitate u cu $2-$momente, este

$$(u_{n-2})_{n\in\mathbb{Z}} = u(n-2) = \begin{cases} 0 & , \ n-2 < 0 & \Leftrightarrow & n < 2 \\ 1 & , \ n-2 \geq 0 & \Leftrightarrow & n \geq 2 \end{cases}$$





Definiţie.
Fie x şi y semnale discrete. Dacă seria

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{n-k} \cdot y_k$$

este convergentă pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, atunci numim **convoluţia** lui x cu y semnalul notat $x * y$ definit

$$(x * y)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{n-k} \cdot y_k$$

Pentru semnalaecu suport pozitiv , avem
- $x_{n-k} = 0$ pentru $n - k < 0 \Leftrightarrow n < k$
- $y_k = 0$ pentru $k < 0$

Deci pentru semnale cu suport pozitiv, convoluţia este (o sumă cu număr finit de termeni)

$$(x * y)(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=-1} x_{n-k} \cdot \underbrace{y_k}_{0} + \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} \cdot y_k + \sum_{k=n}^{+\infty} \underbrace{x_{n-k}}_{0} \cdot y_k = \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} \cdot y_k$$

Proprietăţi.
1. $x * y = y * x$ produsul de convoluţie este comutativ
2. $x * \delta = x$
3. $x * \delta_k = (x_{n-k})_{n \in \mathbb{Z}}$ întârziatul lui x cu $k-$momente

<u>Demonstraţie</u>.

1.

$$(x*y)(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_{n-k}\cdot y_k\underset{n-k=p}{=}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_p\cdot y_{n-p}=(y*x)(n)$$

2.

$$(x*\delta)(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_{n-k}\cdot\underbrace{\delta(k)}_{0\text{ pentru }k\neq 0}=x_n\cdot\delta(0)=x_n=x(n)$$

deci $x*\delta=x$

3.

$$(x*\delta_k)(n)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}x_{n-p}\cdot\underset{0\text{ pentru }p\neq k}{\delta_k(p)}=x_{n-k}\cdot\delta_k(k)=x_{n-k}$$

deci $x*\delta_k=(x_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}}$ întârziatul lui x cu $k-$momente

■

Definiţie.

Fie $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un semnal discret. Se numeşte **transformata Z** sau **transformata Z "bilaterală"** , sau "**transformata Laplace discretă**" funcţia $X:D\to\mathbb{C}$ definită de

$$X(z)\overset{not}{=}\mathcal{Z}\left[(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right]\overset{def}{=}\sum_{n\in\mathbb{Z}}x_nz^{-n}\quad,\quad z\in D\subset\mathbb{C}$$

$D\subset\mathbb{C}$ este domeniul de convergenţă al seriei Laurent $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}x_nz^{-n}$.

$\mathcal{Z}\left[(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right]=\mathcal{Z}\left[(x_n)\right]=\mathcal{Z}\left[x\right]$ reprezintă transformata Z a semnalului discret x .

" $\mathcal{Z}$ " reprezintă transformarea Z ca operator ce asociază unui semnal discret (şir) o funţie.

Pentru semnale cu suport pozitiv numim **transformata Z "unilaterală"**

$$X(z)\overset{not}{=}\mathcal{Z}\left[(x_n)_{n\geq 0}\right]\overset{def}{=}\sum_{n=0}^{\infty}x_nz^{-n}\quad,\quad z\in D\subset\mathbb{C}$$

Transformata Z are sens numai dacă termenii semnalului discret " x_n " , care devin coeficienţii seriei Laurent, generează o serie Laurent convergentă,
mai precis razele de convergenţă sunt $r<R$ şi deci
domeniul D al transformatei Z este coroana de convergenţă corespunzătoare $D=\{z\in\mathbb{C}\ \ ,\ \ r<|z|<R\}$

<u>Reamintim</u> că pentru o serie Laurent razele de convergenţă sunt

- R este <u>raza de convergenţă a "părţii Taylor"</u> (seria cu puteri pozitive) $\sum\limits_{n<0}x_nz^{-n}=\sum\limits_{n\geq 0}x_nz^n$
- $\frac{1}{r}$ este <u>raza de convergenţă a "părţii principale"</u> (seria cu puteri negative) $\sum\limits_{n\leq -1}x_n\frac{1}{z^n}$

Exemple.

1) Transformata Z a <u>semnalului discret unitate</u>

$$\mathcal{Z}\left[u\right]=U(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\underbrace{u_n}_{1\ ,\ n\geq 0}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}1\cdot z^{-n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{z}{z-1}\quad\text{pentru}\quad\left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$\mathcal{Z}\left[u\right]=\frac{z}{z-1}$$

Domeniul (coroana de convergenţă) este în acest caz $D=\{|z|>1\}$

2) Transformata Z a <u>impusului unitar δ</u> (la momentul 0) este funcţia constantă 1

$$\mathcal{Z}\left[\delta\right](z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\underbrace{\delta(n)}_{\neq 0\ ,\ n=0}z^{-n}=\delta(0)z^0=1$$

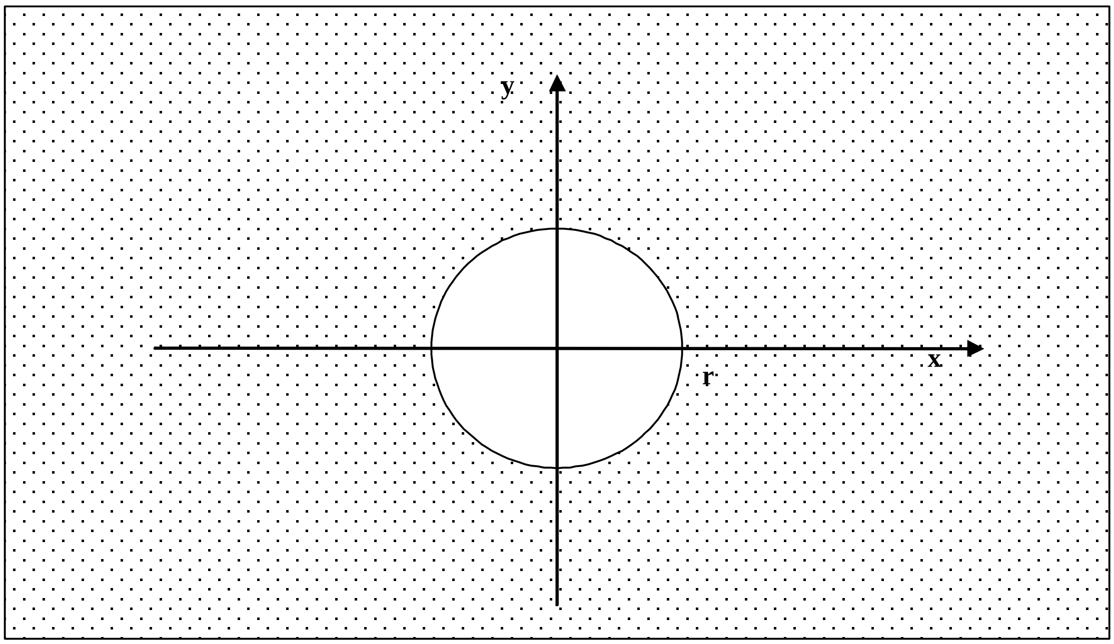
3) Transformata Z a impusului unitate δ_k (la momentul k)este

$$\mathcal{Z}\left[\delta_k\right](z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\delta_k(n)}_{\neq 0\ ,\ n=k} z^{-n} = \delta_k(k)z^{-k} = \frac{1}{z^k}$$

4) Transformata Z a unui semnal cu suport pozitiv ($x_n = 0$, $n < 0$) are seria Laurent de forma

$$\mathcal{Z}\left[(x_n)_{n\geq 0}\right] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = x_0 + x_1\frac{1}{z} + x_2\frac{1}{z^2} + x_3\frac{1}{z^3} + ...$$

deci raza $R = +\infty$, cu alte cuvinte transformata Z a unui semnal cu suport pozitiv este definită "spre ∞"
deoarece în acest caz coeficienţii părţii Taylor sunt toţi nuli ($x_n = 0$, $n < 0$)
şi prin urmare partea Taylor este convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$



Acestea au sens numai dacă $r < R$, adică $r < \infty \Leftrightarrow \frac{1}{r} > 0$
(în caz contrar pentru $\frac{1}{r} = 0$ transformata Z nu are sens)
Rezultă în mod simplu că pentru semnale cu suport pozitiv avem

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x_0 = x(0)$$

deoarece

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty}\left(x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \frac{x_3}{z^3} + ...\right) = x_0 = x(0)$$

şi

$$\lim_{z\to\infty}\left|\frac{x_n}{z^n}\right| = \lim_{|z|\to+\infty}\left|\frac{x_n}{z^n}\right| = \lim_{|z|\to+\infty}\frac{|x_n|}{|z|^n} = 0$$

Proprietăţi.
1. Domeniul de definiţie al unei transformate Z este o coroană centrată în 0
2. Transformarea Z, notată " $\mathcal{Z}$ ", este liniară

$$\mathcal{Z}\left[x+y\right] = \mathcal{Z}\left[x\right] + \mathcal{Z}\left[y\right] \quad , \quad \mathcal{Z}\left[\alpha u\right] = \alpha\mathcal{Z}\left[u\right]$$

egalitatea are loc pe intersecţia domeniilor de definiţie (intersecţia a două coroane cu acelaşi centru este tot o coroană)

3. Dacă există convoluţia $x * y$ atunci

$$\mathcal{Z}[x * y] = \mathcal{Z}[x] \cdot \mathcal{Z}[y]$$

egalitatea are loc pe intersecţia domeniilor pentru $\mathcal{Z}[x]$ şi $\mathcal{Z}[y]$.
în particular

$$\mathcal{Z}[x * \delta_k] = \frac{1}{z^k}\mathcal{Z}[x]$$

Demonstraţie.1. Am explicat deja domeniul unei transformate Z
2. Liniaritatea este evidentă deoarece

$$(x+y)(n) = x(n) + y(n) = x_n + y_n$$

deci pentru z în intersecţia domeniilor pentru $\mathcal{Z}[x]$ şi $\mathcal{Z}[y]$ avem suma a două serii Laurent convergente

$$\mathcal{Z}[x](z) + \mathcal{Z}[y](z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n z^{-n} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n z^{-n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (x_n + y_n) z^{-n}$$

şi pe de altă parte

$$\mathcal{Z}[x+y](z) = \mathcal{Z}[(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{Z}}] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (x_n + y_n) z^{-n}$$

pentru înmulţirea cu scalari $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(\alpha x)(n) = \alpha x(n) = \alpha x_n$$

$$\mathcal{Z}[\alpha u](z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\alpha x_n) z^{-n} = \alpha \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n z^{-n} = \alpha \mathcal{Z}[u](z)$$

3. Pentru produsul de convoluţie avem

$$(x * y)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{n-k} \cdot y_k$$

folosim faptul că o serie Laurent este absolut convergentă pe coroana corespunzătoare,
deci putem schimba ordinea de sumare

$$\mathcal{Z}[x * y](z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{n-k} \cdot y_k \right) \cdot z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-k} \cdot z^{-n+k}}_{\mathcal{Z}[x](z)} \right) \cdot y_k \cdot z^{-k} =$$

şi înmulţim cu z^k şi cu z^{-k}

$$= \mathcal{Z}[x](z) \cdot \left(\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k \cdot z^{-k}}_{\mathcal{Z}[y](z)} \right) = \mathcal{Z}[x](z) \cdot \mathcal{Z}[y](z)$$

în particular

$$\mathcal{Z}[x * \delta_k] = \mathcal{Z}[x] \cdot \mathcal{Z}[\delta_k] = \mathcal{Z}[x] \cdot \frac{1}{z^k} = \frac{1}{z^k}\mathcal{Z}[x]$$

■

Teoremă. (formula de inversare)
Dacă $X(z) \overset{not}{=} \mathcal{Z}[(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}]$ este transformata Z a semnalului discret x , atunci

$$x(n) = x_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=b} z^{n-1} X(z) dz = \sum \operatorname{Res}\left(z^{n-1} X(z), a_j\right)$$

unde a_j sunt toate punctele singulare ale funcţiei $z^{n-1}X(z)$ cu $|a_j| \leq r < b$
pentru orice $b \in (r, R)$
în particular rezultă că transformarea Z este injectivă

$$\mathcal{Z}[x] = \mathcal{Z}[y] \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Demonstraţie.
Transformata Z

$$X(z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} x_p z^{-p}$$

ca sumă a unei serii Laurent este definită pe coroana $\{r < |z| < R\}$
deci

$$z^{n-1}X(z) = z^{n-1}\sum_{p \in \mathbb{Z}} x_p z^{-p} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} x_p z^{n-p-1}$$

Integrăm pe un cerc $|z| = b$, cu $b \in (r, R)$, parcurs o dată în sens trigonometric şi obţinem

$$\int_{|z|=b} z^{n-1}X(z)dz = \int_{|z|=b} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} x_p z^{n-p-1} \right) dz = \sum_{p \in \mathbb{Z}} x_p \left(\underbrace{\int_{|z|=b} z^{n-p-1}dz}_{0 \text{ pentru } p \neq n} \right) =$$

folosim integrala cunoscută

$$\int_{|z|=b} z^{n-p-1}dz = \begin{cases} 0 \ , \ n-p-1 \neq -1 \\ 2\pi i \ , \ n-p-1 = -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \ , \ p \neq n \\ 2\pi i \ , \ p = n \end{cases}$$

deci

$$\int_{|z|=b} z^{n-1}X(z)dz = x_n \cdot 2\pi i \quad \Leftrightarrow \quad x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=b} z^{n-1}X(z)dz = \sum \mathrm{Res}\left(z^{n-1}X(z), a_j\right)$$

conform teoremei reziduurilor a_j sunt toate punctele singulare ale funcţiei $z^{n-1}X(z)$ cu $|a_j| \leq r < b$

Injectivitatea este acum evidentă. Dacă transformatele Z coincid $\mathcal{Z}[x](z) = X(z) = Y(z) = \mathcal{Z}[y](z)$
atunci conform formulei de inversare
obţinem aceaşi termeni

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=b} z^{n-1}X(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=b} z^{n-1}Y(z)dz = y_n$$

■

Observaţie.
Pentru produsul "algebric" a două semnale

$$(x \cdot y)(n) = (x_n \cdot y_n) \ , \ n \in \mathbb{Z}$$

are loc egalitatea

$$\mathcal{Z}[x \cdot y](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=b} \frac{1}{w} X(\frac{z}{w}) Y(w) dz$$

unde $X(z) = \mathcal{Z}[x](z)$ şi $Y(z) = \mathcal{Z}[y](z)$

Demonstraţie.

$$\mathcal{Z}[x \cdot y](z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (x_n \cdot y_n) z^{-n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \cdot \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=b} w^{n-1} Y(w) dw \right] z^{-n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=b} \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n w^{n-1} z^{-n} Y(w) \right] dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=b} \left[\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \left(\frac{w}{z}\right)^n}_{X(\frac{w}{z})} \right] \frac{1}{w} Y(w) dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=b} X(\frac{w}{z}) \frac{1}{w} Y(w) dw$$

■

Transformatele Z ale unor semnale "elementare".

semnalul discret $x = (x_n)$	transformata Z $X(z)$
δ	$\mathcal{Z}(\delta) = 1$
δ_k	$\mathcal{Z}(\delta_k) = \frac{1}{z^k}$
u	$\mathcal{Z}(u) = \frac{z}{z-1}$
$n \cdot u(n)$	$\mathcal{Z}(n \cdot u) = \frac{z}{(z-1)^2}$
$n^2 \cdot u(n)$	$\mathcal{Z}(n^2 \cdot u) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{-an}	$\mathcal{Z}(e^{-an}) = \frac{1}{1 - e^{-a} z^{-1}}$
x_{n-1}	$\mathcal{Z}(x_{n-1}) = \frac{1}{z} X(z)$
x_{n+p}	$\mathcal{Z}(x_{n+p}) = z^p X(z)$
$n x_n$	$\mathcal{Z}(n x_n) = -z X'(z)$
$a^n x_n$	$\mathcal{Z}(a^n x_n) = X(\frac{z}{a})$

Aplicaţie.

Prezentăm un singur tip de aplicaţie al transformatei Z.
Determinarea termenilor unui şir numeric $(x_n)_{n\geq 0}$ definit printr-o relaţie de recurenţă liniară.
Mai precis orice termen al şirului se obţinem ca o combinatie liniară a predecesorilor săi.
Ordinul unei recurenţe liniare este dat de numărul de termeni ai combinaţiei liniare.

Recurenţă liniară de ordin 1

$$x_{n+1} = a x_n + b \quad , \quad n \geq 0$$

Acest tip de recurenţă nu necesită o teorie specială. Se rezolvă relativ simplu.
- dacă $a = 0$ obţinem $x_{n+1} = b$, adică un şir constant.
- dacă $b = 0$ obţinem $x_{n+1} = a x_n = a^2 x_{n-1} = ... = a^n x_0$, adică o progresie geometrică

Recurenţă liniară de ordin 2

$$x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n + c$$

Recurenţă liniară de ordin k

$$x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} a_j x_{n+j} + b = a_{k-1} x_{n+k-1} + a_{k-2} x_{n+k-2} + ... + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n + b$$

Interpretăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ ca un semnal cu suport pozitiv şi folosim transformata Z.

Exemplu.
Şirul definit de relaţia de recurenţă

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad , n \geq 0 \quad , \quad x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = 1$$

şir cunoscut ca "şirul lui Fibonacci".

relaţia de recurenţă astfel scrisă, arată cum se obţine termenul x_{n+2} cunoscând termenii anteriori x_{n+1} , x_n
Vom scrie relaţia de recurenţă în forma

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad , n \geq 2 \quad , \quad x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = 1$$

Este evident că notaţiile sunt echivalente.
Totuşi ultima relaţie evidenţiază mai clar un fapt deosebit de important:
Relaţia de recurenţă arată că
- semnalul discret (x_n) se obţine prin suprapunerea efectelor (adunarea)
  celor două semnale întârziate ale sale: (x_{n-1}) şi (x_{n-2}) (cu unul respectiv cu două momente)

Astfel o simplă recurenţă (aparent doar tehnică de calcul) are semnificaţie fizică.
Pentru a aplica transformata Z este necesară scrierea relaţiei de recurenţă în termeni de semnale discrete.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \begin{cases} 0 & , \ n < 0 \\ x_n & , \ n \geq 0 \end{cases} \quad , \quad (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}} = \begin{cases} 0 & , \ n < 0 \\ 0 & , \ n = 0 \\ x_{n-1} & , \ n \geq 1 \end{cases} \quad , \quad (x_{n-2})_{n\in\mathbb{Z}} = \begin{cases} 0 & , \ n < 0 \\ 0 & , \ n = 0 \\ 0 & , \ n = 1 \\ x_{n-2} & , \ n \geq 2 \end{cases}$$

Pentru $n \in \mathbb{Z}$ relaţia de recurenţă se scrie sub formă de tabel

n	$-\infty$	...	-1	0	1	2	3	...	$+\infty$
(x_{n-1})			0	0	0	x_1	x_2		
(x_{n-2})			0	0	0	0	x_1		
(x_n)			0	0	x_1	x_2	x_3	...	

Prin urmare adunăm semnalele discrete (suprapunem efectele lor) :
- semnalul (x_n) este suma :

întârziatul cu un moment (x_{n-1}) + întârziatul cu 2 momente (x_{n-2}) + un semnal care este nenul doar pentru $n = 1$ (impuls unitar)

$$(x_n) = (x_{n-1}) + (x_{n-2}) + \delta_1$$

Aplicăm transformata Z şi obţinem

$$\mathcal{Z}\left[(x_n)\right] = \mathcal{Z}\left[(x_{n-1})\right] + \mathcal{Z}\left[(x_{n-2})\right] + \mathcal{Z}\left[\delta_1\right]$$

Putem folosi rezulatele anterioare, un semnal întârziat se obţine ca o convoluţie cu semnalul unitar δ_k

$$x * \delta_k = \ (x_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}}$$

În particular

$$(x_{n-1}) = (x_n) * \delta_1 \quad , \quad (x_{n-2}) = (x_n) * \delta_2$$

Deci

$$\mathcal{Z}\left[(x_n)\right] = \mathcal{Z}\left[(x_{n-1})\right] + \mathcal{Z}\left[(x_{n-2})\right] + \mathcal{Z}\left[\delta_1\right] = \mathcal{Z}\left[(x_n) * \delta_1\right] + \mathcal{Z}\left[(x_n) * \delta_2\right] + \mathcal{Z}\left[\delta_1\right]$$

$$\mathcal{Z}\left[(x_n)\right] = \frac{1}{z}\mathcal{Z}\left[(x_n)\right] + \frac{1}{z^2}\mathcal{Z}\left[(x_n)\right] + \frac{1}{z}$$

Sau putem calcula în mod direct.
Şirul (x_n) este un semnal discret cu suport pozitiv , deci

$$\mathcal{Z}\left[(x_n)\right] = X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$$

Pentru întârziatul (x_{n-1}) facem schimbarea de "indice" $n - 1 = p \Rightarrow n = p + 1$ şi obţinem

$$\mathcal{Z}\left[(x_{n-1})\right] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-1} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1} z^{-n} = \sum_{p=0}^{\infty} x_p z^{-(p+1)} = \frac{1}{z}\sum_{p=0}^{\infty} x_p z^{-p} = \frac{1}{z}X(z)$$

Pentru întârziatul (x_{n-2}) facem schimbarea de "indice" $n - 2 = p \Rightarrow n = p + 2$ şi obţinem

$$\mathcal{Z}\left[(x_{n-2})\right] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-2} z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} x_{n-2} z^{-n} = \sum_{p=0}^{\infty} x_p z^{-(p+2)} = \frac{1}{z^2}\sum_{p=0}^{\infty} x_p z^{-p} = \frac{1}{z^2}X(z)$$

În fine $\quad \mathcal{Z}[\delta_1] = \frac{1}{z}$
Adunăm şi obţinem

$$\mathcal{Z}[(x_n)] = \mathcal{Z}[(x_{n-1})] + \mathcal{Z}[(x_{n-2})] + \mathcal{Z}[\delta_1] = \frac{1}{z}\mathcal{Z}[(x_n)] + \frac{1}{z^2}\mathcal{Z}[(x_n)] + \frac{1}{z}$$

Notăm $X(z) = \mathcal{Z}[(x_n)]$ şi obţinem (prin oricare din cele două metode)

$$X(z) = \frac{1}{z}X(z) + \frac{1}{z^2}X(z) + \frac{1}{z}$$

Deci

$$X(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}} = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

Apoi folosim formula de inversare

$$x(n) = x_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=b} z^{n-1}X(z)dz = \sum \operatorname{Res}\left(z^{n-1}X(z), a_j\right)$$

Amintim o observaţie anterioară.

Semnalele cu suport pozitiv au transformata Z definită "spre ∞" , adică au raza $R = +\infty$

Prin urmare coroana de convergenţă a seriei Laurent $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$ este de tipul $\{r < |z|\}$
deci toate punctele singulare a_j ale funcţiei $X(z) = \frac{z}{z^2-z-1}$ sunt în interiorul discului $\{|z| < r\} \subset \{|z| < b\}$
şi deci toate aceste puncte singulare apar în formula de inversare la suma reziduurilor

În acest caz punctele singulare sunt rădăcinile numitorului $z^2 - z - 1 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 + 4 = 5 \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2} \quad , \qquad z_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2}$$

$$z^2 - z - 1 = (z - z_1)(z - z_2)$$

Pentru $n \geq 0$, calculăm reziduurile în z_1, z_2 care sunt poli de ordin 1

$$\operatorname{Res}\left(z^{n-1}X(z), z_1\right) = \lim_{z\to z_1}\left[z^{n-1}X(z)(z - z_1)\right] = \lim_{z\to z_1}\left[z^{n-1}\frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)}(z - z_1)\right] =$$

$$= \lim_{z\to z_1}\left[z^{n-1}\frac{z}{(z - z_2)}\right] = \left[z_1^{n-1}\frac{z_1}{(z_1 - z_2)}\right] = z_1^n\frac{1}{(z_1 - z_2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\operatorname{Res}\left(z^{n-1}X(z), z_2\right) = \lim_{z\to z_2}\left[z^{n-1}X(z)(z - z_2)\right] = \lim_{z\to z_2}\left[z^{n-1}\frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)}(z - z_2)\right] =$$

$$= \lim_{z\to z_2}\left[z^{n-1}\frac{z}{(z - z_1)}\right] = \left[z_2^{n-1}\frac{z_2}{(z_2 - z_1)}\right] = z_2^n\frac{1}{(z_2 - z_1)} = \frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

În final obţinem

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \quad , \text{ pentru } \quad n \geq 0$$

Pentru $n < 0$, $\quad n = -k \ (k > 0)$ avem

$$z^{n-1}X(z) = \frac{1}{z^{k+1}}\frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{z^k}\frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

Deci în acest caz punctele singulare sunt 0 , z_1 , z_2 şi

$$x(n) = x_n = \sum \operatorname{Res}\left(z^{n-1}X(z), a_j\right)$$

amintim că suma reziduurilor în toate punctele singulare (finite) este

$$\sum \operatorname{Res}\left(f(z),a_j\right) = -\operatorname{Res}\left(f(z),\infty\right) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0\right)$$

În cazul de faţă

$$\sum \operatorname{Res}\left(z^{n-1}X(z),a_j\right) = \operatorname{Res}\left(z^{n-1}X(z),0\right) + \operatorname{Res}\left(z^{n-1}X(z),z_1\right) + \operatorname{Res}\left(\underbrace{z^{n-1}X(z)}_{f(z)},z_2\right) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0\right)$$

Calculăm

$$\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}X(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)^k}\frac{1}{(\frac{1}{z}-z_1)(\frac{1}{z}-z_2)} = \frac{z^k}{(1-z_1z)(1-z_2z)}$$

Este evident că pentru această funcţie 0 este punct singular aparent $(k>0)$
şi într-un punct singular aparent reziduul este nul.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0\right) = 0$$

În concluzie, pentru $n<0$ formula de inversare duce la

$$x(n) = x_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=b} z^{n-1}X(z)dz = \sum \operatorname{Res}\left(z^{n-1}X(z),a_j\right) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0\right) = 0$$

Ceea ce de fapt era cunoscut, (x_n) find un semnal cu suport pozitiv.
Rămâne formula finală

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad , \text{ pentru } \quad n \geq 0$$

■

Transformarea Laplace - Întrebări Test

Iată câteva întrebări simple, cu care puteţi "verifica" capacitatea de a vă "orienta" asupra transformării Laplace..
Puteţi adăuga şi alte întrebări ce vi se par relevante.

Ce anume caraterizează mai bine o funcţie original ? Faptul că $f(t)=0$ pentru $t<0$ sau inegalitatea $|f(t)| \leq Me^{bt}$?

Puteţi calcula $|e^{zt}| = ?$, pentru $z = x+iy \in \mathbb{C}$ şi $t \in \mathbb{R}$?

Puteţi folosi integrarea prin părţi pentru calculul antiderivatelor ?

$$\int te^{zt}dt = ? \quad , \quad \int t^2e^{zt}dt = ? \quad , \quad \int e^{zt}\cos t dt = ? \quad , \quad \int e^{zt}\sin t dt = ?$$

Pentru $z = x+iy \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re} z > 0$ puteţi calcula limitele ?

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-zt} \quad , \quad \lim_{t\to+\infty} te^{-zt} \quad , \quad \lim_{t\to+\infty} e^{-zt}\cos t \quad , \quad \lim_{t\to+\infty} e^{-zt}\sin t$$

Funcţia constantă $f(t)=0$, pentru orice $t \geq 0$, este funcţie original ?

Funcţia constantă $f(t)=12$, pentru orice $t \geq 0$, este funcţie original ?

Funcţia $f(t) = \frac{1}{t}$, $t>0$, este funcţie original ? Dar funcţia $f(t) = \frac{1}{t+1}$, $t>0$? Prin ce se deosebesc aceste funcţii ?

Integrând direct, ecuaţia diferenţială liniară $x'(t) = 2tx(t)$ are soluţiile de forma $x(t) = e^{t^2}+K$.
Putem folosi transformarea Laplace pentru rezolvarea acestei ecuaţii diferenţiale ?

Ce deosebire există între funcţia $t \to \cos t$ şi funcţia $f(t) = u(t)\cdot\cos t$ (ca funcţie original) ?

Aplicăm transformarea Laplace pentru ecuaţia diferenţială $x''(t) - 2x(t) = t-3$ şi

pentru ecuaţia cu argument întârziat $x''(t) - 2x(t-2) = t-3$
există deosebire între transformata Laplace $\mathcal{L}(t-3)$ din prima ecuaţie şi $\mathcal{L}(t-3)$ din a doua ecuaţie ?
(faptul că sunt notate la fel poate genera confuzie) (precizaţi domeniul pentru t în cele două ecuaţii)

Putem aplica teorema integrării originalului pentru a calcula $\mathcal{L}\left(\int\limits_0^t \cos(t-u)\sin u du\right)$?

Cele două integrale sunt egale sau diferite ?

$$\int\limits_0^x \cos(x-t)\sin t dt \quad , \quad \int\limits_0^x \sin(x-t)\cos t dt$$

Notăm transformata Laplace $L(z) = \mathcal{L}(f(t))$. Ce proprietate are limita ?

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} L(z)$$

Funcţia $L(z) = z^2$ poate fi transformata Laplace a unei funcţii original ? Folosiţi întrebarea anterioară.
Funcţia $L(z) = \frac{1}{z^2}$ este transformata Laplace a funcţiei original $f(t) = t$.
Funcţia $L_1(z) = \frac{1+z^2}{z^2}$ poate fi transformata Laplace a unei funcţii original ?
Putem folosi teorema integrării originalului pentru a calcula $\mathcal{L}(\frac{\sin t}{t})$?
Putem folosi teorema integrării originalului pentru a calcula $\mathcal{L}(\frac{\cos t}{t})$?
Cum calculăm transformata Laplace ?

$$\mathcal{L}\left(\int\limits_0^t u\cos u du\right)$$

Cum calculăm a cui transformată Laplace este funcţia $L(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$?
Cum calculăm transformata Laplace ?

$$\mathcal{L}\left(\int\limits_0^t e^{t-u}\cos u du\right)$$

5.1 Transformarea Fourier

Renunţăm la prezentarea argumentelor din studiul electromagnetismului, teoriei semnalelor, care au un interes profund pentru o transformare de "semnal de intrare" $f(t)$, în "semnal de ieşire" $F(x)$.

Prezentăm definirea transformării Fourier, principalele proprietăţi pe diverse clase de funcţii şi aplicaţii la rezolvarea unor ecuaţii integrale.

Reamintim definiţia spaţiului funcţiilor absolut integrabile.
Considerăm funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de variabilă reală, cu valori complexe, care sunt absolut integrabile pe $\mathbb{R}$
(adică integrabile "în modul" sau "în valoare absolută")

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ , măsurabile cu } \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)| < \infty \right\}$$

O funcţie este "măsurabilă" în sensul măsurii Lebesgue, iar integrala pe $\mathbb{R}$ este integrala Lebesgue.
Nu prezentăm detalii asupra măsurii Lebesgue, dar menţionăm faptul că
- funcţiile integrabile Riemann pe orice interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sunt măsurabile Lebesgue,
în particular funcţiile continue sau continue pe porţiuni sunt măsurabile.

Pe de altă parte, funcţiile integrabile Riemann pe orice interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$ şi cu integrala improprie convergentă

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

sunt funcţii absolut integrabile.

Exemple.

1. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită de

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

este integrabilă pe $\mathbb{R}$ ($f \in L^1(\mathbb{R})$), deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t|_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} t - \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right) = \pi$$

2. O funcţie constantă $f(t) = b$ este integrabilă pe $\mathbb{R}$ ($f \in L^1(\mathbb{R})$), numai dacă este funcţia nulă $f(t) = 0$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$

3. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită de

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & , \ t \neq 0 \\ 1 & , \ t = 0 \end{cases}$$

este integrabilă pe $\mathbb{R}$, deoarece integrala improprie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \ \text{ este convergentă}$$

(vezi Analiza Complexă - aplicaţii la teorema reziduurilor), dar nu este absolut convergentă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \ \text{ este divergentă}$$

4. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită de

$$f(t) = \exp(-|t|) = e^{-\frac{1}{|t|}} = \frac{1}{e^{|t|}}$$

este integrabilă pe $\mathbb{R}$ ($f \in L^1(\mathbb{R})$), deoarece integrala improprie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{|t|}} dt \overset{\text{funcţie pară}}{=} 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{e^t} dt = 2 \left.\frac{-1}{e^t}\right|_{t=0}^{t\to+\infty} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-2}{e^t} - \frac{-2}{e^0} = 0 + 2 = 2$$

5. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită de

$$f(t) = \exp(-t^2) = e^{-t^2}$$

este integrabilă pe $\mathbb{R}$ ($f \in L^1(\mathbb{R})$), deoarece putem descompune

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \overset{\text{funcţie pară}}{=} 2\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\left(\int_{0}^{1} e^{-t^2} dt + \int_{1}^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)$$

şi ambele integrale sunt convergente, prima este integrală Riemann - deci evident convergentă - a doua este convergentă conform criteriului de comparaţie cu inegalităţi

$$e^{-t^2} \le e^{-t} \ \text{ pentru } t \ge 1 \ \text{ şi } \ \int_{1}^{+\infty} e^{-t} dt = 2 \left.\frac{-1}{e^t}\right|_{t=1}^{t\to+\infty} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-2}{e^t} - \frac{-2}{e^1} = 0 + \frac{2}{e} = \frac{2}{e}$$

6. Orice funcţie continuă cu "suport compact" $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, adică $f(x)=0$ pentru $|x|\geq M$, este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, deoarece

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\in(-\infty,-M) \\ f(x) & , \quad x\in[-M,M] \\ 0 & , \quad x\in(M,+\infty) \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=\int\limits_{-\infty}^{M}\underbrace{|f(x)|}_{0}dx+\int\limits_{-M}^{M}|f(x)|\,dx+\int\limits_{M}^{+\infty}\underbrace{|f(x)|}_{0}dx=\int\limits_{-M}^{M}|f(x)|\,dx$$

de exemplu

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\in(-\infty,-\pi) \\ \sin x & , \quad x\in[-\pi,\pi] \\ 0 & , \quad x\in(\pi,+\infty) \end{cases}$$

Observaţie.
Dacă o funcţie $f\in L^1(\mathbb{R})$, atunci şi funcţia $\left[f(t)e^{-itx}\right]$ este integrabilă pe $\mathbb{R}$ deoarece

$$\left|f(t)e^{-itx}\right|=|f(t)|$$

şi conform criteriului de comparaţie cu inegalităţi (pentru integrale improprii)
$f\in L^1(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; f(t)e^{-itx}\in L^1(\mathbb{R})$
Prin urmare are sens definirea transformatei Fourier pentru funcţii $f\in L^1(\mathbb{R})$.

Definiţie.
Pentru o funcţie $f\in L^1(\mathbb{R})$ funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, definită de

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right]\overset{not}{=}F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-itx}dt\overset{not}{=}\hat{f}(x)$$

se numeşte <u>**transformata Fourier** a funcţiei $f(t)$</u> .

Vom folosi notaţia
$F(x)$ pentru <u>transformata Fourier, ca funcţie</u> $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$
$\mathcal{F}\left[f(t)\right]$ pentru a arăta că este vorba de <u>transformata Fourier a funcţiei $f(t)$</u>
$\mathcal{F}$ desemnează **transformarea Fourier**, ca operator care asociază unei funcţii $f\in L^1(\mathbb{R})$ funcţia $F(x)$
$\mathcal{F}:L^1(\mathbb{R})$, transformarea Fourier este definită pe spaţiul funcţiilor absolut integrabile.
$\hat{f}(x)$ este notaţia folosită în cursurile de la facultăţile de matematică

Există şi alte moduri de a defini transformarea Fourier :

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-itx}dt \quad \text{sau} \quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i2\pi tx}dt$$

Comentariu.
Factorul $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ are rostul de a crea <u>o simetrie</u> între <u>formula transformării Fourier</u> şi <u>formula transformării Fourier inverse</u>

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-itx}dt \quad , \quad f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{-itx}dx$$

altfel am avea

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-itx}dt \quad , \quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{-itx}dx$$

Unele texte folosesc această variantă asimetrică.

Există şi o variantă ce are simetrie fară a mai fi necesar un factor de corecţie

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi tx}dt \quad , \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i2\pi tx}dx$$

Observaţie.
Transformarea Fourier este un operator liniar

$$\mathcal{F}[f+g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g] \quad , \quad f, g \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{F}[\alpha f] = \alpha\mathcal{F}[f] \quad , \quad f \in L^1(\mathbb{R}) \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Demonstraţie.
Se foloseşte faptul că transformata Fourier este definită de o integrală şi orice integrală are proprietatea de liniaritate.
■

Propoziţie.
Pentru o funcţie $f \in L^1(\mathbb{R})$, transformata Fourier $F(x)$ este o funcţie continuă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Consecinţă.
Transformarea Fourier asociază unei funcţii $f \in L^1(\mathbb{R})$ o altă funcţie F care este continuă pe $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F} \ : L^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$$

$C(\mathbb{R})$ desemnează spaţiul (vectorial) al funcţiilor continue

$$C(\mathbb{R}) = \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ , \ F \text{ continua pe } \mathbb{R}\}$$

Teoremă.
i) Dacă $f \in L^1(\mathbb{R})$ şi $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$, atunci transformata Fourier $\mathcal{F}[f]$ este funcţie de clasă $C^1(\mathbb{R})$ şi (derivabilă cu derivata continuă)

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-itx}dt = (-i)\mathcal{F}[tf(t)]$$

ii) Dacă $f \in L^1(\mathbb{R})$ şi $t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, atunci transformata Fourier $\mathcal{F}[f]$ este funcţie de clasă $C^k(\mathbb{R})$ şi (de k-ori derivabilă cu derivata de ordin k continuă)

$$F^{(k)}(x) = \frac{d^k F}{dx^k} = \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-itx}dt = (-i)^k \mathcal{F}\left[t^k f(t)\right]$$

Demonstraţie.
Se foloseşte teorema de derivare a unei integrale cu parametru.
■

Observaţie.
Dacă funcţia $f \in L^1(\mathbb{R})$ ia valori reale ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) , atunci folosind conjugarea pentru transformata Fourier obţinem
(pentru numere complexe $z = a + ib \ \Rightarrow \ \overline{z} = a - ib$)

$$\overline{F(x)} = F(-x)$$

Demonstraţie.
Folosim faptul că integrala şi conjugarea comută

$$\overline{F(x)} = F(x) = \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt \right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)e^{-itx}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{e^{-itx}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it(-x)}dt = F(-x)$$

■

Exemple de calcul
Să calculăm transformata Fourier pentru funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, ii) $f(t) = e^{-t^2/2} = \exp(\dfrac{-t^2}{2})$, iii) $f(t) = e^{-\alpha t^2} = \exp(-\alpha t^2)$, $\alpha > 0$

Soluţie.
i) Conform observaţiei anterioare, este suficient să calculăm transformata Fourier doar pentru $x = 0$ şi $x > 0$
Pentru $x = 0$ obţinem

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\underbrace{e^{-it0}}_{1}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \pi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Pentru $x > 0$ obţinem

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}e^{-itx}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(-tx) + i\sin(-tx)}{1+t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\sin(tx)}{1+t^2}dt}_{0 \text{ , fiind funcţie impară}} =$$

Deci

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2}dt\right)$$

Pe de altă parte

$$F(-x) = \overline{F(x)} = \overline{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt\right]} = F(x)$$

Folosim o aplicaţie la teorema reziduurilor, conform căreia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2}dt = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_j > 0} \mathrm{Res}\left(\frac{e^{izx}}{1+z^2} \text{ , } z_j\right)$$

deci suma reziduurilor în punctele singulare z_j ale funcţiei $\frac{e^{izx}}{1+z^2}$ care sunt în semiplanul superior, adică $\mathrm{Im}\, z_j > 0$

Punctele singulare ale funcţiei $\frac{e^{izx}}{1+z^2}$ sunt punctele în care se anulează numitorul $1 + z^2 = 0$, $z_{1,2} = \pm i$
În semiplanul superior se află doar $z_1 = i$ ($\mathrm{Im}(i) = 1$, $\mathrm{Im}(-i) = -1$) , în plus $1 + z^2 = (z - i)(z + i)$
Deci $z = i$ este pol de ordin 1, (fiind rădăcină de ordin 1)
Prin urmare

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{izx}}{1+z^2} \text{ , } i\right) = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{izx}}{1+z^2}(z-i)\right) = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{izx}}{(z-i)(z+i)}(z-i)\right) = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{izx}}{z+i}\right) = \frac{e^{-x}}{2i}$$

În final obţinem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2}dt = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{izx}}{1+z^2} \text{ , } i\right) = 2\pi i\frac{e^{-x}}{2i} = \frac{\pi}{e^x} = \pi e^{-x}$$

În concluzie transformarea Fourier a funcţiei $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ este pentru $x > 0$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx}}{1+t^2} dt = \mathrm{Re} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt \right) = \mathrm{Re} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pi e^{-x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x}$$

şi

$$F(-x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{x}$$

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \quad , \quad x > 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad , \quad x = 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{x} \quad , \quad x < 0 \end{cases} = \pi e^{-|x|}$$

ii) Funcţia $f(t) = e^{-t^2/2} = \exp(\frac{-t^2}{2})$ este în $L^1(\mathbb{R})$ deoarece integrala improprie este convergentă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \overset{\text{funcţie pară}}{=} 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt =$$

facem schimbarea de variabilă $\frac{t^2}{2} = u$, $t = \sqrt{2u}$, $dt = \sqrt{2} \frac{1}{2\sqrt{u}} du$

$$= 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{u}} e^{-u} = \sqrt{2} \int_{0}^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = \sqrt{2} \int_{0}^{+\infty} u^{\frac{1}{2}-1} e^{-u} du = \sqrt{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2})$$

Pe de altă parte

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})} = \frac{\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2}{\Gamma(1)} = \left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2$$

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \int_{0}^{1} x^{1-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx =$$

facem schimbarea de variabilă $x = \sin^2 t$, $dx = 2 \sin t \cos t dt$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t (1 - \sin^2 t)}} 2 \sin t \cos t dt = \int_{0}^{\pi/2} 2 dt = \pi$$

deci

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \sqrt{\pi}$$

şi obţinem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{2\pi}$$

revenim acum la calculul transformatei Fourier

$$\mathcal{F}\left[e^{-t^2/2}\right] = F(x)$$

Considerăm funcţia (care este deribabilă)

$$g(x) = e^{x^2/2} F(x)$$

deci putem deriva, şi obţinem

$$g'(x) = \left(e^{x^2/2}\right)' F(x) + e^{x^2/2} F'(x) = x e^{x^2/2} F(x) + e^{x^2/2} F'(x)$$

Pe de altă parte

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}e^{-itx}dt\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dx}\left[e^{-t^2/2}e^{-itx}\right]dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}(-it)e^{-itx}dt =$$

integrăm prin părti

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-t)e^{-t^2/2}e^{-itx}dt = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left[\underbrace{e^{-t^2/2}e^{-itx}\Big|_{t\to-\infty}^{t\to+\infty}}_{0} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{e^{-t^2/2}}_{\int(-t)e^{-t^2/2}}\underbrace{(-ix)e^{-itx}}_{\frac{d}{dt}(e^{-itx})}dt\right] =$$

$$e^{-t^2/2}e^{-itx}\Big|_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} = \lim_{t\to+\infty}e^{-t^2/2}e^{-itx} - \lim_{t\to-\infty}e^{-t^2/2}e^{-itx} = 0 - 0 = 0$$

deoarece

$$\left|e^{-t^2/2}e^{-itx}\right| = \left|e^{-t^2/2}\right|\cdot\left|e^{-itx}\right| = e^{-t^2/2} = \frac{1}{e^{t^2/2}} \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$$

deci

$$F'(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left[-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}(-ix)e^{-itx}dt\right] = i^2x\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}e^{-itx}dt}_{F(x)} = -xF(x)$$

În final obţinem

$$g'(x) = xe^{x^2/2}F(x) + e^{x^2/2}F'(x) = xe^{x^2/2}F(x) - xe^{x^2/2}F(x) = 0$$

Prin urmare funcţia $g(x)$ este constantă. Calculând valoarea funcţiei g într-un punct pentru care calculul este posibil, obţinem valoarea constantei.

Pentru $x = 0$ calculul este posibil

$$g(0) = e^{0^2/2}F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}e^{-it0}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}dt}_{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1$$

Prin urmare $g(x) = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $\Leftrightarrow$ $g(x) = e^{x^2/2}F(x) = 1$

În concluzie

$$\mathcal{F}\left[e^{-t^2/2}\right] = F(x) = e^{-x^2/2}$$

Să remarcăm faptul că transformata Fourier a funcţiei $f(t) = e^{-t^2/2}$ este aceeaşi funcţie $F(x) = e^{-x^2/2}$.

Cu alte cuvinte funcţia $f(t) = e^{-t^2/2}$ este un "punct fix" pentru transformarea Fourier.

iii) Folosim transformata Fourier calculată mai înainte $\mathcal{F}\left[e^{-t^2/2}\right] = F(x) = e^{-x^2/2} = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$ şi faptul că $\alpha > 0$

Facem schimbarea de variabilă $\alpha t^2 = \frac{u^2}{2}$, $t = \frac{u}{\sqrt{2\alpha}}$, $dt = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}du$ şi obţinem

$$\mathcal{F}\left[e^{-\alpha t^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha t^2}e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2/2}e^{-i\frac{u}{\sqrt{2\alpha}}x}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2/2}e^{-i\frac{u}{\sqrt{2\alpha}}x}du}_{F\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}F\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\exp\left(\frac{-\left[\frac{x}{\sqrt{2\alpha}}\right]^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\exp\left(\frac{-x^2}{4\alpha}\right)$$

$$\mathcal{F}\left[e^{-\alpha t^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-x^2/4\alpha}$$

■

Comentariu.

În mod "tradiţional" derivata unei funcţii de o singură variabilă "x" (care depinde de un singur parametru) de notează $\frac{df}{dx}$ în timp ce

derivata unei funcţii în raport cu parametrul "x" , dar funcţia depinde de mai multe variabile (de mai mulţi parametri) se notează $\frac{\partial f}{\partial x}$

Totuşi ambele notaţii reprezintă exact aceeaşi acţiune : derivarea în raport cu parametrul "x" .

Acţiunea de derivare în raport cu parametrul "x" consideră că doar parametru "x" variază,

orice alt parametru nu variază - deci este constant.

Prin urmare, derivarea acţionează asupra unei funcţii ca şi cum ar depinde de un singur parametru "x" - indiferent de câţi alţi parametri depinde funcţia.

Astfel nu se justifică o notaţie diferită pentru derivare $\frac{\partial f}{\partial x}$, în loc de $\frac{df}{dx}$.

Din acest motiv am folosit $\frac{df}{dx}$ în derivarea integralei "cu parametru" de mai înainte.

Pe de altă parte, notaţiile diferite au originea în fizică, în modul în care sunt considerate anumite fenomene fizice.

Să presupunem că studiem o mărime fizică scalară (o funcţie) $u = u(t, x, y, z)$ care variază în timp "t" şi se măsoară în fiecare punct al spaţiului de coordonate (x, y, z)

Studiem comportamentul (variaţia) mărimii într-un punct fix din spaţiu.

Derivata în raport cu "t" reprezintă viteza de variaţie a mărimii $u = u(t)$ în timp şi este natural să notăm această derivată cu $\frac{du}{dt}$

Pe de altă parte, putem studia variaţia funcţiei în spaţiu (de la un punct la altul) după direcţii paralele cu axele de coordonate,

şi astfel considerăm derivatele în raport cu "x" , "y" , "z" , este natural să notăm aceste derivate cu $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$

deoarece le considerăm pe toate trei deodată.

Evident, un matematician notează toate derivatele la fel $\frac{\partial u}{\partial t}$ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$

Tot aşa face şi un fizician , atunci când considerâ ecuaţia diferenţială care descrie variaţia mărimii $u = u(t, x, y, z)$, de exemplu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Sper ca acest comentariu să clarifice lucrurile.

Teoremă.

Pentru două funcţii $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ şi transformatele lor Fourier $F(x)$ respectiv $G(x)$ are loc relaţia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x)dx$$

Teorema de inversare Fourier.

Dacă $f \in L^1(\mathbb{R})$ şi transformata sa Fourier $\mathcal{F}[f(t)] = F(x) \in L^1(\mathbb{R})$,

(cu alte cuvinte atât funcţia cât şi transformata sa Fourier sunt absolut integrabile)

în plus funcţia f este continuă şi mărginită pe $\mathbb{R}$, atunci

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{itx}dx \quad , \quad \text{pentru orice } \; t \in \mathbb{R}$$

Comentariu.

Această teoremă nu afirmă existenţa unei inverse pentru transformarea Fourier

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(x) \quad \longrightarrow \quad f(t)$$

ci doar asigură condiţii suficiente pentru
a "recupera" funcţia iniţială $f(t)$ (semnalul de intrare) dacă se cunoaşte transformata sa Fourier $F(x)$ (semnalul de ieşire)

Teorema (Mellin - Fourier) de inversare a transformării Laplace
Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţie original Laplace cu constantele $M > 0$, $b \geq 0$ şi
$\mathcal{L}(f) = L(z)$ transformata Laplace corespunzătoare. Atunci pentru orice $x > b$ în care f este continuă

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} L(z)e^{tz}dz = \lim_{\alpha,\beta\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\alpha}^{x+i\beta} L(z)e^{tz}dz$$

În punctele în care f nu este continuă

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} L(z)e^{tz}dz = \lim_{\alpha,\beta\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\alpha}^{x+i\beta} L(z)e^{tz}dz$$

Consecinţă.
Transformarea Laplace este inversabilă,
deci şi injectivă $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) \;\Rightarrow\; f = g$

Considerăm transformarea Fourier pentru funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ care sunt pare sau impare.
Să observăm faptul că "paritatea" are sens şi pentru funcţii cu valori complexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,
deoarece relaţiile nu depind de valorile funcţiei ci doar de domeniul de definiţie $\mathbb{R}$

$$\text{pentru funcţii pare} \quad f(-x) = f(x) \;\text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{pentru funcţii impare} \quad f(-x) = -f(x) \;\text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

Să analizăm integrala Fourier pentru funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pare sau impare, separând partea reală şi partea imaginară

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[\cos(-tx) + i\sin(-tx)]dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(tx)dt - i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(tx)dt$$

Pentru funcţii f pare obţinem

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t)\cos(tx)}_{\text{pară}}dt - i\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t)\sin(tx)}_{\text{impară}}dt}^{0}$$

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(tx)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(tx)dt$$

Pentru funcţii f impare obţinem

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t)\cos(tx)}_{\text{impară}}dt}^{0} - i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t)\sin(tx)}_{\text{pară}}dt$$

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = i\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin(tx)dt = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin(tx)dt$$

Să remarcăm faptul că pentru funcţii pare sau impare, integralele implică doar valorile funcţiilor pe intervalul $[0,+\infty)$.

Astfel apar în mod natural definiţiile unor transformate de tip Fourier pentru funcţii din $L^1[0,+\infty)$

Definiţie.

Pentru o funcţie $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, absolut integrabilă (adică din $L^1[0,+\infty)$) se defineşte

transformata "prin cos"

$$\mathcal{F}_{\cos}\left[f(t)\right] = F_{\cos}(x) \overset{def}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(tx)dt$$

transformata "prin sin"

$$\mathcal{F}_{\sin}\left[f(t)\right] = F_{\sin}(x) \overset{def}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin(tx)dt$$

Teoremă.

Pentru o funcţie $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, din $L^1[0,+\infty)$,
dacă şi transformata sa prin cos (respectiv prin sin) este din $L^1[0,+\infty)$,
în plus funcţia f este continuă şi mărginită pe $\mathbb{R}$, atunci

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_{\cos}(x)\cos(tx)dt$$

respectiv

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_{\sin}(x)\sin(tx)dt$$

Astfel se poate "recupera" funcţia iniţială $f(t)$ (semnalul de intrare)
dacă se cunoaşte transformata sa prin cos $F_{\cos}(x)$ (semnalul de ieşire) (respectiv transformata sa prin sin $F_{\sin}$)

Proprietăţi de calcul.

Pentru orice funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in L^1(\mathbb{R})$, următoarele funcţii sunt tot din $L^1(\mathbb{R})$

$$f(\alpha t) \quad , \quad f(t+t_0) \quad , \quad f(t)e^{i\alpha t} \quad , \quad f(t)\cos\alpha t \quad , \quad f(t)\sin\alpha t \quad , \quad t_0,\alpha\in\mathbb{R}$$

în plus, dacă notăm transformata Fourier $\mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(x)$, atunci

$$\text{i)} \qquad \mathcal{F}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha}F(\frac{x}{\alpha}) \quad , \text{ pentru } \alpha > 0$$

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)] = \frac{-1}{\alpha}F(\frac{x}{\alpha}) \quad , \text{ pentru } \alpha < 0$$

$$\text{în particular} \qquad \mathcal{F}[f(-t)] = F(-x)$$

$$\text{ii)} \quad \mathcal{F}[f(t+t_0)] = e^{it_0x}F(x)$$

$$\text{iii)} \qquad \mathcal{F}[f(t+t_0)+f(t-t_0)] = 2\cos(t_0x)\cdot F(x)$$

$$\mathcal{F}[f(t+t_0)-f(t-t_0)] = 2i\sin(t_0x)\cdot F(x)$$

$$\text{iv)} \qquad \mathcal{F}[f(t)e^{i\alpha t}] = F(x-\alpha)$$

$$\text{v)} \qquad \mathcal{F}[f(t)\cos\alpha t] = \frac{1}{2}\left[F(x-\alpha)+F(x+\alpha)\right]$$

$$i \cdot \mathcal{F}[f(t)\sin\alpha t] = \frac{1}{2}\left[F(x-\alpha) - F(x+\alpha)\right]$$

Demonstraţie.
Folosim doar definiţia transformatei Fourier.
i) facem schimbarea de variabilă $\alpha t = u$, $t = \frac{1}{\alpha}u$ şi ţinem seama de faptul că $\alpha > 0$

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t)e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-iux/\alpha}\frac{1}{\alpha}du = \underbrace{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-iux/\alpha}du}_{F(\frac{x}{\alpha})} = \frac{1}{\alpha}F(\frac{x}{\alpha})$$

pentru $\alpha < 0$ facem aceeaşi schimbare de variabilă, dar $\alpha < 0$ duce la schimbarea limitelor de integrare $t \to -\infty \;\Rightarrow\; u = \alpha t \to +\infty$ şi $t \to +\infty \;\Rightarrow\; u = \alpha t \to -\infty$

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t)e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{-\infty} f(u)e^{-iux/\alpha}\frac{1}{\alpha}du = \frac{-1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-iux/\alpha}du = \frac{-1}{\alpha}F(\frac{x}{\alpha})$$

ii) facem schimbarea de variabilă $t + t_0 = u$

$$\mathcal{F}[f(t+t_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+t_0)e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i(u-t_0)x}du = e^{it_0x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-iux}du = e^{it_0x}F(x)$$

iii) transformarea Fourier este liniară, deci
adunând obţinem

$$\mathcal{F}[f(t+t_0) + f(t-t_0)] = \mathcal{F}[f(t+t_0)] + \mathcal{F}[f(t+t_0)] = e^{it_0x}F(x) + e^{-it_0x}F(x) =$$
$$= \left[\cos(t_0x) + i\sin(t_0x)\right]F(x) + \left[\cos(-t_0x) + i\sin(-t_0x)\right]F(x) =$$
$$= \left[\cos(t_0x) + i\sin(t_0x) + \cos(t_0x) - i\sin(t_0x)\right]F(x) = 2\cos(t_0x)F(x)$$

scăzând obţinem

$$\mathcal{F}[f(t+t_0) - f(t-t_0)] = \mathcal{F}[f(t+t_0)] - \mathcal{F}[f(t+t_0)] = e^{it_0x}F(x) - e^{-it_0x}F(x) =$$
$$= \left[\cos(t_0x) + i\sin(t_0x)\right]F(x) - \left[\cos(-t_0x) + i\sin(-t_0x)\right]F(x) =$$
$$= \left[\cos(t_0x) + i\sin(t_0x) - \cos(t_0x) + i\sin(t_0x)\right]F(x) = 2i\sin(t_0x)F(x)$$

iv)

$$\mathcal{F}[f(t)e^{i\alpha t}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\alpha t}e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it(x-\alpha)}dt = F(x-\alpha)$$

v) adunăm, relaţiile de tipul (iv) şi obţinem

$$\frac{1}{2}\left[F(x-\alpha) + F(x+\alpha)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\alpha t}e^{-itx}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha t}e^{-itx}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\underbrace{(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t})}_{2\cos(\alpha t)}e^{-itx}dt\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t)e^{-itx}dt = \mathcal{F}[f(t)\cos\alpha t]$$

scădem, relaţiile de tipul (iv) şi obţinem

$$\frac{1}{2}\left[F(x-\alpha) - F(x+\alpha)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\alpha t}e^{-itx}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha t}e^{-itx}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\underbrace{\left(e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t}\right)}_{2i\sin(\alpha t)}e^{-itx}dt\right] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\alpha t)e^{-itx}dt = i\ \mathcal{F}[f(t)\sin\alpha t]$$

■

Comentariu.

Transformarea Fourier este bine definită pentru funcţii din $L^1(\mathbb{R})$, dar nu este un operator injectiv, nu este inversabil.

Mai multe proprietăţi se obţin dacă se consideră restricţia transformării Fourier la un subspaţiu "spaţiul funcţiilor rapid descrescătoare".

Definiţie.

O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, se numeşte "rapid descrescătoare" dacă f este de clasă C^∞ (are derivate de orice ordin) şi

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|(1+t^m)\cdot f^{(n)}(t)\right| < +\infty$$

pentru orice $m\geq 0$ şi orice derivată $f^{(n)}$, $n\geq 0$

Mulţimea funcţiilor rapid descrescătoare este un spaţiu vectorial numit "**spaţiul lui Schwarz**" şi notat

$$\mathcal{S} = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\ \ ,\ \ f\ \text{ de clasă } C^\infty\ ,\ \sup\left|(1+t^m)\cdot f^{(n)}(t)\right| < +\infty\ ,\ \text{orice } m,n\geq 0\}$$

cu alte cuvinte funcţii de clasă C^∞ , cu proprietatea că atât funcţia cât şi toate derivatele sale de orice ordin descresc la $\pm\infty$ mai repede decât orice fracţie $\frac{1}{1+t^m}$

adică pentru orice $m,n\geq 0$ există $M>0$ astfel încât

$$\left|(1+t^m)\cdot f^{(n)}(t)\right| \leq M \quad , \quad \text{pentru orice } t\in\mathbb{R}$$

Consecinţă.

Pentru orice astfel de funcţie rapid descrescătoare avem $t^m f^{(n)}(t)\in L^1(\mathbb{R})$, deci $\mathcal{S}\subset L^1(\mathbb{R})$ şi conform unei teoreme anterioare, are sens transformata Fourier $\mathcal{F}[f(t)]$ şi aceasta este funcţie de clasă C^∞

Exemplu.

Funcţia $f(t)=e^{-t^2}$ este rapid descrescătoare, dar nu şi funcţia $e^{-|t|}$.

Laurent-Moïse Schwartz (1915 – 2002) matematician francez. În 1950 primeşte medalia Fields (oarecum echivalentul premiului Nobel pentru matematică) pentru contribuţii la teoria distribuţiilor, teorie ce oferă o perspectivă modernă asupra ecuaţiilor fizicii matematice - ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale.

Observaţie.

Transformata Fourier $\mathcal{F}[f(t)]$ a unei funcţii $f\in\mathcal{S}$ este o funcţie mărginită.

Teoremă.

Pentru orice funcţie $f\in\mathcal{S}$ transformata sa Fourier $\mathcal{F}[f(t)] \overset{not}{=} F(x)$ este funcţie de clasă C^∞ şi

$$\frac{d}{dx}\mathcal{F}[f(t)] = (-i)\mathcal{F}[t\cdot f(t)] \qquad , \qquad \frac{d^n}{dx^n}\mathcal{F}[f(t)] = (-i)^n\mathcal{F}[t^n\cdot f(t)]$$

$$\mathcal{F}[\frac{d}{dt}f(t)] = (ix)\mathcal{F}[f(t)] \qquad , \qquad \mathcal{F}[\frac{d^n}{dt^n}f(t)] = (ix)^n\mathcal{F}[f(t)]$$

Consecinţă.

i) Pentru orice funcţie $f\in\mathcal{S}$ transformata sa Fourier $\mathcal{F}[f(t)]\in\mathcal{S}$

ii) transformarea Fourier este un operator liniar $\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$, care este izomorfism de spaţii vectoriale.

iii) transformarea fourier inversă $\mathcal{F}^{-1}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$, este

$$\mathcal{F}^{-1}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx}dt \quad \text{şi} \quad \mathcal{F}\left(\mathcal{F}[f(t)]\right) = f(-t)$$

Definiţie.
Pe spaţiul funcţiilor rapid descrescătoare $\mathcal{S}$ se introduce în mod natural produsul scalar

$$< f, g > \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt$$

aici $\overline{g(t)}$ este conjugarea complexă. Dacă funcţiile au valori reale atunci $\overline{g(t)} = g(t)$
Norma asociată acestui produs scalar este

$$\|f\|_2 = \sqrt{< f, f >} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{f(t)} dt \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

Teoremă (formulele lui Parseval)
Pentru $f, g \in \mathcal{S}$ avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f(t)] \cdot \overline{\mathcal{F}[g(t)]} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}[f(t)]|^2 \, dt$$

sau echivalent

$$< f, g > = < \mathcal{F}[f(t)], \mathcal{F}[g(t)] > \quad , \qquad \|f\|_2 = \|\mathcal{F}[f(t)]\|_2$$

Comentariu.
Aceste relaţii arată că pentru funcţii rapid descrescătoare
transformarea Fourier păstrează produsul scalar şi norma
cu alte cuvinte transformarea Fourier este o izometrie (sau izomorfism izometric) pe spaţiul $\mathcal{S}$
(adică păstrează distanţele)

Reamintim definiţia produsului de convoluţie

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x - t) dt$$

Convoluţia are sens pentru orice două funcţii $f, g \in \mathcal{S}$ şi produsul de comvoluţie $f * g \in \mathcal{S}$

Teoremă (formulele lui Borel)
Pentru $f, g \in \mathcal{S}$ avem

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[f(t)]$$

$$\mathcal{F}[f(t)] * \mathcal{F}[f(t)] = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}[f \cdot g]$$

5.2 Transformarea Fourier - Aplicaţii

Iată câteva aplicaţii ale transformatei Fourier.

A. Calculul transformatei Fourier pentru funcţii absolut integrabile pe $\mathbb{R}$,
sau transformatei prin sin sau prin cos pentru funcţii absolut integrabile pe $[0, +\infty)$
B. Reprezentarea unei funcţii ca o integrală Fourier.
C. Rezolvarea unor ecuaţii integrale.

Deşi sunt trei formulări diferite, de fapt toate trei se reduc la calculul unei integrale Fourier.

Se numeşte "**integrală Fourier**" (sau de tip Fourier) integralele ce intervin în
- calculul transformatei Fourier sau transformatei Fourier inverse
- calculul transformatei prin cos sau prin sin

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx}dt \qquad \int_{0}^{+\infty} f(t)\cos tx dt \qquad \int_{0}^{+\infty} f(t)\sin tx dt$$

Să examinăm în detaliu cele trei tipuri de aplicaţii pe care le-am enunţat.

A. Calculul transformatei Fourier pentru funcţii absolut integrabile pe $\mathbb{R}$,
sau transformatei prin sin sau prin cos pentru funcţii absolut integrabile pe $[0,+\infty)$
Transformarea Fourier se aplică numai funcţiilor din $L^1(\mathbb{R})$ (absolut integrabile pe $\mathbb{R}$),
deci mai întâi se verifică dacă funcţia este în $L^1(\mathbb{R})$ (sau în $L^1[0,+\infty)$) şi
apoi se calculează transformata sa Fourier, sau transformata prin cos sau prin sin.
- Fie se "integrează" direct integrala Fourier corespunzătoare
(dacă se poate calcula direct primitivă pentru $f(t)e^{-itx}$)
- Fie se integrează separat partea reală şi partea imaginară

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\underbrace{\cos(-tx)+i\sin(-tx)}_{\cos tx - i\sin tx}\right]dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos tx dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin tx dt$$

B. Reprezentarea unei funcţii ca o integrală Fourier, înseamnă scrierea " $f(t) =$ o integrală Fourier ".
Acesta fapt este posibil numai dacă are sens transformata Fourier inversă,
deci numai dacă transformata Fourier a funcţiei este de asemenea în $L^1(\mathbb{R})$ (sau în $L^1[0,+\infty)$)
(i) se calculează transformata Fourier corespunzătoare,
apoi doar se scrie $f(t)$ în funcţie de transformata sa, folosind formula de inversare corespunzătoare

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{itx}dx \quad \text{unde } F(x) \text{ este transformata Fourier } F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt$$

sau
(ii) se calculează transformata Fourier inversă
apoi doar se scrie $f(t)$ în funcţie de transformata inversă, folosind formula de inversare corespunzătoare

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)e^{-itx}dx \quad \text{unde } G(x) \text{ este transformata Fourier inversă } G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx}dt$$

Pentru funcţii definite pe $[0,+\infty)$ putem folosi transformatele prin cos sau prin sin,

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} F_{\cos}(x)\cos tx dx \quad \text{unde } F_{\cos} \text{ este transformata prin cos } F_{\cos}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos tx dt$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} F_{\sin}(x)\sin tx dx \quad \text{unde } F_{\sin} \text{ este transformata prin sin } F_{\sin}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin tx dt$$

C. Rezolvarea unor ecuaţii integrale.
Este vorba de ecuaţii ce conţin integrale Fourier.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = ... \quad , \quad \int_{0}^{+\infty} f(t)\cos tx dt = ... \quad , \quad \int_{0}^{+\infty} f(t)\sin tx dt = ...$$

Deci de fapt ecuaţia pune în evidenţă o transformată Fourier (respectiv prin cos sau prin sin).
Se folosesc formulele de inversare pentru a determina funcţia $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{itx} dx \quad \text{unde } F(x) \text{ este transformata Fourier } F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} F_{\cos}(x) \cos tx dx \quad \text{unde } F_{\cos} \text{ este transformata prin cos } F_{\cos}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos tx dt$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} F_{\sin}(x) \sin tx dx \quad \text{unde } F_{\sin} \text{ este transformata prin sin } F_{\sin}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) \sin tx dt$$

Exemple.

1. Să se verifice dacă următoarele funcţii sunt în $L^1(\mathbb{R})$

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad , \quad f(t) = e^{-|t|} \quad , \quad f(t) = \frac{t}{1+t^2} \quad , \quad f(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$$

2. Să se calculeze transformata Fourier pentru funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad , \quad f(t) = e^{-|t|} \quad , \quad f(t) = e^{-t^2/2} \quad , \quad f(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

3. Să se calculeze transformata Fourier pentru funcţiile cu suport compact

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \le 2 \\ 0 & , \quad |x| > 2 \end{cases} \quad , \quad f(t) = \begin{cases} \sin t & , \quad |x| \le \pi \\ 0 & , \quad |x| > \pi \end{cases} \quad , \quad f(t) = \begin{cases} \cos t & , \quad |x| \le \pi \\ 0 & , \quad |x| > \pi \end{cases}$$

4. Să se calculeze tranformata prin cos şi transformata prin sin pentru funcţiile $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad , \quad f(t) = e^{-t} \quad , \quad f(t) = e^{-t^2/2} \quad , \quad f(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

5. Să se reprezinte ca o integrală Fourier funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad , \quad f(t) = e^{-|t|} \quad , \quad f(t) = e^{-t^2/2} \quad , \quad f(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

6. Să se rezolve ecuaţiile integrale, adică să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică ecuaţia

$$\text{i)} \quad \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos tx dt = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad x \in [0, +\infty)$$

$$\text{ii)} \quad \int_{0}^{+\infty} f(t) \sin tx dt = \begin{cases} \sin x & , \quad x \le \pi \\ 0 & , \quad x > \pi \end{cases} \quad , \quad x \in [0, +\infty)$$

$$\text{iii)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{itx} dt = \begin{cases} x^2 & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Soluţii.

1. Verificarea faptului că o funcţie este în $L^1(\mathbb{R})$ (sau în $L^1[0, +\infty)$) este o problemă de integrale improprii.

dar absolut necesară pentru calculul unei transformate Fourier.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t\Big|_{t\to-\infty}^{y\to+\infty} = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t - \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi$$

deci funcţia $f(t) = \frac{1}{1+t^2} \in L^1(\mathbb{R})$

■

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-|t|}}_{\text{pară}} dt = 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} dt = -2e^{-t}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} = -2\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-t} - e^0\right) = 2$$

deci funcţia $f(t) = e^{-|t|} \in L^1(\mathbb{R})$

■

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{t}{1+t^2}\right| dt = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} dt$$

Folosim criteriul de comparaţie cu limită, comparăm cu $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t} dt$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} = 1$$

deci conform criteriului de comparaţie cu limită cele două integrale improprii au aceeaşi natură.

Integrala improprie $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ este divergentă, deci tot divergentă este şi integrala $\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} dt$

În concluzie funcţia $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$ nu este în $L^1(\mathbb{R})$

■

2) Pentru primele trei funcţii, am calculat deja transformata Fourier.

Pentru $x > 0$ obţinem

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+t^2)^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} e^{-itx} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(-tx)}{(1+t^2)^2} dt + i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin(-tx)}{(1+t^2)^2}}_{\text{impară}} dt}^{0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{(1+t^2)^2} dt =$$

folosim o aplicaţie la teorema reziduurilor

$$= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1+t^2)^2} dt\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{izx}}{(1+z^2)^2}, i\right)\right] =$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{izx}}{(1+z^2)^2}, i\right) = \lim_{z\to i}\left[\frac{e^{izx}}{(z-i)^2(z+i)^2}(z-i)^2\right]^{(1)} = \lim_{z\to i}\left[\frac{e^{izx}}{(z+i)^2}\right]^{(1)} =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{ixe^{izx}(z+i)^2 - e^{izx}2(z+i)}{(z+i)^4} = \lim_{z\to i} e^{izx} \frac{ix(z+i)-2}{(z+i)^3} = e^{-x}\frac{ix(2i)-2}{(2i)^3} = -e^{-x}\frac{1+x}{-4i}$$

deci transformata Fourier este

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+t^2)^2}\right) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{izx}}{(1+z^2)^2}, i\right)\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i e^{-x}\frac{1+x}{4i}\right] = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+x}{2}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+t^2)^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-x}(1+x)}{2}$$

■

3) Pentru funcţii cu suport compact, integrala Fourier nu este improprie

Pentru funcţia

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \le 2 \\ 0 & , \quad |x| > 2 \end{cases}$$

avem

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-1}^{+1} 1\cdot e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-itx}}{-ix}\Bigg|_{t=-1}^{t=1} =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}x}\left(e^{-ix} - e^{ix}\right) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}x}\left(\cos x - i\sin x - \cos x - i\sin x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{x}$$

Pentru funcţia

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & , \quad |x| \le \pi \\ 0 & , \quad |x| > \pi \end{cases}$$

avem

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin t\cdot e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin t[\cos(tx) - i\sin(tx)]dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sin t\cos(tx)}_{\text{impară}}dt}^{0} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sin t\sin tx}_{\text{pară}}dt = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}2\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(t-tx) - \cos(t+tx)\right]dt =$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(t-tx)}{1-x} + \frac{\sin(t+tx)}{1+x}\Bigg|_{t=0}^{t=\pi}\right] = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(\pi-\pi x)}{1-x} + \frac{\sin(\pi+\pi x)}{1+x}\right] =$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(\pi x)}{1-x} - \frac{\sin(\pi x)}{1+x}\right] = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\sin(\pi x)\left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right] =$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\sin(\pi x)\frac{2x}{(1-x^2)}$$

■

4) folosim o aplicaţie la teorema reziduurilor

$$\mathcal{F}_{\cos}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\cos txdt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\cos txdt = \mathrm{Re}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{1+t^2}dt\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{izx}}{1+z^2}, i\right)\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}2\pi i\frac{e^{-x}}{2i}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-x}$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{izx}}{1+z^2}, i\right) = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{izx}}{(z-i)(z+i)}(z-i)\right) = \lim_{z\to i}\frac{e^{izx}}{(z+i)} = \frac{e^{-x}}{2i}$$

deci

$$\mathcal{F}_{\cos}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-x}$$

sau putem folosi transformata Fourier deja calculată anterior , în acest caz pentru $x \ge 0$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(-tx) + i\sin(-tx)}{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\cos tx}{1+t^2}}_{\text{pară}} dt - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin tx}{1+t^2} dt}_{0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2} dt$$

şi obţinem

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2} dt \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_{\cos}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x}$$

■

$$\mathcal{F}_{\cos}\left(e^{-t^2/2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \underbrace{e^{-t^2/2} \cos tx}_{\text{pară}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos tx dt =$$

$$= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{-itx} dt\right] = \operatorname{Re}\left[e^{-x^2/2}\right] = e^{-x^2/2}$$

■

5) Conform observaţiilor anterioare (B)

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{itx} dx$$

$$\text{unde } \; F(x) \; \text{ este transformata Fourier } \; F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{-itx} dt$$

Putem folosi transformata Fourier calculată anterior

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{-itx} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|}$$

şi obţinem reprezentarea integrală

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|} \, e^{itx} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \, e^{itx} dx$$

■

Pentru funcţia

$$f(t) = e^{-|t|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{itx} dx$$

$$\text{unde } \; F(x) \; \text{ este transformata Fourier } \; F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-itx} dt$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-itx} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-itx} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-t} e^{-itx} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-ix)} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+ix)} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{t(1-ix)}}{1-ix} \right|_{t\to-\infty}^{t=0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-t(1+ix)}}{-(1+ix)} \right|_{t=0}^{t\to+\infty} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-ix)}\left(\underbrace{e^{0(1-ix)}}_{1} - \underbrace{\lim_{t\to-\infty} e^{t(1-ix)}}_{0}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+ix)}\left(\underbrace{\lim_{t\to+\infty} e^{-t(1+ix)}}_{0} - \underbrace{e^{0(1-ix)}}_{1}\right) =$$

limitele sunt zero deoarece

$$\lim_{t\to-\infty}\left|e^{t(1-ix)}\right| = \lim_{t\to-\infty} e^t \underbrace{\left|e^{-itx}\right|}_{1} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left|e^{-t(1+ix)}\right| = \lim_{t\to+\infty} e^{-t} \underbrace{\left|e^{-itx}\right|}_{1} = e^{-\infty} = 0$$

deci

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-ix)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+ix)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+x^2)}$$

În final obţinem reprezentarea integrală

$$f(t) = e^{-|t|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{itx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+x^2)}e^{itx}dx$$

$$f(t) = e^{-|t|} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)}e^{itx}dx$$

Sau putem să folosim un rezultat anterior

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}e^{-itx}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}$$

şi obţinem o reprezentare integrală care doar aparent este diferită

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}e^{-itx}dt$$

■

Pentru funcţia

$$f(t) = e^{-t^2/2}$$

folosim rezultatul deja obţinut anterior, funcţia coincide cu transformata sa Fourier

$$\mathcal{F}(e^{-t^2/2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}e^{-itx}dt = e^{-x^2/2}$$

deci putem rescrie în forma

$$e^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}e^{-itx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}e^{itx}dx$$

■

6)

i) Putem înmulţi ecuaţia cu $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ pentru a pune în evidenţă

- în stânga $\mathcal{F}_{\cos}(f)$ formula de calcul a transformatei prin cos

- în dreapta $F_{\cos}(x)$ transformata prin cos (ca funcţie de x)

$$\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos txdt}_{\mathcal{F}_{\cos}(f)} = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2}}_{F_{\cos}(x)} \quad , \quad x\in[0,+\infty)$$

Prin urmare "recuperăm" funcţia $f(t)$ aplicând formula de inversare

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_{\cos}(x)\cos txdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2}\cos txdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\underbrace{\frac{\cos tx}{1+x^2}}_{\text{pară}}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos tx}{1+x^2}dx$$

folosim una din aplicaţiile la teorema reziduurilor

$$=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{1+x^2}dx\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\, z_j>0}\mathrm{Res}\left(\frac{e^{itz}}{1+z^2},z_j\right)\right]=$$

punctele singulare sunt rădăcinile ecuaţiei $1+z^2=0$ $\quad z_{1,2}=\pm i$,
doar $z_1=i$ are partea imaginară stric pozitivă , $\mathrm{Im}(i)=1>0$,
$1+z^2=(z-i)(z+i)$, rădăcini de ordin 1, deci sunt pucte singulare de tip pol de ordin 1

$$=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{itz}}{1+z^2},i\right)\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}2\pi i\lim_{z\to i}\left(\frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)}(z-i)\right)\right]=$$

$$=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}2\pi i\lim_{z\to i}\left(\frac{e^{itz}}{(z+i)}\right)\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}2\pi i\frac{e^{-t}}{2i}\right]=e^{-t}$$

deci soluţia ecuaţiei integrale este $f(t)=e^{-t}$, $t\in[0,+\infty)$
■

ii) Putem înmulţi ecuaţia cu $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ pentru a pune în evidenţă
- în stânga $\mathcal{F}_{\sin}(f)$ formula de calcul a transformatei prin sin
- în dreapta $F_{\sin}(x)$ transformata prin sin (ca funcţie de x)

$$\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin txdt}_{\mathcal{F}_{\sin}(f)}=\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\begin{cases}\sin x & , \ x\le\pi\\ 0 & , \ x>\pi\end{cases}}_{F_{\sin}(x)}$$

Prin urmare "recuperăm" funcţia $f(t)$ aplicând formula de inversare

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F_{\sin}(x)\sin txdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}F_{\sin}(x)\sin txdx+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\pi}^{+\infty}\underbrace{F_{\sin}(x)}_{0}\sin txdx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x\sin txdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{2\sin x\sin tx}_{\cos(tx-x)-\cos(tx+x)}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(tx-x)}{tx-x}-\frac{\sin(tx+x)}{tx+x}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\pi(t-1)}{\pi(t-1)}-\frac{\sin\pi(t+1)}{\pi(t+1)}-\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin x(t-1)}{x(t-1)}}_{1}+\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin x(t+1)}{x(t+1)}}_{1}\right]=$$

$$= \frac{\sin \pi(t-1)}{\pi(t-1)} - \frac{\sin \pi(t+1)}{\pi(t+1)} \quad , \quad \text{pentru} \quad t \neq 1$$

pentru $t = 1$ obţinem

$$f(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_{\sin}(x) \sin x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x \sin x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin^2 x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \Bigg|_{x=0}^{x=\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\pi - \frac{\sin 2\pi}{2} - 0 \right] = 1$$

În final obţinem

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin \pi(t-1)}{\pi(t-1)} - \frac{\sin \pi(t+1)}{\pi(t+1)} \ , \ t \neq 1 \\ 1 \ , \ t = 1 \end{cases} \quad , \quad t \in [0, +\infty)$$

sau pur şi simplu scriem

$$f(t) = \frac{\sin \pi(t-1)}{\pi(t-1)} - \frac{\sin \pi(t+1)}{\pi(t+1)} \quad , \quad t \in [0, +\infty)$$

şi subînţelegem că valoarea funcţiei pentru $t = 1$ este valoarea limitei $\lim\limits_{t \to 1} f(t) = 1$

■

iii) Putem înmulţi ecuaţia cu $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ pentru a pune în evidenţă

- în stânga $\mathcal{F}^{-1}(f)$ formula de calcul a transformatei Fourier inverse
- în dreapta $F^{-1}(x)$ transformata Fourier inversă (ca funcţie de x)

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{itx} dt}_{\mathcal{F}^{-1}(f)} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} x^2 \ , \ |x| < 1 \\ 0 \ , \ |x| > 1 \end{cases}}_{F^{-1}(x)} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Prin urmare "recuperăm" funcţia $f(t)$ aplicând formula de inversare

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F^{-1}(x) e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-itx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} x^2 e^{-itx} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} x^2 \left[\cos(-tx) + i \sin(-tx) \right] dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \underbrace{x^2 \cos tx}_{\text{pară}} dx - \underbrace{\frac{i}{2\pi} \int_{-1}^{1} \underbrace{x^2 \sin tx}_{\text{impară}} dx}_{0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^1 x^2 \cos tx dx \overset{\text{părţi}}{=} \frac{1}{\pi} \left[x^2 \frac{\sin tx}{t} \Bigg|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 2x \cdot \frac{\sin tx}{t} dx \right] = \frac{1}{\pi} \frac{\sin t}{t} - \frac{2}{\pi t} \int_0^1 x \sin tx dx =$$

$$\overset{\text{părţi}}{=} \frac{\sin t}{\pi t} - \frac{2}{\pi t} \left[x \frac{\sin tx}{t} \Bigg|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 1 \cdot \frac{\sin tx}{t} dx \right] = \frac{\sin t}{\pi t} - \frac{2}{\pi t} \frac{\sin t}{t} + \frac{2}{\pi t} \frac{-\cos tx}{t^2} \Bigg|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{\sin t}{\pi t} - \frac{2 \sin t}{\pi t^2} - \frac{2}{\pi t^3} [\cos t - \cos 0] = \frac{\sin t}{\pi t} - \frac{2 \sin t}{\pi t^2} - \frac{2(\cos t - 1)}{\pi t^3}$$

pentru $t = 0$ obţinem

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F^{-1}(x) e^{-i0x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{x^3}{3} \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6\pi}$$

■

6.1 Ecuaţii Diferenţiale Liniare cu Derivate Parţiale de Ordin 2

Clasificare. Aducere la formă canonică

Începem cu câteva notaţii. Considerăm funcţii scalare (cel puţin de clasă C^2) care depind de mai mulţi parametri.

Orice fenomen are loc în spaţiu (cu trei dimensiuni) , poziţia este descrisă de trei coordonate (x, y, z).

În plus orice fenomen are loc în timp, deci funcţiile (mărimile fizice scalare) depind de cel puţin 4 parametri.

$$u = u(x, y, z, t)$$

În general însă putem presupune un număr arbitrar de parametri. Notăm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi considerăm funcţia

$$u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$$

cu valori reale, cel puţin de clasă C^2, deci (conform teoremei lui Schwarz) nu contează ordinea de derivare

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$$

Definiţie.

Ecuaţiile de forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i<j=1}^{n} 2a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$$

se numesc ecuaţii liniare cu derivate parţiale, deoarece expresia este o combinaţie liniară a derivatelor parţiale de ordin 2.

Majoritatea ecuaţiilor fizicii sunt de acest tip. Ecuaţia căldurii, ecuaţia coardei vibrante, ecuaţia undelor sferice, vibraţiile unei bare elastice, unei membrane elastice, ecuaţiile hidrodinamicii (Navier-Stokes), ecuaţiile câmpului magnetic (Maxwell).

Coeficientul derivatelor parţiale $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ se notează $2a_{ij}(x)$,

deoarece se asociază o matrice simetrică

$$M = (a_{ij}(x))_{i,j=1,n}$$

exact ca în cazul formelor pătratice.

În cele ce urmează considerăm numai cazul a două variabile.

Deci funcţii scalare $u = u(x, y)$ şi ecuaţiile liniare cu derivate parţiale de forma

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

unde A, B, C sunt funcţii de două variabile de clasă C^1 şi nu toate simultan nule.

În acest caz matricea simetrică asociată este

$$M = \begin{pmatrix} A(x, y) & B(x, y) \\ B(x, y) & C(x, y) \end{pmatrix}$$

Problema Cauchy constă în determinarea funcţiilor $u = u(x, y)$ care verifică ecuaţia diferenţială

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

şi în plus verifică condiţiile iniţiale (la limită)

$$(1) \qquad u(x, y)|_\gamma = f \quad \text{şi} \quad (2) \qquad \left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_\gamma = g$$

unde γ este un drum de clasă C^1 inclus în domeniul funcţiilor A, B, C.

f, g sunt funcţii de clasă C^1 , v este un versor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ cu $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$

$\frac{\partial u}{\partial v}$ este derivata lui u după direcţia v

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} v_1 + \frac{\partial u}{\partial y} v_2$$

iar $u(x, y)|_\gamma = f$ înseamnă $u = f$ de a lungul drumului γ , adică $u(\gamma(t)) = f(\gamma(t))$.

Comentariu.

Pentru funcţii de o variabilă, temenul "condiţii iniţiale" este relativ simplu de definit.

Pentru funcţii de mai multe variabile şi ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale, termenul "condiţii iniţiale" este oarecum mai complicat.

Dacă una din variabile reprezintă "timpul t ", atunci condiţii pentru $t = 0$ sau $t = t_0$ reprezintă în mod clar "condiţii iniţiale"

dar condiţii de tipul celor formulate mai înainte

(valorile funcţiei de-a lungul unui drum, valorile derivatei după un versor)

sunt de fapt "condiţii la limită", sau condiţii "la frontiera" domeniului pe care sunt definite funcţiile.

În continuare folosim "notaţiile lui Monge"

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = q \ , \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r \ , \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = t \ , \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = s \ \text{ şi } \ \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

Putem scrie $u(x(t), y(t)) = f(t)$, derivând obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot y'(t) = f'(t)$$

condiţia iniţială (2) devine

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot v_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v_2 = g(t)$$

cu notaţiile lui Monge cele două condiţii iniţiale devin

$$\begin{cases} p \cdot x'(t) + q \cdot y'(t) = f'(t) \\ p \cdot v_1 + q \cdot v_2 = g(t) \end{cases}$$

care reprezintă un sistem liniar în p şi q cu determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

dacă $\Delta = 0$ se spune că vectorul v este tangent la drumul γ , deoarece în acest caz vectorii (x', y') şi $v = (v_1, v_2)$ sunt coliniari, ceea ce înseamnă că v este tangent la drumul γ.

Dacă $\Delta \neq 0$ se spune că vectorul v nu este tangent la drumul γ .

Notăm cu p' , q' derivatele lui p şi q de a lungul drumului γ adică după direcţia $y' = (x', y')$ obţinem

$$p' = \frac{\partial p}{\partial x} x' + \frac{\partial p}{\partial y} y' \quad , \quad q' = \frac{\partial q}{\partial x} x' + \frac{\partial q}{\partial y} y'$$

sau

$$p' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} x' + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} y' \quad , \quad q' = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} x' + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} y'$$

şi în final

$$\begin{cases} p' = r \cdot x' + s \cdot y' \\ q' = s \cdot x' + t \cdot y' \\ A \cdot r + 2B \cdot s + t y' = 0 \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem (cu r, s, t necunoscute) este

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & 2B & C \\ x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \end{vmatrix} = A(y')^2 - 2Bx'y' + C(x')^2$$

deci $\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(y')^2 - 2Bx'y' + C(x')^2 = 0$ aceasta se numeşte ecuaţia caracteristicilor

Dacă drumul $\gamma = (x, y)$ verifică ecuaţia caracteristicilor , drumul se numeşte curbă caracteristică

Presupunând că drumul γ se poate parametriza $\gamma = (x, y(x))$, obţinem forma

$$A(y')^2 - 2By' + C = 0$$

Presupunând că drumul γ se poate parametriza $\gamma = (x(y), y)$, obţinem forma

$$A - 2Bx' + C(x')^2 = 0$$

În concluzie, problema Cauchy are soluţie unică dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} \gamma \ \text{ nu este o curbă caracteristică} \\ v \ \text{ nu este vector tangent la drumul } \gamma \end{cases}$$

Clasificarea ecuaţiilor liniare cu derivate parţiale de ordin 2

Ecuaţia diferenţială

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

se numeşte de tip

eliptic dacă $B^2 - AC < 0$

hiperbolic dacă $B^2 - AC > 0$

parabolic dacă $B^2 - AC = 0$

Vom demonstra că semnul funcţiei $B^2 - AC$ este invariant faţă de anumite schimbări de variabilă, cu alte cuvinte, tipul ecuaţiei rămâne neschimbat.

Aducere la formă canonică

Trebuie precizat ce anume se înţelege prin "formă canonică" a unei ecuaţii liniare cu derivate parţiale.
Contează coeficienţii derivatelor parţiale de ordin 2.

Considerăm o schimbare de variabilă regulată

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases} \quad \text{şi inversa} \quad \begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$$

adică

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$$

Notăm tot cu u funcţia $u(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$.

Teoremă. O schimbare de variabilă regulată nu modifică tipul unei ecuaţii cu derivate partiale.

Demonstraţie. Pentru a realiza schimbarea de variabilă trebuie calculate derivatele parţiale în funcţie de variabilele ξ, η.

Derivăm relaţia $u(x,y) = u(\xi(x,y), \eta(x,y))$, folosind teorema de derivare a funcţiilor compuse

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Derivăm încă odată

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) =$$

$$= \left[\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial \xi}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial \xi}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial \eta}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial \eta}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

În mod exact analog, înlocuind x cu y se obţine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = ... =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

şi în fine derivata parţială "mixtă"

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) =$$

$$= \left[\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial \xi}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial \xi}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial x} + \left[\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial \eta}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial \eta}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x} =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial x} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x} =$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

obţinem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left[\underbrace{A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2}_{a}\right] +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\left[\underbrace{2A\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2B\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + 2C\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y}}_{2b}\right] +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[\underbrace{A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}_{c}\right] +$$

$$+D_1(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0$$

Deci putem scrie pe scurt noua ecuaţie diferenţială

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + c\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_1(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0$$

Pentru a demonstra că tipul ecuaţiei nu se schimbă, e suficient să arătăm că

$$b^2 - ac = \left(B^2 - AC\right) \cdot \text{factor} \quad \text{şi} \quad \text{factor} > 0$$

calculând obţinem

$$b^2 - ac = \left[A\frac{\partial\eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial\xi}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + C\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right]^2 -$$

$$-\left[A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right] \cdot \left[A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right] = ... =$$

$$= \left(B^2 - AC\right) \cdot \left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right]^2$$

Reamintim că schimbarea de variabilă este regulată, adică

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} \neq 0$$

Ceea ce încheie demonstraţia.■

În continuare prezentăm aducerea la formă canonică pentru fiecare tip de ecuaţie în parte.

Cazul 1. Pentru tipul hiperbolic avem $B^2 - AC > 0$.

Ecuaţia caracteristică $A(y')^2 - 2By' + C = 0$, (în ipoteza $A \neq 0$) are soluţiile

$$y_1' = \frac{B}{A} + \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC} \text{ şi } y_2' = \frac{B}{A} - \frac{1}{A}\sqrt{B^2 - AC}$$

Integrând aceste două relaţii în raport cu x , obţinem două relaţii care definesc implicit $y = y(x)$
Notăm aceste relaţii

$$\begin{cases} \xi(x,y) = C_1 = \text{ constant} \\ \eta(x,y) = C_2 = \text{ constant} \end{cases}$$

Aceste relaţii definesc schimbarea de variabilă de care avem nevoie pentru a aduce ecuaţia la formă canonică. Este o schimbare de variabilă regulată deoarece

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} \neq 0$$

pentru că dacă derivăm cu x $\xi(x,y) = C_1$, obţinem

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y} \cdot y_1'(x) = 0$$

şi în mod analog

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} \cdot y_2'(x) = 0$$

înmulţim prima relaţie cu $\frac{\partial\eta}{\partial y}$, a doua cu $\frac{\partial\xi}{\partial y}$, le scădem şi obţinem

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\left[y_1'(x) - y_2'(x)\right] = 0$$

Aici $\frac{\partial\xi}{\partial y} \neq 0$, deoarece altfel din $\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y} \cdot y_1'(x) = 0$ ar rezulta şi $\frac{\partial\xi}{\partial x} = 0$, ceea ce este imposibil, y_1 este funcţie de x nu constantă.

Rămân de calculat a, b, c aşa cum am notat în teorema anterioară.

Folosim relaţiile de mai înainte

$$a = A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = A\left(-\frac{\partial\xi}{\partial y} \cdot y_1'(x)\right)^2 + 2B\left(-\frac{\partial\xi}{\partial y} \cdot y_1'(x)\right)\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2$$

$$a = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 (y_1'(x))^2 - 2B\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 y_1'(x) + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \left[\underbrace{A\,(y_1'(x))^2 - 2B^2 y_1'(x) + C}_{0}\right] = 0$$

$$c = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = A\left(-\frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot y_2'(x)\right)^2 + 2B\left(-\frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot y_2'(x)\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

$$c = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 (y_2'(x))^2 - 2B - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \cdot y_2'(x) + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \left[\underbrace{A\,(y_2'(x))^2 - 2B^2 y_2'(x) + C}_{0}\right] = 0$$

$$b = A\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + C\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y} =$$

$$= A\left(-\frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot y_2'(x)\right)\left(-\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot y_1'(x)\right) + B\left(-\frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot y_2'(x)\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot y_1'(x)\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + C\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y}\left[Ay_1'(x)y_2'(x) - B\,(y_1'(x) + y_2'(x)) + C\right] = \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y}\left[A\frac{C}{A} - 2\frac{B^2}{A} + C\right] =$$

$$b = 2\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y}\left[C - \frac{B^2}{A}\right] = 2\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{AC - B^2}{A} \neq 0$$

Prin urmare forma canonică în cazul hiperbolic este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot 0 + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 0 + D_1(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0$$

adică

$$2b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + D_1(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{AC - B^2}{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + D_1(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0$$

■

Exemplu. Să se determine tipul ecuaţiei şi să se aducă la forma canonică.

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Soluţie. În acest caz $A = 2$, $2B = 1$, $C = -1$, deeci $B = 1/2$
deci $B^2 - AC = \frac{1}{4} + 2 > 0$ şi ecuaţia este de tip hiperbolic.
Ecuaţia caracteristică este

$$A(y')^2 - 2By' + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(y')^2 - y' - 1 = 0$$

Soluţiile sunt

$$y_1' = 1 \ \ , \ \ y_2' = -\frac{1}{2}$$

intergrând în raport cu x , obţinem

$$y_1(x) = x + ct \ \ , \ \ y_2(x) = -\frac{1}{2}x + ct$$

sau rearanjând

$$x - y = C_1 \ \ , \ \ x + 2y = C_2$$

Prin urmare schimbarea de variabilă pe care o putem alege este

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) = x - y \\ \eta = \eta(x, y) = x + 2y \end{cases}$$

Deci derivând obţinem

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 \ \ , \ \ \frac{\partial \xi}{\partial y} = -1 \ \ , \ \ \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1 \ \ , \ \ \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

Conform calculelor anterioare , cu această schimbare de variabilă se obţine forma canonică

$$4\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{AC-B^2}{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4(-2)\frac{-\frac{9}{4}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + 3\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + 3\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

În plus, în acest caz, această ultimă ecuaţie se poate integra , în raport cu ξ , obţinem

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{3}u\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{3}u = ct = C(\eta)$$

Aceasta este o ecuaţie liniară.

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{3}u + C(\eta)$$

Se rezolvă conform algoritmului standard.
Mai întâi ecuaţia omogenă asociată

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{3}u \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\partial u}{\partial \eta}}{u} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = -\frac{1}{3}\eta + K(\xi) \quad , \quad |u| = e^{-\frac{1}{3}\eta + K} = e^K e^{-\frac{1}{3}\eta}$$

$$u(\xi,\eta) = K(\xi)e^{-\frac{1}{3}\eta}$$

Apoi cătăm soluţii pentru ecuaţia liniară, de forma

$$u(\xi,\eta) = K(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{3}\eta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial K}{\partial \eta}e^{-\frac{1}{3}\eta} + K(\xi,\eta)(\frac{-1}{3})e^{-\frac{1}{3}\eta}$$

înlocuind obţinem

$$\frac{\partial K}{\partial \eta}e^{-\frac{1}{3}\eta} + K(\xi,\eta)(\frac{-1}{3})e^{-\frac{1}{3}\eta} = -\frac{1}{3}K(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{3}\eta} + C(\eta)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \eta} = e^{\frac{1}{3}\eta}C(\eta) \quad \Rightarrow \quad K(\xi,\eta) = \int e^{\frac{1}{3}\eta}C(\eta)d\eta$$

şi în final

$$u(\xi,\eta) = e^{-\frac{1}{3}\eta}\left(\int e^{\frac{1}{3}\eta}C(\eta)d\eta\right) = e^{-\frac{1}{3}\eta}\left(\int_0^\eta e^{\frac{1}{3}s}C(s)ds + C_1(\xi)\right)$$

unde $C(\eta)$ şi $C_1(\xi)$ sunt funcţii arbitrare de clasă C^2.
Aceste funcţii se pot determina din condiţii iniţiale sau condiţii la limită ale problemei Cauchy.
■

Cazul 2. Pentru tipul hiperbolic avem $B^2 - AC = 0$.

Ecuaţia caracteristică $A(y')^2 - 2By' + C = 0$, (în ipoteza $A \neq 0$) are soluţiile

$$y_1' = \frac{B}{A} = y_2'$$

Integrând în raport cu x , obţinem o relaţie care defineşte implicit $y = y(x)$
Notăm acestă relaţie $\eta(x,y) = C_2 =$ constant şi adăugăm $\xi(x,y) = x$, deci

$$\begin{cases} \xi(x,y) = C_1 = \text{ constant} \\ \eta(x,y) = C_2 = \text{ constant} \end{cases}$$

Aceste relaţii definesc schimbarea de variabilă de care avem nevoie pentru a aduce ecuaţia la formă canonică. Este o schimbare de variabilă regulată deoarece

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial\eta}{\partial y} \neq 0$$

folosind acelaşi argument ca pentru cazul hiperbolic.

De asemenea derivând obţinem

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta(x,y)\right] = \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\cdot y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{\partial\eta}{\partial y}\cdot y'(x) = -\frac{B}{A}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

Efectuăm schimbarea de variabilă şi obţinem

$$a = A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = A$$

$$b = A\frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + C\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y} = A\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\frac{\partial\eta}{\partial y} = A\left(-\frac{B}{A}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + B\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0$$

$$c = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 = A\left(-\frac{B}{A}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + 2B\left(-\frac{B}{A}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$$

$$c = \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\left[\frac{B^2}{A} - 2\frac{B^2}{A} + C\right] = \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\frac{AC-B^2}{A} = 0$$

Deci forma canonică în cazul parabolic este

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + D_1(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}) = 0$$

■

Observaţie. Dacă alegem $\xi(x,y) = ct$ relaţia obţinută prin integrarea lui $y' = \frac{B}{A}$, atunci adăugăm $\eta(x,y) = y$, iar forma canonică ce se obţine este

$$C\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + D_2(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}) = 0$$

Exemplu. Să se determine tipul ecuaţiei şi să se aducă la forma canonică.

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Soluţie. În acest caz $A = 4$, $2B = 4$, $C = 1$, deeci $B = 2$
deci $B^2 - AC = 4 - 4 = 0$ şi ecuaţia este de tip parabolic.
Ecuaţia caracteristică este

$$A(y')^2 - 2By' + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(y')^2 - 4y' + 1 = 0$$

Soluţiile sunt

$$y_1' = y_2' = \frac{1}{2}$$

intergrând în raport cu x , obţinem

$$y(x) = \frac{1}{2}x + ct \quad \Rightarrow \quad x - 2y = ct \quad , \quad \text{adăugăm} \quad \xi = x$$

Schimbarea de variabilă este

$$\begin{cases} \xi = (x,y) = x \\ \eta(x,y) = x - 2y \end{cases}$$

Derivând obţinem

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -2\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

Forma canonică a ecuaţiei diferenţiale este

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\left(-2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

În acest caz se poate integra în raport cu η o dată

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + u\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial u}{\partial \eta} + u = ct = C(\xi)$$

Se obţine o ecuaţie liniară care se poate integra în mod standard

Mai întâi ecuaţia omogenă asociată

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = u \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\partial u}{\partial \eta}}{u} = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = \eta + K(\xi) \quad , \quad |u| = e^{\eta + K} = e^K e^\eta$$

$$u(\xi,\eta) = K(\xi)e^\eta$$

Apoi cătăm soluţii pentru ecuaţia liniară, de forma

$$u(\xi,\eta) = K(\xi,\eta)e^\eta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial K}{\partial \eta}e^\eta + K(\xi,\eta)e^\eta$$

înlocuind obţinem

$$\frac{\partial K}{\partial \eta}e^\eta + K(\xi,\eta)e^\eta = K(\xi,\eta)e^\eta + C(\eta)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \eta} = e^{-\eta}C(\eta) \quad \Rightarrow \quad K(\xi,\eta) = \int e^{-\eta}C(\eta)d\eta$$

şi în final

$$u(\xi,\eta) = e^\eta\left(\int e^{-\eta}C(\eta)d\eta\right) = e^\eta\left(\int_0^\eta e^{-s}C(s)ds + C_1(\xi)\right)$$

unde $C(\eta)$ şi $C_1(\xi)$ sunt funcţii arbitrare de clasă C^2.

Aceste funcţii se pot determina din condiţii iniţiale sau condiţii la limită ale problemei Cauchy.

■

Cazul 3. Pentru tipul eliptic avem $B^2 - AC < 0$.

Ecuaţia caracteristică $A(y')^2 - 2By' + C = 0$, (în ipoteza $A \neq 0$) are soluţii complexe

$$y' = \frac{B}{A} \pm i\frac{1}{A}\sqrt{AC - B^2}$$

Integrând în raport cu x , obţinem

$$y(x) = \int \frac{B(x,y)}{A(x,y)}dx \pm i\int \frac{1}{A}\sqrt{AC - B^2}dx \quad \Leftrightarrow \quad y(x) - \int \frac{B(x,y)}{A(x,y)}dx + i\int \frac{1}{A}\sqrt{AC - B^2}dx$$

Alegem

$$\begin{cases} \xi(x,y) = \mathrm{Re}(E) = \text{ constant} \\ \eta(x,y) = \mathrm{Im}(E) = \text{ constant} \end{cases}$$

Aceste relaţii definesc schimbarea de variabilă de care avem nevoie pentru a aduce ecuaţia la formă canonică. Este o schimbare de variabilă regulată deoarece

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} \neq 0$$

Derivând cu x relaţia $\xi(x,y)+i\eta(x,y)$ cu $y=y(x)$ obţinem

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}y'(x)+i\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}y'(x)\right]=0$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+i\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left[\frac{\partial\xi}{\partial y}+i\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]y'(x)=0$$

$$\underbrace{\frac{\partial\xi}{\partial x}+i\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left[\frac{\partial\xi}{\partial y}+i\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]\left(\frac{B}{A}+i\frac{1}{A}\sqrt{AC-B^2}\right)}_{E}=0$$

Deci

$$(1)\qquad \mathrm{Re}(E)=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{B}{A}-\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{1}{A}\sqrt{AC-B^2}=0$$

$$(2)\qquad \mathrm{Im}(E)=\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{B}{A}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{1}{A}\sqrt{AC-B^2}=0$$

Presupunând prin absurd că $\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}=0$, rezultă că vectorii $(\frac{\partial\xi}{\partial x},\frac{\partial\xi}{\partial y})$, $\left(\frac{\partial\eta}{\partial x},\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)$ sunt coliniari, de exemplu

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x},\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=\alpha(\frac{\partial\xi}{\partial x},\frac{\partial\xi}{\partial y})$$

Deci înlocuind în (1) şi (2) obţinem

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{B}{A}-\alpha\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{1}{A}\sqrt{AC-B^2}=0$$

$$\alpha\frac{\partial\xi}{\partial x}+\alpha\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{B}{A}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{1}{A}\sqrt{AC-B^2}=0$$

înmulţim prima relaţie cu $-\alpha$ adunăm şi obţinem

$$\alpha^2\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{1}{A}\sqrt{AC-B^2}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{1}{A}\sqrt{AC-B^2}=0$$

$$(\alpha^2+1)\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{1}{A}\sqrt{AC-B^2}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\xi}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial\eta}{\partial x}=0$$

ceea ce este absurd, deci neapărat $\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\neq 0$, adică schimbarea de variabilă este regulată.

Efectuând calculele corespunzătoare schimbării de variabilă obţinem

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{B}{A}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{1}{A}\sqrt{AC-B^2}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{B}{A}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{1}{A}\sqrt{AC-B^2}$$

înlocuim şi rezultă

$$b=A\frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+C\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y}$$

$$b=A\left(-\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{B}{A}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{1}{A}\sqrt{AC-B^2}\right)\cdot\left(-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{B}{A}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{1}{A}\sqrt{AC-B^2}\right)+$$

$$+B\frac{\partial\xi}{\partial y}\left(-\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{B}{A}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{1}{A}\sqrt{AC-B^2}\right)+B\frac{\partial\eta}{\partial y}\left(-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{B}{A}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{1}{A}\sqrt{AC-B^2}\right)+C\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y}=$$

$$= \frac{B^2}{A}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{AC-B^2}{A}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{B}{A}\sqrt{AC-B^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{B}{A}\sqrt{AC-B^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 +$$

$$-\frac{B^2}{A}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \frac{B}{A}\sqrt{AC-B^2} - \frac{B^2}{A}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{B}{A}\sqrt{AC-B^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + C\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

$$b = 0$$

Prin urmare forma canonică în cazul eliptic este

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 0\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + c\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_1(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0$$

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_1(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0$$

■

Exemplu. Să se determine tipul ecuaţiei şi să se aducă la forma canonică.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Soluţie. În acest caz $A = 1$, $2B = -6$, $C = 10$, deci $B = -3$
deci $B^2 - AC = 9 - 10 < 0$ şi ecuaţia este de tip eliptic.
Ecuaţia caracteristică este

$$A(y')^2 - 2By' + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y')^2 + 6y' + 10 = 0$$

Soluţiile sunt

$$y_1' = -3 \pm i$$

integrând obţinem

$$y = -3x \pm ix \quad \Leftrightarrow \quad y + 3x + ix = 0$$

alegem

$$\begin{cases} \xi(x,y) = \mathrm{Re}(-3x+ix) = y+3x \\ \eta(x,y) = \mathrm{Im}(-3x+ix) = x \end{cases} \Rightarrow \quad \xi(x,y) = y + 3x \quad , \eta(x,y) = x$$

Deci

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 3 \ , \ \frac{\partial \xi}{\partial y} = 1 \ , \ \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1 \ , \ \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

Pentru a obţine forma canonică rămâne să calculăm coeficienţii

$$a = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = (3)^2 - 6\cdot 3 + 10\,(1)^2 = 1$$

$$c = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = (1)^2 - 6\cdot 0 + 10\,(0)^2 = 1$$

Deci forma canonică este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - 3\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

această ecuaţie diferenţială nu se poate integra prin metode elementare.

■

6.2 Ecuaţii diferenţiale liniare cu derivate parţiale. Metoda separării variabilelor

Dacă se ştie apriori (fie din teoreme de existenţă şi unicitate, fie din considerente fizice) , că o anumită problemă are soluţie şi că această soluţie este unică, atunci nu contează metoda prin care se obţine această soluţie.

În acest sens prezentăm metoda separării variabilelor (atribuită lui Fourier).

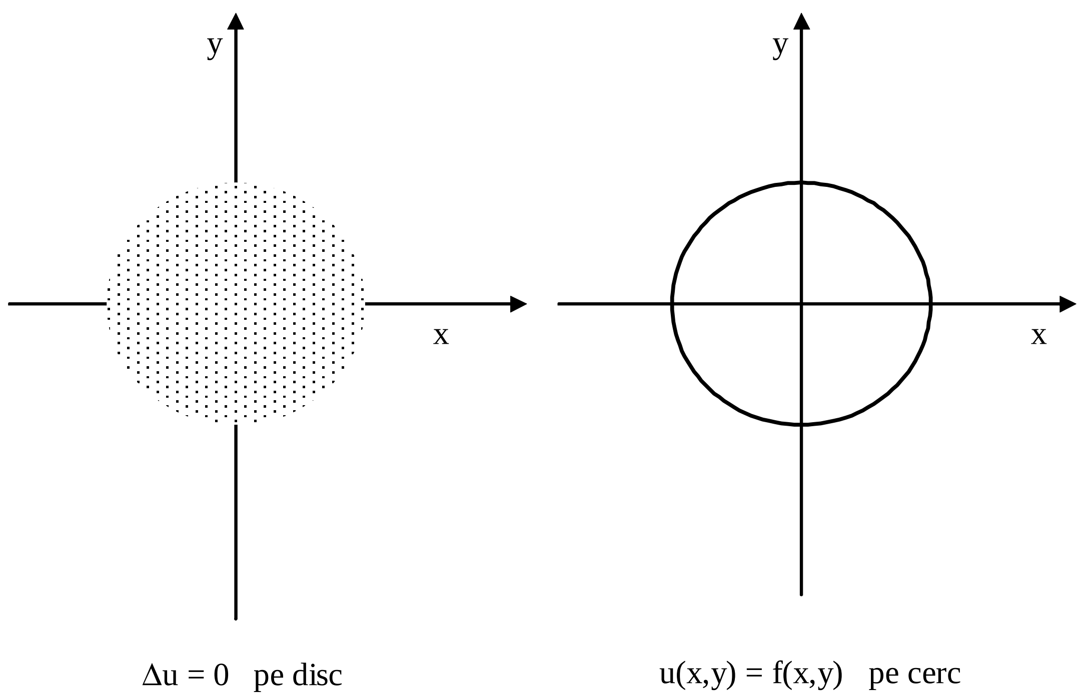
1. Problema Dirichlet pentru discul unitate. Să se determine funcţiile $u = u(x, y)$ de clasă C^2 pe interiorul discului unitate $\{x^2 + y^2 < 1\}$ şi continue pe discul închis $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$,

care verifică ecuaţia diferenţială

$$\Delta u = 0 \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\right) \quad \text{pentru} \;\; x^2 + y^2 < 1 \;\; \text{(interiorul discului unitate)}$$

şi condiţia la limită

$$u(x, y) = f(x, y) \quad \text{pentru} \quad x^2 + y^2 = 1 \;\; \text{(frontiera discului unitate = cercul unitate)}$$



Teoremă. Problema Dirichlet are soluţie unică.

În această expunere nu prezentăm demonstraţia. Dar folosim acest rezultat.

Exemple.

i) dacă funcţia f din condiţia la limită este nulă $f(x, y) = 0$ pentru orice (x, y) cu $x^2 + y^2 = 1$, atunci funcţia nulă $u = u(x, y) = 0$ pentru orice (x, y) cu $x^2 + y^2 \leq 1$, verifică ecuaţia diferenţială şi condiţia la limită, deci este soluţie a problemei Dirichlet. Din cauza unicităţii, $u(x, y) = 0$ este unica soluţie.

ii) dacă funcţia f din condiţia la limită este nulă $f(x, y) = 5$ pentru orice (x, y) cu $x^2 + y^2 = 1$, atunci funcţia $u = u(x, y) = 5$ pentru orice (x, y) cu $x^2 + y^2 \leq 1$, verifică ecuaţia diferenţială şi condiţia la limită, deci este soluţie a problemei Dirichlet. Din cauza unicităţii, $u(x, y) = 5$ este unica soluţie.

iii) dacă funcţia f din condiţia la limită este nulă $f(x, y) = ax + by$ pentru orice (x, y) cu $x^2 + y^2 = 1$, atunci funcţia $u = u(x, y) = ax + by$ pentru orice (x, y) cu $x^2 + y^2 \leq 1$, verifică ecuaţia diferenţială şi condiţia la limită, deci este soluţie a problemei Dirichlet.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = b \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Din cauza unicităţii, $u(x,y) = ax + by$ este unica soluţie.

iv) dacă funcţia f din condiţia la limită este nulă $f(x,y) = x^2 - y^2$ pentru orice (x,y) cu $x^2 + y^2 = 1$, atunci funcţia $u = u(x,y) = x^2 - y^2$ pentru orice (x,y) cu $x^2 + y^2 \leq 1$, verifică ecuaţia diferenţială şi condiţia la limită, deci este soluţie a problemei Dirichlet.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \ , \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \quad \Rightarrow \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$$

Din cauza unicităţii, $u(x,y) = x^2 - y^2$ este unica soluţie.

Consecinţă. Dacă funcţia f din condiţia la limită nu este nulă, atunci soluţia problemei Dirichlet este nenulă. Prin urmare problema Dirichlet se rezolvă pentru condiţia la limită nenulă , $f \neq 0$.

Din cauza simetriei centrale a discului unitate se folosesc coordonate polare

$$\begin{cases} x = x(r,t) = r\cos t \\ y = y(r,t) = r\sin t \end{cases} \quad , \quad r \in [0,1) \ , \ t \in [0, 2\pi)$$

Exact ca pentru orice schimbare de variabilă obţinem $u = u(x,y) = u(r\cos t, r\sin t) = u(r,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}$$

apoi se obţin şi derivatele de ordin 2.

Înlocuind în ecuaţia diferenţială obţinem ecuaţia $\Delta u = 0$ în coordonate polare

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

condiţia la limită devine în coordonate polare (pentru $r = 1$)

$$u(1,t) = f(t) \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

<u>Metoda separării variabilelor</u> constă în a căuta soluţii $u = u(r,t)$ de forma

$$u(r,t) = X(r) \cdot T(t)$$

unde X, T sunt de clasă C^2 , T este periodică cu perioadă 2π.

Derivând rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial r} = X'(r) \cdot T(t) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = X(r) \cdot T'(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = X''(r) \cdot T(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(r) \cdot T''(t)$$

Înlocuind în ecuaţia diferenţială obţinem

$$r^2 X''(r) \cdot T(t) + rX'(r) \cdot T(t) + X(r) \cdot T''(t) = 0$$

$$\left[r^2 X''(r) + rX'(r)\right] \cdot T(t) = -X(r) \cdot T''(t)$$

care se scrie separând variabilele

$$\underbrace{\frac{r^2 X''(r) + rX'(r)}{X(r)}}_{A} = \underbrace{-\frac{T''(t)}{T(t)}}_{B} \quad \text{pentru orice } r > 0 \text{ şi orice } t \in [0, 2\pi)$$

Cele două funcţii A (în stânga), respectiv B (în dreapta) depind de variabile diferite, parametri care variază în mod independent: orice $r > 0$ şi orice $t \in [0, 2\pi)$

Singura posibilitate de a avea egalitate este ca cele două funcţii A şi B să fie de fapt constante.

$$\frac{r^2 X''(r) + rX'(r)}{X(r)} = K = -\frac{T''(t)}{T(t)}$$

I. Începem cu studiul ecuaţiei

$$K = -\frac{T''(t)}{T(t)} \quad \Leftrightarrow \quad T''(t) + KT(x) = 0$$

O ecuaţie diferenţială liniară de ordin 2 cu coeficienţi constanţi. Folosim algoritmul standard de rezolvare.
Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 + K = 0$

1) Pentru $K < 0$ avem rădăcini reale distincte $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-K}$, cărora li se asociază soluţiile $e^{t\sqrt{-K}}$, $e^{-t\sqrt{-K}}$
soluţiile ecuaţiei diferenţiale sunt de forma

$$T(t) = C_1 e^{t\sqrt{-K}} + C_2 e^{-t\sqrt{-K}}$$

Dar funcţia T este periodică cu perioada 2π. Funcţiile exponenţiale reale nu sunt periodice.
Deci funcţia $T = T(t)$ astfel definită, poate fi periodică numai dacă este constantă, deci neapărat $C_1 = 0$, $C_2 = 0$
Sau putem deduce acest fapt prin calcul direct.
Din $T(t + 2\pi) = T(t)$ pentru $t = 0, 2\pi$ obţinem

$$\begin{cases} C_1 e^{2\pi\sqrt{-K}} + C_2 e^{-2\pi\sqrt{-K}} = C_1 + C_2 \\ C_1 e^{4\pi\sqrt{-K}} + C_2 e^{-4\pi\sqrt{-K}} = C_1 + C_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 \left(e^{2\pi\sqrt{-K}} - 1\right) + C_2 \left(e^{-2\pi\sqrt{-K}} - 1\right) = 0 \\ C_1 \left(e^{4\pi\sqrt{-K}} - 1\right) + C_2 \left(e^{-4\pi\sqrt{-K}} - 1\right) = 0 \end{cases}$$

Ultimul sistem liniar omogen are determinantul nenul, deci are soluţie unică $C_1 = 0$, $C_2 = 0$
Aceasta implică $T(t) = 0$ şi deci $u = u(r,t) = X(r) \cdot T(t) = 0$, ceea ce nu e acceptabil cu condiţia iniţială f nenulă.
Prin urmare cazul $K < 0$ nu este acceptabil.

2) Pentru $K = 0$ ecuaţia diferenţială devine $T''(t) = 0$, care duce la $T(t) = at + b$, şi pentru că trebuie să fie periodică rezultă neapărat că este constantă $T(t) = b$

3) Pentru $K > 0$ notăm $K = \omega^2$, $\omega > 0$, obţinem rădăcini complexe $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{K} = \pm i\omega$, cărora li se asociază soluţiile $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$.
soluţiile ecuaţiei diferenţiale sunt de forma

$$T(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

Acestea sunt funcţii periodice cu perioada principală $\frac{2\pi}{\omega}$.
Pentru ca 2π să fie perioadă este necesar ca (să fie multiplu întreg al perioadei principale)

$$2\pi = \frac{2\pi}{\omega} n \quad \Rightarrow \quad \omega = n \in \mathbb{N}$$

Deci $K = n^2$, $n \geq 0$ şi

$$T(t) = A\cos(nt) + B\sin(nt)$$

II. Studiem acum ecuaţia

$$\frac{r^2 X''(r) + rX'(r)}{X(r)} = n^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 X''(r) + rX'(r) - n^2 X(x) = 0$$

Aceasta e o ecuaţie diferenţială liniară de ordin 2, de tip Euler.
Facem schimbarea de variabilă $0 < r = e^s$, derivând $X(r) = X(e^s) = Y(s)$ obţinem

$$X'(e^s)e^s = Y'(s) \quad \Rightarrow \quad X'(e^s) = \frac{1}{e^s} Y'(s) \quad \Rightarrow$$

$$[X'(e^s)]' = \left[\frac{1}{e^s}Y'(s)\right]' \quad \Leftrightarrow \quad X''(e^s)e^s = \frac{Y''(s)e^s - e^sY'(s)}{(e^s)^2} \quad \Rightarrow \quad X''(e^s) = \frac{Y''(s) - Y'(s)}{(e^s)^2}$$

Înlocuind în ecuaţia de tip Euler obţinem

$$(e^s)^2 \frac{Y''(s) - Y'(s)}{(e^s)^2} + e^s \frac{1}{e^s}Y'(s) - n^2Y(s) = 0$$

$$Y''(s) - n^2Y(s) = 0$$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară de ordin 2 cu coeficienţi constanţi. Folosim algoritmul standard de rezolvare.

Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - n^2 = 0$, cu rădăcini $\lambda_{1,2} = \pm n$, se asociază soluţiile e^{ns} , e^{-ns}
soluţiile ecuaţiei diferenţiale sunt de forma

$$Y(s) = C_1e^{ns} + C_2e^{-ns} \quad \Rightarrow \quad X(r) = C_1r^n + C_2r^{-n}$$

Pe de altă parte u reprezintă o mărime fizică, deci e continuă în $(0,0)$, deci limita pentru $r \searrow 0$ trebuie să fie finită.

Deoarece $r \in [0,1)$ obţinem mai precis

$$\lim_{r\searrow 0} r^n = 0 \;\text{ şi }\; \lim_{r\searrow 0} r^{-n} = +\infty$$

$$\lim_{r\searrow 0} X(r) = \lim_{r\searrow 0} C_1r^n + \lim_{r\searrow 0} C_2r^{-n} = \text{ finită } \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

Deci soluţiile sunt

$$X(r) = C_1r^n$$

În concluzie, pentru fiecare număr natural $n \geq 0$ obţinem o soluţie a ecuaţiei diferenţiale $\Delta u = 0$ de forma

$$u_n(r,t) = X(r) \cdot T(t) = C_1r^n \left[A\cos(nt) + B\sin(nt)\right] =$$

$$u_n(r,t) = r^n \left[A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)\right]$$

(unde am notat $A_n = C_1A$, $B_n = C_1B$)

Aplicăm "principiul suprapunerii efectelor" (ideea atribuită lui Fourier) ,
care afirmă că dacă seria este convergentă atunci suma ei este o soluţie a ecuaţiei $\Delta u = 0$

$$u = u(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)\right]$$

Coeficienţii A_n , B_n se determină din condiţia la limită

$$u(1,t) = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)\right] = f(t)$$

Aceasta se poate întampla numai dacă funcţiei f i se poate asocia o serie Fourier care să fie convergentă cu suma $= f(x)$.

Rezultă astfel formule de calcul pentru coeficienţii A_n, B_n , coeficienţi ai seriei Fourier.

Integralele se pot calcula fie pe intervalul $[0,2\pi]$ fie $[-\pi,\pi]$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds \quad , \quad A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\cos(ns)ds \quad , \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\sin(ns)ds$$

Soluţia se poate scrie

$$u(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\cos(ns)ds\right)\cos(nt) + \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\sin(ns)ds\right)\sin(nt)\right]$$

$$u(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\int_0^{2\pi} f(s)\left[\cos(ns)\cos(nt) + \sin(ns)\sin(nt)\right] ds\right]$$

$$u(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\int_0^{2\pi} f(s)\left[\cos n(s-t)\right] ds\right]$$

$$u(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(s-t)\right] ds$$

Pe de altă parte $z = re^{it} = r(\cos t + i\sin t)$, $z^n = \left(re^{it}\right)^n = r^n e^{int} = r^n(\cos nt + i\sin nt)$,
deci $r^n \cos nt = \mathrm{Re}\left(\left(re^{it}\right)^n\right) = \mathrm{Re}(z^n)$, iar dacă adunăm obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right) = \mathrm{Re}\left(z + z^2 + z^3 + ...\right) = \mathrm{Re}\left(z\frac{1}{1-z}\right)$$

Seria geometrică este convergentă deoarece $|z| = r < 1$
În fine pentru $z = r(\cos(s-t) + i\sin(s-t))$ obţinem

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(s-t) = \mathrm{Re}\left(1 + 2z\frac{1}{1-z}\right)$$

Pentru a simplifica să notăm $\alpha = (s-t)$ şi $z = re^{i\alpha} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\overline{z} = re^{-i\alpha} = r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$

$$\mathrm{Re}\left(1 + 2z\frac{1}{1-z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i\alpha}}{1-re^{i\alpha}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(1+re^{i\alpha})(1-re^{-i\alpha})}{(1-re^{i\alpha})(1-re^{-i\alpha})}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1-r^2+re^{i\alpha}-re^{-i\alpha}}{1+r^2-re^{i\alpha}-re^{-i\alpha}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-r^2+i2r\sin\alpha}{1+r^2-2r\cos\alpha}\right) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\alpha}$$

Deci în final

$$u(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\left[\frac{1-r^2}{1-2r\cos(s-t)+r^2}\right] ds$$

$$u(r,t) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(s)}{1-2r\cos(s-t)+r^2} ds$$

sau

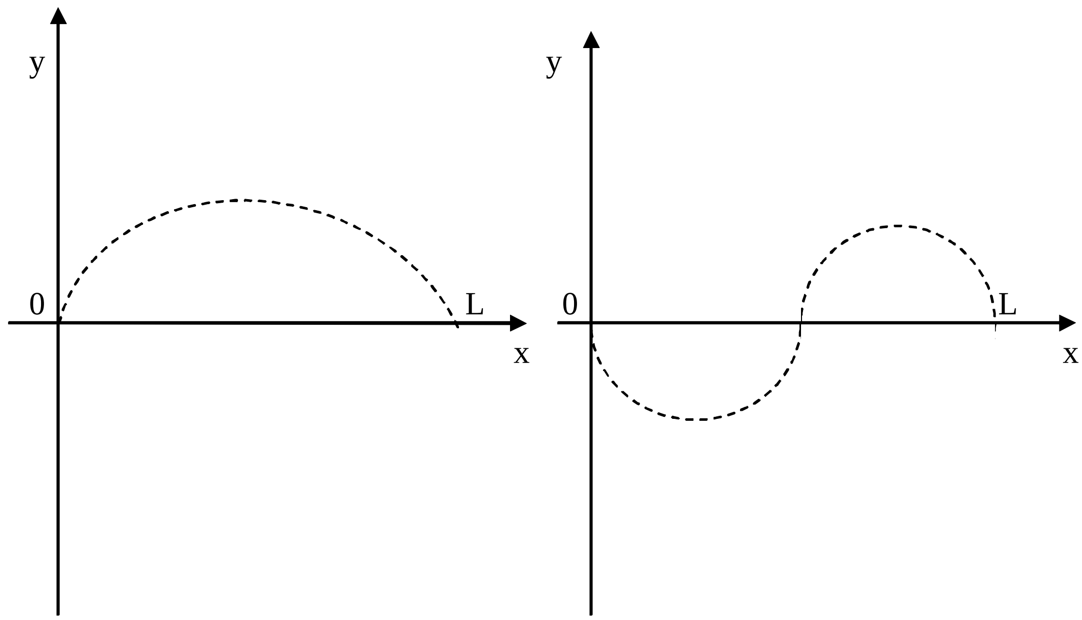
$$u(r,t) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(s)}{1-2r\cos(s-t)+r^2} ds$$

şi reprezintă soluţia explicită a problemei Dirichlet pentru discul unitate.
Se mai numeşte şi formula lui Poisson.
■

2. Oscilaţiile unei coarde vibrante prinsă la capete.

Considerăm o coardă elastică prinsă la capete, care oscilează (vibrează) în planul xOy fără viteză iniţială, de lungime $= L$, capetele coardei sunt fixe în punctele $x = 0$, $x = L$, în fine la momentul iniţial $t = 0$ poziţia coardei poate identificată cu graficul unei funcţii continue $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, $u(x, 0) = f(x)$.

Funcţia $u = u(x,t)$ măsoară oscilaţia coardei în dreptul punctului x (sau aflat la distanţa x de capătul 0)
Coarda este presupusă dintr-un material omogen şi oscilează "liber" în sensul că nu există alte influenţe.
Exemple de condiţii iniţiale, poziţii de "plecare" pentru coardă.



Ecuaţia diferenţială corespunzătoare (ecuaţia "undelor" unidimensionale) este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad a > 0 \ \text{ constantă}$$

Condiţiile la limită constau în prinderea la capete (în capete oscilaţia este nulă)

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad u(L,t) = 0 \quad , \ \text{pentru orice} \ \ t \geq 0$$

Condiţiile iniţiale, constau în poziţia la momentul $t = 0$ şi viteza iniţială nulă

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad , \ \text{pentru orice} \ \ x \in [0,L]$$

Asemenea problemă cu condiţii iniţiale şi condiţii la limită se numeşte "problemă mixtă".

Problema este bine determinată din punct de vedere fizic, deci are soluţie unică.
Acest fapt se poate demonstra şi matematic ca şi pentru problema Dirichlet.
Consecinţă. Dacă $f(x) = 0$ atunci singura soluţie este $u(x,t) = 0$, (coarda nu oscilează dacă în momentul iniţial se află în stare de repaos). Dacă f este nenulă (coarda este "ciupită" la momentul iniţial) problema are soluţie nenulă (coarda oscilează, vibrează). Problema coardei este de interes numai pentru f nenulă.

Metoda separării variabilelor constă în a căuta soluţii $u = u(x,t)$ de forma

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

unde X, T sunt de clasă C^2 . Derivând rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial r} = X'(r) \cdot T(t) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = X(r) \cdot T'(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = X''(r) \cdot T(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(r) \cdot T''(t)$$

Înlocuind în ecuaţia diferenţială obţinem

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

Cele două expresii depind de variabile diferite, deci sunt neapărat constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = K = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

I. Studiem mai întâi ecuaţia

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = K \quad \Leftrightarrow \quad X''(x) - K \cdot X(x) = 0$$

Ecuaţie diferenţială liniară de ordin 2 cu coeficienţi constanţi. Se rezolvă conform algoritmului standard. Ecuaţia carateristică este $\lambda^2 - K = 0$

1) Pentru $K = 0$ obţinem $X''(x) = 0$, care duce la $X(x) = ax + b$
Din condiţiile la limită (la capete)

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \text{pentru orice } t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X(0) \cdot T(t) = 0 \\ X(L) \cdot T(t) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = 0 \\ aL + b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Ceea ce ar duce la $X(x) = 0 \Rightarrow \ u(x,t) = 0$, absurd deoarece coarda oscilează (f este nenulă). Deci $K \neq 0$

2) Pentru $K > 0$ rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{K}$, se asociază soluţiile $e^{x\sqrt{K}}$, $e^{-x\sqrt{K}}$
soluţiile sunt de forma

$$X(x) = C_1 e^{x\sqrt{K}} + C_2 e^{-x\sqrt{K}}$$

Din condiţiile la limită (la capete)

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \text{pentru orice } t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X(0) \cdot T(t) = 0 \\ X(L) \cdot T(t) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{L\sqrt{K}} + C_2 e^{-L\sqrt{K}} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Ceea ce ar duce la $X(x) = 0 \Rightarrow \ u(x,t) = 0$, absurd deoarece coarda oscilează (f este nenulă). Deci rămâne $K < 0$

3) Pentru $K < 0$ rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{-K}$, se asociază soluţiile $\cos x\sqrt{-K}$, $\sin x\sqrt{-K}$
soluţiile sunt de forma

$$X(x) = C_1 \cos x\sqrt{-K} + C_2 \sin x\sqrt{-K}$$

Din condiţiile la limită (la capete)

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \text{pentru orice } t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X(0) \cdot T(t) = 0 \\ X(L) \cdot T(t) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \\ C_1 \cos L\sqrt{-K} + C_2 \sin L\sqrt{-K} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin L\sqrt{-K} = 0 \end{cases}$$

Deoarece $C_2 \neq 0$ rezultă

$$\sin L\sqrt{-K} = 0 \ \Rightarrow \ L\sqrt{-K} = n\pi \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

şi soluţia este

$$X(x) = C_2 \sin\frac{n\pi x}{L}$$

II. Studiem acum ecuaţia

$$-\frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} \quad \Leftrightarrow \quad T''(t) + \frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}T(t) = 0$$

Ecuaţie diferenţială liniară de ordin 2 cu coeficienţi constanţi, se rezolvă conform algoritmului standard.
Ecuatia caracteristică este

$$\lambda^2 + \frac{n^2a^2\pi^2}{L^2} = 0 \quad , \quad \text{rădăcini} \quad \lambda_{1,2} = \pm i\frac{na\pi}{L}$$

se asociază soluţiile $\cos\frac{an\pi}{L}t$, $\sin\frac{an\pi}{L}t$, soluţiile sunt de forma

$$T(t) = D_1\cos\frac{na\pi}{L}t + D_2\sin\frac{na\pi}{L}t$$

În concluzie, pentru fiecare număr natural (întreg) $n \geq 1$ obţinem o soluţie a ecuaţiei diferenţiale, de forma

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t) = C_2\sin\frac{n\pi x}{L}\left[D_1\cos\frac{an\pi}{L}t + D_2\sin\frac{an\pi}{L}t\right]$$

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\left[A_n\cos\frac{na\pi}{L}t + B_n\sin\frac{na\pi}{L}t\right]$$

unde am notat $A_n = C_2D_1$, $B_n = C_2D_2$

Aplicăm "principiul suprapunerii efectelor" (ideea atribuită lui Fourier) ,
care afirmă că dacă seria este convergentă atunci suma ei este o soluţie a ecuaţiei coardei vibrante

$$u = u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\left[A_n\cos\frac{na\pi}{L}t + B_n\sin\frac{na\pi}{L}t\right]$$

Coeficienţii A_n , B_n se determină din condiţiile iniţiale

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad , \text{ pentru orice } x \in [0,L]$$

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}A_n \quad , \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}B_n\frac{na\pi}{L} \quad , \text{ pentru orice } x \in [0,L]$$

deoarece derivând obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\left[-A_n\sin\frac{na\pi}{L}t + B_n\cos\frac{na\pi}{L}t\right]\frac{na\pi}{L}$$

Din egalitatea

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}B_n\frac{na\pi}{L} = 0 \quad , \text{ pentru orice } x \in [0,L]$$

O serie Fourier are suma nulă dacă şi numai dacă toţi coeficienţii sunt nuli , adică $B_n = 0$, $n \geq 1$
Rezultă soluţia de forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{na\pi}{L}t$$

Coeficienţii A_n se calculează din condiţia iniţială

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}A_n \quad , \text{ pentru orice } x \in [0,L]$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin\frac{n\pi y}{L}dy$$

Să observăm că funcţia f se dezvoltă în serie de sinuşi.

■

Interpretare fizică.

Fiecare "vibraţie armonică"

$$u_n(x,t) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{na\pi}{L} t$$

descrie câte una din mişicările (vibraţiile) coardei şi are

$$\text{frecvenţa proprie} = \frac{na\pi}{L} \quad \text{şi amplitudinea} \quad = A_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Punctele

$$0, \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \frac{3L}{n}, ..., \frac{(n-1)L}{n}, L$$

în care se anulează amplitudinea se numesc **noduri**, iar punctele în care amplitudinea este maximă se numesc **ventre**.

Vibraţia armonică

$$u_1(x,t) = A_1 \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{a\pi}{L} t$$

are frecvenţa minimă $\frac{a\pi}{L}$, se numeşte **tonul fundamental al coardei**, iar $\{u_n(x,t)\}_n$ **şirul armonicelor**.

Soluţia problemei se obţine deci prin suprapunerea efectelor tonului fundamental şi al şirului armonicelor.

3. Propagarea căldurii într-o bară infinită.

Se consideră o bară infinită, omogenă, identificată cu axa (dreapta) reală.

Presupunem că temperatura barei $u = u(x,t)$ în punctul $x \in \mathbb{R}$ măsurată la momentul $t \geq 0$ verifică ecuatia diferenţială

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şi condiţia iniţială

$$u(x,0) = f(x) \ \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

Presupunem că funcţiile $u, f, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sunt continue şi integrabile în modul pe $\mathbb{R}$ (sunt funcţii din $L^1(\mathbb{R})$) pentru orice $t \geq 0$, deci admit transformate Fourier.

În plus

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right| \leq g(x) \ \ , \ \text{cu} \ \ g \in L^1(\mathbb{R})$$

Metoda de rezolvare constă în aplicarea transformatei Fourier (în raport cu x) ecuaţiei diferenţiale.

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \quad , \quad \mathcal{F}\left(f(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) e^{-ixy} dx$$

Folosim proprietatea transformării Fourier

$$\mathcal{F}\left(\frac{df}{dx}\right) = (iy)\mathcal{F}\left(f(x)\right)$$

În cazul de faţă obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ixy} dx\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) e^{-ixt} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) e^{-ixt} dx = (iy)^2 \mathcal{F}\left(u\right) = -y^2 \mathcal{F}\left(u\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left[\mathcal{F}\left(u\right)\right] = -y^2 \mathcal{F}\left(u\right)$$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară care se rezolvă conform algoritmului standard.

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial t}\left[\mathcal{F}(u)\right]}{\mathcal{F}(u)} = -y^2$$

integrăm în raport cu t obţinem (adăugăm o "constantă faţă de t" K care însă poate fi funcţie de y)

$$\ln|\mathcal{F}(u)| = -ty^2 + K(y) \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{F}(u)| = e^{-ty^2+K} = e^K e^{-ty^2}$$

$$\mathcal{F}(u) = C(y)e^{-ty^2} \quad , \quad \text{am notat } e^K = C(y)$$

Aplicăm transformarea Fourier condiţiei iniţiale

$$u(x,0) = f(x) \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(u(x,0)) = \mathcal{F}(f(x))$$

înlocuind rezultă

$$\mathcal{F}(f(x)) = \mathcal{F}(u(x,0)) = C(y)\cdot e^{-0\cdot y^2} = C(y) \quad , \text{ pentru } \quad t=0$$

Soluţia se scrie

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u(x,0))\, e^{-ty^2} = \mathcal{F}(f(x))\, e^{-ty^2}$$

Ţinând seama de faptul că

$$\mathcal{F}\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\cdot e^{-ixy}dx = e^{\frac{-y^2}{2}}$$

rezultă

$$e^{-ty^2} = e^{\frac{-(y\sqrt{2t})^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\cdot e^{-ixy\sqrt{2t}}dx =$$

facem schimbarea de variabilă $x\sqrt{2t} = z$, $x = \frac{1}{\sqrt{2t}}$, z $dx = \frac{1}{\sqrt{2t}}dz$,

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-z^2}{2\cdot 2t}}\cdot e^{-izy}dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-z^2}{4t}}\cdot e^{-izy}\frac{1}{\sqrt{2t}}dz = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{\frac{-z^2}{4t}}\right)$$

Soluţia se poate scrie ca produs de transformate Fourier care apoi este transformata Fourier a unui produs de convoluţie

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u(x,0))\, e^{-ty^2} = \mathcal{F}(u(x,0))\cdot\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{\frac{-z^2}{4t}}\right) =$$

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}\left(u(x,0) * \frac{1}{\sqrt{2t}}e^{\frac{-z^2}{4t}}\right)$$

Transformarea Fourier este injectivă, deci obţinem soluţia efectiv

$$u(x,t) = \underbrace{u(x,0)}_{f(x)} * \frac{1}{\sqrt{2t}}e^{\frac{-z^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{2t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)e^{\frac{-y^2}{4t}}dy$$

sau pentru că produsul de convoluţie este comutativ

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}dy$$

Iată un caz particular de interes.

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} K & , \ x\in[a,b] \\ 0 & , \ \text{în rest}\end{cases}$$

obţinem soluţia în forma

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}dy=K\frac{1}{\sqrt{2t}}\int_a^b e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}dy=$$

cu schimbarea de variabilă $\frac{(x-y)}{2\sqrt{t}}=z$, $y=x-2\sqrt{t}z$, $dy=-2\sqrt{t}dz$ obţinem

$$u(x,t)=K\frac{1}{\sqrt{2t}}\int_{\frac{x-a}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x-b}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2}\left(-2\sqrt{t}\right)dz=-K\sqrt{2}\int_{\frac{x-a}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x-b}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2}dz$$

$$u(x,t)=-K\sqrt{2}\left[\varphi(\frac{x-b}{2\sqrt{t}})-\varphi(\frac{x-a}{2\sqrt{t}})\right]$$

unde funcţia φ este

$$\varphi(w)=\int_0^w e^{-z^2}dz$$

■

7. Potenţial Scalar - Potenţial Vector

Considerăm mărimi fizice scalare sau vectoriale, cu alte cuvinte câmpuri scalare sau câmpuri vectoriale, măsurate în spaţiul tri-dimensional $\mathbb{R}^3$,pe care le raportăm la un reper ortogonal
cu versorii notaţi în mod "canonic" $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ şi axele de coordonate "carteziene" Ox , Oy , Oz .

7.1 Potenţial Scalar

Definiţie. Numim **câmp scalar** o funcţie $F:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, cel puţin de clasă C^1 şi
câmp vectorial o funcţie $v:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$v=v(x,y,z)=(P,Q,R)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))=P\overrightarrow{i}+Q\overrightarrow{j}+R\overrightarrow{k}$$

componentele câmpului $P,Q,R:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, sunt funcţii (câmpuri) scalare, cel puţin de clasă C^1
Vom folosi doar ocazional notaţia $\overrightarrow{v}$ pentru câmpuri vectoriale.
Domeniul de definiţie $D\subset\mathbb{R}^3$ este o mulţime deschisă. Vom numi "domeniu" o mulţime deschisă.
Un câmp vectorial este **câmp de gradienţi** dacă există o funcţie $F:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ astfel încât

$$v=\operatorname{grad}F$$

sau altfel scris

$$(P,Q,R)=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

funcţia F se numeşte **potenţial scalar** (pentru câmpul v), se spune "câmpul v provine dintr-un potenţial scalar".
Cu alte cuvinte, cele trei componente ale câmpului P,Q,R sunt derivatele parţiale ale "potenţialului scalar" F
Este evident că funcţia F (potenţial scalar) este de clasă C^2
(deoarece derivatele sale parţiale - componentele câmpului - sunt de clasă C^1)

Observaţie.
Este clar că dacă F este potenţial scalar, la fel este orice altă funcţie de forma $F+ct$

Se subînţelege că v este câmp de gradienţi pe domeniul $D\subset\mathbb{R}^3$, altfel formulat
câmpul admite potenţial scalar pe domeniul $D\subset\mathbb{R}^3$
(tot aşa cum se spune "funcţia este continuă pe domeniul ..., sau este derivabilă pe domeniul ...")
Domeniul de definiţie este esenţial în cele ce urmează.

Exemple.

1. Câmpul gravitaţional este un câmp de gradienţi

$$v = v(x, y, z) = -K \frac{1}{r^3} \overrightarrow{r} \quad , \quad \text{pentru } (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

Am folosit notaţia

$\overrightarrow{r} = (x, y, z) = x\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{k}$ pentru "vectorul de poziţie" şi

$r = \|\overrightarrow{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ pentru modulul sau norma vectorului de poziţie

K reprezintă constanta gravitaţională.

Putem deci scrie

$$v = v(x, y, z) = -K \frac{1}{r^3} \overrightarrow{r} = \left(\underbrace{\frac{-Kx}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}}_{P}, \underbrace{\frac{-Ky}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}}_{Q}, \underbrace{\frac{-Kz}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}}_{R} \right)$$

Nu este dificil de observat că cele trei componente P, Q, R sunt derivatele parţiale ale funcţiei

$$F(x, y, z) = \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Deci câmpul gravitaţional este un câmp de gradienţi şi funcţia $F = F(x, y, z)$ este un potenţial scalar.

2. Câmpul vectorial

$$v = v(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

este în mod evident un câmp de gradienţi. Sunt uşor de recunoscut derivatele parţiale ale funcţiei

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (2x, 2y, 2z) = v$$

3. Un câmp vectorial ce acţionează într-un plan, de exemplu planul "orizontal" xOy , este de forma

$$v = v(x, y, z) = (P, Q, 0) = (P(x, y), Q(x, y), 0) = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k}$$

deci componenta după versorul $\overrightarrow{k}$ este nulă ($R = 0$) ,
iar componentele P şi Q depind numai de x şi y (nu depind de z).
Un astfel de câmp vectorial este câmp de gradienţi dacă există o funcţie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, cu $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ şi

$$v = \operatorname{grad} F \quad \Leftrightarrow \quad (P, Q, 0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, 0 \right)$$

Pentru a nu complica notaţiile în mod inutil, putem ignora atât variabila z cât şi componenta după versorul $\overrightarrow{k}$ şi scriem mai simplu $v = v(x, y)$, $F = F(x, y)$

$$v = \operatorname{grad} F \quad \Leftrightarrow \quad (P, Q) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

4. În general orice funcţie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (de clasă C^2) este potenţial scalar pentru propriul său câmp de gradienţi

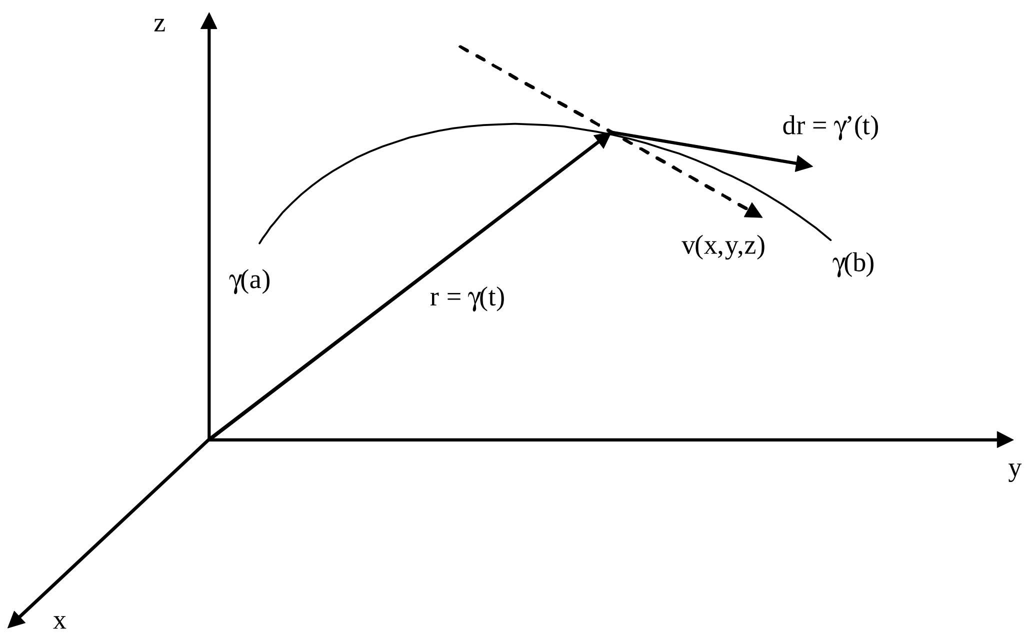
$$v = \operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

Se pune evident întrebarea de ce câmpurile de gradienţi merită studiate.

Pentru un câmp vectorial este important lucrul mecanic efectuat de-a lungul unui drum.
Să calculăm lucrul mecanic pentru un câmp de gradienţi.
Considerăm un câmp de gradienţi v cu potenţialul scalar $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, funcţie de clasă C^2

$$v = (P, Q, R) = \operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

şi un drum parametrizat $\gamma : [a, b] \to D$, $\overrightarrow{r} = \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, de clasă C^1
(deci funcţiile $x(t), y(t), z(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt derivabile cu derivate continue)



Vectorul de poziţie $\overrightarrow{r} = \gamma(t)$, vectorul tangent la drum (traiectorie)

$$d\overrightarrow{r} = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)))$$

În general lucrul mecanic reprezintă o măsură a efortului, principial este "forţa $\times$ deplasarea".
În acest caz "forţa" este $\overrightarrow{v} = (P, Q, R)$ vectorul câmpului, iar "deplasarea" are loc de-a lungul drumului γ , în fiecare punct pe direcţia tangentă la drum $d\overrightarrow{r} = \gamma'(t)$, deci integrăm produsul scalar $\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r}$

(presupunem cunoscută integrala curbilinie şi faptul că nu depinde de parametrizarea drumului)
Lucrul mecanic al câmpului vectorial $\overrightarrow{v}$ de-a lungul drumului γ este

$$\int_{\gamma} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{a}^{b} \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)))dt =$$

$$= \int_{a}^{b} \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) \right] dt$$

Să observăm faptul că integrăm exact derivata unei funcţii compuse.

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{F} \mathbb{R} , \quad [a, b] \xrightarrow{F \circ \gamma} \mathbb{R} , \quad (F \circ \gamma)(t) = F(\gamma(t)) = F(x(t), y(t), z(t))$$

Matricile Jacobi corespunzătoare sunt

$$J_F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \quad , \quad J\gamma = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

iar matricea Jacobi a funcţiei compuse se obţine înmulţind matricile Jacobi ale funcţiilor F şi γ

$$J_{F\circ\gamma} = J_F \cdot\ J\gamma = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y'(t) + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot x'(t)$$

Să observăm că funcţia compusă $F \circ \gamma$ depinde de un singur parametru "t" şi ia valori reale,
deci matricea Jacobi corespunzătoare este de ordin 1, adică este de fapt un număr real

$$J_{F\circ\gamma} = \frac{d}{dt}\left[(F\circ\gamma)(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[F(x(t), y(t), z(t))\right]$$

şi obţinem derivata funcţiei compuse $F \circ \gamma$

$$\frac{d}{dt}\left[F(x(t), y(t), z(t))\right] = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t)$$

Prin urmare lucrul mecanic este

$$\int_\gamma \overrightarrow{v}\ \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \left[\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t)}_{\frac{d}{dt}[F(x(t),y(t),z(t))]}\right] dt =$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left[F(x(t), y(t), z(t))\right]\ dt = \left. F(x(t), y(t), z(t))\right|_{t=a}^{t=b} = F(\underbrace{x(b), y(b), z(b)}_{\gamma(b)}) - F(\underbrace{x(a), y(a), z(a)}_{\gamma(a)})$$

pe scurt

$$\int_\gamma \overrightarrow{v}\ \cdot d\overrightarrow{r} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

■

Prin urmare am demonstrat următorul rezultat, care este adevărat şi pentru drumuri de clasă C^1 pe porţiuni.

Teoremă.
Dacă $v = (P, Q, R) : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ este câmp de gradienţi şi $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este un potenţial scalar, atunci lucrul mecanic al câmpului de-a lungul unui drum $\gamma : [a, b] \to D$ (de clasă C^1 pe porţiuni) este

$$\int_\gamma \overrightarrow{v}\ \cdot d\overrightarrow{r} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Comentariu.
Cu alte cuvinte, pentru un câmp de gradienţi, lucrul mecanic nu depinde de drum,
ci numai de diferenţa de potenţial la capetele drumului.
Această formulă se poate numi "formula Newton-Leibniz" pentru câmpuri de gradienţi.şi
motivează interesul pentru câmpurile de gradienţi.
Toate drumurile pe care le considerăm în continuare sunt de clasă C^1 pe porţiuni.

Consecinţa 1.
Pentru un câmp de gradienţi, lucrul mecanic de-a lungul unui drum închis este nul.
Alfel scris

$$v = \operatorname{grad} F \quad \Rightarrow \quad \oint_\gamma \overrightarrow{v}\ \cdot d\overrightarrow{r} = 0$$

unde "$\oint$" desemnează integrala pe un drum închis.

<u>Demonstraţie</u>.

Un drum $\gamma : [a,b] \to D \subset \mathbb{R}^3$ este închis dacă punctul de "sosire" coincide cu punctul de "start"

$$\gamma(b) = (\gamma a)$$

Conform teoremei anterioare lucrul mecanic este

$$\int_\gamma \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

■

Consecinţa 2.
Dacă există un drum închis pentru care lucrul mecanic nu este nul, atunci v nu este câmp de gradienţi.
Alfel scris

$$\exists \gamma \text{ drum închis cu } \oint_\gamma \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad v \text{ nu este câmp de gradienţi}$$

Am obţinut astfel un criteriu practic de a demonstra că un câmp vectorial nu este câmp de gradienţi.

Exemplu.
Câmpul vectorial $v = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$

$$v(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

nu este un câmp de gradienţi, deoarece lucrul mecanic de-a lungul unui cerc $x^2 + y^2 = R^2$ nu este nul.
Acest exemplu va fi reluat şi demonstrat ulterior.
Teorema împreună cu consecinţele sale permit o caracterizare a câmpurilor de gradienţi folosind calculul lucrului mecanic.

Definiţie.
O mulţime $D \subset \mathbb{R}^3$ (sau $D \subset \mathbb{R}^2$) se numeşte **conexă**, dacă pentru orice două puncte A, B din mulţimea D există un drum $\gamma : [a,b] \to D$ aşa încât $A = \gamma(a)$ şi $B = \gamma(a)$.

Cu alte cuvinte, orice două puncte din mulţimea D se pot uni printr-un drum conţinut în D.
Acest mod de a defini "conexiunea" folosind drumuri, se mai numeşte şi "**conex prin arce**"
(un drum este numit "arc" sau "arc de curbă")

Teoremă (caracterizarea câmpurilor de gradienţi folosind lucurul mecanic)
Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu conex (mulţime deschisă şi conexă) şi $v = (P, Q, R) : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial.
Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:
i) v este câmp de gradienţi pe domeniul D
ii) pentru orice drum închis $\gamma : [a,b] \to D$ lucrul mecanic este nul

$$\oint_\gamma \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$$

iii) pentru orice două drumuri $\gamma_1 : [a,b] \to D$ şi $\gamma_2 : [c,d] \to D$ cu aceleaşi capete

$$\gamma_1(a) = \gamma_2(c) \text{ şi } \gamma_1(b) = \gamma_2(d)$$

lucrul mecanic este acelaşi

$$\int_{\gamma_1} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\gamma_2} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r}$$

Demonstraţie.
i) $\Rightarrow$ ii) reprezintă consecinţa 1 şi a fost demonstrată.
ii) $\Rightarrow$ iii) considerăm drumul închis Γ format din reuniunea drumurilor γ_1 şi opusul drumului γ_2 , $\Gamma = \gamma_1 \cup \overline{\gamma_2}$

lucrul mecanic de-a lungul drumului închis Γ este nul (conform cu ii)

$$0 = \oint_{\Gamma} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_{\gamma_1 \cup \overline{\gamma_2}} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\gamma_1} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{\overline{\gamma_2}} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\gamma_1} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} - \int_{\gamma_2} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r}$$

rezultă

$$\int_{\gamma_1} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} - \int_{\gamma_2} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\gamma_1} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\gamma_2} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r}$$

iii) $\Rightarrow$ i) Indicăm un mod de a construi un potenţial scalar.
Fie $(x_0, y_0, z_0) \in D$ un punct arbitrar din mulţimea D.
Definim funcţia $F : D \to \mathbb{R}^3$ prin lucrul mecanic efectuat "între" punctul (x_0, y_0, z_0) şi punctul (x, y, z)

$$F(x, y, z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r}$$

lucrul mecanic se calculează de-a lungul oricărui drum ce uneşte punctele (x_0, y_0, z_0) şi (x, y, z)

Funcţia este corect definită deoarece din (iii) rezultă că lucrul mecanic este acelaşi pentru orice drum care uneşte două puncte. Prin urmare putem alege un drum "convenabil" şi anume o reuniune de segmente paralele cu axele de coodonate Ox , Oy , Oz.

Se demonstrează că funcţia $F(x, y, z)$ are derivate parţiale şi că

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = R$$

Deci funcţia F astfel definită este potenţial scalar pentru câmpul vectorial v , care astfel devine câmp de gradienţi.

■

Se pune evident problema :

în ce condiţii un câmp vectorial este câmp de gradienţi ?

I. Pentru <u>câmpuri ce acţionează de-a lungul unei direcţii</u>, cu alte cuvinte funcţii de o singură variabilă

$$v = v(x)$$

problema devine : există o funcţie $F : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (de clasă C^1) astfel încât

$$\frac{dF}{dx} = F(x)' = v(x)$$

(practic o ecuaţie diferenţială)

Răspunsul este afirmativ pentru câmpuri $v = v(x)$ (funcţii) continue.

(orice funcţie continuă are "primitive" sau "antiderivate", care se pot numi "potenţial scalar").

Regăsim în acest caz simplu "formula" de calcul a lucrului mecanic demonstrată în teorema anterioară

$$\int_a^b v(x)dx = F(b) - F(a)$$

în forma teoremei "Newton-Leibniz".

II. În cazul unui <u>câmp vectorial în spaţiul tri-dimensional</u> $v = v(x, y, z) = (P, Q, R)$
răspunsul nu este totdeauna afirmativ.

Există câmpuri vectoriale de clasă C^1 care nu sunt câmpuri de gradienţi.

Observaţie.

Dacă $v = (P, Q, R) : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ este câmp de gradienţi de clasă C^1 , atunci rotorul câmpului este nul :

$$\operatorname{rot} v = 0$$

sau scris în detaliu

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

(am notat cu "0" atât scalarul zero $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$, cât şi vectorul nul $\operatorname{rot} v = 0 = \overrightarrow{0} = (0,0,0)$ care are trei componente nule)

Demonstraţie.
Câmp de gradienţi înseamnă că există o funcţie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (de clasă C^1) astfel încât

$$v = (P, Q, R) = \operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

Prin urmare

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}$$

Pe de altă parte, funcţia F este de clasă C^2 deoarece
derivatele parţiale $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ (componentele câmpului) sunt de clasă C^1,
deci conform teoremei lui Schwarz

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}$$

(cu alte cuvinte nu contează ordinea de derivare)
Rezultă

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = 0$$

Absolut la fel se arată că

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 0$$

Deci

$$\operatorname{rot} v = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0$$

■

Consecinţă.
Dacă un câmp vectorial $v = (P, Q, R)$ verifică $\operatorname{rot} v \neq 0$ (nu are rotorul nul), atunci câmpul v nu este un câmp de gradienţi.
Cu alte cuvinte nu există o funcţie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (de clasă C^1) astfel încât

$$v = (P, Q, R) = \operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

sau componentele câmpului nu sunt derivatele parţiale ale unei anumite funcţii.

Exemplu.
Câmpul vectorial

$$v = v(x, y, z) = (\underbrace{2x}_{P}, \underbrace{2y}_{Q}, \underbrace{2z + y}_{R})$$

nu este un câmp de gradienţi, deoarece în acest caz

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

sau calculând rotorul

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = (0,0,1) \neq (0,0,0)$$

Definiţie.
Un câmp vectorial $v = (P, Q, R) : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care verifică $\operatorname{rot} v = 0$, se numeşte **câmp irotaţional** sau **câmp conservativ**.

Observaţia anterioară arată că orice câmp de gradienţi este irotaţional sau conservativ.

Această observaţie constitue un criteriu practic pentru a "elimina" câmpurile care în mod evident nu sunt câmpuri de gradienţi (deoarece se presupune că este relativ uşor calculul unor derivate parţiale).

Prin urmare, pentru orice funcţie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (de clasă C^2) câmpul de gradienţi corespunzător

$$v = (P, Q, R) = \operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

este un câmp conservativ.
Cum altfel putem găsi exemple de câmpuri conservative ?
Iată un caz particular interesant.

Câmpuri vectoriale ce acţionează într-un plan, de exemplu planul "orizontal" xOy sunt de forma

$$v = v(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

cu $v = (P, Q) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
Un asemenea câmp este conservativ dacă

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Această condiţie reprezintă exact condiţia anterioară $\operatorname{rot} v = 0$. Iată de ce.
Aşa cum am observat anterior, putem imagina un astfel de câmp ca acţionând în spaţiul tri-dimensional

$$v = v(x, y, z) = (P, Q, 0) = (P(x, y), Q(x, y), 0) = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k}$$

deci componenta după versorul $\overrightarrow{k}$ este nulă ($R = 0$) ,
iar componentele P şi Q depind numai de x şi y (nu depind de z).
Prin urmare aceste funcţii au derivatele parţiale nule în raport cu z (fiind constante în raport cu z)

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

Rotorul în acest caz este

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\underbrace{\frac{\partial 0}{\partial y}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial z}}_{0}, \underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial 0}{\partial x}}_{0}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Deci condiţia $\operatorname{rot} v = 0$ devine în acest caz $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, care este echivalentă cu $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Ei bine unde se regăsesc perechi de funcţii (P, Q) care să verifice o condiţie de tip

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Răspuns : în analiza complexă.
Pentru o funcţie olomorfă $f = u + iv$, partea reală $u = u(x, y)$ şi partea imaginară $v = v(x, y)$ verifică relaţiile Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Notăm câmpul vectorial cu " $\overrightarrow{v}$ " pentru a-l deosebi de funcţia "$v = \operatorname{Im} f$"
(pentru a păstra notatia "tradiţională" din analiza complexă)
Prin urmare, câmpul vectorial format

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(x, y) = \left(\underbrace{v(x, y)}_{P}, \underbrace{u(x, y)}_{Q} \right)$$

este un câmp conservativ.

Exemplu.
Câmpul vectorial

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$$

este un câmp vectorial conservativ, care se obţine prin procedeul anterior din funcţia complexă $f(z) = \frac{1}{z}$.

Demonstraţie.
Considerăm funcţia complexă

$$f(z) = \frac{1}{z} : \mathbb{C} \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$$

Partea reală şi partea imaginară sunt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{v(x,y)}$$

$$\operatorname{Re} f = u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad \operatorname{Im} f = v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Prin urmare câmpul vectorial format

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(x, y) = \left(\underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{P}, \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{Q} \right) : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$$

este un câmp conservativ.
Acest fapt se poate verifica şi direct

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} =$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

Deci

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

■

Se pune în mod natural întrebarea dacă orice câmp conservativ (irotaţional) este un câmp de gradienţi.
Să formulăm problema.
Pentru un câmp vectorial $v = (P, Q, R) : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care verifică $\operatorname{rot} v = 0$, (câmp irotaţional sau conservativ)

există o funcţie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (de clasă C^2) astfel încât

$$v = (P, Q, R) = \operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

Reamintim că cea mai simplă ecuaţie diferenţială este

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

(sau în forma $\displaystyle\int f(x)dx = ?$, adică determinarea "primitivelor" - antiderivatelor pentru o functie de o variabilă)
Pentru funcţii de trei variabile această ecuaţie diferenţială se formulează astfel :
- să se determine funcţiile $F = F(x, y, z)$ care verifică

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y, z) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y, z) \\ \frac{\partial F}{\partial z} = R(x, y, z) \end{cases}$$

Din analiza facută până acum rezultă că
- dacă o astfel de ecuaţie diferenţială are soluţii, atunci
    câmpul vectorial format cu funcţiile P, Q, R este un câmp de gradienţi.
- dacă acest câmp nu este conservativ, atunci ecuaţia diferenţială nu are soluţii.
- ce se întâmplă dacă acest câmp este conservativ ? ecuaţia are sau nu are soluţii ?
Din punct de vedere "strict logic" răspunsul la această problemă este negativ.

Exemplu.
Câmpul vectorial $v = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$

$$v(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

este un câmp vectorial conservativ, dar nu este un câmp de gradienţi.
Cu alte cuvinte nu există o funcţie $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

<u>Demonstraţie</u>.
Calculăm lucrul mecanic de-a lungul cercului $x^2 + y^2 = r^2$, parcurs o dată în sens trigonometric.
Folosim parametrizarea cu coordonate polare

$$x(t) = r \cos t \quad , \quad y(t) = r \sin t \quad , \quad t \in [0, 2\pi) \quad , \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$$x'(t) = -r \sin t \quad , \quad y'(t) = r \cot s \quad , \quad t \in [0, 2\pi)$$

Lucrul mecanic este

$$\oint \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint (P, Q) \cdot (x'(t), y'(t))dt = \int_0^{2\pi} P(r \cos, r \sin t)(-r \sin t) + Q(r \cos, r \sin t)(r \cos t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-r \sin t}{r^2}(-r \sin t) + \frac{r \cos t}{r^2}(r \cos t) \right] dt = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$$

Pe scurt

$$\oint \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = 2\pi \neq 0$$

Deci conform unei consecinţe anteriorare $\overrightarrow{v}$ nu este câmp de gradienţi.

■

Am precizat în definiţia unui câmp de gradienţi importanţa domeniului $D \subset \mathbb{R}^3$ pe care câmpul admite un potenţial scalar.

Faptul că domeniul este conex a fost esenţial în demonstrarea teoremei de caracterizare a câmpurilor de gradienţi.

Forma domeniului este esenţială pentru a răspunde la problema "în ce condiţii un câmp conservativ este câmp de gradienţi".

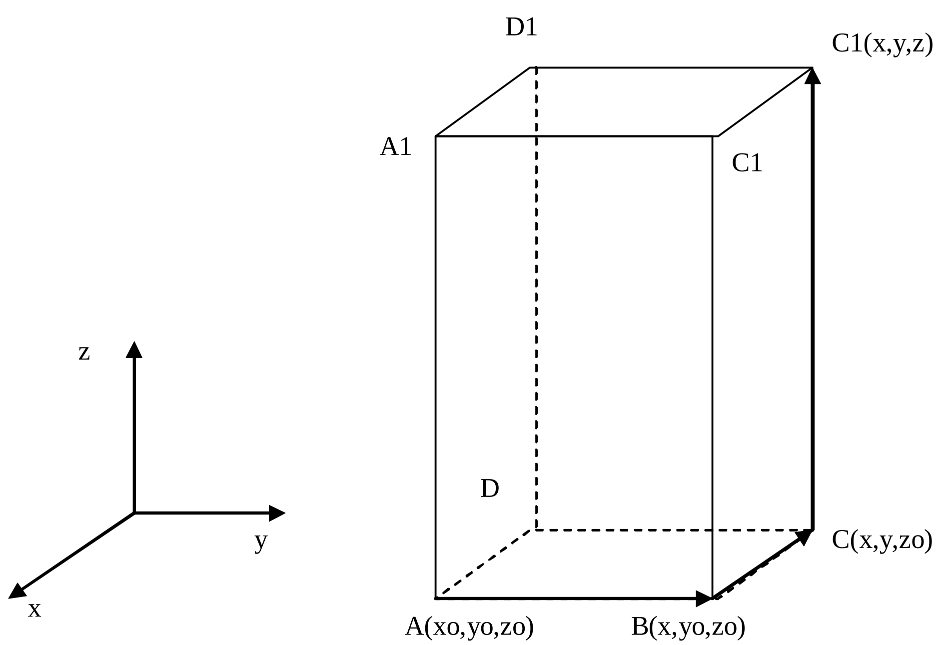
Definiţie.
Un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ (sau $D \subset \mathbb{R}^2$) se numeşte **stelat** dacă există un punct (x_0, y_0, z_0) cu proprietatea pentru orice punct (x, y, z) segmentul ce uneşte punctele (x_0, y_0, z_0) şi (x, y, z) este conţinut în domeniul D

Exemple.
Orice mulţime convexă este stelată. În particular $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$, o sferă, un disc, un dreptunghi.

Teoremă.
Dacă un câmp vectorial $v = (P, Q, R) : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ este conservativ şi domeniul D este stelat, atunci v este câmp de gradienţi.

Omitem demonstraţia.În schimb analiză un caz particular relevant, în care putem determina un potenţial scalar.

Teoremă.(Determinarea unui potenţial scalar)
Considerăm un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ stelat, pentru care este posibil să unnim punctul (x_0, y_0, z_0) cu orice alt punct $(x, y, z) \in D$ cu drumuri care parcurg muchiile unui paralelipiped, muchii care sunt paralele cu axele de coordonate Ox, Oy, Oz
Pentru astfel de domenii putem scrie o formulă simplă pentru un potenţial scalar pentru câmpul vectorial v
De exemplu drumul "$ABCC_1$" format din reuniunea de segmente (muchii paralelipiped)



$$\Gamma = AB \cup BC \cup CC_1$$

funcţia $F : D \to \mathbb{R}^3$ definită prin lucrul mecanic efectuat "între" punctul (x_0, y_0, z_0) şi punctul (x, y, z)

$$F(x,y,z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt$$

este un potenţial scalar pentru câmpul vectorial v.

Demonstraţie.

Conform teoremei de caracterizare a câmpurilor de gradienţi funcţia F astfel definită este potenţial scalar pentru câmpul vectorial v.

Nu rămâne decât să arătăm că folosind drumul $\Gamma = AB \cup BC \cup CC_1$ obţinem formula enunţată.

Considerăm parametrizarea "naturală" a segmentelor

$$AB \begin{cases} x(t) = t \in [x_0, x] \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}, \quad BC \begin{cases} x(t) = x \\ y(t) = t \in [y_0, y] \\ z(t) = z_0 \end{cases}, \quad CC_1 \begin{cases} x(t) = x \\ y(t) = y \\ z(t) = t \in [z_0, z] \end{cases}$$

prin urmare derivatele sunt

$$AB \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 0 \\ z'(t) = 0 \end{cases}, \quad BC \begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 1 \\ z'(t) = 0 \end{cases}, \quad CC_1 \begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \\ z'(t) = 1 \end{cases}$$

Atunci lucrul mecanic este

$$F(x,y,z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{AB} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{BC} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{CC_1} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} =$$

$$\int_{x_0}^{x} (P(x(t), y(t), z(t)), Q, R) \cdot \underbrace{(x', y', z')}_{(1,0,0)} dt + \int_{x_0}^{x} (P, Q, R) \cdot \underbrace{(x', y', z')}_{(0,1,0)} dt + \int_{x_0}^{x} (P, Q, R) \cdot \underbrace{(x', y', z')}_{(0,0,1)} dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt$$

■

Să observăm că obţinem formule similare considerând drumuri de-a lungul altor muchii ale paralelipipedului (sunt 6 posibilităţi în total)

- $\Gamma = AB \cup BC \cup CC_1$, $\Gamma = AB \cup BB_1 \cup B_1C_1$, $\Gamma = AD \cup DC \cup CC_1$,
  $\Gamma = AD \cup DD_1 \cup D_1C_1$, $\Gamma = AA_1 \cup A_1B_1 \cup B_1C_1$, $\Gamma = AA_1 \cup A_1D_1 \cup D_1C_1$,

de exemplu pentru drumul $\Gamma = AD \cup DD_1 \cup D_1C_1$ obţinem

$$F(x,y,z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y, t)dt + \int_{x_0}^{x} P(t, y, z)dt$$

Exemplu.

Să se determine un potenţial scalar pentru câmpul vectorial $v = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\ ,\ x \geq 0\ \} \to \mathbb{R}^2$

$$v(x,y) = \left(\underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{P(x,y)}, \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{Q(x,y)} \right)$$

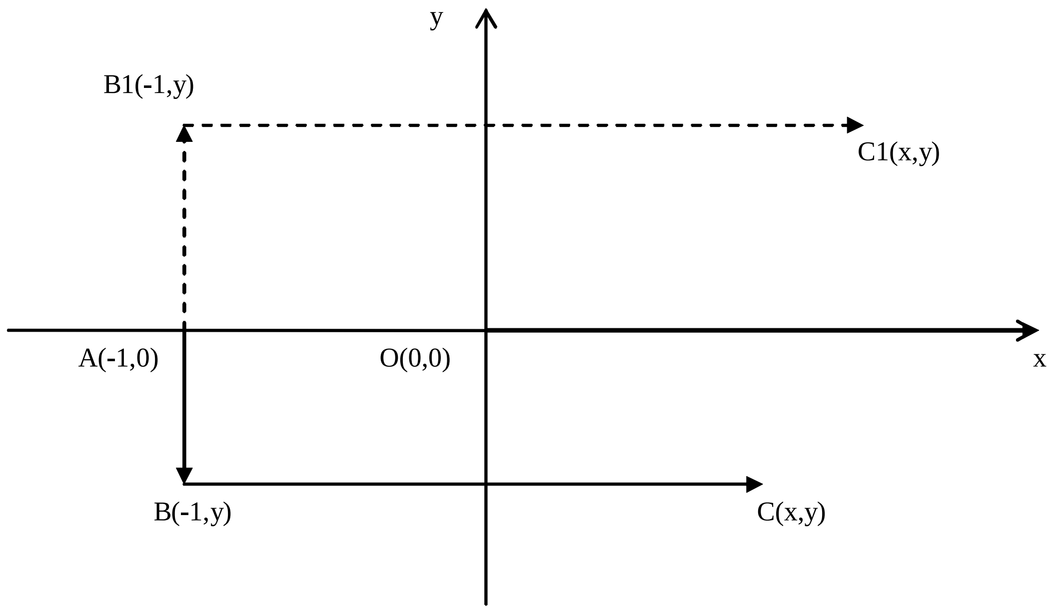
Soluţie.

Am demonstrat deja că acest câmp vectorial nu este un câmp de gradienţi pe domeniul $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Acum considerăm un domeniu mai restrâns $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\ ,\ x \geq 0\ \}$,

(întreg planul din care se "scade" semidreapta Ox)

Acest domeniu este stelat, deci câmpul vectorial astfel restricţionat este un câmp de gradienţi.



Observăm că punctul $A(-1,0)$ se poate uni cu orice alt punct din domeniu prin drum format din reuniunea de segmente

$$\Gamma = \text{segment}\,[(-1,0)-(-1,y)] \cup \text{segment}\,[(-1,y)-(x,y)]$$

Considerăm parametrizările "naturale" ale segmentelor AB şi BC (sau AB_1 şi B_1C_1)

$$\text{segment}\,[(-1,0)-(-1,y)]\left\{\begin{array}{c} x(t)=-1 \\ y(t)=t\in[0,y] \end{array}\right. \quad , \quad \text{segment}\,[(-1,y)-(x,y)]\left\{\begin{array}{c} x(t)=t\in[-1,x] \\ y(t)=y \end{array}\right.$$

derivatele sunt

$$\text{segment}\,[(-1,0)-(-1,y)]\left\{\begin{array}{c} x(t)=0 \\ y(t)=1 \end{array}\right. \quad , \quad \text{segment}\,[(-1,y)-(x,y)]\left\{\begin{array}{c} x(t)=1 \\ y(t)=0 \end{array}\right.$$

Obţinem deci potenţialul scalar

$$F(x,y,z)=\int\limits_{(-1,0)}^{(x,y)} \overrightarrow{v}\cdot d\overrightarrow{r} = \int\limits_{AB} \overrightarrow{v}\cdot d\overrightarrow{r} + \int\limits_{BC} \overrightarrow{v}\cdot d\overrightarrow{r} =$$

$$\int\limits_0^y (P(x(t),y(t),z(t)),Q)\cdot \underbrace{(x',y')}_{(0,1)}dt + \int\limits_{-1}^x (P,Q)\cdot \underbrace{(x',y')}_{(1,0)}dt =$$

$$=\int\limits_0^y Q(-1,t)dt + \int\limits_{-1}^x P(t,y)dt = \int\limits_0^y \frac{-1}{(-1)^2+t^2}dt + \int\limits_{-1}^x \frac{-y}{t^2+y^2}dt =$$

i) pentru $y=0$ obţinem

$$=-\int\limits_0^0 \frac{1}{1+t^2}dt + \int\limits_{-1}^x \frac{-0}{t^2+0^2}dt = 0$$

ii) pentru $y\neq 0$ obţinem

$$=-\int\limits_0^y \frac{1}{1+t^2}dt + \int\limits_{-1}^x \frac{-1}{y}\frac{1}{\left(\frac{t}{y}\right)^2+1}dt =$$

$$= -\operatorname{arctg} t\Big|_{t=0}^{t=y} + \operatorname{arctg}\frac{t}{y}\Big|_{t=-1}^{t=x} = -\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \operatorname{arctg}\frac{1}{y} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \left[\underbrace{\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg}\frac{1}{y}}_{\pm\frac{\pi}{2}}\right] = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \frac{\pi}{2} & \text{pentru} \quad y > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{\pi}{2} & \text{pentru} \quad y < 0 \end{cases}$$

În final am obţinut potenţialul scalar $F = F(x,y) : \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0)\ ,\ x \geq 0\ \} \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \frac{\pi}{2} & \text{pentru} \quad y > 0 \\ 0 & \text{pentru} \quad y = 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{\pi}{2} & \text{pentru} \quad y < 0 \end{cases}$$

■

7.2 Potenţial Vector

Definiţie.
Un câmp vectorial $v = (P,Q,R) : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clasă C^1 se numeşte **solenoidal** dacă

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{sau} \quad \text{echivalent} \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

Câmpul v este un **câmp de rotori** dacă există $w : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ câmp vectorial de clasă C^2 astfel încât

$$v = \operatorname{rot} w$$

câmpul vectorial w se numeşte **potenţial vector** pentru câmpul v.

Observaţie.
Orice câmp de rotori este câmp solenoidal.

Demonstraţie.
Considerăm $w = (P,Q,R)$. Un simplu calcul arată că $\operatorname{div}(\operatorname{rot} w) = 0$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} w) = \operatorname{div}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{div}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0$$

deoarece componentele P, Q, R sunt de clasă C^2 şi deci
conform teoremei lui Schwarz nu contează ordinea de derivare

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}$$

■

Exemplu.
Câmpul gravitaţional este câmp solenoidal.

Demonstraţie.
Câmpul gravitaţional este

$$v = v(x,y,z) = -K\frac{1}{r^3}\vec{r} \quad , \quad \text{pentru } (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

sau în detaliu

$$v = v(x,y,z) = -K\frac{1}{r^3}\overrightarrow{r} = \left(\underbrace{\frac{-Kx}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}}_{P}, \underbrace{\frac{-Ky}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}}_{Q}, \underbrace{\frac{-Kz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}}_{R} \right)$$

Calculăm derivatele parţiale

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-Kx}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \right) = -K\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 - x\frac{3}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\cdot 2x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^6} =$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -K\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right) - 3x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5} = -K\frac{-2x^2+y^2+z^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5}$$

Prin analogie obţinem celelalte două derivate parţiale

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -K\frac{x^2-2y^2+z^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5} \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -K\frac{x^2+y^2-2z^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5}$$

Adunând obţinem

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} =$$

$$= -K\frac{-2x^2+y^2+z^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5} - K\frac{x^2-2y^2+z^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5} - K\frac{x^2+y^2-2z^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5} = 0$$

■

Teoremă (de caracterizare a câmpurilor solenoidale)
Fie un câmp vectorial $v = (P,Q,R) : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clasă C^1. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
i) câmpul v este solenoidal ($\operatorname{div} v = 0$)
ii) câmpul v este "local" un câmp de rotori, , mai precis
pentru orice punct $a \in D$ există o vecinătate V a punctului a şi un câmp vectorial $w : V \to \mathbb{R}^3$ de clasă C^2 cu

$$v = \operatorname{rot} w$$

iii) fluxul câmpului v printr-o suprafaţă închisă Σ
(frontiera unui domeniu "compact elementar" $\Omega \subset \mathbb{R}^3$) este nul

$$\int_{\Sigma} (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}_{ext})\, d\sigma = 0$$

unde $\overrightarrow{n}_{ext}$ este direcţia normală la suprafaţa Σ .

<u>Demonstraţie</u>.
i) $\Rightarrow$ iii) se foloseşte formula integrală Gauss-Ostrogradski (formula "flux-divergenţă")

$$\int_{\Sigma} (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}_{ext})\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div} v}_{0} dxdydz = 0$$

nu demonstrăm iii) $\Rightarrow$ i)
ii) $\Rightarrow$ i) este exact observaţia demonstrată anterior

i) $\Rightarrow$ ii) procedăm astfel : căutăm un câmp vectorial de forma $w=(w_1,w_2,0)$ astfel încât $\operatorname{rot} w = v$

$$\operatorname{rot} w = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_1 & w_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial z}, \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}, \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y}\right) = (P,Q,R) = v \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(-\frac{\partial w_2}{\partial z}, \frac{\partial w_1}{\partial z}, \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y}\right) = (P,Q,R)$$

obţinem sistemul

$$\begin{cases} -\frac{\partial w_2}{\partial z} = P \\ \frac{\partial w_1}{\partial z} = Q \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = R \end{cases}$$

Fie $a=(x_0,y_0,z_0)$ coordonatele punctului $a\in D$. Alegem ca vecinătate V o sferă cu centrul în punctul a

$$V = \{(x,y,z) \quad , \quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \le r^2\}$$

Integrăm primele două ecuaţii şi obţinem

$$w_2(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} P(x,y,t)dt + B(x,y) \quad , \quad w_1(x,y,z) = \int_{z_0}^{z} Q(x,y,t)dt + A(x,y)$$

apoi înlocuim în a treia ecuaţie

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\int_{z_0}^{z} P(x,y,t)dt + B(x,y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{z_0}^{z} Q(x,y,t)dt + A(x,y)\right) = R \quad \Leftrightarrow$$

$$-\int_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,t)dt + \frac{\partial B}{\partial x}(x,y) - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,t)dt - \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = R(x,y,z) \quad \Leftrightarrow$$

$$-\int_{z_0}^{z} \left[\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,t) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,t)}_{-\frac{\partial R}{\partial z}}\right] dt + \frac{\partial B}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = R(x,y,z)$$

din ipoteză $\operatorname{div} v = 0$, deci

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial R}{\partial z}$$

înlocuind obţinem

$$-\int_{z_0}^{z} \left[-\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,t)\right] dt + \frac{\partial B}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = R(x,y,z) \quad \Leftrightarrow$$

$$R(x,y,t)\Big|_{t=z_0}^{t=z} + \frac{\partial B}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = R(x,y,z)$$

$$R(x,y,z) - R(x,y,z_0) + \frac{\partial B}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = R(x,y,z)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = R(x,y,z_0)$$

prin urmare pentru câmpul vectorial de forma

$$w = \left(\int_{z_0}^{z} Q(x,y,t)dt + A(x,y), -\int_{z_0}^{z} P(x,y,t)dt + B(x,y), 0\right)$$

avem $\operatorname{rot} w = 0$, unde $A = A(x,y)$ şi $B = B(x,y)$ sunt funcţii arbitrare care verifică relaţia

$$\frac{\partial B}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = R(x,y,z_0)$$

■

Consecintă.
Din demonstraţie reţinem tehnica prin care obţinem un potenţial vector pentru un câmp solenoidal.

Observaţie.
Un potenţial vectorial este unic pâna la un câmp de gradienţi.

Demonstraţie.
Dacă $\operatorname{rot} w = v$ şi $\operatorname{rot} u = v$ atunci $\operatorname{rot} u - \operatorname{rot} w = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot}(w-u) = 0$, reamintim faptul că această relaţie are loc într-o
vecinătate de tip sferă, deci un câmp irotaţional este câmp de gradienţi, adică

$$\operatorname{rot}(u-w) = 0 \quad \Rightarrow \quad u - w = \operatorname{grad} F \quad \Rightarrow \quad u = w + \operatorname{grad} F$$

Deci dacă $\operatorname{rot} w = v$ orice alt câmp vectorial cu $\operatorname{rot} u = v$ este de forma $u = w + \operatorname{grad} F$
■

8.1 Anexă - Integrale Improprii - Funcţiile B şi Γ

Începem prin a argumenta din ce motive considerăm integrale improprii.
Iată mai multe exemple concrete.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad , \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \quad , \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Se pune în mod natural întrebarea, ce algoritm de calcul se poate asocia unei "integrale" de tip " $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ " ?

Putem calcula integrala pe un interval mărginit $[1,b]$

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=b} = \left(-\frac{1}{b}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{b}$$

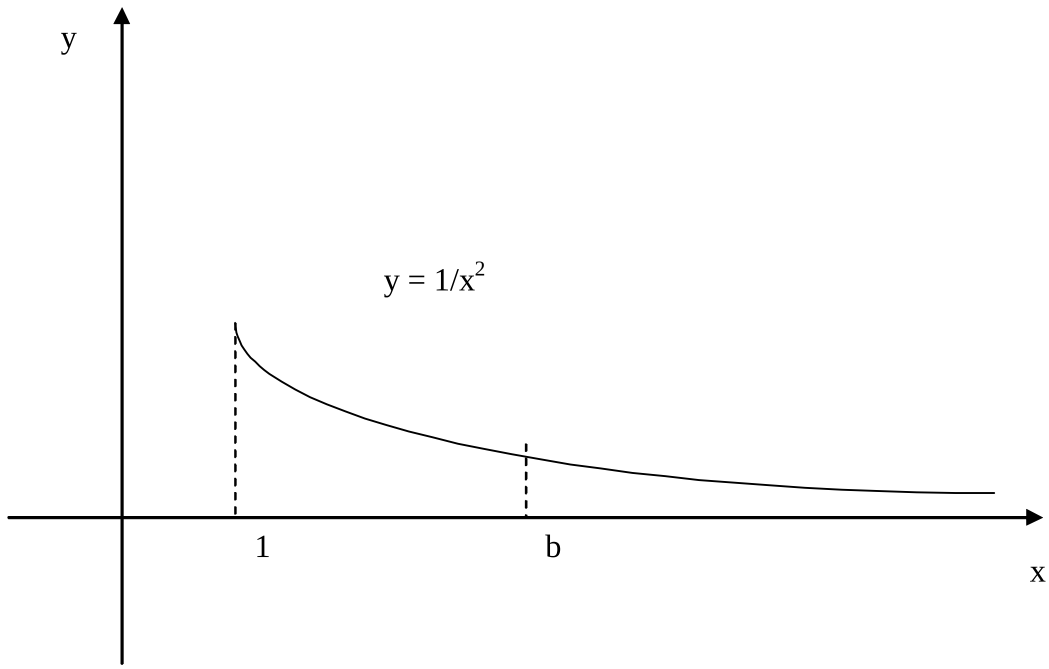
apoi calculăm limita $b \to +\infty$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1$$

să notăm

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \overset{not}{=} \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = 1$$

Se pune în mod natural întrebarea, ce semnificaţie poate avea o "integrală" de tip " $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ " ?



Integrala pe un interval mărginit $[1,b]$ reprezintă aria domeniului mărginit de "sub" graficul funcţiei $y=1/x^2$.

Asta numai dacă funcţia are numai valori pozitive, adică graficul funcţiei este "deasupra" axei Ox

Integrala "improprie" pe intervalul nemărginit $[1,+\infty)$ reprezintă "aria" domeniului nemărginit de "sub" graficul funcţiei $y=1/x^2$.

Putem repeta acest procedeu şi pentru alte integrale.

- Calculăm integrala pe un interval mărginit $[1,b]$

$$\int_1^b \frac{1}{x}dx = (\ln x)\big|_{x=1}^{x=b} = (\ln b)-(\ln 1)=\ln b$$

apoi calculăm limita $b\to+\infty$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}(\ln b)=+\infty$$

şi notăm

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx \overset{not}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = +\infty$$

- Calculăm integrala pe un interval mărginit $[1,b]$

$$\int_0^b e^{-x}dx = \left(-e^{-x}\right)\big|_{x=0}^{x=b} = \left(-e^{-b}\right)-\left(-e^{-0}\right)=1-e^{-b}=1-\frac{1}{e^b}$$

apoi calculăm limita $b\to+\infty$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^b}\right)=1-\frac{1}{e^{+\infty}}=1$$

şi notăm

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx \overset{not}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = 1$$

- Calculăm integrala pe un interval mărginit $[1, b]$

$$\int_1^b \frac{1}{1+x^2}dx = \left.(\operatorname{arctg} x)\right|_{x=1}^{x=b} = \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} b - \frac{\pi}{4}$$

apoi calculăm limita $b \to +\infty$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

şi notăm

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \overset{not}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

Să studiem ce sens pot avea astfel de integrale.
Considerăm o funcţie integrabilă Riemann $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, de fapt integrabilă pe orice subinterval $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$.
Prin urmare are sens să calculăm integrale de tipul

$$\int_a^b f(x)dx \overset{not}{=} H(a, b)$$

Notaţia nu este relevantă, doar arată că integrala depinde de a şi b ca de doi parametri.
Ce se întâmplă dacă $a \searrow \alpha$ şi $b \nearrow \beta$, adică

$$\lim_{a\to\alpha, b\to\beta}\int_a^b f(x)dx \overset{not}{=} \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

În mod natural apare întrebarea, de ce să calculăm limite şi nu calculăm direct integrala

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Din motive foarte simple :
1) f poate să nu fie integrabilă Riemann pe intervalul (α, β) sau
2) $\alpha = -\infty$ sau $\beta = +\infty$
(situaţii total neobişnuite în care algoritmul de calcul pentru integrala Riemann nu funcţionează !) sau
3) f este integrabilă Riemann pe intervalul (α, β) , dar integrala e greu de calculat

Vom considera doar un caz foarte simplu : f este continuă pe intervalul (α, β)
Prin urmare f are antiderivate (primitive), de exemplu $F : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, funcţie derivabilă şi $F'(x) = f(x)$
Deci

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

trecând la limită $a \to \alpha, b \to \beta$ obţinem

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \overset{not}{=} \lim_{a\to\alpha, b\to\beta}\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to\alpha, b\to\beta}[F(b) - F(a)] = \lim_{b\nearrow\beta} F(b) - \lim_{a\searrow\alpha} F(a)$$

Este clar că o asemenea integrală are sens doar dacă ambele limite există şi sunt finite.
Iată o definiţie mai precisă.

Definiţie. Fie $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, o funcţie continuă pe (α,β) şi $F'=f$ o antiderivată oarecare.

Numim integrală "**improprie**"

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{a\to\alpha, b\to\beta}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{b\nearrow\beta} F(b) - \lim_{a\searrow\alpha} F(a)$$

Integrala improprie se numeşte

i) **convergentă** dacă ambele limite există şi sunt finite

ii) **divergentă** în caz contrar

Vom folosi o notaţie simplificată

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(x)|_{\alpha}^{\beta} = \lim_{x\nearrow\beta} F(x) - \lim_{x\searrow\alpha} F(x)$$

Comentariu. Până acum aceasta pare să fie o simplă problemă de calcul pentru limite şi nu pare să aibe legătură cu a "integra".

Excelentă observaţie !

Tot ce avem de făcut este să determinăm o antiderivată şi apoi să calculăm limitele.

Iată alte câteva exemple.

Exemple.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty, a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty, a\to-\infty} (\operatorname{arctg} x)|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b) - \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$\int\limits_{-\infty}^{1} e^x dx \quad , \quad \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \quad , \quad \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad , \quad \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^2}dx$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad , \quad \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \quad , \quad \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

Toate se pot rezolva în mod "direct", determinând o antiderivată şi calculând limitele la capetele intervalului corespunzător.

Unele din aceste exemple sunt rezolvate în cele ce urmează.

Problema se complică semnificativ dacă nu putem determina o antiderivată !

Atunci cum e posibil să determinăm dacă o integrală improprie este convergentă sau divergentă ?

Pare să fie complicat să considerăm două limite deodată, şi atunci descompunem integrala improprie în două părţi (integrale) (pentru orice $c\in(\alpha,\beta)$)

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\beta} f(x)dx = \lim_{a\to\alpha}\int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\beta}\int\limits_{c}^{b} f(x)$$

Cele două integrale improprii

$$\int\limits_{\alpha}^{c} f(x)dx \quad , \quad \int\limits_{c}^{\beta} f(x)dx$$

au doar un singur "capăt" din cauza căruia se pot numi "improprii".

Astfel de integrale improprii sunt mai uşor de manipulat.

Observaţie. Din descompunerea integralei

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\beta} f(x)dx$$

rezultă că $\int_{\alpha}^{\beta} f$ este convergentă dacă şi numai dacă ambele integrale $\int_{\alpha}^{c} f$ şi $\int_{c}^{\beta} f$ sunt convergente

Pe scurt, putem scrie

$$\text{Conv} + \text{Conv} = \text{Conv}$$

$$\text{Conv} + \text{Div} = \text{Div}$$

$$\text{Div} + \text{Div} = \text{Div}$$

Exemplu.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}dx}_{DIV} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx}_{CONV} = DIV$$

Studiem în detaliu câteva cazuri importante.
Iată două tipuri de integrale improprii importante, deoarece sunt folosite frecvent ca "termen de comparaţie"

Observaţie 1. Integrala improprie, (pentru orice $A > 0$)

$$\int_{A}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \text{convergentă pentru} \quad \alpha > 1 \\ \text{divergentă pentru} \quad \alpha \le 1 \end{cases}$$

Soluţie. Cazul $\alpha = 1$

$$\int_{A}^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \ln x|_{A}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} (\ln x) - \ln A = +\infty$$

Deci în acest caz integrala improprie este divergentă.

Cazul $\alpha < 1$, avem $1 - \alpha > 0$ şi deci

$$\int_{A}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \int_{A}^{+\infty} x^{-\alpha}dx = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{A}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty$$

deoarece $1 - \alpha > 0 \quad \Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = +\infty$$

şi deci integrala improprie este divergentă.

Cazul $\alpha > 1$, avem $\alpha - 1 > 0$ şi deci

$$\int_{A}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \int_{A}^{+\infty} x^{-\alpha}dx = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{A}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-1}{x^{\alpha-1}} + A^{1-\alpha}\right) \frac{1}{\alpha-1} = \frac{A^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

deoarece $\alpha - 1 > 0 \;\Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^{\alpha-1}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

şi deci integrala este convergentă.

■

Iată câteva cazuri particulare pentru acest tip, frecvent întâlnite

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \ \ \text{div} \ \ , \ \ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \ \ \text{conv} \ \ , \ \ \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \ \ \text{div}$$

Observaţie 2. Integrala improprie, (pentru orice $A > 0$)

$$\int_0^A \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \text{divergentă pentru } \ \alpha \geq 1 \\ \text{convergentă pentru } \ \ \alpha < 1 \end{cases}$$

<u>Soluţie</u>. Cazul $\alpha = 1$

$$\int_0^A \frac{1}{x} dx = \ln x|_0^A = \ln A - \lim_{x \searrow 0} (\ln x) = \ln A - (-\infty) = +\infty$$

Deci în acest caz integrala improprie este divergentă.
Cazul $\alpha > 1$, avem $\alpha - 1 > 0$ şi deci

$$\int_0^A \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_0^A x^{-\alpha} dx = \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_0^A = \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \lim_{x \searrow 0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \lim_{x \searrow 0} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - A^{1-\alpha} \right) \frac{1}{\alpha - 1} = +\infty$$

deoarece $\alpha - 1 > 0 \quad \Rightarrow$

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{1-\alpha} = +\infty$$

şi deci integrala improprie este divergentă.
Cazul $\alpha < 1$, avem $1 - \alpha > 0$ şi deci

$$\int_0^A \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_0^A x^{-\alpha} dx = \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_0^A = \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \lim_{x \searrow 0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

deoarece $\alpha - 1 > 0 \ \Rightarrow$

$$\lim_{x \searrow 0} x^{1-\alpha} = 0$$

şi deci integrala improprie este convergentă.
■

Iată câteva cazuri particulare pentru acest tip, frecvent întâlnite

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx \ \ \text{div} \ \ , \ \ \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \ \ \text{div} \ \ , \ \ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \ \ \text{conv}$$

Reamintim o inegalitate importantă ce are loc pentru orice funcţie integrabilă

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

Consecinţă. Dacă $\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\, dx$ este convergentă, atunci $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ este de asemenea convergentă.

O integrală improprie se numeşte "**absolut convergentă**" dacă $\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\, dx$ este convergentă.

Reciproca nu este totdeauna adevărată.

Exemplu. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ este convergentă, dar $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ este divergentă.

Criteriul de comparaţie cu inegalităţi .
i) dacă $|f(x)| \leq g(x)$ pentru orice $x \in (\alpha, \beta)$ atunci

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \text{ convergentă } \Rightarrow \int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\, dx \text{ şi } \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \text{ ambele convergente}$$

ii) dacă $0 \leq g(x) \leq f(x)$ pentru orice $x \in (\alpha, \beta)$ atunci

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \text{ divergentă } \Rightarrow \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \text{ divergentă.}$$

Exemple.

1. Pentru integrala improprie $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$, avem $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ pentru orice $x \in (1, +\infty)$ şi

deoarece $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ este convergentă, conform criteriului de comparaţie cu inegalităţi rezultă că

$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$ şi $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ sunt ambele convergente.

2. Pentru integrala improprie $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$ are loc inegalitatea $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$ şi

deoarece $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} dx$ este divergentă, rezultă conform criteriului de comparaţie cu inegalităţi că

integrala $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$ este divergentă.

Criteriul de comparaţie cu limită.

Să presupunem că integrala improprie $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ are doar un singur capăt în care este improprie, de exemplu β ,
în plus $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (\alpha, \beta)$.

Comparăm cu integrala improprie $\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ unde $g(x) > 0$ pentru toti $x \in (\alpha, \beta)$.

Dacă există limita

$$\lim_{x \nearrow \beta} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{not}{=} L$$

atunci
i) dacă limita L este finită şi nenulă atunci

cele două integrale improprii $\int_{\alpha}^{\beta} f$ şi $\int_{\alpha}^{\beta} g$ au "aceeaşi natură"

(integrale improprii sunt fie ambele convergente, fie ambele divergente)

ii) dacă limita L este zero şi $\int_{\alpha}^{\beta} g$ este convergentă, atunci şi $\int_{\alpha}^{\beta} f$ este convergentă.

Ghid Practic.
În mod "standard" se încearcă a se compara cu integrale de tipul

$$\text{i)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \qquad \text{ii)} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \qquad \text{iii)} \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p} dx \qquad \text{iv)} \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$$

.

pentru $\lim\limits_{x\to+\infty}$ $\qquad \lim\limits_{x\searrow 0}$ $\qquad \lim\limits_{x\nearrow 1}$ $\qquad \lim\limits_{x\nearrow b}$

Problema se pune astfel :
" determinaţi valorile lui $p \in \mathbb{R}$ aşa încât limita să fie finită şi nenulă "

$$\lim_{x\nearrow\beta} \frac{f(x)}{x^p}$$

Evident dacă aşa ceva e posibil, adică există astfel de valori pentru p,
Există funcţii pentru care nu există astfel de valori pentru p.

Exemple.

1. Pentru $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+x^3+\sqrt{x+2}} dx$ comparăm cu $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, calculăm limita

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^4+x^3+\sqrt{x+2}}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{x^4+x^3+\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{x^4(1+\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^7}+\frac{2}{x^8}}} = 1$$

Limita este finită şi nenulă, doar pentru $p = 4$.

Deci de fapt comparăm cu $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$, care este convergentă,

Conform criteriului de comparaţie cu limită rezultă că integrala $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+x^3+\sqrt{x+2}} dx$ este convergentă.

2. Pentru $\int_2^3 \frac{1}{x \sin \pi(3-x)} dx$ comparăm cu $\int_2^3 \frac{1}{(3-x)^p} dx$, calculăm limita

$$\lim_{x\nearrow 3} \frac{\frac{1}{x \sin \pi(3-x)}}{\frac{1}{(3-x)^m}} = \lim_{x\nearrow 3} \frac{(3-x)^p}{x \sin \pi(3-x)} = \frac{\pi}{3}$$

Limita este finită şi nenulă, numai pentru $p = 1$.

Deci de fapt comparăm cu $\int_2^3 \frac{1}{(3-x)} dx$ care este divergentă, şi deci

conform criteriului de comparaţie la limită rezultă că integrala $\int_2^3 \frac{1}{x \sin \pi(3-x)} dx$ este divergentă.

$\blacksquare$

Pentru calculul integralelor improprii, se pot folosi integrarea prin părţi sau schimbare de variabilă.

Integrare prin părţi. pentru Integrale Improprii.

$$\underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx}_{A} = \underbrace{\left[\int f(x\right] g(x)\Big|_{\alpha}^{\beta}}_{C} - \underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} \left[\int f(x\right])g'(x)dx}_{B}$$

unde

$$C = \left[\int f(x\right] g(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} = \lim_{x\nearrow\beta} \left[\int f(x\right] g(x) - \lim_{x\searrow\alpha} \left[\int f(x\right] g(x)$$

Egalitatea are sens numai dacă C este finit, adică ambele limite sunt finite.

Integrarea prin părţi afirmă următorul fapt :
dacă (C) este finit, atunci integralele improprii (A) şi (B) au "aceeaşi natură",
adică sunt fie ambele convergente , fie ambele divergente.

Exemplu.

Pentru a demonstra că integrala este convergentă $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ procedăm astfel

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \left[\int \sin x\right] \frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \left[\int \sin x\right] \left(\frac{1}{x}\right)' dx =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\cos x}{x} - \lim_{x\searrow 1} \frac{-\cos x}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{-\cos x}{-x^2}dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$$

$$\text{deoarece} \quad \left|\frac{-\cos x}{x}\right| \le \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

obţinem

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$$

Pe de altă parte avem $\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ pentru orice $x \in (1, +\infty)$, şi pentru că $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ este convergentă,

rezultă conform criteriului de comparaţie cu inegalităţi că integrala $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ este convergentă,

deci tot convergentă este şi $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

Schimbare de variabilă. pentru Integrale Improprii.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_c^d f(u(t))u'(t)dt$$

unde $x = u(t)$, $u : (\alpha, \beta) \to (c, d)$ este bijectivă şi avem $x \searrow \alpha \Rightarrow t \searrow c$, $x \nearrow \beta \Rightarrow t \nearrow d$

Exemplu.

Pentru $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ procedăm astfel .

Încercăm o schimbare de variabilă pentru a "scăpa" de radical.
Deoarece $x, (1-x) > 0$ putem scrie $x = a^2$ şi $(1-x) = b^2$.
Adunăm aceste relaţii şi obţinem $1 = a^2 + b^2$.
Există un "model" cunoscut pentru asemenea situaţie $a = \sin t$ and $b = \cos t$ (sau invers)
Prin urmare facem schimbarea de variabilă $x = \sin^2 t$,
avem $x \searrow 0 \Rightarrow t \searrow 0$ şi $x \nearrow 1 \Rightarrow t \nearrow \frac{\pi}{2}$, înlocuind obţinem

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t(1-\sin^2 t)}}(\sin^2 t)'dt =$$

deoarece pentru $t \in (0, \pi/2)$ funcţiile sunt pozitive $\sin t, \cos t > 0$ şi avem $\sqrt{\sin^2 t \cdot \cos^2 t} = \sin t \cdot \cos t$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin t \cdot \cos t} 2\sin t \cdot \cos t dt = \int\limits_0^{\pi/2} 2dt = \pi$$

Prin urmare, integrala improprie este convergentă şi

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \pi$$

■

Funcţiile B şi Γ - Funcţiile lui Euler

În cele ce urmează definim funcţiile B şi Γ (funcţiile lui Euler),
prezentăm pe scurt principalele proprietăţi şi aplicaţii la calculul unor integrale.

Definiţie. Integrala

$$B(p,q) \stackrel{def}{=} \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

este convergentă pentru orice $p, q > 0$, deci are sens "funcţia B beta".

Definiţie. Integrala

$$\Gamma(p) \stackrel{def}{=} \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$$

este convergentă pentru orice $p > 0$, deci are sens "funcţia Γ gama".

Demonstrăm convergenţa celor două integrale improprii.

i) Pentru $p, q \geq 1$, funcţia $x \to x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ este continuă pe intervalul $[0,1]$,
deci integrala ce defineşte funcţia B nu este improprie pentru $p, q \geq 1$.
Integrala ce defineşte funcţia B este improprie în 0 doar pentru $p \in (0,1)$ şi în 1 doar pentru $q \in (0,1)$.
Integrala improprie se descompune în suma a două integrale improprii convergente (C) şi (D) ,
pentru orice punct $a \in (0,1)$,

$$\underbrace{\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{B} = \underbrace{\int\limits_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{C} + \underbrace{\int\limits_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{D}$$

integrala improprie C este "improprie" doar în 0 , deoarece pentru $p<1$ avem

$$\lim_{x\searrow 0}\left[x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right]=\lim_{x\searrow 0}\left[\frac{1}{x^{1-p}}(1-x)^{q-1}\right]=\frac{1}{+0}=+\infty$$

integrala improprie D este "improprie" doar în 1 , deoarece pentru $q<1$ avem

$$\lim_{x\nearrow 1}\left[x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right]=\frac{1}{+0}=+\infty$$

Folosim criteriul de comparaţie cu limită.

Comparăm integrala (C) $\int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ cu $\int_0^a x^{p-1}dx$ şi

integrala (D) $\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ cu $\int_a^1 (1-x)^{q-1}dx$

limitele corespunzătoare sunt finite şi nenule

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}}=1 \quad , \quad \lim_{x\nearrow 1}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}}=1$$

Prin urmare

- integrala improprie (C) $\int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ are aceeaşi natură cu

  integrala improprie $\int_0^a x^{p-1}dx=\int_0^a \frac{1}{x^{1-p}}dx$, care este convergentă deoarece $p<1$

- integrala improprie (D) $\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ are aceeaşi natură cu

  integrala improprie $\int_a^1 (1-x)^{q-1}dx=\int_a^1 \frac{1}{(1-x)^{1-q}}dx$, care este convergentă deoarece $q<1$

deci este convergentă şi suma lor $B=C+D$.

ii) Integrala improprie Γ se descompune în suma a două integrale improprii convergente (E) şi (F) , pentru orice punct $a\in(0,+\infty)$

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx}_{\Gamma}=\underbrace{\int_0^{a} x^{p-1}e^{-x}dx}_{E}+\underbrace{\int_a^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx}_{F}$$

Pentru integrala E folosim criteriul de comparaţie cu limită, comparăm cu $\int_0^a x^{p-1}dx$

limita corespunzătoare este

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{x^{p-1}e^{-x}}{x^{p-1}}=1$$

Prin urmare

- integrala improprie (E) $\int_0^a x^{p-1}e^{-x}dx$ are aceeaşi natură cu

  integrala improprie $\int_0^a x^{p-1}dx=\int_0^a \frac{1}{x^{1-p}}dx$, care este convergentă deoarece $p<1$

Pentru integrala F folosim criteriul de comparaţie cu limită, comparăm cu integrala improprie $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$, care este convergentă.

Folosim limita

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = 0$$

Conform criteriului de comparaţie cu limită cazul ii) , rezultă că integrala F

$$\int\limits_a^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$$

este convergentă.
În final convergentă este şi suma lor $\Gamma = E + F$.
■

Proprietăţi ale funcţiilor B şi Γ
1.

$$\Gamma(1) = 1$$

2. Următoarea proprietate sugerează faptul că funcţia Γ poate fi considerată o "generalizare" a funcţiei "factorial" (factorialul are sens numai pentru numere naturale).

$$\Gamma(p) = (p-1)\cdot\Gamma(p-1) \text{ pentru orice } p > 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \text{ pentru price } n \in \mathbb{N}$$

Relaţia de recurentă se scrie în mod tradiţional

$$\Gamma(p+1) = p\cdot\Gamma(p) \text{ pentru orice } p > 0$$

3.

$$B(q,p) = B(p,q) \quad \text{pentru orice } p,q > 0$$

4.

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$$

5.

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = 2\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{2p-1}(\cos t)^{2q-1}dt$$

sau citind invers relaţia obţinem

$$\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^m(\cos t)^n dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$$

6.

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}dt$$

7.

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \text{ pentru orice } p,q > 0$$

8. formula "complementelor"

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)=\frac{\pi}{\sin p\pi}=\frac{\pi}{\sin q\pi}\quad \text{pentru orice } p+q=1 \quad , \quad p,q>0$$

sau scrisă în forma

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}=\frac{\pi}{\sin(1-p)\pi}\quad \text{pentru orice}\quad p\in(0,1)$$

<u>Demonstraţii.</u>
1.

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}(-e^{-x})-(-e^{-0})=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=1$$

2.

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=\text{prin părţi }=x^{p-1}\underbrace{\left[\int e^{-x}\right]}_{-e^{-x}}\Bigg|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\left(x^{p-1}\right)'\left[\int e^{-x}\right]dx=$$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^{p-1}}{e^x}-\frac{-0^{p-1}}{e^0}\right)-\int_0^{+\infty}(p-1)x^{p-2}(-e^{-x})dx=$$

$$=0-0+(p-1)\int_0^{+\infty}x^{p-2}e^{-x}dx=(p-1)\cdot\Gamma(p-1)$$

Deci

$$\Gamma(p)=(p-1)\cdot\Gamma(p-1)$$

apoi pentru numere naturale $n\geq 2$ obţinem inductiv

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=...$$

$$...=(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)=(n-1)!\Gamma(1)=(n-1)!$$

3.

$$B(q,p)=\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx=\text{ schimbarea de variabilă } x=1-t \text{ duce la } =$$

$$=\int_1^0(1-t)^{q-1}t^{p-1}(-dt)=\int_0^1(1-t)^{q-1}t^{p-1}dt=Bp,q)$$

4. Această integrală improprie am rezolvat-o deja mai înainte, procedăm exact la fel:
folosim schimbarea de variabilă $x=\sin^2 t$, $dx=(\sin^2 t)'dt=2\sin t\cos tdt$, cu $t\in[0,\pi/2]$, obţinem

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t(1-\sin^2 t)}}(\sin^2 t)'dt=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}}2\sin t\cos tdt=\pi$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{|\sin t\cos t|}2\sin t\cos tdt=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin t\cos t}2\sin t\cos tdt=\int_0^{\pi/2}2dt=\pi$$

5. Exact ca pentru 4)

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\quad\text{facem schimbarea de variabilă } x=\sin^2 t$$

avem $x \searrow 0 \Rightarrow t \searrow 0$ şi $x \nearrow 1 \Rightarrow t \nearrow \frac{\pi}{2}$, înlocuind obţinem

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)^{p-1}(1-\sin^2 t)^{q-1} 2\sin t \cos t dt = 2\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2p-1}(\cos t)^{2q-1} dt$$

În relaţia

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = 2\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2p-1}(\cos t)^{2q-1} dt$$

notăm $2p-1=m$ şi $2q-1=n$, deci $p=\frac{m+1}{2}$ şi $q=\frac{n+1}{2}$
apoi rescriem

$$B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin t)^m(\cos t)^n dt$$

6.

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \text{ folosim schimbarea de variabilă } x=\frac{t}{t+1} \text{ , rezultă } dx = \frac{1}{(t+1)^2}dt$$

$$t=\frac{x}{1-x} \text{ , deci } x\searrow 0 \Rightarrow t\searrow 0 \text{ şi } x\nearrow 1 \Rightarrow t\to\frac{1}{+0}=+\infty$$

deci

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{p-1}\left(1-\frac{t}{t+1}\right)^{q-1}\frac{1}{(t+1)^2}dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p-1}}\left(\frac{1}{t+1}\right)^{q-1}\frac{1}{(t+1)^2}dt = \int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}dt$$

Rezultă

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}dt$$

7. 8. Omitem demonstraţiile deocamdată, deoarece nu sunt elementare,
iar pe de altă parte nu sunt relevante pentru aplicaţii.

Prezentăm câteva aplicaţii ale acestor proprietăţi la calculul unor integrale (definite sau improprii).

Exemple.
1) Să se arate că

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Soluţie.
Folosim proprietatea (4)

$$\pi = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(1)} \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

sau folosind formula complementelor

$$\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{2}\pi} = \pi \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

2) Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\pi/2} (\sin t)^6 (\cos t)^8 dt = ?$$

<u>Soluţie</u>.
Folosim proprietatea (5)

$$\int_0^{\pi/2} (\sin t)^6 (\cos t)^8 dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{6+1}{2}, \frac{8+1}{2}\right) = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{7}{2}) \cdot \Gamma(\frac{9}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2} + \frac{9}{2})}$$

$$\Gamma(\frac{7}{2} + \frac{9}{2}) = \Gamma(8) = 7!$$

$$\Gamma(\frac{9}{2}) = \Gamma(\frac{7}{2} + 1) = \frac{7}{2}\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{7}{2}\Gamma(\frac{5}{2} + 1) = \frac{7}{2}\frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{7}{2}\frac{5}{2}\Gamma(\frac{3}{2} + 1) =$$

sau

$$\Gamma(\frac{9}{2}) = (\frac{9}{2} - 1)\Gamma(\frac{9}{2} - 1) = \frac{7}{2}\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{7}{2}(\frac{7}{2} - 1)\Gamma(\frac{7}{2} - 1) = \frac{7}{2}\frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2}) =$$

$$= \frac{7}{2}\frac{5}{2}(\frac{5}{2} - 1)\Gamma(\frac{5}{2} - 1) = \frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}(\frac{3}{2} - 1)\Gamma(\frac{3}{2} - 1) = \frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$$

Analog obţinem

$$\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$$

Folosim

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \pi$$

În final obţinem

$$\int_0^{\pi/2} (\sin t)^6 (\cos t)^8 dt = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{7}{2}) \cdot \Gamma(\frac{9}{2})}{\Gamma(8)} = \frac{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{7!} = \frac{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}}{7!}\pi$$

3) Să se calculeze integrala improprie

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^3 + 1)^3} dx$$

<u>Soluţie</u>.

facem schimbarea de variabilă $x^3 = t$ şi obţinem $x = t^{1/3}$ $\quad dx = \frac{1}{3} t^{1/3 - 1} dt$

apoi folosim proprietatea (6)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^3 + 1)^3} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3} \frac{t^{1/3 - 1}}{(t + 1)^3} dt = \frac{1}{3} B(\frac{1}{3}, 3 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} B(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma(\frac{1}{3}) \cdot \Gamma(\frac{8}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3} + \frac{8}{3})} =$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\frac{5}{3}\Gamma(\frac{5}{3})}{3 \cdot \Gamma(3)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\frac{5}{3}\frac{2}{3}\Gamma(\frac{2}{3})}{3 \cdot 2!} = \frac{1}{6}\frac{5}{3}\frac{2}{3}\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3}) = \frac{5}{27}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{5 \cdot 2\pi}{27\sqrt{3}} = \frac{10\pi}{27\sqrt{3}}$$

Deoarece

$$\Gamma(\frac{8}{3}) = \Gamma(\frac{5}{3} + 1) = \frac{5}{3}\Gamma(\frac{5}{3}) = \frac{5}{3}\Gamma(\frac{2}{3} + 1) = \frac{5}{3}\frac{2}{3}\Gamma(\frac{2}{3})$$

sau

$$\Gamma(\frac{8}{3}) = (\frac{8}{3} - 1)\Gamma(\frac{8}{3} - 1) = \frac{5}{3}\Gamma(\frac{5}{3}) = \frac{5}{3}(\frac{5}{3} - 1)\Gamma(\frac{5}{3} - 1) = \frac{5}{3}\frac{2}{3}\Gamma(\frac{2}{3})$$

$$\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

4) Să se calculeze valoarea integralei lui Poisson

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \ ?$$

Soluţie.

$$\text{facem schimbarea de variabilă } \ x^2 = t \ \ \Rightarrow \ \ x = t^{1/2} \ \ , \ \ dx = \frac{1}{2} t^{1/2-1} dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

■

8.2 Schimbări de Variabile

Derivarea funcţiilor compuse.

Există multe argumente pentru a explica de ce anume considerăm derivarea funcţiilor.
Unul din cele mai simple dar şi mai naturale argumente este cel al "vitezei de variaţie".
Derivata este o măsură a vitezei de variaţie. Orice fenomen are loc în spaţiu şi în timp.
Să presupunem că funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ măsoară (numeric) $f(x)$ o anumită mărime
în funcţie de o altă mărime "x".
De exemplu "x" poate fi timpul, atunci funcţia f înregistrează valorile unei mărimi fizice
la diverse momente de timp.
Devine interesant de ştiut cât de repede variază mărimea în timp.
Pare natural să măsurăm această variaţie calculând
raportul dintre variaţia funcţiei $f(x) - f(x_0)$ şi variaţia timpului $x - x_0$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Apoi a venit ideea de a calcula limita acestui raport pentru $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{not}{=} f'(x_0) \overset{not}{=} \frac{df}{dx}(x_0)$$

şi obţinem "viteza de variaţie" în x_0 .
În acest mod putem calcula derivata ("viteza de variaţie") pentru funcţiile elementare.
Atunci de ce mai este nevoie de formule de calcul pentru derivate ?
Multe funcţii interesante se pot obţine folosind funcţiile elementare prin adunare, înmulţire, etc.
Este mai uşor să folosim câteva reguli (formule) simple şi derivatele funcţiilor elementare,
decât să calculăm limite pentru fiecare funcţie.

$$(f+g)' = f' + g' \quad , \quad (\alpha f)' = \alpha f' \quad , \quad (fg)' = f'g + fg' \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

În afară de calcule numerice (adunare, înmulţire) putem să şi compunem funcţii

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \quad , \quad A \xrightarrow{f \circ g} C \quad , \quad (f \circ g)(x) = f\,[g(x)]$$

În mod natural calculăm derivata funcţiei compuse

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f\,[g(x)] - f\,[g(x_0)]}{x - x_0}$$

folosind un truc destul de simplu

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\left[g(x)\right]-f\left[g(x_0)\right]}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\underbrace{\frac{f\left[g(x)\right]-f\left[g(x_0)\right]}{g(x)-g(x_0)}}_{\to f'(g(x_0))}\cdot\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)}=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

Pentru funcţii care depinde de mai multe variabile (mărimi fizice care depinde de mai mulţi parametri) situaţia este oarecum diferită.

Să considerăm o funcţie $F:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, cu alte cuvinte un câmp scalar,
care depinde de trei parametri $F=F(x,y,z)$.
În această situaţie, are sens să calculăm "viteza de variaţie" în raport cu fiecare parametru în parte.
Este un fenomen cât se poate de natural.
Practic se efectuează un experiment în care doar un singur parametru variază, iar ceilalţi rămân constanţi sau dacă totuşi variază foarte puţin, influenţa acestei variaţii este neglijabilă.
În mod tradiţional derivata în raport cu un singur parametru se numeşte "derivată partială".
Prin urmare calculăm o limită absolut identică cu cea pentru o singură variabilă (un singur parametru).
De exemplu pentru derivata în raport cu "x" în punctul (a,b,c) un singur parametru variază $x\to a$
în timp ce ceilalţi doi parametri sunt constanţi $y=b$ şi $z=c$

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x,b,c)-F(a,b,c)}{x-a}\overset{not}{=}\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)$$

Apar astfel derivate parţiale pentru fiecare parametru, în acest caz trei $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$.
În fizică (mecanică) are relevanţă câmpul vectorial format cu aceste derivate parţiale, numit "gradient"

$$\operatorname{grad}F=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\overrightarrow{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\overrightarrow{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

Funcţia F (câmpul scalar) se numeşte "potenţial" scalar pentru câmpul vectorial (numit "câmp de gradienţi")

$$\overrightarrow{v}=\operatorname{grad}F$$

Deşi unanim folosită, notaţia tradiţională
$\frac{df}{dx}$ pentru funcţii care depind de un singur parametru şi
$\frac{\partial F}{\partial x}$ pentru funcţii care depind de mai mulţi parametri,
reprezintă de fapt exact acelaşi tip de limită, deci nu totdeauna sunt justificate notaţii diferite $\frac{d}{dx}$, $\frac{\partial}{\partial x}$
care au doar rolul de a atrage atenţia că o anumită funcţie depinde de unul sau de mai mulţi parametri
(deşi atunci când derivăm în raport cu "x" de exemplu, ceilalţi parametri sunt consideraţi constante,
deci tot doar un singur parametru este luat în considerare)
În matematică se defineşte noţiunea de diferenţiabilitate.

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)}\frac{F(x,y,z)-F(a,b,c)-L[(x,y,z)-(a,b,c)]}{\|(x,y,z)-(a,b,c)\|}=0$$

unde $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ este o aplicatie liniară, în general notată $L=dF_{(a,b,c)}$,
numită diferenţiala funcţiei F în punctul (a,b,c)
Matricea acestei aplicaţii liniare în "baza canonică", numită "matricea Jacobi" ,
este exact matricea formată cu derivatele parţiale

$$J_F(a,b,c)=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

unde toate cele trei derivate parţiale sunt calculate în punctul (a,b,c) .
"baza canonică" desemnează bazele canonice pentru fiecare spaţiu vectorial $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^4$...
Se pune în mod natural întrebarea cum se calculează diferenţiala unei funcţii compuse.
Pentru $A\xrightarrow{h}B\xrightarrow{F}C$, $A\xrightarrow{F\circ h}C$, diferenţiala funcţiei compuse $d\,(F\circ h)$ este
compunerea celor două diferenţiale dh şi dF

$$d\,(F\circ h)=dF\circ dh$$

Din algebra liniară se ştie că matricea asociată unei compuneri de aplicaţii liniare
se obţine înmulţind matricile aplicaţiilor liniare respective, în acest caz e vorba de matricile Jacobi asociate

$$J_{F\circ h} = J_F \cdot J_h$$

Această relaţie oferă modul de calcul al derivatelor parţiale pentru funcţii compuse.

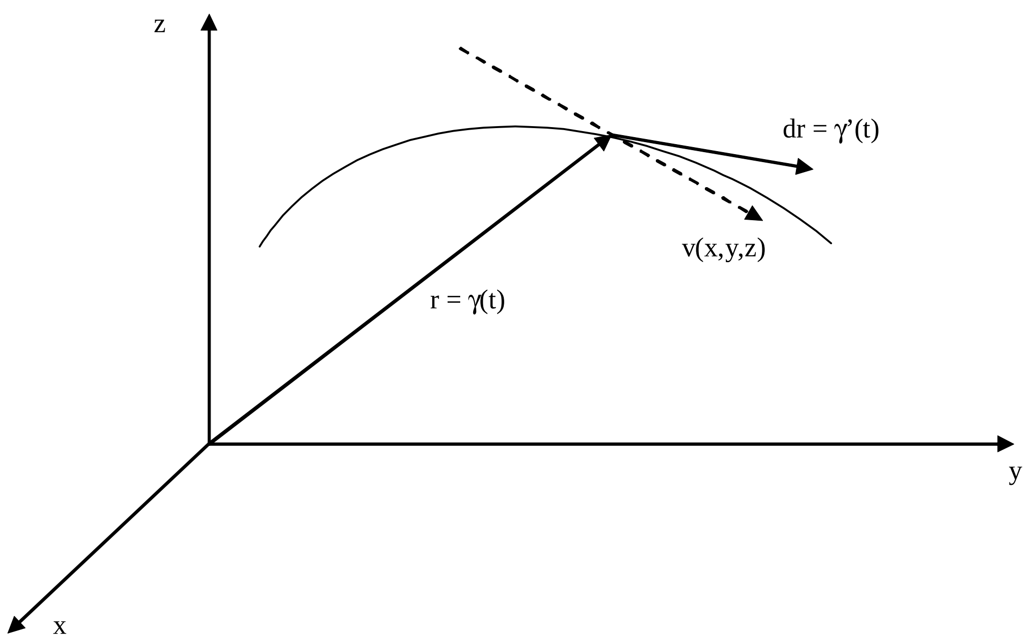
Pentru exemplificare, considerăm trei cazuri în care am folosit derivarea funcţiilor compuse.
- calculul lucrului mecanic pentru un câmp de gradienţi
- determinarea soluţiilor unei ecuaţii Pfaff exacte
- laplacianul în coordonate polare la problema Dirichlet pentru discul unitate.

Câmpuri de gradienţi

Considerăm un câmp de gradienţi $\overrightarrow{v}$ cu potenţialul scalar $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, funcţie de clasă C^1

$$\overrightarrow{v} = \operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

şi un drum parametrizat $\gamma : [a, b] \to D$, $\overrightarrow{r} = \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, de clasă C^1



Vectorul de poziţie $\overrightarrow{r} = \gamma(t)$, vectorul tangent la drum (traiectorie) $d\overrightarrow{r} = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)))$
În general lucrul mecanic reprezintă o măsură a efortului, principial este "forţa $\times$ deplasarea".
În acest caz "forţa" este $\overrightarrow{v}$ vectorul câmpului, iar "deplasarea" are loc de-a lungul drumului γ ,
în fiecare punct pe direcţia tangentă la drum $d\overrightarrow{r} = \gamma'(t)$, deci integrăm $\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r}$

Lucrul mecanic al câmpului vectorial $\overrightarrow{v}$ de-a lungul drumului γ este

$$\int_\gamma \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)))dt =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t)\right] dt$$

Acum realizăm faptul că integrăm exact derivata unei funcţii compuse.

$[a,b] \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{F} \mathbb{R}$, $[a,b] \xrightarrow{F\circ\gamma} \mathbb{R}$, $(F\circ\gamma)(t) = F(\gamma(t)) = F(x(t), y(t), z(t))$

Matricile Jacobi corespunzătoare sunt

$$J_F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \quad , \quad J\gamma = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

iar matricea Jacobi a funcţiei compuse este

$$J_{F\circ\gamma} = J_F \cdot \ J\gamma = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y'(t) + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot x'(t)$$

Să observăm că funcţia compusă $F\circ\gamma$ depinde de un singur parametru "t" şi ia valori reale, deci matricea Jacobi corespunzătoare este de ordin 1, adică este de fapt un număr real

$$J_{F\circ\gamma} = \frac{d}{dt}\left[(F\circ\gamma)(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[F(x(t), y(t), z(t))\right]$$

şi obţinem

$$\frac{d}{dt}\left[F(x(t), y(t), z(t))\right] = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t)$$

Prin urmare lucrul mecanic este

$$\int_\gamma \overrightarrow{v} \ \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \left[\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t)}_{\frac{d}{dt}[F(x(t),y(t),z(t))]}\right] dt =$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left[F(x(t), y(t), z(t))\right] \ dt = \ F(x(t), y(t), z(t))\Big|_{t=a}^{t=b} = F(\underbrace{x(b), y(b), z(b)}_{\gamma(b)}) - F(\underbrace{x(a), y(a), z(a)}_{\gamma(a)})$$

pe scurt

$$\int_\gamma \overrightarrow{v} \ \cdot d\overrightarrow{r} = F(\gamma(b)) - F(\gamma a))$$

Cu alte cuvinte, pentru un câmp de gradienţi, lucrul mecanic nu depinde de drum, ci numai de diferenţa de potenţial la capetele drumului.

■

Ecuaţii cu diferenţiale totale exacte

Considerăm o ecuaţie Pfaff exactă (ecuaţie cu diferenţiale totale) $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ deci există o funcţie (potenţial) $F(x,y)$ astfel încât

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (P(x,y), Q(x,y))$$

Prin urmare ecuaţia Pfaff se scrie de fapt

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy = 0$$

O funcţie $y = y(x)$ este soluţie dacă verifică

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = 0$$

Să observăm că relaţia exprimă faptul că derivata unei funcţii compuse este nulă.
Considerăm funcţia compusă :

$A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{F} \mathbb{R}$, $A \xrightarrow{F\circ h} \mathbb{R}$, $h(x) = (x, y(x))$, $(F \circ h)(x) = F(x, y(x))$, $h'(x) = (1, y'(x))$

matricile Jacobi corespunzătoare sunt

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} \quad , \quad J_h = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}(x) \\ \frac{d}{dx}y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

Să observăm că funcţia compusă $F \circ h$ depinde de un singur parametru "x" şi ia valori reale,
deci matricea Jacobi corespunzătoare este de ordin 1, adică este de fapt un număr real

$$\frac{d}{dx}\left[F(x, y(x))\right] = J_{F\circ h} = J_F \cdot J_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y'(x)$$

deci relaţia ce defineşte o soluţie se scrie

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))y'(x)}_{\frac{d}{dx}[F(x,y(x))]} = 0$$

sau

$$\frac{d}{dx}\left[F(x, y(x))\right] = 0$$

prin urmare funcţia compusă este constantă

$$F(x, y(x)) = ct$$

şi defineşte în mod implicit soluţiile ecuaţiei Pfaff.
■

Laplacianul în coordonate polare

Considerăm o funcţie de clasă C^2 (un câmp scalar) , $u = u(x, y)$, $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ şi laplacianul corespunzător

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Dorim să determinăm expresia laplacianului în coordonate polare.
Coordonatele polare sunt

$$x = x(r, t) = r \cos t$$

$$y = y(r, t) = r \sin t$$

cu $r \in [0, +\infty)$, $t \in (0, 2\pi)$.
Putem calcula derivatele parţiale

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos t \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -r \sin t \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin t \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = r \cos t$$

Apoi reformulăm funcţia $u = u(x, y)$ în coordonate polare

$$u = u(x, y) = u(r \cos t, r \sin t) = \underbrace{u(x(r, t), y(r, t))}_{u\circ h} \overset{not}{=} v(r, t) = u(r, t)$$

Am notat cu $v = v(r, t)$ funcţia compusă $u(x(r, t), y(r, t))$, pentru a înţelege mai clar calculul derivatelor parţiale.
În "practică" (fizică) nu se schimbă numele funcţiei.
Mărimea fizică "u" nu depinde de modul prin care identificăm un punct din plan,
prin coordonate carteziene (x, y) sau cooordonate polare (r, t) .
Să observăm compunerea funcţiilor

$$[0,+\infty)\times(0,2\pi)\xrightarrow{h}\mathbb{R}^2\xrightarrow{u}\mathbb{R}\quad,\quad h(r,t)=(x(r,t),y(r,t)\ )\ ,\quad u=u(x,y)\quad,\quad [0,+\infty)\times(0,2\pi)\xrightarrow{u\circ h}\mathbb{R}$$

Deci $\quad v=v(r,t)=(u\circ h)(r,t)=u\left(x(r,t),y(r,t)\right)$
Matricile Jacobi corespunzătoare sunt

$$J_v=\begin{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}\quad,\quad J_u=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}\quad,\quad J_h=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t & -r\sin t\\ \sin t & r\cos t\end{pmatrix}$$

Matricea Jacobi a funcţiei compuse se obţine înmulţind cele două matrici Jacobi J_u , J_h

$$J_v=J_{u\circ h}=J_u\cdot J_h$$

Deci

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}$$

sau înlocuind

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t & -r\sin t\\ \sin t & r\cos t\end{pmatrix}$$

Scriind pe componente obţinem

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

sau înlocuind

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin t$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot(-r\sin t)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot(r\cos t)$$

Pentru a obţine laplacianul este nevoie de derivate de ordin 2, deci mai derivăm o dată aceste relaţii.
Să interpretăm ultimele două relaţii ca derivate parţiale ale unei funcţii compuse

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left[u\circ h\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[u(x(r,t),y(r,t))\right]=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin t$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[u\circ h\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[u(x(r,t),y(r,t))\right]=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot(-r\sin t)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot(r\cos t)$$

cu alte cuvinte pentru orice funcţie compusă $\ A\circ h\ $ derivatele în raport cu r şi t sunt

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[A\circ h\right]=\frac{\partial A}{\partial x}\cdot\cos t+\frac{\partial A}{\partial y}\cdot\sin t$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[A\circ h\right]=\frac{\partial A}{\partial x}\cdot(-r\sin t)+\frac{\partial A}{\partial y}\cdot(r\cos t)$$

Aplicăm aceste relaţii pentru derivata în raport cu r şi obţinem
(funcţia "A" se înlocuieşte cu $\frac{\partial u}{\partial x}$ respectiv cu $\frac{\partial u}{\partial y}$)
Aici scrierea nu este explicită. Pentru a nu complica notaţia, se scrie $\frac{\partial u}{\partial x}$, dar de fapt e vorba de funcţia compusă

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(x(r,t),y(r,t))=\frac{\partial u}{\partial x}\circ h$$

Deci

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin t\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{"A\circ h"}\right]\cos t+\frac{\partial}{\partial r}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{"A\circ h"}\right]\sin t\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \left[\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} \cdot \cos t + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial y} \cdot \sin t\right] \cos t + \left[\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x} \cdot \cos t + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} \cdot \sin t\right] \sin t$$

Obţinem derivate parţiale de ordin 2 pentru care nu contează ordinea de derivare

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \overset{not}{\underset{\longrightarrow}{\equiv}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \overset{not}{\underset{\longleftarrow}{\equiv}} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

(conform criteriului lui Schwarz pentru funcţii de clasă C^2) şi deci

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \cos^2 t + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \cdot \sin t \cos t + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \sin^2 t$$

Aplicăm aceleaşi relaţii pentru derivata în raport cu t şi obţinem

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot (-r \sin t) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot (r \cos t)\right] \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{"A \circ h"}\right](-r \sin t) + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial t}[-r \sin t] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{"A \circ h"}\right](r \cos t) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(r \cos t)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} \cdot (-r \sin t) + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial y} \cdot (r \cos t)\right](-r \sin t) - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos t + \left[\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x} \cdot (-r \sin t) + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} \cdot (r \cos t)\right](r \cos t) - \frac{\partial u}{\partial y} r \sin t$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \sin^2 t - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \cdot r^2 \sin t \cos t + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot r^2 \cos^2 t \underbrace{- \frac{\partial u}{\partial x} r \cos t - \frac{\partial u}{\partial y} r \sin t}_{-r\frac{\partial v}{\partial r}}$$

În final adunăm şi obţinem

$$r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot r^2 \sin^2 t}_{} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \cdot r^2 \sin t \cos t + \overbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot r^2 \sin^2 t}^{} +$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \cos^2 t}_{} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \cdot r^2 \sin t \cos t + \overbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot r^2 \cos^2 t}^{} - r\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = r^2 \Delta u - r\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$r^2 \Delta u = r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

sau pur si simplu

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

dacă păstrăm numele funcţiei şi notăm $u = u(x, y) = u(r \cos t, r \sin t) = u(r, t)$ şi nu $v(r, t)$.
Care reprezintă laplacianul în coordonate polare.
■

8.3 Anexă - Ingrediente Tehnice

În condiţiile de examen "cu cărţile deschise" (open book exam) este utilă o "bază de date" care să conţină anumite "ingrediente tehnice" : limite fundamentale, proprietăţile operatorului de derivare, calcul de antiderivate, funcţii elementare, tehnici de calcul algebric, funcţii periodice (trigonometrice).

Am considerat util să prezentăm câteva din aceste ingrediente tehnice.

Următoarea prezentare însă este doar un exemplu.

Stundenţii sunt încurajaţi să-şi creeze propria bază de date tehnice "personalizată".

Considerăm mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$, "generată" de un element notat "1" şi de o operaţie (lege de compoziţie) notată "+" numită **adunare**.

$$\underbrace{1+1}_{\text{2 ori}} \overset{not}{=} 2 \ , \ \underbrace{1+1+1}_{\text{3 ori}} \overset{not}{=} 3 \ , \ \underbrace{1+1+1+1}_{\text{4 ori}} \overset{not}{=} 4 \ \ ... \ \ \underbrace{1+1+...+1}_{n \text{ ori}} \overset{not}{=} n \ ...$$

Este decizia fiecăruia care anume formule merită incluse şi cum anume trebuie organizate.

Limite fundamentale

(pentru funcţii reale de variabilă reală)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right] = e \quad , \quad 0! \overset{not}{=} 1$$

$$\text{pentru} \quad a>1 \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad , \quad \lim_{x\searrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha x}}{e^{\beta x}} = 0 \quad , \quad \text{pentru orice} \ \ \alpha,\beta>0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{1}{3} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Observaţie.

Ultimele limite sunt importante deoarece arată că anumite funcţii trigonometrice

$$\sin \quad , \quad \arcsin \quad , \quad \operatorname{tg} \quad , \quad \arcsin \quad , \quad \operatorname{arctg} \quad , \quad \operatorname{tg} x - x \quad , \quad x-\sin x \quad , \quad 1-\cos x$$

se pot aproxima (sau se pot înlocui în calcule aproximative) cu polinoame simple x , x^2 , x^3 pentru x într-o vecinătate suficient de mică $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

"Regula" lui l'Hospital se aplică numai în cazul în care

$$\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{avem} \quad \text{fie} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to A} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to A} g(x) = 0 \end{cases} \quad \text{fie} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to A} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to A} g(x) = \pm\infty \end{cases}$$

Operatorul de derivare - Proprietăţi

Notăm $\quad f' = Df = \frac{df}{dx}$
Derivarea este un operator liniar (sau aplicaţie liniară)

$$(f+g)' = f' + g' \quad , \quad (\alpha f)' = \alpha f'$$

O funcţie este constantă dacă şi numai dacă derivata sa este zero

$$(ct)' = 0 \quad \text{şi} \quad f' = g' \;\Leftrightarrow\; f = g + ct$$

Derivarea unui produs

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Observaţie.
Dacă una din funcţii este constantă $g = ct$, atunci nu "merită" folosită formula de derivare a unui produs

$$(f \cdot ct)' = f' \cdot ct + f \cdot \underbrace{(ct)'}_{0} = ct \cdot f'$$

este mai simplu să folosim direct liniaritatea

$$(f \cdot ct)' = ct \cdot f$$

Derivarea unei fracţii

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Observaţie.
Dacă funcţia f este constantă $f = ct$, nu "merită" folosită formula de derivare a unei fracţii

$$\left(\frac{ct}{g}\right)' = \frac{\overbrace{(ct)'}^{0} \cdot g - ct \cdot g'}{g^2} = ct \frac{-g'}{g^2}$$

este mai simplu să folosim direct liniaritatea şi derivarea de tip " $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ "

$$\left(\frac{ct}{g}\right)' = ct \frac{-g'}{g^2}$$

Derivarea funcţiilor compuse

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivarea unei exponenţiale - puteri

$$\left([f(x)]^{g(x)}\right)' = g(x)\,[f'(x)]^{g(x)-1} + \ln[g(x)] \cdot g'(x) \cdot [f(x)]^{g(x)}$$

Derivatele funcţiilor elementare - Antiderivatele corespunzătoare
citind de la stanga spre dreapta " $\rightarrow$ " : funcţia $f(x)$ are derivata = ...

$$f(x) \;=\; (\;....)$$

" $\leftarrow$ " citind de la dreapta spre stanga : funcţia (...) provine prin derivare din $f(x)$

$$f(x) = \int (....)dx$$

Derivarea unei constante

$$(ct)' = 0$$

Derivarea unei puteri

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad , \qquad \frac{1}{\alpha}x^\alpha = \int x^{\alpha-1}dx \quad \text{pentru} \quad \alpha \neq 0$$

cazuri particulare frecvent întâlnite

$$(x)' = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + ct = \int 1dx$$

$$x^2)' = 2x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2}x^2 + ct = \int xdx$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\sqrt{x} + ct = \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{-1}{x} + ct = \int \frac{1}{x^2}dx$$

funcţia exponenţială

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{\ln a}a^x + ct = \int a^x dx$$

$$(e^x)' = e^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^x + ct = \int e^x dx$$

funcţia logaritm

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \ln x + ct_1 & , & x > 0 \\ \ln(-x) + ct_2 & , & x < 0 \end{array} \right. = \int \frac{1}{x}dx \quad \text{pentru} \quad x > 0$$

funcţii trigonometrice

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin x + ct = \int \cos x dx$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\cos x + ct = \int \sin x dx$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{tg} x + ct = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{-1}{\operatorname{tg} x} + ct = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \arcsin x + ct = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\arccos x + ct = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{arctg} x + ct = \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

Pentru calcul de antiderivate.

<u>Integrarea prin părţi</u>

"integrala" unui produs $\int A(x) \cdot B(x)dx$, se poate "reduce" la integrala altui produs obţinut :

una din funcţii se derivează, iar cealaltă se integrează

de exemplu:

i) $A(x)$ se derivează , iar $B(x)$ se integrează

$$\text{i)} \qquad \int A(x)\cdot B(x)dx = A(x)\cdot\left(\int B(x)\right) - \int A'(x)\cdot\left(\int B(x)\right)dx$$

sau
ii) $A(x)$ se integrează , iar $B(x)$ se derivează

$$\text{ii)} \qquad \int A(x)\cdot B(x)dx = \left(\int A(x)\right)\cdot B(x) - \int\left(\int A(x)\right)\cdot B'(x)dx$$

Schimbarea de variabilă (i)

$$\text{i)} \qquad \int f(u(x))\cdot u'(x)dx = \int f(y)dy \quad , \quad y = u(x)$$

$$\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)dy \quad , \quad y = u(x)$$

Schimbarea de variabilă (ii) $x = v(t)$, v bijectivă $[a,b] \xleftarrow{v} [c,d]$, $a = v(c)$, $b = v(d)$

$$\text{ii)} \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(v(t))\cdot v'(t)dt$$

Funcţii elementare (reale)

Funcţia putere , exponent natural, continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$

$$x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Funcţie raţională (raport de polinoame) continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu excepţia rădăcinilor numitorului $Q(x) = 0$

$$\frac{P(x)}{Q)x)} : \mathbb{R}\setminus\{x\ ,\ Q(x) = 0\} \to \mathbb{R}$$

În particular

$$\frac{1}{x} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$$

Funcţia radical de ordin par $\sqrt[2n]{\ }$, $\sqrt{\ }$ continuă pe $[0,+\infty)$, derivabilă pe $(0,+\infty)$

$$\sqrt{x} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$$

Funcţia radical de ordin impar $\sqrt[2n+1]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ continuă pe $\mathbb{R}$, derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\sqrt[3]{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Funcţia putere , exponent real $\alpha \neq 1$ continuă şi derivabilă pe $(0,+\infty)$

$$x^{1/3} : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$$

Observaţie.
Funcţia putere $x^{1/3}$ şi funcţia radical $\sqrt[3]{x}$ coincid numai pentru $x > 0$
- funcţia radical $\sqrt[3]{x}$ are sens şi pentru numere negative : $\sqrt[3]{-1} = -1$

- funcţia putere $x^{1/3}$ are sens numai pentru numere pozitive $x > 0$

Funcţia exponenţială $\exp(x) = e^x$ continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$

$$e^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

Funcţia logaritm $\ln x$ continuă şi derivabilă pe $(0, +\infty)$

$$\ln x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

Funcţii trigonometrice

- $\sin x$ continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$, inversabilă pe $[-\frac{\pi}{2} . \frac{\pi}{2}]$

$$\sin x : \mathbb{R} \to [-1, 1] \quad , \quad \sin x : [-\frac{\pi}{2} . \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

- $\cos x$ continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$, inversabilă pe $[0.\pi]$

$$\cos x : \mathbb{R} \to [-1, 1] \quad , \quad \cos x : [0.\pi] \to [-1, 1]$$

- $\operatorname{tg} x$ continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R} \backslash \{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \ , \ k \in \mathbb{Z} \}$, inversabilă pe $(-\frac{\pi}{2} . \frac{\pi}{2})$
- $\arcsin x$ continuă pe $[-1, 1]$, derivabilă pe $(-1, 1)$

$$\arcsin x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2} . \frac{\pi}{2}]$$

- $\arccos x$ continuă pe $[-1, 1]$, derivabilă pe $(-1, 1)$

$$\arccos x : [-1, 1] \to [0.\pi]$$

- $\operatorname{arctg} x$ continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$

$$\operatorname{arctg} x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2} . \frac{\pi}{2})$$

Funcţii trigonometrice - Proprietăţi

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad , \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

Transformări

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

- sume în produs

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a + b}{2} \sin \frac{b - a}{2}$$

- produs în sume (se citesc de la dreapta spre stanga egalităţile anterioare)

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

Funcţii trigonometrice inverse

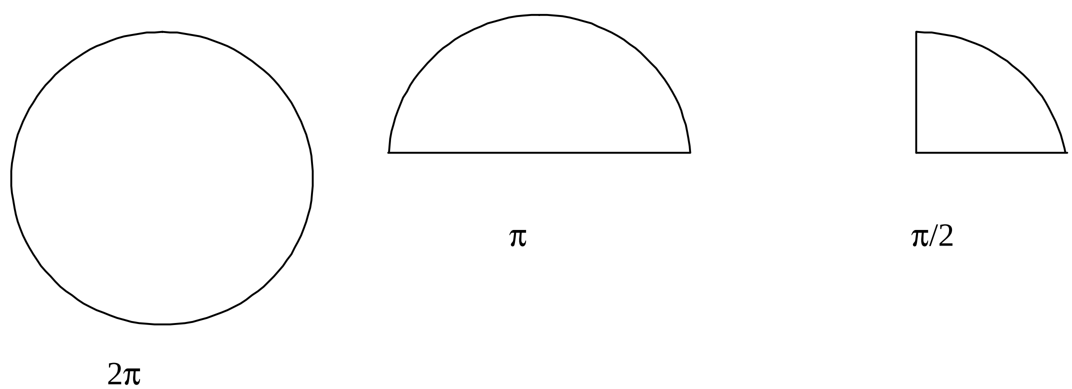
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{pentru orice} \quad x \in [-1, 1]$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{pentru orice} \quad x > 0$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{pentru orice} \quad x < 0$$

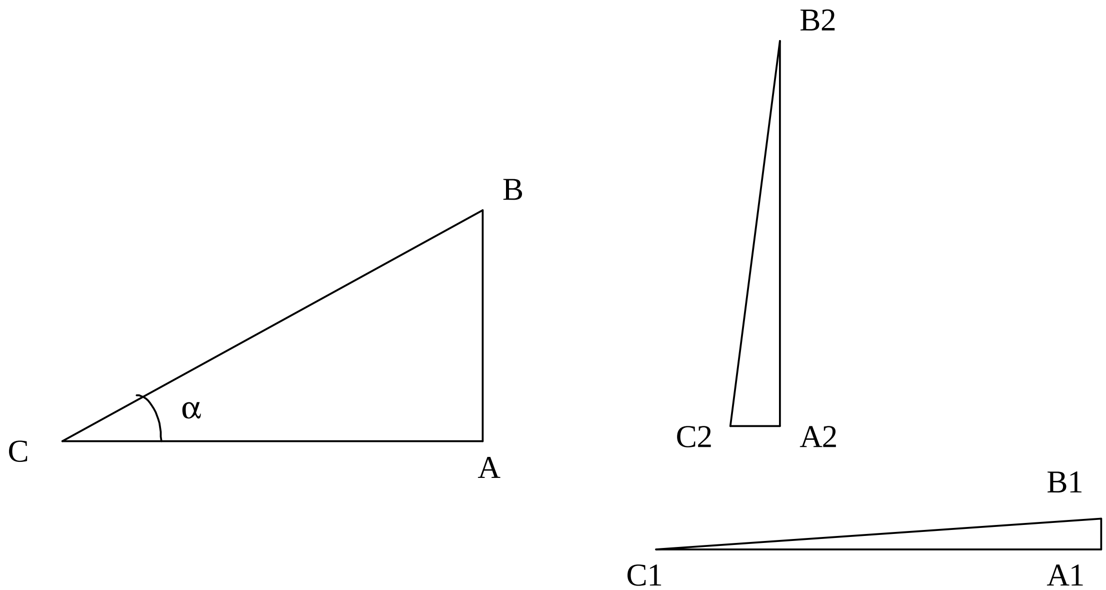
Funcţii trigonometrice - definiţie "geometrică"

Unghiuri măsurate ca arce de cerc , cerc cu raza = 1



1 cerc complet	2π	
1/2 cerc = semicerc	π	
1/4 cerc = 1/2 semicerc = sfert de cerc	$\pi/2$	(unghi drept)
1/2 semicerc	$\pi/4$	
1/3 semicerc	$\pi/3$	

Funcţiile sin , cos , tg definite geometric

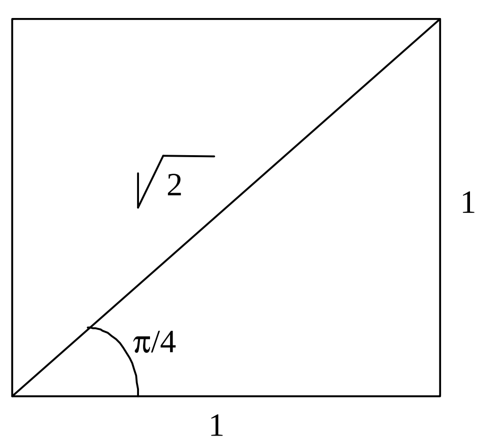


$$\sin\alpha = \frac{AB}{BC} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{AC}{BC} \quad , \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{AC}$$

Dacă unghiul $\alpha \to 0$, atunci $A_1B_1 \to 0$ şi deci
$\sin 0 = 0$, iar din $\sin^2 0 + \cos^2 0 = 1$ deducem $\cos 0 = 1$
Dacă unghiul $\alpha \to \pi/2$, atunci $C_2A_2 \to 0$ şi deci
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$, iar din $\sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = 1$ deducem $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$$\sin 0 = 0 \quad , \quad \cos 0 = 1 \quad , \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad , \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

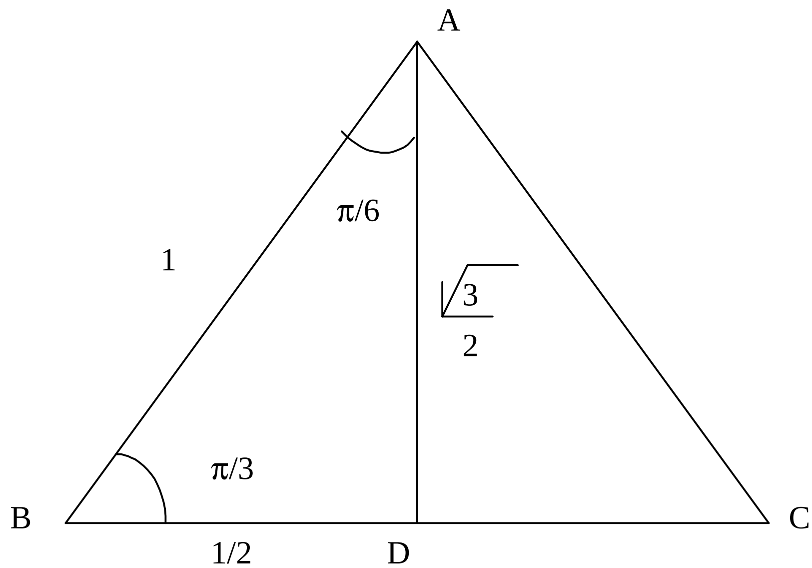
Putem obţine unghiul $\frac{\pi}{4}$ considerând un pătrat şi o diagonală a pătratului.
Dacă latura pătratului are lungime 1 , atunci (conform teoremei lui Pitagora)
diagonala are lungime $= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



şi obţinem valorile corespunzătoare pentru sin , cos , tg

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

Putem obţine unghiul $\frac{\pi}{3}$ considerând un triunghi echilateral ΔABC şi o înălţime (mediană) AD



Dacă latura $AB = 1$, atunci $BD = 1/2$ şi conforma teoremei lui Pitagora

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

şi obţinem valorile corespunzătoare pentru sin , cos , tg

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad , \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

<u>Funcţii trigonometrice</u> - <u>definite ca sume de serii de puteri</u>

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + ...$$

În această formă, este mai uşor de observat că

$$\sin 0 = 0 \quad , \quad \cos 0 = 1$$

Formule Algebrice

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ...ab^{n-2} + b^{n-1})$$
$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ...x + 1)$$
$$1 + x + x^2 + .. + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \quad \text{pentru} \quad x \neq 1$$

Numărul $a \in \mathbb{R}$ este <u>rădăcină de ordin k</u> pentru polinomul $P(x)$ dacă şi numai dacă

$$P(x) = (x-a)^k Q(x) \quad \text{şi} \quad Q(a) \neq 0$$

sau echivalent

$$P(a) = 0 \ , \ P'(a) = 0 \ , \ P''(a) = 0 \ , \ .... \ , \ P^{(k-1)}(a) = 0 \ \text{ şi } \ P^{(k)}(a) \neq 0$$

<u>Observaţie</u>.

Scrierea sub formă de fracţie $\frac{A}{B} = C$ reprezintă de fapt relaţia $A = B \cdot C$

<u>Pentru $A = 1$</u> , interpretăm relaţia $B \cdot C = 1$ în sensul că B şi C sunt inversabile.
(B este inversul lui C şi C este inversul lui B)

<u>Dacă $B = 0$</u> , atunci $A = B \cdot C$ este posibilă numai dacă $A = 0$,
dar relaţia $0 = 0 \cdot C$ este adevărată pentru orice $C \in \mathbb{R}$
prin urmare "fracţia" $\frac{0}{0}$ nu reprezintă un anumit număr unic , se spune că "$\frac{0}{0}$" nu are sens
<u>Dacă $A \neq 0$</u> şi <u>$B = 0$</u> relaţia $0 \neq A = 0 \cdot C = 0$ este falsă.

Aceste observaţii simple, justifică de ce anume o fracţie de tip " $\frac{A}{0}$ " nu are sens.