Cuprins

Probleme rezolvate de analiză matematică
1.Calcul diferenţial

Liliana Bucur

2001

Preface

Această culegere se doreşte a fi, în primul rând, un răspuns la necesităţile studenţilor din anul întâi, la nesiguranţa lor în acest început de drum: facultatea. Ea însă poate fi abordată foarte bine şi de către elevii de liceu, precum şi de către studenţii ultimului an, care se pregătesc pentru examenul de licenţă.

Cartea este rodul unei experienţe de seminar , în care am contabilizat cele mai frecvente greşeli şi cele mai dese surse de confuzii. Acestea au fost punctate pe parcursul întregii lucrări. Am încercat, de asemenea, fixarea noţiunilor mai importante prin exemple şi contraexemple.

Culegerea este structurată în opt capitole, fiecare dintre ele cuprinzând , gradat, diverse probleme rezolvate, de la exerciţii clasice, cu un ridicat nivel de generalitate, la probleme deosebite, de concurs, care necesită abordări rupte de rutină. Fiecare capitol are un paragraf de probleme propuse cu scopul de a cimenta metodele prezentate, dar prezentate şi ca o provocare celor dornici de progrese.

Suportul teoretic al acestei culegeri este cursul de analiză matematică din anul I al Facultăţii de Matematică , al prof. dr. Constantin P. Niculescu, căruia îi sunt recunoscătoare şi îi mulţumesc pe această cale .

In speranţa că această lucrare va fi un sprijin real tinerilor dornici să descifreze farmecul matematicii, autoarea doreşte succes tuturor cititorilor şi le mulţumeşte celor care au sprijinit-o în realizarea acesteia.

Martie, 2002

Autoarea

Capitolul 1

Mulţimea numerelor reale

Acest capitol abordează câteva aspecte legate de teoria mulţimilor. Vom exemplifica aici noţiunile de mulţime mărginită, supremum, infimum unei mulţimi, precum şi supremum sau infimum unei funcţii.

1.1 Probleme rezolvate

Mulţimea numerelor reale este un corp comutativ total ordonat, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ care verifică axioma elementului separator:

Axioma 1 *Pentru orice pereche ordonată* (A, B) *de submulţimi nevide ale lui* $\mathbb{R}$ *cu proprietatea că* $a \leq b$ *pentru orice* $a \in A$ *şi orice* $b \in B$ *există* $c \in \mathbb{R}$ *cu* $a \leq c \leq b$ *pentru orice* $a \in A$ *şi orice* $b \in B$.

Definiţie 1 *O mulţime A de numere reale este* ***mărginită superior*** *dacă există un majorant al lui A, adică există* $M \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $a \leq M$ *pentru orice* $a \in A$.

O mulţime A de numere reale este ***mărginită inferior*** *dacă există un minorant al lui A, adică există* $m \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $a \geq m$ *pentru orice* $a \in A$.

Definiţie 2 *Fie A o mulţime de numere reale .*

Spunem că $\alpha \in \mathbb{R}$ *este* ***supremum (marginea superioară)*** *pentru A dacă:*

1) α *este un majorant pentru A;*

2) α *este cel mai mic majorant: pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $a_\varepsilon \in A$ *astfel ca* $a_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$.

Spunem că $\beta \in \mathbb{R}$ *este* ***infimum (margine inferioară)*** *pentru A dacă:*

1) β *este un minorant pentru A;*

2) α *este cel mai mare minorant: pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $a_\varepsilon \in A$ *astfel ca* $a_\varepsilon < \beta + \varepsilon$.

Principiul marginii superioare: Orice mulţime majorată de numere reale are un supremum real.

Exerciţiu 1 *Fie* $A, B \subset \mathbb{R}$. *Definim suma acestor mulţimi prin:*

$A + B = \{a + b/ \quad a \in A, \quad b \in B\}$.

Arătaţi că dacă A şi B sunt mărginite, atunci $A + B$ *este mărginită şi* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, *iar* $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

Demonstraţie 1 *Fie* $\alpha_1 = \sup A$ *şi* $\alpha_2 = \sup B$. *Atunci:*

$a \leq \alpha_1$ *şi* $b \leq \alpha_2$ *pentru orice* $a \in A$ *şi orice* $b \in B$. *Prin adunare obţinem că* $a + b \leq \alpha_1 + \alpha_2$,*pentru orice* $a \in A$ *şi orice* $b \in B$.

În concluzie, $\alpha_1 + \alpha_2$ *este un majorant pentru mulţimea* $A + B$.

Fie $\varepsilon > 0$; *rezultă că există* $a_\varepsilon \in A$ *astfel ca* $a_\varepsilon > \alpha_1 - \varepsilon/2$ *şi există* $b_\varepsilon \in B$ *astfel ca* $b_\varepsilon > \alpha_2 - \varepsilon/2$

Adunând obţinem că $a_\varepsilon + b_\varepsilon > \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon$.

În concluzie, $\alpha_1 + \alpha_2$ *este* $\sup(A + B)$. *Analog se demonstrează pentru infimum.*

Exerciţiu 2 *Fie* $A \subset \mathbb{R}$ *şi* $x \in \mathbb{R}_+$.*Definim produsul dintre un număr şi o mulţime ca:*

$x \cdot A = \{x \cdot a/ \quad a \in A\}$

Arătaţi că dacă A este mărginită, atunci şi $x \cdot A$ *este mărginită şi*

$\sup(x \cdot A) = x \cdot \sup A$, $\inf(x \cdot A) = x \cdot \inf(A)$.

Demonstraţie 2 *Fie* $\alpha = \sup A$. *Atunci:*

$a \leq \alpha$ *pentru orice* $a \in A$. *Rezultă că* $x \cdot a \leq x \cdot \alpha$,*pentru orice* $a \in A$. *În concluzie,* $x \cdot \alpha$ *este un majorant pentru mulţimea* $x \cdot A$.

Fie $\varepsilon > 0$; *rezultă că există* $a_\varepsilon \in A$ *astfel ca* $a_\varepsilon > \alpha - \varepsilon/x$. *Înmulţind cu* x *obţinem că* $x \cdot a_\varepsilon > x \cdot \alpha - \varepsilon$.

În concluzie, $x \cdot \alpha$ *este* $\sup(x \cdot A)$. *Analog se demonstrează pentru infimum.*

Exerciţiu 3 *Fie A şi B două mulţimi de numere reale. Dacă* $B \subset A$ *atunci* $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$

Demonstraţie 3 *Fie* $b \in B$, *atunci* $b \in A$, *prin urmare* $\inf A \leq b \leq \sup A$. *Deci* $\inf A$ *este un minorant pentru mulţimea* B. *Cum* $\inf B$ *este cel mai mare minorant pentru* B *rezultă că* $\inf B \geq \inf A$. *Analog pentru supremum.*

Exerciţiu 4 *Fie* $A, B \subset \mathbb{R}+$. *Definim produsul acestor mulţimi prin:*

$A \cdot B = \{a \cdot b/ \quad a \in A, \quad b \in B\}$.

Arătaţi că dacă A şi B sunt mărginite, atunci $A \cdot B$ *este mărginită şi* $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$, *iar* $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$.

Demonstraţie 4 *Fie* $a \in A$. *Mulţimea* $a \cdot B$ *este inclusă în* $A \cdot B$, *deci folosind exerciţiul precedent rezultă că* $\inf(A \cdot B) \leq \inf(a \cdot B) = a \cdot \inf B$. *Această inegalitate fiind adevărată pentru orice* $a \in A$, *rezultă că* $\inf(A \cdot B)$ *este un minorant pentru mulţimea* $(\inf B) \cdot A$, *deci* $\inf(A \cdot B) \leq \inf((\inf B) \cdot A) = \inf B \cdot \inf A$.

Pentru inegalitatea inversă să observăm că $\inf A \cdot \inf B \leq a \cdot b$, *pentru orice* $a \in A$ *şi pentru orice* $b \in B$, *deci* $\inf A \cdot \inf B$ *este un minorant pentru mulţimea* $A \cdot B$, *prin urmare* $\inf(A \cdot B) \geq \inf A \cdot \inf B$.

Exerciţiu 5 *Fie A şi B două mulmi de numere reale. Arătaţi că*

$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ *şi* $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

Demonstraţie 5 *Deoarece* $A \subset A \cup B$ *şi* $B \subset A \cup B$ *rezultă că* $\inf(A \cup B) \leq \inf A$ *şi* $\inf(A \cup B) \leq \inf B$, *deci* $\inf(A \cup B) \leq \min(\inf A, \inf B)$.

Pentru inegalitatea inversă : fie $x \in A \cup B$, rezultă că $x \in A$ sau $x \in B$, deci $\inf A \leq x$ sau $\inf B \leq x$, deci $\min(\inf A, \inf B) \leq x$, pentru orice $x \in A \cup B$. Cum $\inf(A \cup B)$ este cel mai mare minorant rezultă că $\inf(A \cup B) \geq \min(\inf A, \inf B)$.

Exerciţiu 6 *Să se determine* $\inf A$ *şi* $\sup A$ *pentru mulţimile următoare:*

i) $A = \{\frac{m}{n} \quad / \quad m, n \in \mathbb{N}$ *şi* $0 \leq m < n\}$

ii) $A = \{\frac{(-1)^n}{n} \quad / \quad n \in \mathbb{N}^*\}$

iii) $A = \{\{(2+\sqrt{3})^n\} \quad / \quad n \in \mathbb{N}\}$, *unde* $\{\cdot\}$ *reprezintă partea fracţionară a unui număr.*

Demonstraţie 6 *i) Observăm că* 0 *aparţine mulţimii* A *, iar celelalte elemente sunt pozitive, deci* $\inf A = 0$.

Vom demonstra că $\sup A = 1$ *. Deoarece* $m < n$ *rezultă că* 1 *este un majorant pentru A. Fie* $\varepsilon > 0$. *Alegem* $n \in \mathbb{N}$ *astfel ca* $\frac{1}{n} < \varepsilon$ *(spre exemplu* $n = [\frac{1}{\varepsilon}]+1$*) şi* $m = n-1$. *Se observă imediat că* $\frac{n-1}{n} > 1-\varepsilon$, *deci* 1 *este cel mai mic majorant.*

ii)Se observă că $-1 \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{2}$ *şi* -1 *şi* $\frac{1}{2}$ *aparţin mulţimii, deci* $\sup A = \frac{1}{2}$, $\inf A = -1$.

iii)Folosind binomul lui Newton obţinem că:

$(2+\sqrt{3})^n = C_n^n 2^n + C_n^{n-1}2^{n-1}\sqrt{3} + C_n^{n-2}2^{n-2}\cdot 3 + ...$

$(2-\sqrt{3})^n = C_n^n 2^n - C_n^{n-1}2^{n-1}\sqrt{3} + C_n^{n-2}2^{n-2}\cdot 3 - ...$

Prin adunare obţinem $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n = 2\left(C_n^n 2^n + C_n^{n-2}2^{n-2}\cdot 3 + ...\right) = p \in \mathbb{N}$

Deci $(2+\sqrt{3})^n = p-\ (2-\sqrt{3})^n$

Deoarece $(2-\sqrt{3})^n \in [0,1)$ *rezultă că partea întreagă* $[\ (2+\sqrt{3})^n] = p-1$, *deci* $\{(2+\sqrt{3})^n\} = (2+\sqrt{3})^n - p + 1 = 1-\ (2-\sqrt{3})^n$.

Deoarece elementele mulţimii sunt numere pozitive, iar $0 \in A$, *rezultă că* $\inf A = 0$.

În continuare vom arăta că $\sup A = 1$.

Se observă imediat că 1 *este un majorant pentru A.*

Fie $\varepsilon > 0$; *trebuie să arătăm că există un număr natural* n *astfel ca* $1-(2-\sqrt{3})^n > 1-\varepsilon$. *Echivalent* $(2-\sqrt{3})^n < \varepsilon$, *deci* $n \ln\ (2-\sqrt{3}) < \ln\varepsilon$, *de unde* $n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln(2+\sqrt{3})}$ *(deoarece* $\ln(2-\sqrt{3})$ *este negativ). In concluzie, putem alege* $n = \max\left(\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln(2+\sqrt{3})}\right]+1, 1\right)$.

În continuare vom defini supremul şi infimul unei funcţii şi le vom exemplifica prin câteva exerciţii.

Definiţie 3 *O funcţie* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se zice* ***mărginită superior (inferior)*** *dacă mulţimea* $f(A)$ *este mărginită superior (inferior).*

Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ *este mărginită superior atunci numărul real* $\sup f(A)$ *se numeşte marginea superioară sau supremul funcţiei* f, *şi se notează* $\sup\limits_{a\in A} f(a)$.

Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ *este mărginită inferior atunci numărul real* $\inf f(A)$ *se numeşte marginea inferioară sau infimul funcţiei* f, *şi se notează* $\inf\limits_{a\in A} f(a)$.

Exerciţiu 7 *Explicitaţi funcţia* $f(x) = \inf\limits_{t\leq x} t^2$.

Demonstraţie 7 *Deoarece funcţia* $g(t) = t^2$ *este descrescătoare pe intervalul* $(-\infty, 0)$, *dacă* $x \leq 0$, $g(t) \geq g(x)$, *deci* $\inf\limits_{t\leq x} t^2 = g(x) = x^2$. *Dacă* $x \geq 0$, $\inf\limits_{t\leq x} t^2 = 0$.

Exerciţiu 8 *Determinaţi supremul şi infimul funcţiei* $f(x) = a\sin x + b\cos x$, *pe* $\mathbb{R}$.

Demonstraţie 8 *Observăm că* $f(x) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos x\right) \cdot \sqrt{a^2+b^2}$.

Dacă α *este ales astfel încât* $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, *un calcul elementar arată că* $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$.

Astfel funcţia devine $f(x) = (\cos\alpha \cdot \sin x + \sin\alpha \cdot \cos x) \cdot \sqrt{a^2+b^2} = \sin(\alpha + x) \cdot \sqrt{a^2+b^2}$

Deoarece mulţimea de valori a funcţiei $\sin(\alpha + x)$ *este* $[-1, 1]$, *rezultă că* $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -\sqrt{a^2+b^2}$, *iar* $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \sqrt{a^2+b^2}$.

Să reţinem de aici că $|f(x)| \leq \sqrt{a^2+b^2}$, *o inegalitate des folosită în aplicaţii.*

1.2 Probleme propuse

Exerciţiu 9 *Daţi exemple de mulţimi* A *şi* B *pentru care* $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$ *şi* $\inf(A \cdot B) \neq \inf A \cdot \inf B$.

Exerciţiu 10 *Aflaţi* $\inf A$ *şi* $\sup A$ *pentru următoarele mulţimi:*

i) $A = \{\frac{(-1)^n n}{n+1} \quad / \quad n \in \mathbb{N}\}$;

ii) $A = \{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \quad / \quad m, n \in \mathbb{N}^*\}$

iii) $A = \{\{\sqrt{n}\} \quad / \quad n \in \mathbb{N}\}$.

Exerciţiu 11 *Fie* $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *două funcţii mărginite inferior.*

i) Arătaţi că $f + g$ *este mărginită inferior şi*

$\inf\limits_{a\in A} f(a) + \inf\limits_{a\in A} g(a) \leq \inf\limits_{a\in A} (f+g)(a)$

ii) Dacă $f(A), g(A) \subset \mathbb{R}_+$, *atunci*

$\inf\limits_{a\in A} f(a) \cdot \inf\limits_{a\in A} g(a) \leq \inf\limits_{a\in A} (f \cdot g)(a)$

Capitolul 2

Şiruri de numere reale

În acest capitol vom evidenţia câteva metode de abordare a problematicii (vaste şi deschise, încă) a şirurilor de numere reale. Ideea este de a prezenta metode clasice, care au o acoperire largă şi care să constituie pentru student un "capital iniţial". Capitolul va fi structurat în două părţi: Probleme rezolvate (care să constituie un model de abordare) şi Probleme propuse (care să ofere studenţilor posibilitatea să jongleze cu modelele prezentate anterior).

2.1 Probleme rezolvate

În această secţiune vom studia aspectele legate de convergenţa, monotonia, mărginirea şirurilor, adică a conceptelor de bază. Vom ìncerca o prezentare diferenţiată a unor metode ìn funcţie de dificultatea şi de generalitatea problemelor. Această secţiune conţine şi un paragraf dedicat limitelor extreme .

Definiţie 4 *Se numeşte* şir de numere reale *orice funcţie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *cu* $f(n) = a_n \in \mathbb{R}$, *n fiind rangul sau locul în şir al termenului* a_n.

Vom nota şirul de termen general a_n *prin* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sau* $(a_n)_n$.

Definiţie 5 *Dacă* $n_0 < n_1 < ...n_k..$ *este un şir de numere naturale, atunci şirul definit de* $y_k = x_{n_k}$ *pentru orice k număr natural se numeşte subşir al şirului* $(x_n)_n$.

Definiţie 6 *Un şir* $(a_n)_n$ *se numeşte* stationar *dacă există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel ca* $a_n = a_{n_0}$ *pentru orice* $n \geq n_0$.

Un şir $(a_n)_n$ *se numeşte* constant *daca* $a_n = a$ *pentru orice număr natural n.*

Un şir $(a_n)_n$ *se numeşte* periodic *dacă există* $k\in \mathbb{N}$ *astfel ca* $a_{n+k} = a_n$ *pentru orice* $n\in \mathbb{N}$.

Exemplu 1 *:*

1) Sirul definit de relaţia $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, *adică* $\frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \ldots$ *este un şir de numere reale.*

2) Sirul definit prin $a_n = \left[1 + \frac{3}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$, *unde* $[\cdot]$ *reprezintă partea întreagă, este staţionar deoarece* $a_1 = 4, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 2, \quad a_n = 1$ *pentru orice* $n\geq 4$.

3) Sirul $a_n = (-1)^n$ este periodic deoarece $a_{n+2} = a_n$ pentru orice număr natural n.

4) Pentru şirul $a_n = \frac{1}{2^n}$, $x_n = a_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}}$ este un subşir, numit subşirul termenilor de rang impar.

Trei caracteristici mai importante se studiază legat de şirurile de numere: marginirea, monotonia şi convergenţa.

Definiţie 7 *Un sir $(a_n)_n$ se numeşte:*
*1.*mărginit *dacă există $M > 0$ astfel ca $|a_n| \leq M$.*
2. crescător *dacă $a_n \leq a_{n+1}$ pentru orice număr natural n;*
descrescător dacă $a_n \geqslant a_{n+1}$ pentru orice număr natural n;
monoton dacă este crescător sau descrescător.

Example 1 *1) Sirul definit de relaţia $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, este un şir mărginit de numere reale, deoarece termenii săi se găsesc în intervalul $[-1, 1]$. Acesta nu este monoton.*
2) Sirul definit prin $a_n = n$ este monoton crescător, fără a fi mărginit.
3) Sirul $a_n = \frac{1}{n}$ este monoton descrescător si mărginit.

Noţiunea de limită este foarte intiutivă şi naturală. Înainte de a da definiţia riguroasă vom face un mic experiment.

Să calculăm cu ajutorul calculatorului câţiva termeni ai şirului definit de relaţia $a_{n+1} = \cos a_n$ pentru orice număr natural n, iar $a_1 = 1$. Obţinem următoarele valori:
$a_1 = \cos 1 = 0,5403$
$a_2 = \cos a_1 = 0,85755$
$a_3 = \cos a_2 = 0,65429$
$a_4 = 0,79348$
$a_5 = 0,70137$
$a_{17} = 0,73876$
$a_{18} = 0,7393$
$a_{19} = 0,73894$
$a_{20} = 0,73918$
Este foarte clar acum că aceste valori se apropie de numărul 0,73. În capitolele următoare vom arăta că acest şir are o limită a cărei valoare se rotunjeşte la numărul 0,73. Pentru aceasta vom vedea ce este un şir convergent, care este definiţia limitei unui şir şi vom evidenţia metode de calcul a limitei unui şir.

Fie $(a_n)_n$ un şir de numere reale şi fie $a \in \mathbb{R}$. Spunem că a este *limita* şirului $(a_n)_n$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq N$ să avem $|a_n - a| < \varepsilon$.

Spunem că limita şirului $(a_n)_n$ este $+\infty$ (respectiv $-\infty$) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq N$ să avem $a_n > \varepsilon$ (respectiv $a_n < -\varepsilon$).

Se poate arăta imediat că:
Un sir de numere reale are limita a dacă si numai dacă orice subsir al său are limita a.

Spunem că un şir este *convergent* dacă are limită finită.

Uneori aflarea limitei unui şir se reduce la un calcul algebric :

Exemplu 2 *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+\sqrt{4k^2-1}}}$.

Demonstraţie 9 *Amplificând cu conjugata obţinem:*
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+\sqrt{4k^2-1}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2k-\sqrt{4k^2-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4k-2\sqrt{4k^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{2n+1}-1\right)\underset{n\to\infty}{\rightarrow}\infty.$

Evident, definiţia constituie o primă modalitate de calcul a limitei unui şir.

Exemplu 3 *Arătaţi că* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0.$

Demonstraţie 10 *Fie* $\varepsilon > 0$. $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, *deci putem alege* $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$.

În mod analog se poate arăta că:
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p} = 0$ daca p este strict pozitiv si este ∞ daca p este strict negativ.
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an+b}{cn+d} = \frac{a}{c}$
În general, limita unui şir de forma $\frac{P(n)}{Q(n)}$ unde P si Q sunt două polinoame este:
- 0 daca gradul lui P este mai mic decât gradul lui Q;
- este $\pm\infty$ dacă gradul lui P este mai mare decât gradul polinomului Q;
- este $\frac{a_k}{b_k}$ dacă cele două polinoame au acelasi grad k, iar coeficientii lor dominanti sunt a_k si b_k.

Aceasta proprietate se foloseste, spre exemplu pentru următoarele exercitii:

Exemplu 4 *Calculati limita sirului* $a_n = \frac{(n-1)!+(n-2)!}{(n-3)!\cdot(3n^2-1)}$.

Demonstraţie 11 $a_n = \frac{(n-2)!\cdot(n-1+1)}{(n-3)!\cdot(3n^2-1)} = \frac{(n-2)\cdot n}{3n^2-1} = \frac{1}{3}$

Exemplu 5 *Studiati convergenta sirului* $a_n = \frac{n}{n+1}\cdot\cos\frac{n\pi}{3}$.

Demonstraţie 12 *În functie de valorile functiei cos distingem următoarele subsiruri:*
$a_{6n} = \frac{6n}{6n+1}\cdot\cos 2n\pi = \frac{6n}{6n+1}$, *care are limita 6.*
$a_{6n+1} = \frac{6n+1}{6n+2}\cdot\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{6n+1}{6n+2}\cdot\frac{1}{2}$,*având limita* $\frac{1}{2}$
$a_{6n+2} = \frac{6n+2}{6n+3}\cdot\cos\left(2n\pi+\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6n+2}{6n+3}\cdot\frac{-1}{2}$, *limita sa fiind* $\frac{-1}{2}$
$a_{6n+3} = \frac{6n+3}{6n+4}\cdot\cos\left(2n\pi+\pi\right) = -\frac{6n+3}{6n+4}$ *cu limita -1.*
$a_{6n+4} = \frac{6n+4}{6n+5}\cdot\cos\left(2n\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{6n+4}{6n+5}\cdot\frac{-1}{2}$, *având limita* $\frac{-1}{2}$.
$a_{6n+5} = \frac{6n+5}{6n+6}\cdot\cos\left(2n\pi+2\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{6n+5}{6n+6}\cdot\frac{1}{2}$, *cu limita* $\frac{1}{2}$
Observăm că aceste subsiruri au limite diferite, deci sirul nu este convergent.

Deci, o primă metodă de a arăta convergenta unui şir este folosind definitia.
Această metodă prezintă două inconveniente: necesită cunoaşterea prealabilă a limitei, şi poate induce dificultăţi de calcul al rangului N. De aceea este mai puţin utilizată în practică, folosindu-se mai degrabă atunci când dorim să arătăm că un şir *nu are limita a*. Din această cauză apare necesitatea criteriilor de convergenţă. Vom exemplifica în continuare aceste criterii de convergenţă:

2.1.1 Criteriul cleştelui

Fie $(a_n)_n, (b_n)_n$ şi $(c_n)_n$ *trei şiruri de numere reale astfel încât există* $N \in N$ *astfel ca* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *pentru orice* $n \geq N$. *Atunci*:

i) dacă $(a_n)_n$ *şi* $(c_n)_n$ *sunt convergente şi au aceeaşi limită* a, *atunci şi* $(b_n)_n$ *este convergent şi are tot limita* a;

ii) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$;

iii) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Exemplu 6 *Fie* $a_n = \frac{\sin n}{n}$; *observăm că* $0 \leq \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$ *şi cum* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, *rezultă* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Observaţie 1 *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ *nu rezultă totdeauna că* $a_n \to a$. Pr*oprietatea este adevărată dacă* $a = 0$.

Exemplu 7 *Fie* $a_n = \Sigma_{k=1}^n \frac{\sin k}{n^2+k}$; *Observăm că* $0 \leq \Sigma_{k=1}^n \frac{|\sin k|}{n^2+k} \leq \Sigma_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k} \leq \Sigma_{k=1}^n \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \to 0$.

Exemplu 8 *Aflaţi limita şirului* $a_n = \Sigma_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k}$.

Demonstraţie 13 *Deoarece* $\frac{k}{n^2+n} \leq \frac{k}{n^2+k} \leq \frac{k}{n^2+1}$ *rezultă că* $\Sigma_{k=1}^n \frac{k}{n^2+n} \leq a_n \leq \Sigma_{k=1}^n \frac{k}{n^2+1}$, *deci*

$\frac{1}{n^2+n}\Sigma_{k=1}^n k \leq a_n \leq \frac{1}{n^2+1}\Sigma_{k=1}^n k$, *adică*

$\frac{1}{n^2+n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$. *Cum*

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$, *rezultă că* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Criteriul cleştelui stă la baza unei reguli foarte des folosite "Produsul dintre un şir care tinde la zero şi un şir mărginit, are limita zero".Intr-adevăr, dacă $a_n \to 0$ şi $(b_n)_n$ este mărginit, avem :

$0 \leq |a_n b_n| \leq M |a_n| \to 0$, deci $a_n b_n \to 0$.

Exemplu 9 *Studiaţi convergenţa şirului* $a_n = \frac{n+\cos n}{n-\cos n}$.

Demonstraţie 14 *Acest şir se mai poate scrie* $a_n = \frac{1+\frac{\cos n}{n}}{1-\frac{\cos n}{n}}$, *de unde se observă că limita sa este* 1, *deoarece* $\frac{\cos n}{n} \to 0$, *ca produsul dintre un şir care tinde la zero, anume* $\frac{1}{n}$ *şi unul mărginit,* $(\cos n)_n$.

Este bine de arătat aici că nu există limita şirului $x_n = \sin n$, şi nici limita şirului $y_n = \cos n$. Demonstraţia se face prin reducere la absurd. Presupunem că există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Deoarece $\cos n = \frac{\sin 2n}{2\sin n}$, dacă $l \neq 0$,atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = \frac{1}{2}$. Dar $\cos 2n = 2\cos^2 n - 1$, de unde prin trecere la limită obţinem că $\frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1$, adică $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, ceea ce este absurd. Rămâne o singură posibilitate, anume $l = 0$. Dar $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin 1 \cos n$, deci trecând la limită obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$, ceea ce este în contradicţie cu relaţia $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$.

Aceeaşi aborbare este recomandată şi pentru următorul şir:

Exemplu 10 *Să se studieze convergenţa şirului de termen general* $a_n = \sum_{k=1}^n \ln|\sin k|$.

Demonstraţie 15 *Se observă că şirul este descrescător deoarece* $a_n - a_{n-1} = \ln|\sin n| < 0$. *Deci există* $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$. *Dacă am presupune că* $l \in \mathbb{R}$, *ar rezulta că* $a_n - a_{n-1} \to 0$, *adică* $\ln|\sin n| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Longrightarrow |\sin n| \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

Deoarece $\sin^2 n + \cos^2 n = 1 \Longrightarrow \cos^2 n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. *Dar* $\cos 2n = 2\cos^2 n - 1$, *de unde prin trecere la limită ar rezulta* $0 = -1$. *Deci presupunerea făcută este falsă. Sirul fiind descrescător rezultă că* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Exemplu 11 *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Demonstraţie 16 *Pornim de la egalitatea* $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$, *de unde se observă că*

$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$, *deci*

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k}}$,

adică dacă notăm cu $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$, *avem* $a_{n+1} - 1 < 2\sqrt{n+1} - 2 < a_n$, *deci*

$2\sqrt{n+1} - 2 < a_n < 2\sqrt{n+1} - 1$, *de unde rezultă că*

$\frac{2\sqrt{n+1}-2}{n^\alpha} < \frac{a_n}{n^\alpha} < \frac{2\sqrt{n+1}-1}{n^\alpha}$.

Se observă că :

-dacă $\alpha > \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n+1}-2}{n^\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n+1}-1}{n^\alpha} = 0$, *deci, folosind criteriul cleştelui rezultă că* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 0$;

-dacă $\alpha < 1/2$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n+1}-2}{n^\alpha} = \infty$, *deci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = \infty$;

-dacă $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n+1}-2}{n^\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n+1}-1}{n^\alpha} = 2$, *adică* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 2$.

Exemplu 12 *Calculaţi limita şirului* $a_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1\right)$.

Demonstraţie 17 *Amplificând cu conjugata obţinem că*

$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1} \le \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \cdot \frac{n+1}{2n}$

Analog,

$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1} \ge \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \cdot \frac{n+1}{2n}$.

În concluzie,

$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \cdot \frac{n+1}{2n} \le a_n \le \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \cdot \frac{n+1}{2n}$

Folosind acum criteriul cleştelui obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$.

Exemplu 13 *Arătaţi că* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) = \infty$.

Demonstraţie 18 *Observăm imediat că şirul este crescător, şi*

$a_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n} =$

$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + ... + \frac{1}{2^n}\right) \ge$

$\ge 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^n} + ... + \frac{1}{2^n}\right) =$

$= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + ...2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \to \infty.$
Deci, şirul este nemărginit, el fiind şi crescător, rezultă că tinde la infinit.

O altă metodă de abordare a unui şir o poate constitui următoarea propoziţie:

Propoziţie 1 *Fie $(a_n)_n$ un şir de numere pozitive astfel încât există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.*

a) Dacă $l < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
b) Dacă $l > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
c) Atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = l$.

Demonstraţie 19 *a) Deoarece $l < 1$, rezultnă că există $\varepsilon > 0$ astfel ca $l+\varepsilon < 1$. Pentru acest ε scriem că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, deci există $N \in \mathbf{N}$ astfel ca pentru orice $n \geq N$ să avem $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon$, adică $l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon \qquad (*)$, pentru orice $n \geq N$. Rezultă că:*
$\frac{a_{N+1}}{a_N} < l + \varepsilon$
$\frac{a_{N+2}}{a_{N}+1} < l + \varepsilon$
.
.
$\frac{a_{N+p+1}}{a_{N}+p} < l + \varepsilon$, de unde obţinem că $0 < a_{N+p+1} < (l+\varepsilon)^p a_N$. Deoarece $(l+\varepsilon)^p \to \infty$, rezultă , folosind criteriul cleştelui, că $a_{N+p+1} \underset{p\to\infty}{\to} 0$.

b) Acest caz se reduce la cazul $l < 1$, considerând $b_n = \frac{1}{a_n}$.

c) Din (*) rezultă că, în acelaşi mod ca la a) că
$(l-\varepsilon)^{\frac{p}{N+p+1}} \cdot (a_N)^{\frac{1}{N+p+1}} < (a_{N+p+1})^{\frac{1}{N+p+1}} < (l+\varepsilon)^{\frac{p}{N+p+1}} \cdot (a_N)^{\frac{1}{N+p+1}}$, de unde prin trecere la limită după $p \to \infty$ rezultă c).

Exemplu 14 *Dacă $a_n = \frac{2^n}{n!}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Exemplu 15 *Pentru $a_n = \frac{4^n}{n}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{n+1} = 4 > 1, \text{ de unde } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Exemplu 16 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n! \sin\frac{\pi}{2} \cdot ... \cdot \sin\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \sin\frac{\pi}{2} \cdot ... \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{\pi}{n+1}}{n! \sin\frac{\pi}{2} \cdot ... \cdot \sin\frac{\pi}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}} \cdot \pi = \pi$.

Exemplu 17 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

O altă modalitate de a studia convergenţa unui şir se bazează pe proprietatea de completitudine a spaţiului numerelor reale: orice şir Cauchy de numere reale este convergent.

Definiţie 8 *Un şir $(a_n)_n$ este şir Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n, m \geq N$ să avem $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*

În cazul şirurilor de numere reale orice şir Cauchy este convergent.

Exemplu 18 *Studiaţi convergenţa şirului de termen general* $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k(k+1)}$.

Demonstraţie 20 $|a_{n+p} - a_n| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$
$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} =$
$= \frac{p}{(n+1)(n+p+1)} < \frac{1}{n+1}$.

Deoarece $\frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *rezultă că pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un rang* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca pentru orice* $n \geq N$ *avem* $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$*, ceea ce implică* $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$*, pentru orice* $n \geq N$ *şi pentru orice* $p \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Lema Stolz-Cesaro

În continuare vom demonstra lema Stolz-Cesaro, care permite rezolvarea unor nedeterminări de forma $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$:

Lema 1 *(Stolz-Cesaro) Fie* $(a_n)_n$ *şi* $(b_n)_n$ *două şiruri de numere reale cu următoarele proprietăţi:*
1) $(b_n)_n$ *este crescător la* ∞;
2) Există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbf{R}}$.
Atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Demonstraţie 21 *Presupunem că* $l \in \mathbf{R}$*. Atunci pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* N *natural astfel ca pentru orice* $n \geq N$ *să avem* $\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} - l\right| < \varepsilon$*. Deci*
$(l-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1} - a_n < (l+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)\,,\ n \geq N$*. Rezultă că:*
$(l-\varepsilon)(b_{N+1}-b_N) < a_{N+1} - a_N < (l+\varepsilon)(b_{N+1}-b_N)$
$(l-\varepsilon)(b_{N+2}-b_{N+1}) < a_{N+2} - a_{N+1} < (l+\varepsilon)(b_{N+2}-b_{N+1})$
.
.
$(l-\varepsilon)(b_{N+p+1}-b_{N+p}) < a_{N+p+1} - a_{N+p} < (l+\varepsilon)(b_{N+p+1}-b_{N+p})$

Prin adunare obţinem că $(l-\varepsilon)(b_{N+p+1}-b_N) < a_{N+P+1} - a_N < (l+\varepsilon)(b_{N+P+1}-b_N)$, *deci*
$(l-\varepsilon)\left(1 - \frac{b_N}{b_{N+p+1}}\right) < \frac{a_{N+p+1}}{b_{N+p+1}} - \frac{a_N}{b_{N+p+1}} < (l+\varepsilon)\left(1 - \frac{b_N}{b_{N+p+1}}\right) < l+\varepsilon$.

Dar, $(l-\varepsilon)\left(1 - \frac{b_N}{b_{N+p+1}}\right) = l - \varepsilon - (l-\varepsilon)\cdot\frac{b_N}{b_{N+p+1}} > l - 3\frac{\varepsilon}{2}$*, de la un rang, deoarece* $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{b_N}{b_{N+p+1}} = 0$.

Deci $l - 3\frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{N+p+1}}{b_{N+p+1}} - \frac{a_N}{b_{N+p+1}} < l + 3\frac{\varepsilon}{2}$*, adică*
$l - 3\frac{\varepsilon}{2} + \frac{a_N}{b_{N+p+1}} < \frac{a_{N+p+1}}{b_{N+p+1}} < l + 3\frac{\varepsilon}{2} + \frac{a_N}{b_{N+p+1}}$*. Cum şi* $\frac{a_N}{b_{N+p+1}} \to 0$*, rezultă că* $-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_N}{b_{N+p+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$*, de la un rang, deci*
$l - 2\varepsilon < \frac{a_{N+p+1}}{b_{N+p+1}} < l + 2\varepsilon$.

Cazul $l = \pm\infty$ *se rezolvă analog.*

Exemplu 19 *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

$a_n = 1 + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}$, $b_n = n\sqrt{n}$*, care este crescător la* ∞.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n})}{(n+1)^3-n^3}=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n})}{3n^2+3n+1}=\frac{2}{3}.$
rezultă deci că şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\frac{2}{3}.$

Observaţie 2 *Se pot formula două reciproce ale acestei leme, însă nici una nu este adevărată.*

Reciproca 1. *Fie $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ două şiruri de numere reale cu următoarele proprietăţi:*
1) $(b_n)_n$ este crescător la ∞;
2) Există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l\in\overline{\mathbf{R}}$.
Atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l.$
Contraexemplu: Fie $a_n=(-1)^n$ şi $b_n=n$. Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, dar

$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\{\begin{array}{c}-2,\ \text{daca } n \text{ impar}\\ 2,\ \text{daca } n \text{ par}\end{array}$, deci nu are limită.

Reciproca 2. *Fie $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ două şiruri de numere reale astfel încât există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\in\overline{\mathbf{R}}$. Atunci $(b_n)_n$ este crescător la ∞.*
Contraexemplu: $a_n=b_n=(-1)^n$. Se observă că $\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=1$, dar $(b_n)_n$ nu este nici crescător, nici nemărginit.
Totuşi, se poate demonstra că Reciproca 1devine adevărată dacă se adaugă condiţia:
3) Există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}\in\mathbf{R}^*\backslash\{1\}$.

Exemplu 20 *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$.

Se observă că este îndeplinită condiţia 1) din lemă.
Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\ \ln(n+1)-\ln n)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{n}=0.$
Deci, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0.$

Exemplu 21 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=2,$ *deoarece*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=2$$

Exemplu 22 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}-\frac{1}{p+1}\right)=\frac{1}{2},$ *deoarece*

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p(p+1)-(n+1)^{p+1}+n^{p+1}}{(n+1)^p-n^p}\cdot\frac{1}{p+1}=$
$\frac{1}{p+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^p(p+1)+C_p^1n^{p-1}(p+1)+C_p^2n^{p-2}(p+1)+...+p+1-n^{p+1}-C_{p+1}^1n^p-C_{p+1}^2n^{p-1}-...-1+n^{p+1}}{n^p+C_p^1n^{p-1}+C_p^2n^{p-2}+...+1-n^p}=$
$\frac{p(p+1)-C_{p+1}^2}{(p+1)C_p^1}=\frac{1}{2}.$

Exemplu 23 *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}.$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{n-1}=2.$

Să mai observăm că dacă notăm cu $b_n=\frac{2^n}{n}$,

atunci $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2n}{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}2>1$, de unde rezultă că $(b_n)_n$ este crescător, iar potrivit propoziţiei 11 avem $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$.

In concluzie sunt îndeplinite condiţiile lemei Stolz-Cesaro, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}\cdot\sum_{k=1}^n\frac{2^k}{k}=2$.

Exemplu 24 *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^1+2^2+...+n^n}{(n!)^2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n!)^2\cdot n(n+1)}=\infty$, deoarece dacă notăm $c_n=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n!)^2\cdot n(n+1)}$ un calcul simplu arată că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=e>1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$.

Exemplu 25 *Fie $(x_n)_n$ un şir definit de relaţia $x_{n+1}=x_n+e^{-x_n}$, $x_0\in\mathbb{R}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\ln n}=1$.*

Demonstraţie 22 *Deoarece $x_{n+1}-x_n=e^{-x_n}>0$, şirul $(x_n)_n$ este crescător. Dacă presupunem prin reducere la absurd că şirul $(x_n)_n$ este mărginit, atunci ar rezulta că el este convergent , deci ar avea o limită finită l , iar prin trecere la limită în relaţia de recurenţă, am avea $l=l+e^{-l}$, ceea ce este imposibil. Deci, $(x_n)_n$ fiind crescător şi nemărginit va avea limita ∞ , iar şirul definit de $y_n=e^{x_n}$ este şi el crescător la ∞. Observăm că $y_{n+1}=e^{x_{n+1}}=y_n\cdot e^{\frac{1}{y_n}}$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{n+1-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{y_n}}-1}{\frac{1}{y_n}}=1$. Potrivit lemei Stolz-Cesaro rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{n}=1$.*

Exemplu 26 *Se consideră şirul $(x_n)_n$ definit prin relaţia $x_{n+1}=\frac{x_n}{1+nx_n^2}$, $\quad x_1>0$. Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=l$ există şi este diferită de zero, atunci în mod necesar va fi egală cu unu.*

Demonstraţie 23 *Observăm că $\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n}+nx_n$, deci $nx_n=\frac{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}{n+1-n}$. Deci, există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}{n+1-n}=l\neq0$. In concluzie, sunt îndeplinite condiţiile lemei Stolz-Cesaro, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n}}{n}=l$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{nx_n}=l$. Deci $l=\frac{1}{l}$, iar şirul fiind de termeni pozitivi rezultă că $l=1$.*

2.1.3 Şiruri definite recurent

Sunt şirurile definite printr-o relaţie între doi, trei sau mai mulţi termeni ai şirului.

Recurenţe omogene

Ne vom ocupa în special de o relaţie de recurenţă de forma $a_{n+1}=f(a_n)$, unde funcţia f este reală, de variabilă reală. Deşi pare cazul cel mai simplu de recurenţă, ea poate genera uneori comportamente complexe.

O primă metodă de rezolvare a unei astfel de recurenţe constă în determinarea termenului general al şirului:

Exemplu 27 *Fie* $(x_n)_n$ *un şir definit de relaţia de recurenţă* $4x_{n+1} = 5x_n + 3\sqrt{x_n^2 - 4}$, $x_1 = \frac{5}{2}$.

a) Determinaţi termenul general al şirului şi calculaţi limita sa;

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{2^n}\right)^{x_n}$.

Demonstraţie 24 *a) Se demonstrează prin inducţie că* $x_n = 2^n + \frac{1}{2^n}$, *de unde rezultă că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Tot de aici rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{2^n} = 1$, deci la punctul b) avem nedeterminare $[1^\infty]$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{2^n}\right)^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{2n}}\right)^{\frac{2^{2n}+1}{2^n}} = \exp\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{2n}+1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{2n}}\right) = 1.$

O altă metodă de rezolvare a unei astfel de recurenţe poate fi teorema lui Weierstrass: *Orice şir monoton şi mărginit este convergent.*

Este posibilă aplicarea acestui criteriu dacă funcţia f este crescătoare.

Propoziţie 2 *Fie* $(a_n)_n$ *un şir definit de relaţia* $a_{n+1} = f(a_n)$ *pentru orice* n *număr natural. Dacă funcţia* f *este crescătoare atunci* $(a_n)_n$ *este monoton.*

Demonstraţie 25 *Dacă* $a_0 \le a_1$, *atunci* $f(a_0) \le f(a_1)$, *adică* $a_1 \le a_2$, *ş.a.m.d., deci şirul este crescător. Dacă* $a_0 > a_1$, *şirul va fi descrescător.*

Într-un astfel de caz rămâne de demonstrat doar mărginirea.

Exemplu 28 *Fie şirul definit de relaţia* $x_{n+1} = ax_n + b$, $x_0 = p$ *(recurenţă liniară).*

Demonstraţie 26 *Pentru acest tip de recurenţă se poate determina termenul general al şirului. Într-adevăr,*

$x_{n+1} = ax_n + b = a(ax_{n-1}+b)+b = a^2x_{n-1}+ab+b = a^3x_{n-2}+a^2b+ab+b = \ldots =$

$=a^{n+1}x_0 + b(a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1)$, *de unde rezultă că*

$x_n = a^n p + b\frac{a^n-1}{a-1}$

Acum se poate studia convergenţa şirului după cum a *este subunitar sau nu.*

Exemplu 29 *Studiaţi convergenţa şirului definit de relaţia* $a_{n+1} = \sin a_n$, *dacă* $a_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Demonstraţie 27 *Se arată prin inducţia că* $a_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$. *Deoarece pe acest interval funcţia* $\sin$ *este crescătoare, rezultă că şirul nostru este şi monoton (deoarece* $\sin x \le x$ *dacă* $x \ge 0$, *rezultă că* $a_1 \le a_0$, *deci şirul va fi descrescător).*

Dacă $a_0 \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ şirul îşi va schimba monotonia, deoarece $\sin x \ge x$ dacă $x \le 0$.

Exemplu 30 *Studiaţi convergenţa şirului* $a_{n+1} = \sqrt{a_n}(a_n+2)$, a_0 *fiind pozitiv.*

Demonstraţie 28 *Observăm că* $f(x) = \sqrt{x}(x+1)$ *este crescătoare, deci şirul este monoton. Un calcul elementar arată că* $a_0 < a_1$, *prin urmare şirul va fi crescător. Presupunând prin absurd că este şi mărginit ar rezulta că este convergent, iar prin trecere la limită în relaţia de recurenţă, ar rezulta că* f *are puncte fixe, ceea ce este fals. Deci, şirul este crescător şi nemărginit,adică are limita* ∞.

Exemplu 31 *Studiaţi convergenţa şirului* $(a_n)_n$ *definit de relaţia* $a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n + 4.$

Demonstraţie 29 *În acest caz funcţia este crescătoare pe intervalul* $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. *Observăm însă că* $x^2 - 3x + 4 > \frac{3}{2}$ *pentru orice* x *real. Deci, eventual cu excepţia lui* x_0, *termenii şirului se află în intervalul* $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, *de unde rezultă monotonia şirului* $(x_n)_n$. *Se observă uşor că* $f(x) \geq x$, *deci* $x_1 \geq x_0$, *adică şirul este crescător.*

Pentru a rezolva mărginirea se demonstrează prin inducţie că dacă $x_1 \leq 2$ *atunci* $x_n \leq 2$, *deci în acest caz şirul este monoton şi mărginit, iar limita este punctul fix al funcţiei, adică* 2; *iar dacă* $x_1 > 2$, *atunci* $x_n > 2$, *iar şirul este nemărginit (în caz contrar şirul ar fi crescător la* 2*). Deci, dacă* $x_1 > 2$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty.$

Următoarea întrebare este cum se schimbă monotonia şirului dacă funcţia f devine descrescătoare .Intr-un astfel de caz şirul nu va mai fi monoton, ci vom întâlni aşa numita bimonotonie: subşirul termenilor de rang par va avea o monotonie, cel al termenilor de rang impar altă monotonie. Sirul poate fi convergent dacă cele două subşiruri ”se adună” spre acelaşi punct.

Exemplu 32 *Fie şirul* $(x_n)_n$ *definit de relaţia* $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$, $x_0 > 0$. *Arătaţi că şirul nu este monoton, dar este convergent.*

Demonstraţie 30 *Si această recurenţă este de tipul* $x_{n+1} = f(x_n)$, *unde* $f(x) = \frac{1}{1+x}$. *De această dată însă funcţia* f *este descrescătoare şi aceasta va atrage faptul că şirul nu este monoton. Se poate demonstra totuşi că subşirurile de rang par, respectiv impar sunt monotone. Pentru aceasta comparăm* x_0 *cu* x_2. *Presupunem că* $x_0 < x_2$, *rezultă că* $x_0^2 + x_0 - 1 < 0$, *adică* $x_0 \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Deci, dacă $x_0 \in \left(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, *atunci* $x_0 < x_2$, *de unde* $f(x_0) > f(x_2)$, *adică* $x_1 > x_3$. *Continuând acest procedeu rezultă că* $x_2 < x_4$ *şi* $x_3 > x_5$, *deci vom obţine că subşirul* $(x_{2n})_n$ *este crescător, iar subşirul* $(x_{2n+1})_n$ *este descrescător. Cele două subşiruri sunt şi mărginite fiind cuprinse între* x_0 *şi* x_1, *deci sunt convergente. Fie* $l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$ *şi* $l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$. *Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem* $l_1 = \frac{1}{1+l_2}$ *şi* $l_2 = \frac{1}{1+l_1}$, *de unde rezultă că* $l_1 = l_2$, *deci şirul nostru este convergent.*

Exemplu 33 *Studiaţi convergenţa şirului definit prin* $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 4 - 4\sqrt{a_n}} + \sqrt{a_n + 9 - 6\sqrt{a_n}}$.

Demonstraţie 31 *Considerăm funcţia* $f(x) = |\sqrt{x} - 2| + |\sqrt{x} - 3|$. *Se observă că şirul din ipoteză verifică relaţia de recurenţă* $a_{n+1} = f(a_n)$.

Arătăm, mai întâi că pentru orice a_1 *există* n_0 *astfel încât* $f^{n_0}(a_1) \leq 4$:

Dacă $a_1 \in [0, 4]$ *atunci putem alege chiar* $n_0 = 0$.

Dacă $a_1 \in (4, 9]$, *atunci* $f(a_1) = 1 \leq 4$.

Dacă $a_1 \in (9, \infty)$ *demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că pentru orice* $n \in \mathbf{N}$ $f^n(a_1) > 9$, *deci* $a_n > 9$, *pentru orice* $n \in \mathbf{N}$. *Deoarece* $f(x) < x$ *pentru orice* $x \in (9, \infty)$, *rezultă că* $f(a_n) < a_n$, *pentru orice* $n \in \mathbf{N}$, *deci şirul este descrescător. Fiind şi mărginit inferior rezultă că este convergent . Trecând la limită în relaţia de recurenţă, limita sa* l *verifică ecuaţia* $f(x) = x$, *ceea ce este absurd, deoarece această ecuaţie nu are rădăcini în intervalul* $[9, \infty)$.

Neglijând eventual primii n_0 termeni, putem presupune că $a_1 \in [0,4]$. Pe acest interval funcţia f este descrescătoare. Punctul fix al aplicaţiei este $\alpha = 7 - 2\sqrt{6}$.

Dacă $a_1 < 7 - 2\sqrt{6}$, un calcul simplu arată că $a_1 < a_3 \Longleftrightarrow 8\sqrt{a_1} > -a_1^2 + 10a_1 - 5$, ceea ce este adevărat deoarece $a_1 \in (0, 7-2\sqrt{6}) \subset (0, 5-\sqrt{20})$, iar pe acest ultim interval membrul stâng este negativ, deci este mai mic decât $8\sqrt{a_1}$. In concluzie $a_1 < a_3$, iar funcţia f este descrescătoare, deci subşirul termenilor de rang par este descrescător, iar cel al termenilor de rang impar este crescător. Analog cu exemplul precedent rezultă că cele două subşiruri au aceeaşi limită, deci şirul este convergent la punctul fix , anume $7 - 2\sqrt{6}$.

Exemplu 34 *Studiaţi comvergenţa şirului $(a_n)_n$ definit prin relaţia $a_{n+1} = \frac{\lambda a_n}{a_n^2+1}$ pentru $\lambda \in [1,4]$.*

Demonstraţie 32 *Consierăm mai întâi cazul $a_1 > 0$ şi $\lambda \in [1,2]$.*

În acest caz funcţia care generează şirul este $f_\lambda(x) = \frac{\lambda x}{x^2+1}$. Aceasta are trei puncte fixe: $x_0 = 0$, $x_1 = \sqrt{\lambda - 1}$, $x_2 = -\sqrt{\lambda-1}$.

Dacă $a_1 \in (0, \sqrt{\lambda-1})$ se demonstrează prin inducţie că $f(a_1) > a_1$, deci $a_1 < a_2$. Cum pe acest interval f_λ este crescătoare, rezultă că şirul $(a_n)_n$ este crescător. Tot prin inducţie se arată că $a_n \in (0, \sqrt{\lambda-1}]$. In concluzie şirul este convergent, iar prin trecere la limită obţinem limita sa, $\sqrt{\lambda-1}$.

Dacă $a_1 \in [\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}, \infty)$, atunci $f(a_1) \in (0, \sqrt{\lambda-1}]$, iar de aici discuţia merge ca şi în cazul precedent.

Dacă $a_1 \in (\sqrt{\lambda-1}, \frac{1}{\sqrt{\lambda-1}})$, atunci $f(a_1) \in (\sqrt{\lambda-1}, 1)$ (am ţinut cont aici şi de faptul că $\lambda \in [1,2]$).Pe intervalul $(\sqrt{\lambda-1}, 1)$ funcţia f_λ este crescătoare şi $f(a_1) < a_1$, deci şirul va fi descrescător şi mărginit. Limita sa va fi tot $\sqrt{\lambda-1}$.

Dacă $\lambda \in [2,4]$, considerăm mai întâi că $a_1 \in (\sqrt{\lambda-1}, \infty)$. In acest caz se poate demonstra că $a_n \geq 1$ pentru orice $n \geq 3$. Pe intervalul $(1,\infty)$ funcţia f_λ este descrescătoare , iar $a_3 < a_1$(această inegalitate este echivalentă cu $a_1^4 + 2a_1^2 + 1 - \lambda^2 > 0$, adică $a_1^2 > \lambda - 1$, ceea ce este adevărat).Deci şirul va avea două subşiruri convergente la aceeaşi limită, $\sqrt{\lambda-1}$. ■

O altă modalitate de abordare a unei recurenţe se bazează pe teorema lui Banach de punct fix.

Teorema 1 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o contracţie (există o constantă $c \in [0,1)$ astfel ca $|f(x) - f(y)| \leq c\,|x-y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$). Atunci f are un punct fix unic, care se determină prin metoda aproximaţiilor succesive.*

Vom schiţa în continuare această metodă a aproximaţiilor succesive:

Pentru x_0 arbitrar ales construim şirul $(x_n)_n$ definit de relaţia de recurenţă $x_{n+1} = f(x_n)$. In ipoteza că f este contracţie se demonstrează că acesta este un şir Cauchy de numere reale, deci este convergent. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem că limita acestui şir este punct fix al aplicaţiei. Unicitatea acestui punct se bazează pe proprietatea de contracţie a funcţiei.

In concluzie, orice şir definit printr-o relaţie de forma $x_{n+1} = f(x_n)$ unde f este o contracţie, este convergent.

O clasă de contracţii este familia funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile cu $|f'(x)| < 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Observaţie 3 *Mulţimea numerelor reale se poate ìnlocui cu un interval ìnchis şi mărginit.*

Exemplu 35 *Să se arate că şirul* $(x_n)_n$ *definit prin* $x_{n+1} = \frac{1}{4+x_n^2}, n \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *este convergent..*

Demonstraţie 33 *Aceasta este o recureţă de tipul* $x_{n+1} = f(x_n)$ *unde* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$. *Un calcul elementar arată că* $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$, *iar* $f''(x) = \frac{6x^2-8}{(x^2+4)^2}$.

Un studiu al semnului derivatei a doua arată că $f'(x) \in [0, \frac{\sqrt{3}}{64}]$, deci derivata este subunitară. Prin urmare funcţia este o contracţie, deci şirul este convergent la punctul fix al funcţiei.

Exemplu 36 *Să se arate că şirul* $(x_n)_n$ *definit prin* $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), n \geq 0, x_0 > 0, a \in (0, \infty)$, *este convergent şi să se afle limita sa.*

Demonstraţie 34 *Se demonstrează prin inducţie că* $x_n \geq \sqrt{a}, \forall n \geq 1$

Fie $f : [\sqrt{a}, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2-a}{x^2}$.

Se observă că $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, *deci şirul este convergent la soluţia ecuaţiei* $f(x) = x$, *care este* $\sqrt{a}$.

Observaţie 4 *Acest exerciţiu constituie o metodă de aproximare pentru* $\sqrt{a}$, *iar următorul exemplu constituie o metodă de calcul computerizat pentru* $a^{\frac{1}{p}}$.

Exemplu 37 *Să se arate că şirul* $(x_n)_n$ *definit prin* $x_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + a \cdot (x_n)^{1-p}\right), \forall n \geq 0, x_0 > 0, a \geq 0, p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, *este convergent şi limita sa* $a^{\frac{1}{p}}$.

Toate exemplele anterioare se încadrează în acelaşi tip de recurenţă: un termen al şirului este funcţie numai de termenul său anterior, $a_{n+1} = f(a_n)$. Vom analiza acum situaţia ìn care un termen este funcţie de doi termeni anteriori, $x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1})$. Cea mai simplă situaţie de acest fel este aceea a unei funcţii g liniare. Să vedem ce se ìntâmplă ìn acest caz:

Fie şirul $(x_n)_n$ definit de relaţia de recurenţă $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, x_0 şi x_1 fiind date. Acestei relaţii de recurenţă i se asociază ecuaţia $x^2 = ax + b$, care se numeşte ecuaţia caracteristică a relaţiei.

Teorema 2 *Dacă ecuaţia caracteristică are două rădăcini reale* α *şi* β, *distincte, atunci termenul general al recurenţei este* $x_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$, *unde* c_1 *şi* c_2 *se află din condiţiile iniţiale.*

Exemplu 38 *(Lucas) Să se determine şirul* $(L_n)_n$ *definit prin :* $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, *iar* $L_{0=}2, L_1 = 1$.

Demonstraţie 35 *Ecuaţia caracteristică a şirului este* $x^2 = x + 1$, *care are rădăcinile* $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *şi* $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Deci termenul genaral al şirului este $L_n = c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. *Inlocuind* L_0 *şi* L_1 *obţinem* $c_1 = c_2 = 1$, *deci* $L_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Teorema 3 *Dacă ecuaţia caracteristică are o rădăcină dublă α, atunci termenul general al recurenţei este $x_n = c_1\alpha^n + n \cdot c_2 \cdot \alpha^n$.*

Exemplu 39 *Să se determine şirul $(x_n)_n$, astfel încât $x_{n+1} = 4x_n - 4x_{n-1}$.*

Demonstraţie 36 *Ecuaţia caracteristică a şirului $x^2 = 4x - 4$ are rădăcina dublă $\alpha = 2$, deci $x_n = c_1 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n$, iar din condiţiile iniţiale rezultă că $c_1 = 1$, iar $c_2 = 0$, deci $x_n = 2^n$.*

Teorema 4 *Dacă ecuaţia caracteristică are discriminantul negativ şi are rădăcinile $x_1 = R(\cos t + i \sin t)$ şi $x_2 = R(\cos t - i \sin t)$ atunci şirul va avea termenul general de forma $x_n = R^n(c_1 \cos nt + c_2 \sin nt)$.*

Exemplu 40 *Pentru o recurenţă de forma $x_{n+1} = 2x_n - 4x_{n-1}$, $x_0 = x_1 = 1$ se aplică teorema anterioară şi se obţine $x_n = 2^n \cos \frac{n\pi}{3}$.*

Exemplu 41 *Fie $(x_n)_n$ un şir definit de relaţia $x_{n+1} = \frac{x_n^4}{x_{n-1}^3}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$. Să se calculeze limita sa.*

Demonstraţie 37 *Aceasta nu este o recurenţă liniară, dar se poate determina termenul general al şirului.*

Observăm că $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^3 = ... = \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{3^n} = 2^{3^n}$, *deci* $x_{n+1} = 2^{3^n} \cdot x_n = 2^{3^n} \cdot 2^{3^{n-1}} \cdot x_{n-1} = ... = 2^{3^n+3^{n-1}+...+3^0} \cdot x_0 = 2^{\frac{3^{n+1}-1}{2}} \to \infty$.

Un alt tip de recurenţă este acela în care în relaţia respectivă apare un alt termen dependent de n, deci şirul este de forma $x_{n+1} = ax_n + f(n)$.

Soluţia generală a acestei ecuaţii este suma dintre soluţia generală a relaţiei omogene $y_{n+1} = ay_n$ şi o soluţie particulară a relaţiei neomogene, adică un şir $(z_n)_n$ cu $z_{n+1} = az_n + f(n)$.

Un alt tip de recurenţe apare atunci când termenii şirului verifică anumite inegalităţi:

Exemplu 42 *Fie $(x_n)_n$ un şir de termeni pozitivi care verifică relaţia $4x_{n+1}^2 \le 2x_n - 1$. Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi limita sa.*

Demonstraţie 38 *Observăm că $2x_n - 1 \le x_n^2$, de unde rezultă $4x_{n+1}^2 \le x_n^2$, deci $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2 \le \frac{1}{4}$, adică $\frac{x_{n+1}}{x_n} \le \frac{1}{2}$.*

Obţinem astfel că $\frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot ... \cdot \frac{x_1}{x_0} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, de unde rezultă că $0 \le x_{n+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot x_0$, deci, folosind criteriul cleştelui rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Sisteme de recurenţe

În cele ce urmează vom studia şirurile definite printr-un sistem de relaţii:

$x_{n+1} = ax_n + by_n$

$y_{n+1} = cx_n + dy_n$, unde a, b, c, d, x_0 şi y_0 sunt numere reale date.

Pentru a determina forma generală a şirurilor înmulţim a doua relaţie cu α şi le adunăm:

$x_{n+1} + \alpha y_{n+1} = (a + \alpha c)x_n + (b + \alpha d)y_n$, $n \ge 0$.

Determinăm α astfel încât $a + \alpha c = \alpha(b + \alpha d)$ şi astfel relaţia precedentă devine:

$x_{n+1} + \alpha y_{n+1} = (a + \alpha c)(x_n + \alpha y_n)$.

În această relaţie notând cu $z_n = x_n + \alpha y_n$, se obţine:

$z_{n+1} = (a + \alpha c)z_n$, iar $z_0 = x_0 + \alpha y_0$,

ceea ce defineşte o progresie geometrică.Din ea se obţine $z_n = (a + \alpha c)^n z_0$.

Din cele anterioare α trebuie să verifice ecuaţia $b+\alpha d = \alpha(a+\alpha c)$, care este o ecuaţie de gradul doi, $\alpha^2 c+\alpha(a-d)-b = 0$. Dacă $c \neq 0$ atunci discriminantul $\Delta = (a - d)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4(ad - bc)$.

Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuaţia are două rădăcini, α_1 şi α_2 , deci se poate aplica această metodă pentru determinea celor două şiruri.

Dacă $\Delta < 0$ această metodă nu funcţionează, însă se poate aplica metoda matriceală: se scrie sistemul sub forma echivalentă

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

de undare $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Acum problema se reduce la determinarea puterilor unei matrici.

Vom da însă un exemplu de sistem de recurenţe neliniar:

Exemplu 43 *Fie a şi b două numere strict pozitive şi* $(a_n)_n$ *şi* $(b_n)_n$ *două şiruri definite de relaţiile:*

$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{b_n}\right)$

$b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{1}{a_n}\right)$, *iar* $a_0 = a$ *şi* $b_0 = b$. *Arătaţi că cele două şiruri sunt convergente şi calculaţi limitele lor.*

Demonstraţie 39 *Un calcul simplu arată că* $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n} = ... = \frac{a_0}{b_0}$, *deci* $a_n = \frac{a}{b} \cdot b_n$, *de unde* $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{a_n}\right)$.

Se observă că $a_{n+1} - a_n = \frac{a-b\cdot a_n^2}{2b\cdot a_n}$ *şi se demonstrează prin inducţie că* $a_n \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$. *In acest fel obţinem atât monotonia, cât şi mărginirea şirurilor. Prin trecere la limită în relaţia de recurenţă se obţine că ambele şiruri au aceeaşi limită* $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

2.1.4 Siruri clasice

1) Arătaţi că $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

Notăm $x_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$, rezultă că $(x_n + 1)^n = n$, deci $n = 1 + C_n^1 \cdot x_n + C_n^2 \cdot x_n^2 + ... \geq C_n^2 \cdot x_n^2$, adică $0 \leq x_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$. Deoarece x_n este pozitiv obţinem că $0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, de unde rezultă că $x_n \to 0$, folosind criteriul cleştelui.

2) Arătaţi că şirurile $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ *şi* $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ *sunt monotone şi mărginite.*

Monotonia acestor şiruri se demonstrează folosind Inegalitatea lui Bernoulli: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, şi pentru orice $x \geq -1$, care se poate demonstra imediat prin inducţie matematică.

Intr-adevăr, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{(n+2)^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{2n+1}} = \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$

$\frac{n+1}{n} \cdot \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq \frac{n+1}{n} \cdot \left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1,$

Deci, şirul $(x_n)_n$ este crescător.

$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2}} = \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} =$

$= \frac{n}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$

Rezultă astfel că $(y_n)_n$ este descrescător.

Să observăm că dacă $n \leq m$, atunci $x_n \leq x_m = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \leq \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = y_m$;

iar dacă $n > m$, atunci $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n \leq y_m$. Deci, pentru orice numere naturale n, m avem $x_n \leq y_m$. De aici, folosind şi monotonia, obţinem că şirurile noastre sunt mărginite inferior de x_0 şi superior de y_0. Cele două şiruri îndeplinesc condiţiile Teoremei Weierstrass, deci sunt convergente. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$, rezultă că ele au aceeaşi limită. Limita lor comună se notează cu e şi verifică inegalităţile :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Într-adevăr, logaritmând inegalităţile precedente obţinem:

3)Pornind de la aceste inegalităţi vom demonstra că şirul:

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$$

este monoton şi mărginit, deci este convergent.

Într-adevăr, logaritmând inegalităţile precedente obţinem:

$$n \cdot \ln\frac{n+1}{n} \leq 1 \leq (n+1)\cdot \ln\frac{n+1}{n}$$

adică, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.

Folosind prima inegalitate obţinem că $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \leq 0$, adică şirul $(c_n)_n$ este descrescător.Pentru mărginire sumăm inegalităţile precedente şi obţinem că

$$\Sigma_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \Sigma_{k=1}^n(\ln(k+1) - \ln k) \leq \Sigma_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Deci: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, adică
$c_n \geq \ln(n+1) - \ln n \geq 0$, deci şirul este mărginit inferior.

Avem un şir descrescător şi mărginit inferior, deci şi convergent. Limita aceatui şir se numeşte constanta lui Euler şi se notează, de obicei, cu c.

Următoarele două exerciţii sunt aplicaţii pentru această problemă:

Exerciţiu 12 *Studiaţi convergenţa şirurilor* $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$ *şi* $y_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^n\frac{1}{n}$

Se observă că $x_n = c_{2n} - c_n + \ln 2 = y_n$, de unde rezultă că cele două şiruri sunt convergente şi au aceeaşi limită, $\ln 2$.

2.1.5 Limite extreme

Definiţie 9 *Fie $(a_n)_n$ un şir de numere reale.*

Se numeşte ***limită superioară*** *a şirului $(a_n)_n$ şi se notează $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ sau $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ cantitatea $\inf\limits_{n\geq 1}(\sup\limits_{k\geq n} a_k)$.*

Se numeşte ***limită inferioară*** *a şirului $(a_n)_n$ şi se notează $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ sau $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ cantitatea $\sup\limits_{n\geq 1}(\inf\limits_{k\geq n} a_k)$.*

Limitele superioară şi inferioară se mai numesc şi ***limite extreme****.*

Legătura cu noţiunea de limită este dată în următoarea teoremă:

Teorema 5 *Un şir $(a_n)_n$ este convergent la a dacă şi numai dacă*
$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Dacă $(a_n)_n$ tinde la ∞, atunci $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, iar dacă $(a_n)_n$ tinde la $-\infty$, atunci $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Exemplu 44 *Pentru şirul $a_n = (-1)^n$,*
$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\geq 1}(\sup\limits_{k\geq n}(-1)^k) = \inf\limits_{n\geq 1}(1) = 1$, *iar* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\geq 1}(\inf\limits_{k\geq n}(-1)^k) = \sup\limits_{n\geq 1}(-1) = -1$.

Exemplu 45 *Fie şirul $a_n = \frac{(-1)^n n+2}{2n}$.*

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\geq 1}(\sup\limits_{k\geq n}\frac{(-1)^k k+2}{2k})$.

Se observă că şirul $y_p = \frac{2p+2}{4p}$ este descrescător la $\frac{1}{2}$. Deci, dacă n este par atunci $\sup\limits_{k\geq n}\frac{(-1)^k k+2}{2k} = y_n = \frac{n+2}{2n}$, iar dacă n este impar, atunci $\sup\limits_{k\geq n}\frac{(-1)^k k+2}{2k} = y_{n+1} = \frac{n+3}{2n+2}$.

Deci, rămâne de găsit $\inf\{y_2, y_2, y_4, y_4, ...\} = \inf\limits_{n\geq 1}(\frac{2n+2}{4n}) = \frac{1}{2}$, deoarece şirul este descrescător la $\frac{1}{2}$.

Definiţie 10 *Un punct a este* ***punct limită*** *al unui şir $(a_n)_n$ dacă există un subşir $(a_{k_n})_n$ care tinde la a.*

Lema 2 *Limita superioară şi limita inferioară sunt puncte limită ale şirului.*

Demonstraţie 40 *Fie $a = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Presupunem că a este real, cazul limitelor infinite fiind asemănător. Pentru orice p număr natural există $n_p \in \mathbb{N}$ astfel ca*
$a \leq \sup\limits_{k\geq n_p} a_k < a + \frac{1}{p}$,

de unde, folosind definiţia supremului , rezultă că există k_p astfel ca $a \leq a_{k_p} < a + \frac{1}{p}$. Prin trecere la limită rezultă că $\left(a_{k_p}\right)_p$ este un subşir care tinde la a.

Observaţie 5 *Se poate demonstra că şirul* $y_n = \sup\limits_{k \geq n} a_k$, *este descrescător , iar şirul* $z_n = \inf\limits_{k \geq n} a_k$ *este crescător , deci putem spune că*

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\sup\limits_{k \geq n} a_k)$, *iar* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\inf\limits_{k \geq n} a_k)$.

Vom nota cu $L(a_n)$ mulţimea punctelor limită ale şirului $(a_n)_n$.

Observaţie 6 *Se observă imediat că dacă* $m = \inf\limits_{n \geq 1} a_n$, *iar* $M = \sup\limits_{n \geq 1} a_n$, *atunci* $L(x_n) \subseteq [m, M]$

Observaţie 7 *Se poate întâmpla ca* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n > m$, *cum este exemplul şirului* $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, *pentru care* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, *dar* $\inf\limits_{n \geq 1} a_n = 0$.

Observaţie 8 *Se poate demonstra că*

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \sup L(a_n)$, *iar* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \inf L(a_n)$.

2.1.6 Comportarea limitelor extreme la operaţii cu şiruri

1) Dacă $\alpha > 0$, atunci

$\liminf\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\limsup\limits_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$;

Dacă $\alpha < 0$, atunci

$\liminf\limits_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, iar $\limsup\limits_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

2)$\limsup\limits_{n\to\infty}(\alpha + a_n) = \alpha + \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, pentru orice α număr real.

3) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \neq \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) + \limsup\limits_{n\to\infty}(b_n)$ şi

$\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \neq \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) + \liminf\limits_{n\to\infty}(b_n)$

Exemplu 46 *Fie* $a_n = (-1)^n + 1$, *iar* $b_n = (-1)^{n-1}$. *Se observă că* $a_n + b_n = 1$, *deci*

$\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 1$,

dar $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) + \limsup\limits_{n\to\infty}(b_n)$ *=3, iar*

$\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) + \liminf\limits_{n\to\infty}(b_n) = -1$.

Se poate , însă demonstra că

$\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) + \limsup\limits_{n\to\infty}(b_n)$, folosindu-se că $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$;

De asemenea, $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) + \liminf\limits_{n\to\infty}(b_n)$

4) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \neq \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) \cdot \limsup\limits_{n\to\infty}(b_n)$ şi $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \neq \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) \cdot \liminf\limits_{n\to\infty}(b_n)$

Exemplu 47 *Fie* $a_n = (-1)^n + 1$, *iar* $b_n = (-1)^{n-1}$; *observăm că* $a_n \cdot b_n = (-1)^{n-1} - 1$, *deci* $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$, *iar* $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -2$.

Pe de altă parte, $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) = 2$,*iar* $\limsup\limits_{n\to\infty}(b_n) = 1$, *deci,*

$\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)\cdot\limsup\limits_{n\to\infty}(b_n)=2.$

Analog, $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)=0$, *iar* $\liminf\limits_{n\to\infty}(b_n)=-1$, *deci* $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)\cdot\liminf\limits_{n\to\infty}(b_n)$ *=0.*

Dacă ambele şiruri au termenii pozitivi, atunci se poate demonstra că
$\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)\le\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)\cdot\limsup\limits_{n\to\infty}(b_n)$,
iar în condiţiile în care unul dintre şiruri are limita strict pozitivă, aceasta devine egalitate.

2.1.7 Probleme rezolvate pentru limite extreme

Calculaţi limitele extreme, infimum şi supremum pentru următoarele şiruri:

Exerciţiu 13 *Fie* $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$

Demonstraţie 41 *În excerciţiile practice se foloseşte foarte des faptul că*
$\limsup\limits_{n\to\infty}a_n=\sup L(a_n)$, *iar* $\liminf\limits_{n\to\infty}a_n=\inf L(a_n)$.
În acest caz $a_{4n}=a_{2n}=0, a_{4n+1}=1$, *iar* $a_{4n+3}=-1$, *deci*
$L(a_n)=\{-1,0,1\}$, *de unde rezultă că* $\limsup\limits_{n\to\infty}a_n=\sup L(a_n)=1$,
iar $\liminf\limits_{n\to\infty}a_n=\inf L(a_n)=-1$.

Exerciţiu 14 *Arătaţi că dacă* $\limsup a_n<l$ *atunci* $a_n<l$ *cu excepţia unui număr finit de termeni.*

Demonstraţie 42 *Folosind definiţia limitei superioare avem* $\inf\limits_{n\ge1}(\sup\limits_{k\ge n}a_k)<l$. *Infimum unei mulţimi fiind mai mic decât l , rezultă că măcar un element al acelei mulţimi este mai mic decât l . Deci, există N număr natural astfel ca* $\sup\limits_{k\ge N}a_k<l$. *Dacă supremul unei mulţimi este mai mic decât l atunci toate elemente acelei mulţimi au această proprietate. Deci,* $a_k<l$ *pentru orice* $k\ge N$.

Exerciţiu 15 *Fie* $(x_n)_n$ *un şir de termeni pozitivi astfel încât* $\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}=l<1$. *Arătaţi că şirul* $(a_n)_n$ *tinde la zero.*

Demonstraţie 43 *Fie* $\varepsilon>0$ *astfel ca* $l+\varepsilon<1$. *Folosind exerciţiul precedent obţinem că există un rang N astfel ca* $\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon$ *pentru orice* $n\ge N$.
Deci:
$\frac{a_{N+1}}{a_N}<l+\varepsilon$
$\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<l+\varepsilon$
.
.
$\frac{a_{N+p+1}}{a_{N+p}}<l+\varepsilon$
Înmulţind aceste relaţii rezultă că $\frac{a_{N+p+1}}{a_N}<(l+\varepsilon)^p$, *deci*
$0<a_{N+p+1}<a_N(l+\varepsilon)^p$.
Deoarece $l+\varepsilon<1$ *avem că* $\lim\limits_{p\to\infty}a_N(l+\varepsilon)^p=0$, *deci, folosind criteriul cleştelui rezultă că* $\lim\limits_{p\to\infty}a_{N+p+1}=0$.

Exerciţiu 16 *Fie* $(a_n)_n$ *un şir mărginit de numere reale astfel ca* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$

Arătaţi că $(a_n)_n$ *este convergent la zero.*

Demonstraţie 44 *Fie* $l = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. *Deoarece şirul este mărginit rezultă că* l *este un număr real.* l *fiind un punct limită al şirului rezulă că există un subşir* $(a_{k_n})_n$ *care tinde la* l. *Presupunând că* $l \neq 0$ *avem că* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin a_{k_n}}{a_{k_n}} = \frac{\sin l}{l}$. *Pe de altă parte, din ipoteză* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin a_{k_n}}{a_{k_n}} = 1$. *Din unicitatea limitei rezultă că* $\sin l = l$, *ceea ce ar implica* $l = 0$. *In concluzie,* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Analog se demonstrează că* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *deci şirul este convergent la zero.*

Exerciţiu 17 *Fie* $(a_n)_n$ *un şir de numere reale astfel ca*

$\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$ *sau*

$\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$ *pentru orice şir* $(b_n)_n$ *de numere reale.*

Arătaţi că $(a_n)_n$ *este convergent.*

Demonstraţie 45 *Dacă* $b_n = -a_n$ *relaţia din enunţ devine:*

$\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} 0 = 0 =$

$= \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n - \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

Concluzia este că $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$,

ceea ce atrage convergenţa şirului $(a_n)_n$.

Exerciţiu 18 *Fie* $(a_n)_n$ *un şir mărginit de numere poztive.*

Atunci $\limsup\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \geq 1.$

Demonstraţie 46 *Presupunem că* $\limsup\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < 1$. *Potrivit unui exerciţiu precedent rezultă că* $n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < 1$ *pentru orice* $n \geq N$. *Aceasta este echivalentă cu* $n < (n+1)a_n - na_{n+1}$, *iar prin împărţire cu* $n(n+1)$ *obţinem că* $\frac{1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1}$. *Însumând această relaţie de la* N *la* $N+p$ *rezultă că* $\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + ... + \frac{1}{N+p+1} < \frac{a_N}{N} - \frac{a_{N+p+1}}{N+p+1}$. *Această inegalitate este imposibilă deoarece când* $p \to \infty$ *şirul din membrul stâng tinde la* ∞ *(vezi exemplul 13, Capitolul 2), iar cel din membrul drept este mărginit.*

Exerciţiu 19 *Arătaţi că*

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+...+a_n}{n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+...+a_n}{n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n.$

Demonstraţie 47 *Fie* $b_n = \frac{a_1+...+a_n}{n}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a, \limsup\limits_{n\to\infty} b_n = b.$

Presupunem că $a < \infty$. *Din definiţia limitei unui şir rezultă că pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca* $a_n < a + \varepsilon$ *pentru orice* $n \geq N$. *Deci,* $a_N + a_{N+1} + ... + a_{N+p} < (p+1)(a+\varepsilon)$.

$b_n = \frac{a_1+a_2+...+a_{N+p}}{N+p} = \frac{a_1+a_2+...+a_{N-1}}{N+p} + \frac{a_N+a_{N+1}+...+a_{N+p}}{N+p} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_{N-1}}{p} + \frac{a_1+a_2+...+a_{N-1}}{p+1} < \frac{a_1+a_2+...+a_{N-1}}{p} + a + \varepsilon$, *de unde rezultă că*

$\limsup\limits_{n\to\infty} b_n \leq a + \varepsilon.$

Observaţie 9 *Dacă şirul* $(a_n)_n$ *este convergent atunci* $(b_n)_n$ *este convergent şi limitele sunt egale.*

2.2 Exemple şi contraexemple

Această secţiune constituie o încercare de aprofundare a noţiunilor anterioare, prin intermediul unor exemple concrete.

Exerciţiu 20 *Dacă şirul* $(x_n)_n$ *este nemărginit , atunci* $\left(\frac{1}{x_n}\right)_n$ *este mărginit?*

Demonstraţie 48 *Răspunsul este "Nu" după cum o arată şirul* $x_n = \{ \begin{array}{c} n, \text{ daca } n \text{ este par} \\ \frac{1}{n}, \text{ daca } n \text{ este impar} \end{array}$.

Exerciţiu 21 *Dacă* $(x_n)_n$ *este convergent, iar* $(y_n)_n$ *este divergent ce se poate spune despre produsul lor?*

Demonstraţie 49 *În general, produsul unor astfel de şiruri nu este un şir convergent. Exemplu:*
$x_n = \frac{1}{n}$, *iar* $y_n = (-1)^n n^2$.

Exerciţiu 22 *Fie* $(x_n)_n$ *şi* $(y_n)_n$ *două şiruri de numere reale.*
a) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, *rezultă că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$?
b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$, *rezultă că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *sau* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$?

Demonstraţie 50 *a) Răspunsul este negativ:* $x_n = \frac{1}{n}$, *iar* $y_n = n^2$.

b) Şirurile $x_{2n} = 2n$, $x_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2}$, iar $y_{2n} = \frac{1}{2n^2}, y_{2n+1} = 2n + 1$.

2.3 Probleme propuse

Exerciţiu 23 *Calculaţi următoarele limite :*
$\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{\sin 2n}{n} - n((n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}})\right]$
$\lim\limits_{n\to\infty} (\cos^2 \frac{a}{n} + k \sin^2 \frac{a}{n})^n$
$\lim\limits_{n\to\infty} \left[(1 + n^a)^{\frac{1}{a}} - n\right]$

Exerciţiu 24 *Fie* $(a_n)_n$ $a_n = \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2 n!}$ *pentru orice* $n \geq 1$.
a) Arătaţi că $(a_n)_n$ *este monoton şi mărginit şi calculaţi* $\inf\limits_{n\geq 1} a_n$ *şi* $\sup\limits_{n\geq 1} a_n$.
b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} (n! a_n)^{\frac{1}{a_n}}$;
c) Studiaţi convergenţa şirului $b_n = y_1 y_2 ... y_n, \quad y_n = a^{a_n}$.

Exerciţiu 25 *Studiaţi convergenţa şirului* $a_n = \frac{k}{k(-1)^n + \sqrt{n^2+n+1}\cos^3 n\pi}$

Exerciţiu 26 *Fie* $(x_n)_n$ *un şir cu* $x_0 = 0$, $x_n = n(x_{n-1} + (n-1)!)$

a) Arătaţi că $(x_n)_n$ *şi* $\left((x_n)^{\frac{1}{n}}\right)_n$ *sunt diveregnte;*

b) Arătaţi că $x_n = n \cdot n!$;

c) Arătaţi că şirurile

$s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ *şi* $y_n = \frac{1}{1+s_1} + \frac{2}{1+s_2} + ... + \frac{n}{1+s_n}$

sunt convergente şi calculaţi limita lor.

Exerciţiu 27 *Fie* $(x_n)_n$ *definit de relaţia* $x_{n+1} = \arctan x_n$.

Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2$.

Exerciţiu 28 *Calculaţi* $\sum_{k=1}^{n} \sin^p \frac{\pi}{n+k}$.

Exerciţiu 29 *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^1+2^2+...+n^n}{(n!)^2}$.

Exerciţiu 30 *Fie* $(x_n)_n, (y_n)_n$ *şi* $(z_n)_n$ *trei şiruri de termeni pozitivi astfel ca :*

$3x_{n+1} \le y_n + z_n$

$3y_{n+1} \le x_n + z_n$

$3z_{n+1} \le x_n + y_n$

Arătaţi că cele trei şiruri sunt convergente şi aflaţi limitele lor.

Exerciţiu 31 *Dacă termenii şirului* $(x_n)_n$ *se află în intervalul* $(0,1)$ *şi verifică inegalitatea* $4x_{n+1}(1-x_n) > 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

Exerciţiu 32 *Arătaţi că dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_{n+1} - x_n) = 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Exerciţiu 33 *Arătaţi că dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n - x_n^2) = 0$,

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *sau* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Exerciţiu 34 *Studiaţi convergenţa şirurilor definite de relaţiile:* $x_{n+1} = \sqrt{4x_n - x_n^2}$ *şi* $y_n = (0.4)^n \cos \frac{n\pi}{4}$.

Exerciţiu 35 *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+e+e^2+...+e^n}{1+\pi+\pi^2+...+\pi^n}$.

Exerciţiu 36 *Fie* $(a_n)_n$ *un şir definit de relaţia* $a_{n+1} = \frac{5a_n+3}{a_n+3}$, $a_1 > 0$. *Să se arate că şirul* $b_n = \frac{a_n-3}{a_n+1}$ *este o progresie geometrică şi să se studieze convergenţa şirurilor* $(a_n)_n$ *şi* $(b_n)_n$.

Exerciţiu 37 *Fie* $(a_n)_n$ *şi* $(b_n)_n$ *şirurile de numere naturale determinate prin descompunerea după binomul lui Newton :* $\left(2+\sqrt{5}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{5}$. *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Exerciţiu 38 *Fie* $(a_n)_n$ *definit de* $5^{a_n} = 4^{a_{n-1}} + 3^{a_{n-2}}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. *Arătaţi că* $(a_n)_n$ *este convergent şi calculaţi limita sa. Generalizare.*

Exerciţiu 39 *Studiaţi convergenţa şirului* $(x_n)_n$ *definit de relaţia:*

$x_n = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + ... + \frac{n}{4^{n-1}}$.

Exerciţiu 40 *Fie* $(x_n)_n$ *un şir definit de relaţia* $x_n = \frac{1+x_{n-1}^2}{2x_{n-1}}$, $x_0 > 1$. *Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi limita sa.*

Exerciţiu 41 *Fie* $(x_n)_n$ *un şir definit de relaţia* $x_{n+1} = \frac{x_n^2+x_n}{x_n^2+1}$, $x_0 \in (0,1]$. *Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi limita sa.*

Exerciţiu 42 *Fie* $(x_n)_n$ *un şir definit de relaţia* $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$, $x_1 \in (0,1)$. *Arătaţi că şirul este convergent, calculaţi limita sa şi arătaţi că* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1$.

Exerciţiu 43 *Fie* $(a_n)_n$ *şi* $(b_n)_n$ *două şiruri definite prin relaţiile* $a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$, $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, *cu* a_0 *şi* b_0 *numere pozitive,* $a_0 < b_0$. *Arătaţi că cele două şiruri sunt convergente şi au aceeaşi limită.*

Exerciţiu 44 *Fie* $(x_n)_n$ *un şir de numere pozitive, ai cărui termeni sunt în progresie aritmetică crescătoare. Arătaţi că* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 \cdot x_3 \cdot \ldots x_{2n-1}}{x_2 \cdot x_4 \ldots x_{2n}} = 0$.

Exerciţiu 45 *Studiaţi convergenţa şirului* $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k!}{2^k}$.

Capitolul 3

Numere cardinale

Acest capitol îşi propune să exemplifice noţiunile de mulţime finită, mulţime numărabilă, mulţime de puterea continuului.

Definiţie 11 *O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ este **finită** dacă există un număr natural n şi o aplicaţie bijectivă $f : A \to \{1, 2, ...n\}$.*

*O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ este **numarabila** dacă există o aplicaţie bijectivă $f : A \to \mathbb{N}$.*

*O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ este **cel mult numarabila** dacă este finită sau numărabilă.*

Observaţie 10 *Elementele unei mulţimi numărabile pot fi enumerate.*

Propoziţie 3 *1) Orice submulţime infinită a unei mulţimi numărabile este numărabilă.*

2) Reuniunea unei mulţimi cel mult numărabile de mulţimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

Folosind această propoziţie se demonstrează că mulţimea numerelor raţionale este numărabilă.

Intr-adevăr, $\mathbb{Q} = \cup_{m=-\infty}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \{\frac{m}{n}\}$.

Exerciţiu 46 *Dacă A şi B sunt două mulţimi de numere reale cel mult numărabile, atunci produsul cartezian $A \times B$ este o mulţime cel mult numărabilă.*

Demonstraţie 51 *Elementele mulţimilor A şi B se pot enumera astfel:*

$A = \{a_1, a_2, ...a_n, ...\}$ *, iar* $B = \{b_1, b_2, ...b_n, ...\}$

Fie

$C_1 = \{(a_1, b_n) \quad / \quad n \in \mathbb{N}^*\}$,

$C_2 = \{(a_2, b_n) \quad / \quad n \in \mathbb{N}^*\}, ...$

$C_m = \{(a_m, b_n) \quad / \quad n \in \mathbb{N}^*\}, ...$

Observăm că $A \times B = \cup_{m=1}^{\infty} C_m$, deci este o reuniune numărabilă de mulţimi cel mult numărabile. Folosind propoziţia precedentă rezultă că $A \times B$ este cel mult numărabilă.

Exerciţiu 47 *Mulţimea polinoamelor cu coeficienţi raţionali este numărabilă.*

Fie M mulţimea tuturor polinoamelor cu coeficienţi raţionali. Fie $M_n = \{P \in \mathbb{Q}[X] \quad / \quad gradP \leq n\}$.

Observăm că $M = \cup_{n=0}^{\infty} M_n$.

Exerciţiu 48 *În continuare arătăm prin inducţie că M_n sunt mulţimi numărabile.*

Demonstraţie 52 *Pentru $n = 0$, $M_0 = \mathbb{Q}$ care este o mulţime numărabilă.*

Presupunem că M_n este o mulţime numărabilă, să arătăm că M_{n+1} este numărabilă.

Un P un polinom din M_{n+1} se poate scrie $P = P' + a_{n+1}x^{n+1}$, unde $P' \in M_n$.

Deci unui polinom P din M_{n+1} i se poate asocia perechea (P', a_{n+1}). Aseastă asociere este reciprocă. In concluzie putem identifica M_{n+1} cu $M_n \times \mathbb{Q}$, care este un produs cartezian de mulţimi numărabile, deci este numărabilă.

Exerciţiu 49 *Mulţimea numerelor algebrice este cel mult numărabilă.*

Demonstraţie 53 *Un număr a se numeşte algebric dacă este rădăcină a unui polinom cu coeficienţi întregi.*

Pentru un polinom $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P(X) = a_nX^n + ... + a_1X + a_0$ definim lungimea acestui polinom ca fiind suma modulelor coeficienţilor:

$\|P\| = |a_0| + |a_1| + ... + |a_n|$.

Evident există un număr finit de polinoame din $\mathbb{Z}[X]$ de lungime m, ceea ce atrage un număr finit de rădăcini ale acestor polinoame de lungime m. O reuniune numărabilă de mulţimi finite este o mulţime cel mult numărabilă, deci mulţimea numerelor algebrice este cel mult numărabilă.

Exerciţiu 50 *Orice mulţime de intervale reale, disjuncte este cel mult numărabilă.*

Demonstraţie 54 *Fie $(I_\alpha)_{\alpha \in J}$ o familie de intervale reale, disjuncte. Din teorema de densitate a lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$ rezultă că există $r_\alpha \in I_\alpha \cap \mathbb{Q}$ pentru orice $\alpha \in J$. Deci, putem defini o aplicaţie $f : \{(I_\alpha)_{\alpha \in J}\} \to \mathbb{Q}$, care asociază fiecărui interval I_α numărul raţional r_α. Deoarece intervalele sunt disjuncte rezultă că această aplicaţie este injectivă. $\mathbb{Q}$ fiind numărabilă rezultă că familia $\{(I_\alpha)_{\alpha \in J}\}$ este cel mult numărabilă.*

Definiţie 12 *O mulţime A este o mulţime cu* ***puterea continuului*** *dacă există o bijecţie între A şi intervalul $[0, 1]$.*

Exemplu 48 *Intervalele de forma $(a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $\mathbb{R}$ sunt mulţimi cu puterea continuului.*

Exerciţiu 51 *Arătaţi că mulţimea tuturor şirurilor formate din zero şi unu are puterea continuului.*

Demonstraţie 55 *Fie $\xi \in [0, 1]$.*

Împărţim intervalul $[0, 1]$ în $\Delta_0 = [0, \frac{1}{2}]$ şi $\Delta_1 = [\frac{1}{2}, 1]$, apoi fiecare în $\Delta_{00} = [0, \frac{1}{4}]$, $\Delta_{01} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $\Delta_{10} = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $\Delta_{11} = [\frac{3}{4}, 1]$, s.a.m.d. Se poate pune în evidenţă un şir de intervale $\Delta_{\varepsilon_1} \supset \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \supset ... \supset \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n} \supset ...$ care îl conţin pe ξ, unde $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. Având în vedere acest şir de incluziuni numărului ξ

şirul format numai din zero sau unu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ...$*(reprezintă scrierea diadică a numărului* ξ*). Folosind principiul lui Cantor pentru şirul de incluziuni de mai sus, deoarece lungimea intervalelor este* $\frac{1}{2^n}$*, deci tinde la zero, rezultă că intersecţia* $\Delta_{\varepsilon_1} \cap \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cap ... \cap \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n} \cap ...$ *este formată dintr-un singur număr, anume* ξ*. Se poate deci realiza o aplicaţie bijectivă de la mulţimea şirurilor de elemente zero sau unu la intervalul* $[0, 1]$.

Exerciţiu 52 *Mulţimea tuturor şirurilor crescătoare de numere naturale are puterea continuului.*

Demonstraţie 56 *Fie* $k_1 < k_2 < ... < k_n < ...$ *un şir crescător de numere naturale. Acestuia îi asociem un şir în care termenii de rang* $k_1, k_2, ..., k_n, ...$ *sunt unu iar ceilalţi sunt zero.*

Se observă imediat că această asociere este bijectivă, deci şi această mulţime este de puterea continuului.

Exerciţiu 53 *Mulţimea tuturor şirurilor de numere naturale are puterea continuului.*

Demonstraţie 57 *Fie* $m_1, m_2, ...m_n, ...$ *un şir de numere naturale. Acestuia putem să-i asociem şirul crescător de numere naturale* $k_1 = m_1, k_2 = m_1 + m_2, ..., k_n = m_1 + m_2 + .. + m_n$*. Se demonstrează imediat că această corespondenţă este biunivocă.*

Exerciţiu 54 *Mulţimea şirurilor de numere reale are puterea continuului.*

Demonstraţie 58 *Fie* $\xi = (\xi_1, \xi_2, ...\xi_n, ...)$ *un şir de numere reale. Fiecare* ξ_n *se poate scrie ca suma dintre partea întreagă şi partea sa fracţionară,* $\xi_n = [\xi_n] + \{\xi_n\}$*. Deoarece* $\{\xi_n\} \in [0, 1)$ *folosind scrierea diadică, putem să-i asociem şirul* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ...)$ *format din zero şi unu. Cum* $[\xi_n]$ *este un număr întreg, rezultă că oricărui* ξ_n *îi putem asocia şirul de numere întregi* $(p_{n1}, p_{n2}, ...p_{nk}, ...)$*. In concluzie, lui* ξ *îi putem asocia tabloul*

$$\begin{array}{ccccc} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

care se poate scrie ca un şir de numere întregi. Deci mulţimea şirurilor de numere reale se pune în corespondenţă biunivocă cu mulţimea şirurilor de numere întregi, care are puterea continuului.

Exerciţiu 55 *Fie* $(x_n)_n$ *un şir de numere reale nenule. Arătaţi că există* $\alpha \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\alpha + x_n$ *şi* $\alpha \cdot x_n$ *să fie iraţionale pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie 59 *Să observăm că mulţimile* $A_n = \{q - x_n \ / \ q \in \mathbb{Q}\}$ *şi* $B_n = \{\frac{q}{x_n} \ / \ q \in \mathbb{Q}\}$ *sunt numărabile pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *,deci* $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ *şi* $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ *sunt numărabile.*

Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (A \cup B)$ *(această mulţime este nevidă deoarece* $\mathbb{R}$ *are puterea continuului , iar* $A \cup B$ *este numărabilă). Se observă imediat că* α *este cel căutat.*

Exerciţiu 56 *Arătaţi că orice mulţime nemărginită A se poate scrie ca o reuniune numărabilă de mulţimi mărginite.*

Demonstraţie 60 *Putem scrie $A = \cup_{n=1}^{\infty}(A \cap [-n, n])$.*

Vom reveni asupra acestor noţiuni la capitolul "Funcţii continue", când vom demonstra că discontinuităţile unei funcţii monotone sunt cel mult numărabile şi mulţimea funcţiilor continue $C[0, 1]$ are puterea continuului.

Capitolul 4

Elemente de topologie

În acest capitol vom extinde puţin studiul convergenţei şirurilor, privindu-le într-un cadru mai larg, acela al spaţiilor metrice. Introducerea noţiunii de spaţiu metric ne permite să vorbim despre distanţă nu numai între numere sau puncte, ci şi între funcţii, matrici, etc. Totuşi, în această parte vom rămâne în spaţiul numerelor reale.

Vom face şi o trecere scurtă printre noţiunile de mulţime deschisă, mulţime închisă, puncte interioare, aderente şi de acumulare pentru o mulţime.

4.1 Spaţii metrice

Definiţie 13 *Se numeşte* ***distanţă (metrică)*** *pe* $\mathbb{R}$ *orice funcţie* $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *astfel încât:*

D1) $d(x, y) \geq 0$, *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$ *şi* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

D2) $d(x, y) = d(y, x)$ *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$ *;*

D3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$ *.*

Exemplu 49 *Metrica uzuală pe* $\mathbb{R}$ *este metrica euclidiană* $d(x, y) = |x - y|$ *.*

Definiţie 14 *Un şir* $(x_n)_n$ *de numere reale este* ***convergent la*** $x \in \mathbb{R}$ ***în metrica*** d *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $N \in \mathbb{N}$ *astfel încât pentru orice* $n \geq N$ *să avem* $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Un şir $(x_n)_n$ *de numere reale este* ***şir Cauchy în metrica*** d *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $N \in \mathbb{N}$ *astfel încât pentru orice* $n, m \geq N$ *să avem* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Observaţie 11 *Observăm că un şir* $(x_n)_n$ *este convergent la* x *în metrica* d *dacă şi numai dacă* $d(x_n, x)$ *tinde la zero în metrica euclidiană.*

Exerciţiu 57 *Pe* $\mathbb{R}$ *definim următoarea distanţă* $d(x, y) = 1$, *dacă* $x \neq y$, *şi* $d(x, y) = 0$ *dacă* $x = y$. *Aceasta se numeşte metrica discretă (şi se poate defini pe orice mulţime* X*).*

Arătaţi că un şir $(x_n)_n$ *de numere reale este convergent în metrica discretă dacă şi numai dacă este constant de la un rang.*

Demonstraţie 61 *$(x_n)_n$ fiind convergent avem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq N$ să avem $d(x_n, x) < \varepsilon$. Dacă alegem $\varepsilon = 1/2$, obţinem că $d(x_n, x) < 1/2$, ceea ce implică $d(x_n, x) = 0$, de unde rezultă $x_n = x$ pentru orice $n \geq N$.*

Implicaţia inversă rezultă imediat.

Observaţie 12 *Folosind exerciţiul precedent se poate arăta că $\mathbb{R}$ împreună cu metrica discretă este un spaţiu metric complet (orice şir Cauchy este un şir convergent).*

Exerciţiu 58 *Pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definim funcţia $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$. Arătaţi că d defineşte o metrică pe $\mathbb{R}$, dar $\mathbb{R}$ nu este spaţiu metric complet cu această metrică.*

Demonstraţie 62 *Vom arăta că $x_n = n$ este un şir Cauchy, dar nu este convergent în această metrică.*

Observăm că $d(x_n, x_{n+p}) = |\arctan x_n - \arctan x_{n+p}| =$
$= |\arctan n - \arctan(n + p)| = \left|\arctan \frac{n+p-n}{1+n(n+p)}\right| =$
$\arctan \frac{p}{1+n^2+np} \leq \frac{p}{1+n^2+np} \leq \frac{1}{n}$,
deci şirul nostru este un şir Cauchy.

Presupunem că $(x_n)_n$ este convergent la x. Atunci $d(x_n, x) \to 0$, deci $|\arctan x_n - \arctan x| \to 0$, adică $|\arctan n - \arctan x| \to 0$, în metrica euclidiană, de unde, folosind unicitatea limitei, ar rezulta că $\arctan x = \frac{\pi}{2}$, ceea ce este imposibil.

4.2 Spaţii topologice

Fie X o mulţime nevidă şi $\mathcal{T}$ o familie de părţi ale lui X.

Familia $\mathcal{T}$ se numeşte *topologie* pe X dacă satisface următoarele axiome:

T1) X şi $\emptyset \in \mathcal{T}$;

T2) dacă $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$, atunci $\cup_{T \in \mathcal{T}_0} T \in \mathcal{T}$;

T3) dacă $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ şi $\mathcal{T}_0$ este finită atunci $\cap_{T \in \mathcal{T}_0} T \in \mathcal{T}$.

Dacă $\mathcal{T}$ este o topologie pe X atunci perechea $(X, \mathcal{T})$ se numeşte *spaţiu topologic*, iar orice mulţime $T \in \mathcal{T}$ se numeşte *mulţime deschisă*.

O mulţime este *închisă* dacă complementara sa este deschisă.

Exemplu 50 *Vom evidenţia aici câteva topologii importante:*

1) $\mathcal{T}_d = \{X, \emptyset\}$ - topologia discretă:

2) $\mathcal{T}_i = \{\mathbb{R},\emptyset\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ - topologia inferioară a lui $\mathbb{R}$;

3) $\mathcal{T}_s = \{\mathbb{R},\emptyset\} \cup \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ - topologia superioară a lui $\mathbb{R}$;

Definiţie 15 *O mulţime $V \subset X$ se numeşte vecinătate a punctului $x \in X$ în topologia $\mathcal{T}$ (notăm $V \in \mathcal{V}_x$) dacă există $T \in \mathcal{T}$ cu $x \in T \subset V$.*

Observaţie 13 *O mulţime nevidă este deschisă dacă şi numai dacă este vecinătate pentru orice punct al său.*

Proprietăţile familiei vecinătăţilor unui punct:

V1) $x \in V$ pentru orice $V \in V_x$;

V2) dacă $V \in V_x$ şi $U \supseteq V$ atunci $U \in V_x$;

V3) dacă $V_1, V_2 \in V_x$ atunci $V_1 \cap V_2 \in V_x$;

V4) pentru orice $V \in V_x$ există $U \in V_x$ cu $U \subseteq V$ şi $V \in V_y$ pentru orice $y \in U$.

Puncte speciale relativ la o mulţime:

i) punct interior pentru A (şi notăm $x \in IntA$) dacă există o vecinătate V a lui x cu $V \subset A$;

ii) punct exterior pentru A (şi notăm $x \in ExtA$) dacă există vecinătate V a lui x astfel ca $V \subset CA$);

iii) punct de frontieră pentru A (şi notăm $x \in FrA$) dacă pentru orice vecinătate V a lui x avem că $V \cap A \neq \emptyset$ şi $V \cap CA \neq \emptyset$;

iv) punct aderent pentru A (şi notăm $x \in \overline{A}$) dacă pentru orice vecinătate V a lui x avem că $V \cap A \neq \emptyset$;

v) punct de acumulare pentru A (şi notăm $x \in A'$) dacă pentru orice vecinătate V a lui x avem că $V \cap (A \backslash \{x\}) \neq \emptyset$;

vi) punct izolat pentru A (şi notăm $x \in IzA$) dacă există o vecinătate V a lui x cu $V \cap A = \{x\}$;

Exemplu 51 *$Int\mathbb{Q} = \emptyset$;*

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$Int\mathbb{R} = \mathbb{R}$

$\overline{(a,b)} = \overline{[a,b)} = \overline{(a,b]} = [a,b]$

Exerciţiu 59 *Arătaţi că $Int(A \cap B) = IntA \cap IntB$*

Demonstraţie 63 *Fie $x \in Int(A \cap B)$. Există deci o vecinătate V a lui x astfel ca $V \subset A \cap B$. Prin urmare $V \subset A$ şi $V \subset B$, deci $x \in IntA$ şi $x \in IntB$.*

Reciproc, dacă $x \in IntA \cap IntB$, rezultă că există două vecinătăţi V_1 şi V_2 ale lui x cu $V_1 \subset A$ şi $V_2 \subset B$. Observăm că $V_1 \cap V_2$ este o vecinătate a lui x inclusă în $A \cap B$.

Observaţie 14 *Pentru reuniune nu rămâne valabilă decât o incluziune :*

$IntA \cup IntB \subset Int(A \cup B)$

Dacă $A = \mathbb{Q}$ şi $B = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ atunci $IntA \cup IntB = \emptyset$ iar $Int(A \cup B) = \mathbb{R}$, deci incluziunea inversă nu este adevărată.

Exerciţiu 60 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Demonstraţie 64 *Fie $x \in \overline{A \cup B}$. Presupunem, prin reducere la absurd că $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$. Rezultă că există V_1 şi V_2 două vecinătăţi ale lui x astfel ca $V_1 \cap A = \emptyset$ şi $V_2 \cap B = \emptyset$. Atunci mulţimea $V_1 \cap V_2$ este o vecinătate a lui x care nu intersectează nici pe A nici pe B, ceea ce contrazice $x \in \overline{A \cup B}$.*

Observaţie 15 *Proprietatea nu rămâne adevărată pentru intersecţie, iar contraexemplul poate fi ales cel de la observaţia precedentă.*

Aceste exerciţii se pot generaliza pentru o familie numărabilă de mulţimi.

Observaţie 16 *Fie $\{A_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ o familie de mulţimi .Atunci:*

1) $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{A_n} \subset \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n}$

2) $\overline{\cap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n} \subset \cap_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{A_n}$

Incluziunile inverse nu sunt adevărate după cum arată şi exemplul următor:

Dacă $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$, atunci $\overline{A_n} = [\frac{1}{n}, 1]$. Se observă că $\cup_{n\in\mathbb{N}^*}\overline{A_n} = (0, 1]$, iar $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n} = \overline{(0, 1]} = [0, 1]$

Dacă $A_n = \{\frac{n}{m}, m \in \mathbb{N}^*, (m, n) = 1\}$, atunci $\overline{A_n} = A_n \cup \{0\}$, deci $\cap_{n\in\mathbb{N}^*}\overline{A_n} = \{0\}$, iar $\overline{\cap_{n\in\mathbb{N}^*}A_n} = \emptyset$.

Exerciţiu 61 *Să se determine* $IntA$, $\overline{A}$, A' *pentru următoarele mulţimi în topologia naturală a lui* $\mathbb{R}$, *în topologia superioară respectiv inferioară a lui* $\mathbb{R}$.

i) $A = \mathbb{N}$

În topologia naturală $IntA = \emptyset$, $\overline{A} = \emptyset$, $A' = \emptyset$.
În topologia superioară $IntA = \emptyset$, $\overline{A} = [0, \infty)$, $A' = (0, \infty)$
În topologia inferioară $IntA = \emptyset$, $\overline{A} = \mathbb{R}$, $A' = \mathbb{R}$

Exerciţiu 62 *ii)* $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$

În topologia naturală $IntA = \emptyset$, $\overline{A} = A \cup \{0\}$, $A' = \{0\}$.
În topologia superioară $IntA = \emptyset$, $\overline{A} = [0, \infty)$, $A' = [0, \infty)$
În topologia inferioară $IntA = \emptyset$, $\overline{A} = (-\infty, 1]$, $A' = (-\infty, 1)$

Exerciţiu 63 *iii)*$A = \{\frac{1}{m} + \frac{(-1)^n}{n}; m, n \in \mathbb{N}^*\}$

În topologia naturală $IntA = \emptyset$, $\overline{A} = A \cup \{\frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$, $A' = \{\frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$.
În topologia superioară $IntA = \emptyset$, $\overline{A} = [-1, \infty)$, $A' = [-1, \infty)$
În topologia inferioară $IntA = \emptyset$, $\overline{A} = (-\infty, \frac{3}{2}]$, $A' = (-\infty, \frac{3}{2})$

Definiţie 16 *O mulţime A este densă în* $\mathbb{R}$ *dacă pentru orice numere reale* $a < b$ *avem* $A \cap (a, b) \neq \emptyset$.

O mulţime A este densă în $\mathbb{R}$ dacă orice număr real este limita unui şir de numere din A.

Teorema de densitate a lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$ ne oferă un exemplu important de mulţime densă.

De asemenea, mulţimea numerelor iraţionale este densă.

Exerciţiu 64 *Să se arate că mulţimea* $A = \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\{\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, ..., \frac{2^n-1}{2^n}\}$ *este densă în* $[0, 1]$.

Demonstraţie 65 *Fie* $x \in [0, 1]$.

Împărţim intervalul $[0, 1]$ *în* $\Delta_0 = [0, \frac{1}{2}]$ *şi* $\Delta_1 = [\frac{1}{2}, 1]$, *apoi fiecare în* $\Delta_{00} = [0, \frac{1}{4}]$, $\Delta_{01} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $\Delta_{10} = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $\Delta_{11} = [\frac{3}{4}, 1]$, *s.a.m.d. Se poate pune în evidenţă un şir de intervale* $\Delta_{\varepsilon_1} \supset \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \supset ... \supset \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n} \supset ...$ *şi care îl conţin pe x. Intervalele* $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n}$ *au capetele puncte din mulţimea A. Fiind vorba despre un şir descrescător de intervale de lungime tinzând la zero, intersecţia acestora este formată dintr-un singur punct, anume x. Rezultă că* $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *unde* $(a_n)_n$ *este format din capetele intervalelor* $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n}$.

Definiţie 17 *O mulţime este compactă dacă din orice acoperire deschisă a sa se poate extrage o subacoperire finită.*

Exemplu 52 *Orice interval* $[a, b]$ *este compact.*

Exemplu 53 *Mulţimea numerelor naturale* $\mathbb{N}$ *nu este o mulţime compactă.*

Fie $D_n = (n-1, n+1)$. Familia $(D_n)_n$ este o acoperire deschisă pentru $\mathbb{N}$. Cum orice mulţime D_n conţine un singur număr natural, n dacă am extrage o subacoperire finită ar rezulta că $\mathbb{N}$ este finită, ceea ce este absurd.

In $\mathbb{R}$ o mulţime este compactă dacă este închisă şi mărginită.

4.3 Probleme propuse

Exerciţiu 65 *Să se demonstreze că aplicaţiile* $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d_1(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$

$d_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d_2(x, y) = \sqrt{\frac{|x-y|}{1+|x-y|}}$

sunt metrici, echivalente cu metrica euclidiană pe $\mathbb{R}$ *(adică există* $\alpha, \beta > 0$ *astfel ca* $\alpha d_1 < d_e < \beta d_2$.

Exerciţiu 66 $Fr(A \cup B) \subset FrA \cup FrB$

Exerciţiu 67 $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$

Exerciţiu 68 $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Exerciţiu 69 *Să se determine* $IntA$, $\overline{A}$, A' *pentru următoarele mulţimi în topologia naturală a lui* $\mathbb{R}$, *în topologia superioară respectiv inferioară a lui* $\mathbb{R}$*:*

$A = \mathbb{Z} \cup (1, 2)$

$A = \mathbb{Q} \cup \{\frac{n^2}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$

$A = \{\frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^p}, m, n, p \in \mathbb{N}\}$.

Exerciţiu 70 *Fie* x *un număr iraţional. Arătaţi că mulţimea*

$A = \{mx + n, \quad m, n \in \mathbb{Z}\}$ *este densă în* $\mathbb{R}$.

Folosind acest rezultat se poate arăta că mulţimea punctelor limită pentru şirul $(\sin n)_n$ este $[-1, 1]$.

Capitolul 5

Serii numerice

Seriile numerice au apărut din încercarea de a extinde sumele uzuale pentru un număr finit de termeni la unul infinit. Această încercare a dat naştere unor dileme : una binecunoscută este a sumei infinite $1-1+1-1+...$ care dacă s-ar grupa $(1-1)+(1-1)+...$ ar fi zero, iar dacă s-ar scrie $1-(1-1)-(1-1)-...$ ar avea suma unu. Pe de altă parte folosind identitatea $1-x+x^2-...+(-1)^n x^n = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$, prin trecere la limită mai întâi când $n \to \infty$, apoi când $x \to 1$, vom obţine aceeaşi sumă, dar cu valoarea $\frac{1}{2}$.

Se va dovedi că seriile infinite nu au aceleaşi proprietăţi ca cele finite (spre exemplu nu întotodeauna avem comutativitate).

Vom prezenta în continuare noţiuni şi proprietăţi generale legate de seriile numerice.

5.1 Noţiuni generale

Fie $(a_n)_n$ un şir de numere reale şi $S_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$ şirul sumelor parţiale.

Cuplul format de un şir şi şirul sumelor sale parţiale formează o serie pentru care vom folosi scrierea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sau $\sum_{n\geq 0} a_n$.

Definiţie 18 *O serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *se numeşte* ***convergentă*** *dacă şirul sumelor sale parţiale este convergent. Limita şirului sumelor parţiale se mai numeşte* ***suma*** *seriei.*

O serie care nu este convergentă se numeşte ***divergentă****.*

Dacă seria modulelor este convergentă, atunci seria iniţială se numeşte ***absolut convergentă****.*

Observaţie 17 *Orice serie absolut convergentă este şi convergentă, însă reciproca nu este adevărată.*

Exemplu 54 *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *este convergentă şi are suma e deoarece şirul sumelor parţiale este* $E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ *despre care am arătat în Capitolul 2 că este convergent la e.*

Exemplu 55 *Seria* $1-1+1-1+...$ *, cu termenul general* $a_n = (-1)^n$ *este divergentă, deoarece şirul sumelor parţiale are subşirul termenilor de rang par* 0, *iar subşirul termenilor de rang impar* 1.

Exemplu 56 *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *(seria geometrică de raţie* q*) este convergentă numai dacă* $q \in (-1,1)$ *şi are suma* $\frac{1}{1-q}$.

Exemplu 57 *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ *este divergentă (am arătat în Capitolul 2 că şirul* $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... \frac{1}{n}$ *are limita* ∞*).*

Exerciţiu 71 *Arătaţi că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$ *este convergentă şi are suma* $\frac{\pi}{4}$.

Demonstraţie 66 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{n^2+n+1} = \sum_{k=1}^{n} \left[\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1}\right] =$
$\arctan 1 - \arctan \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi}{4}$.

Tot folosind definiţia se stabileşte natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$.

Într-adevăr, calculând şirul sumelor parţiale obţinem

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} \cdot c_n + c_{n+1} - \frac{3}{2} \cdot c_{n+2}$,

unde $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$, *şir pe care l-am studiat în Capitolul 2, unde am arătat că este convergent la constanta lui Euler, notată* c.

În concluzie $(S_n)_n$ *este convergent la* $\frac{1}{2} \cdot c + c - \frac{3}{2} \cdot c$, *adică la* 0.

Deci, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$ *este convergentă şi are suma* 0.

Exerciţiu 72 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Demonstraţie 67 $S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln \frac{k^2-1}{k^2} = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k}\right) =$
$\ln\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right) = \ln \frac{n+1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Deci seria este convergentă şi are suma 0.

Exerciţiu 73 *Să se afle suma seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \left(2\cos \frac{\pi}{2(n+1)} - \sin \frac{\pi(n+1)}{2(n+2)}\right)$.

Demonstraţie 68 *Deoarece* $\cos \frac{\pi}{2(n+1)} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{n+1}$, *rezultă că*

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} \cdot \left(2\cos \frac{\pi}{2(k+1)} - \sin \frac{\pi(k+1)}{2(k+2)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^{k-1}} \cdot \sin \frac{\pi k}{2(k+1)} - \frac{1}{2^k} \cdot \sin \frac{\pi(k+1)}{2(k+2)}\right)$.

Termenii acestei sume fiind consecutivi, se reduc doi câte doi şi obţinem că

$S_n = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2^n} \cdot \sin \frac{\pi(n+1)}{2(n+2)} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exerciţiu 74 *Aflaţi suma seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!+(n+2)!}$.

Demonstraţie 69 *Observăm că*

$\frac{k^2+k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!+(k+2)!} = \frac{k^2+k+1}{(k-1)![1+k+k(k+1)+k(k+1)(k+2)]} =$
$= \frac{k^2+k+1}{(k-1)![k^3+4k^2+4k+1]} = \frac{1}{(k-1)!(k+1)} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$.

De aici rezultă că

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!+(k+2)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

Deci, suma seriei este 1.

Exerciţiu 75 *Arătaţi că seria* $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + ... + \frac{1}{n\ln n}\right)$ *este divergentă.*

Demonstraţie 70 *Demonstreaţia se bazează pe aceeaşi idee pe care am folosit-o pentru a arăta că* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)=\infty$.

$S_{2^n}=\frac{1}{2\ln 2}+\left(\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}\right)+\left(\frac{1}{5\ln 5}+\frac{1}{6\ln 6}+\frac{1}{7\ln 7}+\frac{1}{8\ln 8}\right)+...+\left(\frac{1}{(2^{n-1}+1)\ln(2^{n-1}+1)}+...+\frac{1}{2^n\cdot\ln 2^n}\right)\geq$ $\frac{1}{2\ln 2}+2\cdot\frac{1}{2\ln 4}+4\cdot\frac{1}{4\ln 8}+...+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}\ln 2^n}=\frac{1}{2\ln 2}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\to}\infty.$

Deci, seria este divergentă.

Exerciţiu 76 *Arătaţi că seria* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)!}$ *este convergentă şi să se afle suma ei.*

Demonstraţie 71 $\frac{n}{(2n-1)!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n-1)+1}{(2n-1)!}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-2)!}+\frac{1}{(2n)!}\right)$, *deci*

$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2k-1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-2)!}+\frac{1}{(2k)!}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k!}=\frac{e}{2}$

Propoziţie 4 *Dacă se modifică un număr finit de termeni ai unei serii , atunci seria îşi păstrează natura.*

De asemenea, natura unei serii se păstrează prin înmulţirea cu o constantă.

Suma a două serii convergente este o serie convergentă.

O întrebare naturală : Care este legătura între convergenţa şirului $(a_n)_n$ şi seria $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$?

Propoziţie 5 *Dacă seria* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *este convergentă atunci şirul* $(a_n)_n$ *este convergent la zero.*

Observaţie 18 *Reciproca nu este adevărată , după cum o arată şi seria* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Exemplu 58 *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ *este divergentă deoarece* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$.

Exemplu 59 *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ *este şi ea divergentă deoarece* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\frac{1}{3}\neq 0$.

Exemplu 60 *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{3}$ *este divergentă deoarece şirul* $a_n=\sin\frac{n\pi}{3}$ *nu are limită* $(a_{3n}=0, a_{6n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Acesta este însă numai un criteriu necesar.

Un criteriu necesar şi suficient este :

Teorema 6 *(Criteriul lui Cauchy) Seria* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon>0$ *există* $N\in\mathbb{N}$ *astfel ca pentru orice* $n\geq N$ *şi pentru orice* $p\in\mathbb{N}$ *avem* $|a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+p}|<\varepsilon$.

Exemplu 61 *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n}{n(n+1)}$ *este convergentă deoarece :*

$|a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+p}|=\left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)(n+2)}+...+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)(n+p+1)}\right|\leq$ $\left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right|+...+\left|\frac{\sin(n+p)}{(n+p)(n+p+1)}\right|\leq\left|\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right|+...+\left|\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\right|\leq$ $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}\leq\frac{1}{n+1}$

Cum $\frac{1}{n+1}\to 0$, rezultă că sunt îndeplinite condiţiile Criteriului lui Cauchy.

O parte importantă în studiul seriilor o constituie seriile de numere pozitive. Pentru acestea există mai multe criterii.

5.2 Serii de numere pozitive

Pentru seriile de numere pozitive şirul sumelor parţiale este crescător, deci convergenţa acestuia se reduce la studiul mărginirii acestui şir.

Teorema 7 *(Primul Criteriu de comparaţie) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ două serii de termeni pozitivi.*

1) Dacă $a_n \leq b_n$ şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă;

2) Dacă $a_n \geq b_n$ şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ este divergentă, atunci şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă;

Corolar 1 *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ două serii de termeni pozitivi. Dacă există constantele α şi β astfel încât $\alpha \cdot a_n \leq b_n \leq \beta \cdot b_n$ pentru orice $n \geq N$, atunci cele două serii au aceeaşi natură.*

Exemplu 62 *Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ este convergentă deoarece:*

$\sin \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ şi

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$, deci şirul sumelor parţiale pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este mărginit. Cum seria este de termeni pozitivi , mărginirea asigură convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, deci se poate aplica Criteriul de comparaţie.

În schimb, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n}$ este divergentă, deoarece potrivit unei inegalităţi cunoscute:

$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$, obţinem că $\sin \frac{\pi}{2n} \geq \frac{1}{n}$. Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, folosind punctul 2) al Criteriului de comparaţie, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n}$ este divergentă.

Exerciţiu 77 *Studiaţi natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.*

Demonstraţie 72 *Folosind inegalitatea $\ln(1+x) \leq x$ pentru orice $x \geq 0$ obţinem că*

$\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ fiind convergentă rezultă că şi seria iniţială este convergentă.

Exerciţiu 78 *Studiaţi natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$.*

Demonstraţie 73 *Folosind un studiu al derivatelor se arată că $\sin x \geq \ln(1+x)$ pentru orice $x \in (0,1)$, deci seria dată este de termeni pozitivi.*

În Capitolul 2 am arătat că $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$, de unde , prin logaritmare obţinem că $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$.

Prin urmare, $\sin \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă , folosind primul Criteriu de comparaţie , rezultă că seria dată este şi ea convergentă.

Exerciţiu 79 *Studiaţi natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\frac{1}{n}}}$.*

Demonstraţie 74 *Avem $\frac{1}{(\ln n)^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$, iar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1 \neq 0$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$ este divergentă. Folosind Criteriul de comparaţie rezultă că şi seria noastră este divergentă.*

Există o altă variantă a Criteriului de comparaţie , care evită folosirea unor inegalităţi , în favoarea unor limite fundamentale:

Teorema 8 *(Al doilea criteriul de comparaţie) Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *două serii de termeni pozitivi. Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}^*$ *atunci cele două serii au aceeaşi natură.*

Demonstraţia este simplă : scriem definiţia limitei şi folosim primul criteriu de comparaţie.

Exemplu 63 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \tan \frac{1}{3^n}$.

Demonstraţie 75 *În ideea de a folosi limita fundamentală* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, *considerăm* $b_n = \frac{2^n}{3^n}$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in \mathbb{R}^*$, *deci cele două serii au aceeaşi natură. Cum seria* $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ *este convergentă (seria geometrică pentru* $q = \frac{2}{3}$*), rezultă că şi seria iniţială este convergentă.*

Exerciţiu 80 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} \arcsin \frac{2n}{4n^2-1}$.

Demonstraţie 76 *Observăm că* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arcsin \frac{2n}{4n^2-1}}{\frac{2n}{4n^2-1}} = 1 \in \mathbb{R}^*$, *deci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} \arcsin \frac{2n}{4n^2-1}$ *are aceeaşi natură cu seria* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{4n^2-1}$. *Aceasta din urmă este divergentă deoarece* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{4n^2-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^*$, *iar seria* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ *este divergentă.*

Exerciţiu 81 *Arătaţi că seria* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^2+1}$ *este divergentă.*

Demonstraţie 77 *Deoarece* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+\ln n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n\ln n}{n^2+1} = 1$, *rezultă că seria noastră are aceeaşi natură cu seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, *deci este divergentă.*

Exerciţiu 82 *Fie* $(a_n)_n$ *un şir descrescător de numere pozitive astfel încât seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergentă. Arătaţi că* $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$.

Demonstraţie 78 *Fie* $b_n = n(a_n - a_{n+1})$. *Arătăm că seria* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *este convergentă.*

$S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = a_1 - a_2 + 2a_2 - 2a_3 + 3a_3 - 3a_4 + ... + na_n - na_{n+1} =$
$= a_1 + a_2 + ... + a_n - na_{n+1} \leq s_n$,

unde $(s_n)_n$ *este şirul sumelor parţiale pentru seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. *Deci* $(S_n)_n$ *este mărginit, iar seria fiind de termeni pozitivi rezultă că* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *este convergentă.*

În plus, $n \cdot a_{n+1} = s_n - S_n$, *deci există* $\lim\limits_{n\to\infty} na_{n+1} = l \in \mathbb{R}$. *Presupunând că* $l \neq 0$ *ar rezulta că* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}^*$ *deci, folosind al doilea criteriu de comparaţie ar rezulta că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *are aceeaşi natură cu seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, *care este, însă divergentă. Contradicţia provine din faptul că am presupus* $l \neq 0$. *Deci* $\lim\limits_{n\to\infty} na_{n+1} = 0$.

Deoarece am arătat că seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *este convergentă, rezultă că* $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$ *şi, deci* $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

Observaţie 19 *Reciproca acestei propoziţii nu este adevărată: Există şiruri* $(a_n)_n$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$*, dar seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă.*

Este cazul şirului $a_n = \frac{1}{n \ln n}$*. Se observă imediat că* $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$*. Vom demonstra ca o aplicaţie a Criteriului următor că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă.*

Corolar 2 *Fie* $(n_k)_k$ *un şir crescător de numere naturale astfel încât seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ *este convergentă. Atunci* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{n_k} = 0$*.*

Un alt criteriu specific seriilor pozitive este Criteriul de condensare:

Teorema 9 *(Criteriul de condensare) Fie* $(a_n)_n$ *un şir descrescător de numere pozitive. Atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *are aceeaşi natură cu seria* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$*.*

Exemplu 64 *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *este convergentă pentru* $\alpha > 1$ *şi este divergentă pentru* $\alpha \leq 1$*.*

Demonstraţie 79 *Daca* $\alpha \leq 0$ *atunci* $\frac{1}{n^\alpha} \geq 1$*. Cum seria* $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ *este divergentă rezultă că în acest caz seria noastră este tot divergentă.*

Dacă $\alpha > 0$*, atunci şirul* $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_n$ *este un şir descrescător de numere pozitive, deci se poate aplica Criteriul de condensare. Deci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *are aceeaşi natură cu seria* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha}$ *care este de fapt seria geometrică* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}$*, de raţie* $q = 2^{1-\alpha}$*. Aceasta este convergentă numai dacă* $q \in (-1, 1)$*, adică pentru* $1 - \alpha < 0$*, deci pentru* $\alpha > 1$*.*

Exerciţiu 83 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$*.*

Demonstraţie 80 *Deoarece* $a^{\ln n} = n^{\ln a}$*, seria noastră devine* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\ln a}}$*. Folosind exerciţiul precedent rezultă că seria este convergentă dacă* $-\ln a > 1$*, adică* $a < \frac{1}{e}$*.*

Exerciţiu 84 *Să se arate că seria* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ *este divergentă.*

Demonstraţie 81 *Observăm că şirul* $\left(\frac{1}{n \cdot \ln n}\right)_{n\geq 2}$ *este descrescător şi pozitiv, deci putem folosi Criteriul de condensare. Deci, seria noastră va avea aceeaşi natură cu seria* $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \cdot \ln 2^n}$ *care este de fapt seria* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$*, deci este divergentă.*

Exerciţiu 85 *Fie* $(a_n)_n$ *un şir de termeni pozitivi în progresie aritmetică crescătoare. Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n}}\right)^p$*.*

Demonstraţie 82 *Deoarece termenii sunt în progresie arirmetică avem:*

$a_2 = \frac{a_1+a_3}{2}, \quad a_4 = \frac{a_3+a_5}{2}, ..., a_{2n} = \frac{a_{2n-1}+a_{2n+1}}{2}$

Deci:

$a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n} = \frac{a_1+a_3}{2} \cdot \frac{a_3+a_5}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{2n-1}+a_{2n+1}}{2}$

Acum folosim inegalitatea mediilor şi obţinem că:

$a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_3} \cdot \sqrt{a_3 \cdot a_5} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_{2n-1} \cdot a_{2n+1}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{a_1}} \cdot a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1} \cdot \sqrt{a_{2n+1}}$

Prin urmare,

$\frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n}} \leq \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_{2n+1}}}$.

Repetăm procedeul pentru termenii de rang impar:

$a_3 = \frac{a_2+a_4}{2}, \quad a_5 = \frac{a_4+a_6}{2}, ..., a_{2n-1} = \frac{a_{2n-2}+a_{2n}}{2}$

Deci:

$a_3 \cdot a_5 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1} = \frac{a_2+a_4}{2} \cdot \frac{a_4+a_6}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{2n-2}+a_{2n}}{2}$

Acum folosim inegalitatea mediilor şi obţinem că:

$a_3 \cdot a_5 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1} \geq \sqrt{a_2 \cdot a_4} \cdot \sqrt{a_4 \cdot a_6} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_{2n-2} \cdot a_{2n}} =$
$= \frac{1}{\sqrt{a_2}} \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{2n}}}$

Prin urmare,

$\frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n}} \geq \frac{a_1}{\sqrt{a_2} \cdot \sqrt{a_{2n}}}$.

Deci $\frac{a_1}{\sqrt{a_2} \cdot \sqrt{a_{2n}}} \leq \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n}} \leq \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_{2n+1}}}$, *adică* $\frac{a_1}{\sqrt{a_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1+(2n-1)r}} \leq \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n}} \leq \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1+2nr}}$.

unde r *este raţia progresiei .*

Deci $\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_2}}\right)^p \cdot \frac{1}{(a_1+(2n-1)r)^{\frac{p}{2}}} \leq \left(\frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n}}\right)^p \leq \frac{(\sqrt{a_1})^p}{(a_1+2nr)^{\frac{p}{2}}}$.

În concluzie, seria noastră are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$, *care este convergentă dacă* $\frac{p}{2} > 1$, *adică* $p > 2$ *şi este divergentă în rest.*

Teorema 10 *(Criteriul raportului) Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *o serie de termeni pozitivi.*

1) Dacă $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergentă;*

2) Dacă $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este divergentă.*

Corolar 3 *Presupunem că pentru seria de termeni pozitivi* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

Dacă $l < 1$, *atunci seria este convergentă, iar dacă* $l > 1$ *seria este divergentă.*

Exerciţiu 86 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Demonstraţie 83 *Deoarece* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{e} < 1$ *rezultă că seria este convergentă.*

Exerciţiu 87 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n}$.

Demonstraţie 84 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{\alpha^n} = \frac{\alpha \cdot n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} \alpha$

Dacă $\alpha < 1$ *atunci seria este convergentă.*

Dacă $\alpha > 1$ *atunci seria este divergentă, iar dacă* $\alpha = 1$ *seria devine* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *care este divergentă.*

Teorema 11 *(Criteriul rădăcinii al lui Cauchy) Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *o serie de termeni pozitivi.*

1) Dacă $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} < 1$ *atunci seria este convergentă;*

2) Dacă $\liminf\limits_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} > 1$ *atunci seria este divergentă.*

Exerciţiu 88 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$.

Demonstraţie 85 $(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n+1}{3n+2} \to \frac{1}{3} < 1$, *deci seria este convergentă.*

Exerciţiu 89 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$.

Demonstraţie 86 $(a_n)^{\frac{1}{n}} \to a$.

Dacă $a < 1$ *atunci seria este convergentă;*

Dacă $a > 1$ *seria va fi divergentă, iar pentru* $a = 1$ *seria devine* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$ *care este divergentă deoarece* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n = e \neq 0$.

Exerciţiu 90 *Să se studieze natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1^3+2^3+...+n^3}{n^3} - \frac{n}{4}\right)^n$.

Demonstraţie 87 $\left(\frac{1^3+2^3+...+n^3}{n^3} - \frac{n}{4}\right)^n = \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4n^3} - \frac{n}{4}\right)^n = \left(\frac{2n^3+n^2}{4n^3}\right)^n$.

Deci $(a_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2} < 1$, *de unde rezultă convergenţa seriei.*

Exerciţiu 91 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(\sqrt{2})^n}$.

Demonstraţie 88 *Folosind tot Criteriul rădăcinii avem:*
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, *deci seria este convergentă.*

Aceste două criterii nu sunt elocvente în cazul în care limita este unu. O "salvare" într-un astfel de caz poate fi următorul criteriu:

Teorema 12 *(Criteriul Raabe-Duhamel) Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *o serie de termeni pozitivi.Presupunem că există* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l$.

1) dacă $l > 1$, *atunci seria este convergentă;*

2) dacă $l < 1$, *atunci seria este divergentă.*

Exerciţiu 92 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$.

Demonstraţie 89 *Calculând* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}$ *obţinem limita* 1.

În schimb $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2+8n+1}{4n^2+6\bar{n}2} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \frac{2n-1}{4n^2+6n+2} = \frac{1}{2} < 1$, *deci seria este divergentă.*

Exerciţiu 93 *Se cere natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}$.

Demonstraţie 90 *Deoarece* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, *calculăm* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \frac{1}{2} < 1$. *Prin urmare seria este divergentă.*

Un ultim criteriu pentru serii de termeni pozitivi pe care-l prezentăm:

Teorema 13 *(Criteriul logaritmic) Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *o serie de termeni pozitivi. Presupunem că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = l$.

1) dacă $l > 1$ *atunci seria este convergentă;*

2) dacă $l > 1$ *atunci seria este divergentă.*

Exerciţiu 94 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}$.

Demonstraţie 91 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\ln n - \ln(\ln n) - \ln(\ln(n+1))}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} - \frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln n}\right) = 2 > 1$, *deci seria este convergentă.*

Exerciţiu 95 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Demonstraţie 92 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n \cdot \ln(\ln n)}{\ln n} = \infty > 1$, *deci seria este convergentă.*

5.3 Serii alternante

Teorema 14 *(Criteriul Abel-Dirichlet) Fie* $(a_n)_n$ *şi* $(b_n)_n$ *două şiruri cu proprietăţile :*

1) $(a_n)_n$ *este descrescător la zero;*

2) şirul sumelor parţiale pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *este mărginit.*

Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *este convergentă.*

Corolar 4 *(Criteriul lui Leibniz) Fie* $(a_n)_n$ *un şir descrescător la zero. Atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *este convergentă.*

Exemplu 65 *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ *este convergentă.*

Exemplu 66 *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$ *este divergentă deoarece se scrie ca suma dintre o serie convergentă ,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *(Criteriul lui Leibniz) şi una divergentă,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Exerciţiu 96 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi\sqrt{n^2+1}$.

Demonstraţie 93 *Folosim egalităţile* $\sin(x - n\pi) = \sin x \cdot \cos n\pi - \sin n\pi \cdot \cos x = (-1)^n \cdot \sin x$.

Deci, în general, $\sin x = (-1)^n \sin(x - n\pi)$, *de unde rezultă că* $\sin \pi\sqrt{n^2+1} = (-1)^n \sin \pi(\sqrt{n^2+1} - n) = (-1)^n \sin \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

Deoarece $\sin \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \to 0$, *rezultă că se poate folosi Criteriul lui Leibniz, deci seria este convergentă.*

Exerciţiu 97 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{\sqrt{n}}$.

Demonstraţie 94 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ *este un şir descrescător la zero.*

$b_n = \sin n \cdot \sin n^2 = \frac{1}{2}\left(\cos(n-n^2) - \cos(n+n^2)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos n(n-1) - \cos n(n+1)\right,$ *deci* $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = \frac{1}{2}\left[1 - \cos n(n+1)\right]$, *de unde rezultă că* $(S_n)_n$ *este mărginit.*

Deci sunt îndeplinite condiţiile Criteriului Abel Dirichlet.

Exerciţiu 98 *(Seria binomială) Studiaţi natura seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!}$ *, când* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ *.*

Demonstraţie 95 *Observăm că* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \underset{n\to\infty}{\to} 1$*, deci nu se poate folosi Criteriul raportului.*

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1\right) = \alpha+1$*. Deci dacă* $\alpha+1 > 1$*, adică* $\alpha > 0$ *seria este absolut convergentă (deci şi convergentă). Dacă* $\alpha < 0$ *atunci seria modulelor este divergentă, dar aceasta nu ne dă informaţii despre natura seriei iniţiale.*

Observăm că $a_n = (-1)^n \frac{(-\alpha)\cdot(1-\alpha)\cdot\ldots\cdot(n-1-\alpha)}{n!}$.

Studiem monotonia şirului de termeni pozitivi $x_n = \frac{(-\alpha)\cdot(1-\alpha)\cdot\ldots\cdot(n-1-\alpha)}{n!}$. $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n-\alpha}{n+1} < 1$ *numai dacă* $\alpha > -1$.

Deci dacă $\alpha \leq -1$ *atunci* $(x_n)_n$ *este un şir crescător de numere pozitive, deci nu poate avea limita zero. In concluzie nici şirul* $((-1)^n \cdot x_n)_n$ *nu poate avea limita zero, deci seria noastră nu este convergentă.*

Dacă $\alpha > -1$ *şirul este descrescător şi pozitiv , deci este convergent la* L*. Pentru a arăta că limita sa este zero, vom aplica Lema Stolz-Cesaro. Vom scrie* $x_n = \frac{b_1+\ldots+b_n}{n}$*. Atunci* $a_{n+1} = \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n+b_{n+1}}{n+1} = \frac{na_n+b_{n+1}}{n+1}$*, de unde* $b_{n+1} = (n+1)a_{n+1} - na_n = -\alpha a_n$*. Prin trecere la limită obţinem* $L = -\alpha L$*, deci* $L = 0$.

În concluzie, sunt îndeplinite condiţiile Criteriului Leibniz, prin urmare în acest caz seria este convergentă.

În concluzie, seria binomială este:

- absolut convergentă dacă $\alpha \geq 0$;

- semiconvergentă dacă $\alpha \in (-1, 0)$ (adică este convergentă dar nu este absolut convergentă;

-divergentă dacă $\alpha \leq -1$.

Exerciţiu 99 *Studiaţi convergenţa seriei* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} \cdot \frac{1}{(\ln n)^q}$.

Demonstraţie 96 *Seria fiind de termeni pozitivi, aplicăm Criteriul logaritmic:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{p \ln n + q \ln(\ln n)}{\ln n} = p.$

Deci, dacă $p > 1$ *atunci seria este convergentă, iar dacă* $p < 1$ *seria va fi divergentă. Rămâne de studiat cazul în care* $p = 1$.

Dacă $q > 0$ *atunci şirul* $\left(\frac{1}{n(\ln n)^q}\right)_n$ *este descrescător la zero, deci se poate folosi Criteriul de condensare. Seria noastră va avea aceeaşi natură cu seria* $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n\cdot(n \ln 2)^q}$*, adică* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q(\ln 2)^q}$*, care este convergentă pentru* $q > 1$ *şi divergentă pentru* $q \leq 1$.

Dacă $q \leq 0$ *seria se scrie* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{-q}}{n}$*. Deoarece* $-q > 0$ *rezultă că* $(\ln n)^{-q} > 1$*, deci* $\frac{(\ln n)^{-q}}{n} > \frac{1}{n}$*. Cum seria* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ *este divergentă rezultă, folosind Criteriul de comparaţie, rezultă că în cazul* $p = 1$ *şi* $q \leq 0$ *seria este divergentă.*

Exerciţiu 100 *Fie* $\sum_{n\geq 0} u_n$*, o serie de termeni pozitivi,* $u_0 > 0$ *şi* $(S_n)_n$ *şirul sumelor sale parţiale. Arătaţi că seriile de termen general* u_n *şi* $\frac{u_n}{S_n}$ *au aceeaşi natură.*

Demonstraţie 97 *Parcurgem următoarele etape:*

Mai întâi arătăm că dacă seria $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge, atunci seria* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge.*

Fie $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$. *Atunci* $S'_n = \frac{u_0}{S_0} + \frac{S_1 - S_0}{S_1} + ... + \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} =$
$= 1 + 1 - \frac{S_0}{S_1} + 1 - \frac{S_1}{S_2} + ... + 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n} =$
$= n + 1 - \left(\frac{S_0}{S_1} + \frac{S_1}{S_2} + ... + \frac{S_{n-1}}{S_n}\right)$.

Seriile fiind de termeni pozitivi, rezultă că putem aplica inegalitatea mediilor, deci:

$\frac{S_0}{S_1} + \frac{S_1}{S_2} + ... + \frac{S_{n-1}}{S_n} \geq n\left(\frac{S_0}{S_1} \cdot \frac{S_1}{S_2} \cdot ... \cdot \frac{S_{n-1}}{S_n}\right)^{\frac{1}{n}} = n\left(\frac{S_0}{S_n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$S'_n \leq n + 1 - n\left(\frac{S_0}{S_n}\right)^{\frac{1}{n}} = n\left(1 - \left(\frac{S_0}{S_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) + 1.$

Seria $\sum_{n\geq 0} u_n$ *fiind convergentă , rezultă că şirul* $(S_n)_n$ *este convergent, deci mărginit. Prin urmare,*

$\frac{S_0}{S_n} \geq \frac{S_0}{M}$, *de unde* $1 - \left(\frac{S_0}{S_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 1 - \left(\frac{S_0}{M}\right)^{\frac{1}{n}}$

Deci $S'_n \leq n\left(1 - \left(\frac{S_0}{M}\right)^{\frac{1}{n}}\right) + 1.$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \left(\frac{S_0}{S_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \ln\frac{S_0}{M}$, *rezultă că şirul* $(S'_n)_n$ *este mărginit. El este şi crescător, seria fiind de termeni pozitivi, deci va fi convergent.*

Pentru partea a doua, vom arăta că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, *atunci seriile* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *şi* $\sum_{n\geq 0} \ln(1 - v_n)$ *au aceeaşi natură.*

Presupunem că seria $\sum_{n\geq 0} v_n$ *este convergentă, deci şirul* $(S'_n)_n$ *va fi convergent.*

$S''_n = \ln(1 - v_0) + \ln(1 - v_1) + ... + \ln(1 - v_n) = \ln(1 - v_0)(1 - v_1)...(1 - v_n)$.

Folosind tot inegalitatea mediilor avem

$((1 - v_0)(1 - v_1)...(1 - v_n))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{n+1-S'_n}{n=1}$

Deci, $S''_n \leq \ln\left(1 - \frac{S'_n}{n+1}\right)^{n+1}$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = l \in \mathbb{R}$, *rezultă că* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S'_n}{n+1} = 0$, *deci*

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{S'_n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} S'_n}$, *ceea ce atrage mărginirea şirului* $(S''_n)_n$, *deci convergenţa sa (el fiind descrescător).*

Recioroc, dacă seria $\sum_{n\geq 0} \ln(1 - v_n)$ *este convergentă, atunci şirul* $(S''_n)_n$ *este convergent.*

Fie $a_n = \ln(1 - v_n)$. *Rezultă că* $v_n = 1 - e^{a_n}$, *deci*

$S'_n = n + 1 - e^{a_0} - .. - e^{a_n}$.

Se cunoaşte că $e^x > x + 1$, *deci* $1 - e^x < -x$ *de unde rezultă că* $S'_n < -S''_n < -M$, *deci, şirul* $(S'_n)_n$ *va fi mărginit, deci convergent, deoarece* $v_n > 0$.

Pentru a încheia demonstraţia observăm că

$S''_n = \ln(1 - v_0)(1 - v_1)...(1 - v_n) = \ln\left(1 - \frac{u_1}{S_1}\right)\left(1 - \frac{u_2}{S_2}\right)...\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) =$
$= \ln\frac{S_0}{S_1} \cdot \frac{S_1}{S_2} \cdot ... \cdot \frac{S_{n-1}}{S_n} = \ln\frac{u_0}{S_n}$.

Dacă seria $\sum_{n\geq 0} v_n$ *este convergentă, rezultă că seria* $\sum_{n\geq 0} \ln(1 - v_n)$ *este convergentă, deci există* $\lim\limits_{n\to\infty} S''_n \in \mathbb{R}$, *adică există* $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\frac{u_0}{S_n} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Presupunând că $\lim\limits_{n\to\infty} S''_n = 0$, *ar rezulta că* $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = 0$. *Cum* $(S'_n)_n$ *este crescător ar rezulta* $u_n = 0$, *ceea ce este imposibil.*

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \frac{u_0}{S_n} \in \mathbb{R}$ *deci* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$.

5.4 Alte proprietăţi ale seriilor de numere

Vom discuta mai întâi comportarea seriilor la operaţii cu serii:

1) Suma a două serii convergente este tot o serie convergentă.

2) Suma a două serii divergente nu este întotodeauna tot o serie divergentă .

Spre exemplu seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$ sunt divergente, dar suma lor este $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, adică o serie convergentă.

3) Inmulţirea cu o constantă a unei serii păstrează natura seriei.

Spre deosebire de sumele finite, seriile nu sunt totdeauna comutative.

Exemplu 67 *Am arătat că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *este convergentă. Vom vedea că nu este comutativă.*

Demonstraţie 98 *În Capitolul 2 am arătat că şirul sumelor parţiale are limita* $x = \ln 2$.

Presupunând că seria este comutativă, atunci:

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right)$ *şi*

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)$

Prin adunare obţinem $\frac{3x}{2} = x + \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{2}{4n} \right) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} ... = x,$

de unde ar rezulta că $x = 0$, *ceea ce este absurd.*

Motivul pentru care seria precedentă nu este comutativă este faptul că seria modulelor nu este convergentă.

Teorema 15 *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o serie absolut convergentă cu suma s. Atunci pentru orice permutare a termenilor, seria nou obţinută va fi convergentă , cu aceeaşi sumă s.*

Definiţie 19 *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *două serii de numere. Seria* ***produs*** *a acestora este seria* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *de termen general* $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0$.

Produsul a două serii convergente nu este neapărat o serie convergentă:

Produsul dintre seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ cu ea însăşi este o serie divergentă. Intradevăr,

$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$

Observăm că $(k+1)(n-k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2$.

Deci: $|c_n| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{2n+2}{n+2} \geq 1$, de unde rezultă că $(c_n)_n$ nu tinde la zero, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este divergentă.

Se pot da exemple de serii diveregnte al căror produs este o serie absolut convergentă.

Teorema 16 *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *o serie absolut convergentă şi* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *o serie convergentă. Atunci produsul acestora este o serie convergentă a cărei sumă este produsul seriilor iniţiale.*

5.5 Calculul aproximativ al sumelor de serii

După cum s-a văzut multe criterii stabilesc doar natura seriilor, fără a da informaţii despre suma acestora.

Deoarece şirul sumelor parţiale tinde la suma seriei, acest şir aproximează oricât de bine această sumă.

Exerciţiu 101 *Evaluaţi eroarea comisă înlocuind suma seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *prin suma primilor* p *termeni.*

Demonstraţie 99 $S - S_p = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+2)^2} + ... > \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+2)(p+3)} + ... =$
$= \frac{1}{P+1} - \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+2} - ... = \frac{1}{p+1}$.

Deci eroarea comisă este cel mult $\frac{1}{p+1}$.

Exerciţiu 102 *Evaluaţi eroarea comisă înlocuind suma seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *prin suma primilor* n *termeni.*

Demonstraţie 100 $S - S_n = \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)!2^{n+2}} + ... =$
$= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n+2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \cdot \frac{1}{2^2} + ...\right) <$
$< \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{2^2} + ...\right) <$
$< \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n2^{n+1}}$.

Exerciţiu 103 *Evaluaţi eroarea comisă înlocuind suma seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}$ *prin suma primilor* n *termeni.*

Demonstraţie 101 $S - S_n = R_n = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + (n+2)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2} + ...$
$\frac{1}{16} R_n = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2} + (n+2)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+4} + ...$
Prin scădere :
$\frac{15}{16} R_n = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+4} + ... = n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} =$
$= \left(n + \frac{16}{15}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$

Problemele se pot formula şi alfel:

Exerciţiu 104 *Calculaţi numărul e cu două zecimale exacte.*

Demonstraţie 102 *Se foloseşte faptul că* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *are suma e şi se pune condiţia* $S - S_n < 10^{-2}$.

$S - S_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ... = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + ...\right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n} < \frac{1}{n}$

Deci sunt suficienţi 100 *termeni pentru a avea e cu două zecimale exacte.*

5.6 Probleme propuse

Exerciţiu 105 *Stabiliţi natura seriilor:*

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+a+a^2+..+a^n)}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\tan a)\left(1+\tan\frac{a}{2}\right)...\left(1+\tan\frac{a}{n}\right)}, \quad a\in\mathbb{R}^*\backslash\{1\}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n\sin^{2n}x}{n+1}, \quad x\in[0,\pi]$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n)^{\frac{1}{n}}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln n}$

Exerciţiu 106 *Calculaţi suma seriilor:*

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+5}{n!}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n-1)!}+...+\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\frac{1}{(n-k)!}+...+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Exerciţiu 107 *Arătaţi că în criteriile raportului, rădăcinii şi Raabe-Duhamel cazul $l=1$ nu este elocvent*

Exerciţiu 108 *Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie convergentă. Studiaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, unde*

$y_n=\frac{n+1}{n}x_n$

$y_n=\frac{x_n}{n^p}$

$y_n=\frac{x_n}{\ln n}$

Capitolul 6

Limite.Continuitate

Scopul acestui capitol este de a studia conceptul de continuitate , însă nu într-un cadru general, limitându-ne la cazul funcţiile reale de variabilă reală.

6.1 Limita unei funcţii într-un punct

Pentru început ne vom ocupa de noţiunea de limită a unei funcţii într-un punct.

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie, a un punct de acumulare pentru mulţimea A.

Definiţie 20 *(definiţia cu vecinătăţi) Vom spune că funcţia f are limita l în punctul a (şi vom scrie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$) dacă pentru orice vecinătate V a lui l există U o vecinătate a lui a astfel încât $f(U) \subset V$.*

Definiţie 21 *(definiţia cu δ şi ε) Spunem că $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel ca pentru orice $x \in A$ cu $|x - a| < \delta$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.*

Definiţie 22 *(definiţia cu şiruri) Spunem că $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ dacă pentru orice şir $x_n \to a$ avem $f(x_n) \to l$.*

Analog se definesc limitele laterale:

pentru limita la stânga (notată $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)$) în plus condiţia $x < a$, iar pentru cea la dreapta (notată $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)$) $x > a$.

Observaţie 20 *Dacă există limita este unică.*

Cu excepţia unor cazuri de nedeterminare : $\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, \infty \cdot 0, 0^0, etc.$, sunt valabile operaţiile cu limite: $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$, etc.

Pentru calculul unor limite se folosesc deseori limite fundamentale:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r, \ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \ \lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, etc.

Exerciţiu 109 *Calculaţi* $l = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(\cos x \cdot (\cos x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\cos x)^{\frac{1}{3}}\right)}{\arcsin(1 - \cos x)}$.

Demonstraţie 103 $l = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos x)}{\arcsin(1-\cos x)} + \frac{1}{2}\frac{\ln(\cos x)}{\arcsin(1-\cos x)} + \frac{1}{3}\frac{\ln(\cos x)}{\arcsin(1-\cos x)}\right) =$
$= \frac{11}{6}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\arcsin(1-\cos x)} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1-y)}{\arcsin y} =$
$= \lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1-y)}{-y}\cdot\frac{-y}{\arcsin y} = -1.$

Exerciţiu 110 *Calculaţi* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}+b^{x^2}-\cos ax-\cos bx}{\sin ax^2+\sin bx^2}$.

Demonstraţie 104 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}+b^{x^2}-\cos ax-\cos bx}{\sin ax^2+\sin bx^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-1+b^{x^2}-1+1-\cos ax+1-\cos bx}{x^2}\cdot \frac{x^2}{\sin ax^2+\sin bx^2}$.

Folosind limite fundamentale avem:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-1}{x^2} = \ln a, \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{b^{x^2}-1}{x^2} = \ln b$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2},$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos bx}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{bx}{2}}{\left(\frac{bx}{2}\right)^2}\cdot\frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin ax^2+\sin bx^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin ax^2+\sin bx^2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin ax^2}{ax^2}\cdot a+\frac{\sin bx^2}{bx^2}\cdot b} = \frac{1}{a+b}$

În concluzie, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}+b^{x^2}-\cos ax-\cos bx}{\sin ax^2+\sin bx^2} = \frac{\ln a+\ln b+\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}}{a+b}$.

Exerciţiu 111 *Calculaţi* $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-[x]}$, *unde* $[x]$ *reprezintă partea întreagă a lui* x.

Demonstraţie 105 *Folosind definiţia părţii întregi avem:*
$x-1 < [x] \le x$, *deci* $e^{-x+1} < e^{-[x]} \le e^{-x}$
Nu ne mai rămâne decât să observăm că $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$.

Exerciţiu 112 *Arătaţi că nu există* $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$.

Demonstraţie 106 *Presupunem că există* $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x = l$. *Folosind definiţia cu şiruri a limitei rezultă că pentru orice şir* $(x_n)_n$ *care tinde la* ∞, *avem* $\sin x_n \to l$.
Fie $x_n = 2n\pi \to \infty$; *deci* $\sin x_n = \sin 2n\pi = 0 \to 0$;
Pentru $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \to \infty$ *rezultă* $\sin x_n = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \to 1$, *ceea ce contrazice unicitatea limitei.*

Analog se demonstrează pentru celelalte funcţii trigonometrice.

Exerciţiu 113 *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

Demonstraţie 107 *Observăm că nu există* $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, *dar avem produsul dintre o funcţie care tinde la zero,* $f(x) = x$ *şi una mărginită* $g(x) = \sin\frac{1}{x}$, *deci limita cerută este* 0.

Exerciţiu 114 *Calculaţi* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = l$.

Demonstraţie 108 $l = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x} = 0$.

Exerciţiu 115 *Calculaţi* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin\frac{1}{x}}{1+x+a^{\frac{1}{x}}}$, *a fiind pozitiv.*

Demonstraţie 109 *Dacă* $a<1$, *atunci* $\lim\limits_{x\nearrow 0}a^{\frac{1}{x}}=\infty$, *iar* $\lim\limits_{x\searrow 0}a^{\frac{1}{x}}=0$.

Deci $\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{1}{1+x+a^{\frac{1}{x}}}=0$, *de unde rezultă că şi* $\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{1+\sin\frac{1}{x}}{1+x+a^{\frac{1}{x}}}=0$ *(ca produs dintre o funcţie care tinde la zero şi o funcţie mărginită).*

La dreapta situaţia se schimbă radical. Vom arăta prin reducere la absurd că nu există limita la dreapta.

Presupunem că există $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1+\sin\frac{1}{x}}{1+x+a^{\frac{1}{x}}}=l$. *Folosind definiţia cu şiruri a limitei avem că pentru orice şir* $(x_n)_n$ *pozitiv care tinde la* 0, *rezultă că*

$f(x_n)=\frac{1+\sin\frac{1}{x_n}}{1+x_n+a^{\frac{1}{x_n}}}\to l$.

Pentru $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $f(x_n)=\frac{1}{1+\frac{1}{2n\pi}+a^{2n\pi}}\to 1$,

iar pentru $x_n=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$, *avem* $f(x_n)=0\to 0$, *ceea ce contrazice unicitatea limitei.*

Dacă $a>1$ *vom avea* $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1+\sin\frac{1}{x}}{1+x+a^{\frac{1}{x}}}=0$, *iar limita la stânga nu există.*

Exerciţiu 116 *Calculaţi* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-(1-x)^{\frac{1}{5}}}{(1+x)^{\frac{1}{7}}-(1-x)^{\frac{1}{8}}}$.

Demonstraţie 110 *Soluţia se va baza pe limita fundamentală* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1+1-(1-x)^{\frac{1}{5}}}{(1+x)^{\frac{1}{7}}-1+1-(1-x)^{\frac{1}{8}}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1+1-(1-x)^{\frac{1}{5}}}{x}\cdot\frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{7}}-1+1-(1-x)^{\frac{1}{8}}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1+1-(1-x)^{\frac{1}{5}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{5}}-1}{-x}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$,

iar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{7}}-1+1-(1-x)^{\frac{1}{8}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{7}}-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{8}}-1}{-x}=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{15}{56}$

Exerciţiu 117 *Calculaţi* $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$.

Demonstraţie 111 *Folosind definiţia părţii întregi:*

$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}$

avem $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1$, *de unde , prin trecere la limită, folosind criteriul cleştelui, rezultă că limita este* 1.

Exerciţiu 118 *Dacă* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *este o funcţie periodică şi neconstantă, atunci* f *nu are limită la* $\pm\infty$.

Demonstraţie 112 *Presupunem că există* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$; *atunci pentru orice şir* $(x_n)_n$ *care tinde la* ∞, *avem* $f(x_n)\to l$. *Deoarece funcţia este neconstantă, rezultă că există* $\alpha\neq\beta$ *astfel ca* $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

Fie T *perioada funcţiei* f *şi fie* $x_n=\alpha+nT$, *atunci* $f(x_n)=f(\alpha)\to f(\alpha)$

Iar pentru $x_n=\beta+nT$ *avem* $f(x_n)=f(\beta)\to f(\beta)$, *ceea ce ar contrazice unicitatea limitei.*

Exerciţiu 119 *Calculaţi* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\ln(e+x)\cdot\ln(e+2x)\cdot\ldots\cdot\ln(e+nx)}}{x}$.

Demonstraţie 113 *Notăm cu* $L_n=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\ln(e+x)\cdot\ln(e+2x)\cdot\ldots\cdot\ln(e+nx)}}{x}$

$L_n=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\ln(e+x)\cdot\ln(e+2x)\cdot\ldots\cdot\ln(e+(n-1)x)}+\sqrt{\ln(e+x)\cdot\ln(e+2x)\cdot\ldots\cdot\ln(e+(n-1)x)}-\sqrt{\ln(e+x)\cdot\ln(e+2x)\cdot\ldots\cdot\ln(e+nx)}}{x}=$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\ln(e+x)\cdot\ln(e+2x)\cdot\ldots\cdot\ln(e+(n-1)x)}}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\ln(e+x)\cdot\ln(e+2x)\cdot\ldots\cdot\ln(e+(n-1)x)}\cdot\left(1-\sqrt{\ln(e+nx)}\right)}{x}=$

$= L_{n-1}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cdot\ln(e+nx)}}{x},$

deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\ln(e+x)\cdot\ln(e+2x)\cdot\ldots\cdot\ln(e+(n-1)x)}=1.$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cdot\ln(e+nx)}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\ln(e+nx)}{x(1+\sqrt{\ln(e+nx)})}=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\ln(e+nx)}{x}=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\ln\left(e(1+\frac{nx}{e})\right)}{x}=$

$=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-1-\ln(1+\frac{nx}{e})}{x}=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{nx}{e})}{\frac{nx}{e}}\cdot\frac{n}{e}=-\frac{n}{2e}$

(am folosit limita fundamentală $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$*).*

În concluzie, $L_n=L_{n-1}+\frac{n}{2e}$*. Scriind recursiv aceste relaţii obţinem că:*

$L_n=L_1-\frac{1}{2e}\left(n+(n-1)+\ldots+2\right)$

Dar $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cdot\ln(e+x)}}{x}=-\frac{1}{2e}$*, deci:* $L_n=-\frac{1}{2e}\left(n+(n-1)+\ldots+2+1\right),$

deci

$L_n=-\frac{n(n+1)}{4e}$

Exerciţiu 120 *Calculaţi* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

Demonstraţie 114 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Exerciţiu 121 *Fie* $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ *cu* $f(x)\ln f(x)=e^x$*. Calculaţi* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln x}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{x}}$.

Demonstraţie 115 *Deoarece* $f(x)\ln f(x)>0$ *rezultă că* $f(x)>1$.

$\ln f(x)<f(x)$*, deci* $f^2(x)>e^x$*, adică* $f(x)>e^{\frac{x}{2}}$.

$\frac{f(x)}{x}>\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}$*, deci* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$.

$\frac{\ln x}{f(x)}<\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}}$*, deci* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{f(x)}=0$.

Prin urmare, avem nedeterminare 1^∞.

Deci, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln x}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^0=1.$

6.2 Continuitate

Fie $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie, $a\in A$ un punct de acumulare pentru mulţimea A.

Definiţie 23 *Spunem că* f *este* ***continuă*** *în* a *dacă* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

O funcţie care nu este continuă se numeşte discontinuă, iar discontinuităţile unei funcţii pot fi:

-de speţa întâi: există limitele laterale şi sunt finite;

-de speţa a doua: care nu sunt de speţa întâi.

Exemplu 68 *Funcţia* $f(x)=[x]$ *este continuă în* $x_0\Longleftrightarrow x_0\notin\mathbb{Z}$.

Exerciţiu 122 *Aflaţi punctele de continuitate ale funcţiei* $f(x)=\left[\frac{1}{x^2}\right]$*, dacă* $x\in\mathbb{R}^*$ *şi* $f(0)=0$.

Demonstraţie 116 $\left[\frac{1}{x^2}\right] = n$ *dacă şi numai dacă* $n-1 < \frac{1}{x^2} \le n \Longleftrightarrow x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$ *sau* $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{n-1}}, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Dacă $a \in \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$ *atunci* $f(x) = n$, *într-o vecinătate suficient de mică a lui* a, *deci* f *este continuă în* a.

Dacă $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$, *atunci* $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = \lim\limits_{x\searrow a} n = n$, *iar* $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x) = n+1$,

deci f *nu este continuă în punctele de forma* $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exerciţiu 123 *Studiaţi continuitatea funcţiei* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x-1|a^{nx}+x+1}{|x|a^{nx}+2}$.

Demonstraţie 117 *Vom face discuţie după cum* a *este subunitar sau nu.*

Dacă $a < 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a^{nx}$ *este* 0 *dacă* $x > 0$, *este* 1 *dacă* $x = 0$ *şi este* ∞ *dacă* $x < 0$.

Deci, $f(x) = \{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{2}, \text{ pentru } x \ge 0 \\ \frac{1-x}{-x}, \text{ pentru } x < 0 \end{array}$

Se observă imediat că 0 *este singurul punct de discontinuitate.*

Cazul $a > 1$ *se rezolvă analog.*

Exerciţiu 124 *Fie* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *două funcţii continue şi* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită prin* $h(x) = f(x)$, *dacă* $x \in \mathbb{Q}$ *şi* $h(x) = g(x)$ *dacă* $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. *Studiaţi continuitatea funcţiei* h.

Demonstraţie 118 *Fie* x_0 *un punct de continuitate. Deci pentru orice şir* $(x_n)_n$ *care tinde la* x_0 *rezultă că* $h(x_n) \to h(x_0)$.

Dacă $x_0 \in \mathbb{Q}$, *atunci* $h(x_0) = f(x_0)$ *şi alegem şirul* $(x_n)_n$ *de numere iraţionale care tinde la* x_0 *(este posibil deoarece mulţimea numerelor iraţionale este densă în* $\mathbb{R}$ *). Atunci* $h(x_n) = g(x_n) \to g(x_0)$. *Din condiţia de continuitate rezultă că* $g(x_0) = f(x_0)$.

De fapt, se poate arăta că h are limită numai în punctele de continuitate.

Exerciţiu 125 *Dacă* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sunt două funcţii continue astfel ca* $f(x) = g(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{Q}$ *atunci* $f = g$.

Demonstraţie 119 *Fie* $a \in \mathbb{R} \backslash\mathbb{Q}$ *şi fie* $(a_n)_n \subset \mathbb{Q}$ *un şir care tinde la* a. *(existenţa este asigurată de Teorema de densitate a lui* $\mathbb{Q}$ *în* $\mathbb{R}$*). Deoarece funcţiile sunt continue rezultă că* $f(a_n) \to f(a)$, *iar* $g(a_n) \to g(a)$. *Cum* $f(a_n) = g(a_n)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, *rezultă că* $f(a) = g(a)$.

Pe baza acestui exerciţiu vom demonstra :

Exerciţiu 126 *Mulţimea funcţiilor continue pe* $[0,1]$, $C[0,1]$ *are puterea continuului.*

Demonstraţie 120 *Deoarece funcţiile constante sunt continue avem* $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subset C[0,1]$.

Fie $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, ...r_n, ...\}$ *şi* $f \in C[0,1]$. *Funcţia* f *este complet caracterizată de valorile* $\{f(r_1), f(r_2), ..., f(r_n), ...\}$ *(vezi exerciţiul precedent). Deci, putem realiza o corespondenţă injectivă între* $C[0,1]$ *şi mulţimea şirurilor de numere reale, care are puterea continuului.*

În concluzie $C[0,1]$ *are puterea continuului.*

Exerciţiu 127 *Studiaţi continuitatea funcţiei lui Riemann*

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } x \in (0,1]\backslash\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, \text{ pentru } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}^*, (p,q) = 1 \end{cases}.$$

Demonstraţie 121 *Fie $x_0 \in (0,1]\backslash\mathbb{Q}$ şi fie $(x_n)_n$ un şir convergent la x_0.*

Dacă $x_n \in (0,1]\backslash\mathbb{Q}$ de la un rang, atunci $f(x_n) = 0 \to 0$.

Dacă $x_n \in \mathbb{Q}$ de la un rang, deci $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, $p_n, q_n \in \mathbb{N}^*, (p_n, q_n) = 1$, atunci $f(x_n) = \frac{1}{q_n}$.

Arătăm că $(q_n)_n$ este un şir nemărginit de numere naturale. Presupunând că $(q_n)_n$ este mărginit, cum $q_n \in \mathbb{N}$ ar rezulta că $(q_n)_n$ ia un număr finit de valori distincte; dar şirul $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ este şi el mărginit (fiind convergent), deci $(p_n)_n$ va lua şi el un număr finit de valori distincte.

În concluzie, $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ este un şir convergent care ia un număr finit de valori distincte şi raţionale, deci va fi constant. Aceasta este imposibil, deoarece limita sa este un număr iraţional.

Prin urmare, $(q_n)_n$ este un şir nemărginit de numere naturale, deci $\frac{1}{q_n} \to 0$, adică şi în acest caz $f(x_n) \to 0$.

Cazul când $(x_n)_n$ este format dintr-un subşir de numere raţionale şi unul de numere iraţionale, este o reunire a situaţiilor precedente.

Deci, f este continuă în orice punct iraţional.

Dacă $x_0 \in \mathbb{Q}$ atunci dacă alegem un şir $(x_n)_n$ de numere iraţionale care tinde la x_0, vom avea $f(x_n) \to 0 \neq \frac{1}{q} = f(x_0)$, deci f nu este continuă în x_0.

Deci f este discontinuă în punctele raţionale.

Această problemă duce la întrebarea dacă există funcţii continue pe mulţimea numerelor raţionale şi discontinue pe mulţimea numerelor iraţionale? Răspunsul este negativ, şi are la bază următoarea teoremă.

Teorema 17 *(Voltera) Fie $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ două funcţii astfel ca mulţimile punctelor lor de continuitate , C_f şi C_g sunt fiecare dense în $[0,1]$. Atunci f şi g au un punct de continuitate comun.*

Deci, dacă ar exista o funcţie continuă pe $\mathbb{Q}$, şi discontinuă pe $(0,1]\backslash\mathbb{Q}$, ar trebui să aibă un punct de continuitate comun cu funcţia lui Riemann. Acel punct ar fi raţional, ceea ce este imposibil.

Exerciţiu 128 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $a > 1$. Dacă $f(ax) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, arătaţi că f este constantă.*

Demonstraţie 122 *Observăm că $f(x) = f(\frac{x}{a}) = f(\frac{x}{a^2}) = ... = f(\frac{x}{a^n})$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Când $n \to \infty$ avem $\frac{x}{a^n} \to 0$, iar funcţia f fiind continuă rezultă că $f(\frac{x}{a^n}) \underset{n\to\infty}{\to} f(0)$

Deci $f(x) = f(0)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, adică f este constantă.

Exerciţiu 129 *Dacă $a \in \mathbb{R}^*$ determinaţi $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ continuă astfel ca $f(x^2) - f(x) = ax(1-x)$.*

Demonstraţie 123 *Relaţia este echivalentă cu* $f(x^2) + ax^2 = f(x) + ax$.

Dacă $g(x) = f(x) + ax$, *relaţia de mai sus devine:* $g(x^2) = g(x)$ *ceea ce implică* $g(x^{2^n}) = g(x)$ *pentru orice număr natural* n.

Dacă $x < 1$ *atunci* $x^{2^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ *rezultă, folosind şi continuitatea funcţiei* g, *că* $g(x) = g(0)$;

Dacă $x > 1$, *atunci se arată că* $g(x) = g(x^{\frac{1}{2^n}})$ *şi se trece din nou la limită.*

În concluzie, $f(x) = ax + b$.

Exerciţiu 130 *Determinaţi funcţiile continue* $f : [0, \infty) \to [0, \pi]$ *cu* $f(x) \leq x \cdot f(\sin x)$ *pentru orice* $x \in [0, \infty)$.

Demonstraţie 124 *Dacă* $x \longmapsto \sin x$, *atunci* $f(\sin x) \leq \sin x \cdot f(\sin \circ \sin x)$, *deci*

$f(x) \leq x \cdot \sin x \cdot f(\sin \circ \sin x)$

Repetând procedeul rezultă că $f(\sin x) \leq x \cdot \sin x \cdot \sin \circ \sin x \cdot ... \cdot \sin \circ ... \circ \sin x \cdot f(\sin \circ ... \circ \sin x)$

Fie $g_n(x) = \sin \circ ... \circ \sin x$; *Folosind* $g_n(x) = \sin g_{n-1}(x) \leq g_{n-1}(x)$ *se demonstrează că* $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ *pentru orice* x.

Cum $|\sin x \cdot \sin \circ \sin x \cdot ... \cdot \sin \circ ... \circ \sin x| \leq 1$, *rezultă că* $f(x) = 0$.

6.3 Proprietăţi ale funcţiilor continue

Definiţie 24 *O funcţie* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este* ***uniform continuă*** *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta > 0$ *astfel încât pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$ *cu* $|x - y| < \delta$ *implică* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Clase importante de funcţii uniform continue:

1. Funcţiile lipschitziene
2. Funcţiile continue pe un compact
3. Funcţiile derivabile cu derivata mărginită
4. Funcţiile continue cu asimptote la $\pm\infty$.

Exerciţiu 131 *Fie* $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $a \geq 0$. *Arătaţi că* f *este uniform continuă dacă şi numai dacă* $a > 0$.

Demonstraţie 125 *Presupunem că* $a > 0$. *Atunci* f *are derivată mărginită, deci este uniform continuă.*

Reciproc, dacă f *este uniform continuă presupunem prin absurd că* $a = 0$.

Deci pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $\delta > 0$ *astfel încât pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$ *cu* $|x - y| < \delta$ *implică* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Fie $x_n = \frac{1}{n}$ *şi* $y_n = \frac{1}{2n}$.

Alegem $\varepsilon = \ln 2$. *Deoarece* $|x_n - y_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ *rezultă că* $|x_n - y_n| < \delta$ *pentru orice* $n \geq N$.

Deci, rezultă că $|\ln x_n - \ln y_n| < \ln 2$ *adică* $\ln 2 < \ln 2$, *ceea ce este absurd.*

Exerciţiu 132 *Arătaţi că funcţia* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ *nu este uniform continuă.*

Demonstraţie 126 *Presupunem că f este uniform continuă, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $|x - y| < \delta$ implică $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Fie $\varepsilon = 1$ şi fie $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$, $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ şi $y_n = \frac{1}{2n\pi}$.

Deoarece $|x_n - y_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ rezultă că $|x_n - y_n| < \delta$ pentru orice $n \geq N$. Ar rezulta că $|f(x_n) - f(y_n)| < 1$, de unde $1 < 1$, ceea ce este absurd.

Analog se demonstrează că funcţia $\sin x^2$ nu este uniform continuă: vom alege $x_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ şi $y_n = \sqrt{2n\pi}$.

Exerciţiu 133 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi periodică. Arătaţi că f este uniform continuă.*

Demonstraţie 127 *Fie T o perioadă a lui f. Pe intervalul $[0, T]$ funcţia este uniform continuă (continuă pe un compact): deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta' > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in [0, T]$ cu $|x - y| < \delta$ implică $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Fie $\delta = \min\{\delta', T\}$ şi fie $x, y \in \mathbb{R}$ cu $|x - y| < \delta$. Deoarece $|x - y| < T$, rezultă că există $x', y' \in [0, T]$ şi există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = x' + nT$ şi $y = y' + nT$.

Deci, $|f(x) - f(y)| = |f(x' + nT) - f(y' + nT)| = |f(x') - f(y')| < \varepsilon$, deoarece pe intervalul $[0, T]$ funcţia este uniform continuă.

În concluzie, funcţiile sin şi cos sunt uniform continue.

Exerciţiu 134 *Arătaţi că funcţia $f(x) = e^x$ nu este uniform continuă.*

Demonstraţie 128 *Demonstraţia se face tot prin reducere la absurd.*

Presupunem că f este uniform continuă, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $|x - y| < \delta$ implică $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Fie $x_n = n + \frac{\delta}{2}$ şi $y_n = n$. Pentru aceste şiruri $|x_n - y_n| < \delta$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$, de unde rezultă că $e^n \cdot \left|e^{\frac{\delta}{2}} - 1\right| < \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce este absurd deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} e^n \cdot \left|e^{\frac{\delta}{2}} - 1\right| = \infty$.

Exerciţiu 135 *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii continue cu*

$\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

Dacă g este uniform continuă, arătaţi că f este şi ea uniform continuă.

Demonstraţie 129 *Fie $\varepsilon > 0$. Din existenţa limitelor avem :*

Există $\delta_1 > 0$ astfel ca pentru orice $x \in (\delta_1, \infty)$ să avem $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ şi există $\delta_2 > 0$ astfel încât pentru orice $x \in (-\infty, -\delta_2)$ să avem $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Putem spune că există $\delta' > 0$ astfel încât dacă $x \in (-\infty, -\delta') \cup (\delta', \infty)$ să avem $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Pe intervalul compact $[-\delta' - \varepsilon, \delta' + \varepsilon]$ funcţia f este continuă, deci va fi şi uniform continuă pe acest interval. Există deci $\delta'' > 0$ cu proprietatea că pentru orice $x, y \in [-\delta' - \varepsilon, \delta' + \varepsilon]$ cu $|x - y| < \delta''$ să avem $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Scriem acum că g este uniform continuă, deci există $\delta''' > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $|x - y| < \delta'''$ implică $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Fie $\delta = \min\{\delta'', \delta''', \varepsilon\}$ şi fie $x, y \in \mathbb{R}$ cu $|x - y| < \delta$.

Dacă $x, y \in (-\infty, -\delta')$ sau $x, y \in (\delta', \infty)$ avem $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ şi $|f(y) - g(y)| < \varepsilon$, deci

$|f(x) - f(y)| = |f(x) - g(x) + g(x) - g(y) + g(y) - f(y)| \leq$
$|f(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| + |g(y) - f(y)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$

Dacă $x \in (-\infty, -\delta')$ şi $y \notin (-\infty, -\delta')$, atunci $x, y \in [-\delta' - \varepsilon, \delta' + \varepsilon]$ (deoarece distanţa dintre x şi y nu este mai mare decât ε), deci $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (ţinem seamă de faptul că $|x - y| < \delta''$).

În concluzie, f este uniform continuă.

O consecinţă a acestei proprietăţi este faptul că orice funcţie continuă f care are asimptote la $+\infty$ şi la $-\infty$, este uniform continuă. Dacă $d_1 : m_1x + n_1 = p_1$ este asimptota la $+\infty$, iar $d_2 : m_2x + n_2 = p_2$ asimptota la $-\infty$.

Fie $g(x) = \begin{cases} m_1x + n_1 - p_1, & x \in (-\infty, a) \\ \alpha x + \beta, & x \in [a, b] \\ m_2x + n_2 - p_2, & x \in (b, \infty) \end{cases}$,

cu α şi β convenabil alese astfel ca g să fie continuă. Funcţia g fiind liniară pe porţiuni se demonstrează imediat că g este uniform continuă.

Analog dacă este vorba despre asimptote orizontale.

Exerciţiu 136 *Funcţiile :*

$f_1(x) = x \sin \frac{1}{x}$, *pentru* $x \neq 0$ *şi* 0 *în origine*

$f_2(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

$f_3(x) = e^{-|x|} \ln(1 + x^2)$

$f_4(x) = e^{-x^2}$

sunt uniform continue deoarece sunt continue şi au asimptote la $+\infty$ şi la $-\infty$.

Fie I interval.

Definiţie 25 *O funcţie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are **proprietatea lui Darboux** dacă pentru orice două puncte a şi b din I şi pentru orice λ între $f(a)$ şi $f(b)$ există c între a şi b cu $f(c) = \lambda$.*

Teorema 18 *O funcţie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă duce orice interval tot într-un interval.*

Teorema 19 *(a valorii intermediare) Orice funcţie continuă definită pe un interval are proprietatea lui Darboux.*

Teorema 20 *Orice funcţie injectivă cu proprietatea lui Darboux este strict monotonă.*

Exerciţiu 137 *Fie $f_\alpha(x) = \sin \frac{1}{x}$ dacă $x \neq 0$ şi $f(0) = \alpha$. Arătaţi că f are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă $\alpha \in [-1, 1]$.*

Demonstraţie 130 *Presupunem că f are proprietatea lui Darboux. Atunci f duce orice interval într-un interval. In particular, $f(\mathbb{R})$ este interval. Dar $f(\mathbb{R}) = [-1, 1] \cup \{\alpha\}$, care este interval numai dacă $\alpha \in [-1, 1]$.*

Reciproc, presupunem că $\alpha \in [-1, 1]$. Fie J un interval.

Dacă $0 \notin J$ atunci $f/J = \sin \frac{1}{x}/J$, care este interval deoarece funcţia $\sin \frac{1}{x}$ este continuă pe acest interval.

Dacă $0 \in J$, *atunci intervalele* $\left[\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}\right]$ *sunt incluse în* J *de la un rang.*

Deci: $f\left(\left[\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}\right]\right) \subset f(J) \subset f(\mathbb{R})$, *adică* $[-1,1] \subset f(J) \subset [-1,1]$, *deci* $f(J) = [-1,1]$, *adică* $f(J)$ *este interval.*

Exerciţiu 138 *Arătaţi că funcţia* $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{pentru } x \leq 0 \\ 2^x, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$ *nu are proprietatea lui Darboux.*

Demonstraţie 131 *Fie* $I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. *Atunci* $f(I) = f((-\frac{1}{2}, 0]) \cup f((0, \frac{1}{2})) = [0, \frac{1}{4}) \cup (1, \sqrt{2})$, *care nu este interval. Deci,* f *nu are proprietatea lui Darboux.*

Motivul pentru care funcţia precedentă nu are proprietatea lui Darboux este faptul că ea are discontinuităţi de speţa întâi:

Propoziţie 6 *O funcţie* f *care are proprietatea lui Darboux are numai discontinuităţi de speţa a doua.*

Demonstraţie 132 *Presupunem că* f *are o discontinuitate de speţa întâi în punctul* a. *Presupunem că* $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = l < f(a)$.

Deci pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $\delta > 0$ *astfel ca pentru orice* $x \in (a-\delta, a)$ *să avem* $f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.

Alegem $\varepsilon < f(a) - l$ *şi fie intervalul* $I = (a-\delta, a]$. *Atunci* $f(I) = f(a-\delta, a) \cup \{f(a)\}$. *Deoarece* $f(a-\delta, a) \subset (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ *iar* $f(a) \notin (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ *rezultă că* $f(a-\delta, a) \cup \{f(a)\}$ *nu poate fi interval, ceea ce ar contrazice faptul că* f *are proprietatea lui Darboux.*

Exerciţiu 139 *Funcţia* $f(x) = \begin{cases} x, & \text{pentru } x \in \mathbb{Q} \cap [\,0,1] \\ 2^x, & \text{pentru } x \in [\,0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ *nu are proprietatea lui Darboux .*

Demonstraţie 133 *Fie intervalul* $I = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. *Observăm că* $f(I) = f(I \cap \mathbb{Q}) \cup f(I \setminus \mathbb{Q})$.

Dar, $f(I \cap \mathbb{Q}) \subset \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, *iar* $f(I \setminus \mathbb{Q}) \subset (1,2)$. *Cum cele două mulţimi sunt nevide, rezultă că reuniunea lor nu poate fi interval.*

Comportarea funcţiilor cu proprietatea lui Darboux la operaţii cu funcţii:

1) Dacă f are proprietatea lui Darboux şi $c \in \mathbb{R}$ atunci $f + c$ şi $c \cdot f$ au proprietatea lui Darboux.

2) Suma a două funcţii cu proprietatea lui Darboux nu are întotdeauna proprietatea lui Darboux.

Exemplu 69 *Funcţiile* f *şi* g *definite prin* $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, *dacă* $x \neq 0$, *şi* $f(0) = 0$, *iar* $g(x) = -\sin\frac{1}{x}$, *pentru* $x \neq 0$ *şi* $g(0) = -1$, *au proprietatea lui Darboux, iar suma lor nu are această proprietate , deoarece* $(f+g)(\mathbb{R}) = \{0,1\}$, *care nu este interval.*

3) Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux şi $f(x) \neq 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$, atunci funcţia $\frac{1}{f}$ are proprietatea lui Darboux.

Demonstraţie 134 *Fie I un interval. Atunci $f(I)$ este interval care nu-l conţine pe 0. Se observă atunci că şi $\frac{1}{f}(I)$ este un interval.*

4) Produsul a două funcţii cu proprietatea lui Darboux nu are întotdeauna proprietatea lui Darboux.

Spre exemplu,

$f(x) = \frac{1}{2+\sin\frac{1}{x}}$, dacă $x \neq 0$ şi $f(0) = 1$ are proprietatea lui Darboux deoarece este $\frac{1}{g}$ unde $g(x) = 2 + \sin\frac{1}{x}$, dacă $x \neq 0$ şi $g(0) = 1$.

Fie $h(x) = 2 + \sin\frac{1}{x}$, dacă $x \neq 0$ şi $h(0) = 2$.

Observăm că $f \cdot g(x) = 1$, dacă $x \neq 0$, iar $f \cdot g(0) = 2$, deci $(f \cdot g)(\mathbb{R}) = \{1, 2\}$, care nu este interval, deci $f \cdot g$ nu are proprietatea lui Darboux.

5) Inversa unei funcţii cu proprietatea lui Darboux are proprietatea lui Darboux.

Exerciţiu 140 *Există funcţii $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ce au proprietatea lui Darboux şi $f \circ f(x) = a^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 1$?*

Demonstraţie 135 *Presupunem că există astfel de funcţii.*

Arătăm că f este injectivă. Fie $f(x) = f(y)$ rezultă că $f(f(x)) = f(f(y))$, deci $a^x = a^y$, de unde $x = y$.

O funcţie injectivă cu proprietatea lui Darboux este strict monotonă .

Dacă f este strict crescătoare, din $f(x) \geq 0$ rezultă că $f(f(x)) \geq f(0)$, deci $a^x \geq f(0)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dar mulţimea valorilor funcţiei exponenţiale este $(0, \infty)$ deci ar rezulta că $f(0) = 0$.

Atunci $f(f(0)) = f(0)$, prin urmare $0 = 1$, absurd.

Dacă f este strict descrescătoare, din $f(x) \geq 0$ rezultă că $f(f(x)) \leq f(0)$, deci $a^x \leq f(0)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$,ceea ce contrazice faptul că mulţimea valorilor funcţiei exponenţiale este $(0, \infty)$.

Să observăm că se putea înlocui funcţia exponenţială cu orice funcţie injectivă, pozitivă şi nemărginită.

Exerciţiu 141 *Să se arate că nu există funcţii continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x)$ este raţional dacă şi numai dacă $f(x + 1)$ este iraţional oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstraţie 136 *Presupunem că există astfel de funcţii.*

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x + 1) - f(x)$.

Se observă că dacă $f(x + 1) \in \mathbb{Q}$ atunci $f(x) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ şi invers, deci $g(x) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deoarece f este continuă rezultă că g este continuă, deci g are proprietatea lui Darboux, deci $g(\mathbb{R})$ este un interval inclus în $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Prin urmare, g este constantă.

Prin acelaşi raţionament rezultă că funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x+1)+f(x)$ este şi ea contantă. Deci, $f = h - g$ este constantă, ceea ce este imposibil, deoarece f are atât valori raţionale, cât şi iraţionale.

Exerciţiu 142 *Fie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ o funcţie cu proprietatea că există $a, b \in [0, 1]$ cu $f(a) = 0$ şi $f(b) = 1$. Studiaţi echivalenţa propoziţiilor:*

p : "f are proprietatea lui Darboux"

q : "f este surjectivă"

Demonstraţie 137 *"$p \implies q$" Fie $y \in [0,1] = [f(a), f(b)]$. Deoarece f are proprietatea lui Darboux rezultă că există $x \in [a,b] \subset [0,1]$ cu $f(x) = y$. Deci, f este surjectivă.*

Cealaltă implicaţie nu este adevărată în general.

Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ prin $f(x) = \{ \begin{array}{c} x, \text{ pentru } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1-x, \text{ pentru } x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \end{array}$

Se observă că $f \circ f = id_{[0,1]}$, deci f este bijectivă.

Presupunem că f are proprietatea lui Darboux.

Fie $I = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$.Observăm că $f(I) = f(I \cap \mathbb{Q}) \cup f(I \backslash \mathbb{Q})$.

Dar, $f(I \cap \mathbb{Q}) \subset \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$, iar $f(I \backslash \mathbb{Q}) \subset \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$. Cum $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) \cap \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) = \emptyset$ şi cum cele două mulţimi sunt nevide, rezultă că $f(I)$ nu poate fi interval.

Observaţie 21 *În ipoteza acestui exerciţiu dacă f ar fi strict monotonă, atunci ar fi adevărată şi cealaltă implicaţie.*

Propoziţie 7 *Dacă $f : I \to I$ este o funcţie continuă şi $a, b \in I$ cu $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există c între a şi b astfel ca $f(c) = 0$.*

Corolar 5 *Orice funcţie continuă care nu se anulează are semn constant.*

Exerciţiu 143 *Fie $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 1)$ şi $g : \mathbb{R} \to (1, \infty)$ două funcţii continue pe $\mathbb{R}$. Să se arate că dacă există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ cu $x_1 < x_2$ astfel încât $f(x_1) = x_1, \quad g(x_2) = x_2$, atunci există $x_3 \in (x_1, x_2)$ cu $f(x_3) \cdot g(x_3) = x_3$.*

Demonstraţie 138 *Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x) - x$.*

h este continuă, deci are proprietatea lui Darboux.

$h(x_1) = f(x_1) \cdot g(x_1) - x_1 = x_1(g(x_1) - 1) > 0$

$h(x_2) = f(x_2) \cdot g(x_2) - x_2 = x_2(f(x_2) - 1) < 0$

de unde rezultă că există $x_3 \in (x_1, x_2)$ astfel ca $h(x_3) = 0$.

Exerciţiu 144 *Fie $f, g : [a,b] \to [a,b]$ două funcţii continue cu $f \circ g = g \circ f$. Atunci există $c \in [a,b]$ cu $f(c) = g(c)$.*

Demonstraţie 139 *Presupunem că $f-g$ nu se anulează. Cum ea este continuă rezultă că păstrează semn constant. Presupunem că $f > g$.*

Fie $k = \inf\limits_{x \in [a,b]} (f(x) - g(x)) \geq 0$.

Presupunând $k = 0$, ar rezulta că există un şir $(x_n)_n \subset [a,b]$ cu $f(x_n) - g(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

Cum orice şir mărginit are un subşir convergent, putem presupunem că $(x_n)_n$ este convergent la x. Deoarece f şi g sunt continue rezultă că $f(x_n) - g(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} f(x) - g(x)$. Din unicitatea limitei rezultă că $f(x) - g(x) = 0$, ceea ce contrazice presupunerea făcută.

Deci, $k > 0$. Atunci $f(x) > g(x) + k$ pentru orice $x \in [a,b]$.

$f(f(x)) > g(f(x)) + k = f(g(x)) + k > g(g(x)) + 2k$.

Continuând acest procedeu rezultă că $f^n(x) > g^n(x) + nk$, unde f^n reprezintă compunerea lui f cu ea însăşi de $n-$ ori.

Prin trecere la limită după $n \to \infty$ se obţine o contradicţie , deoarece $nk \to \infty$, iar $f^n(x)$ şi $g^n(x)$ se află în intervalul $[a,b]$.

Exerciţiu 145 *O funcţie monotonă nu poate avea discontinuităţi de speţa a doua.*

Demonstraţie 140 *Fie f o funcţie crescătoare, şi a un punct de discontinuitate .*

Artăm că $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \sup\limits_{x<a} f(x) = \alpha$.

Funcţia fiind crescătoare rezultă că $f(x) \leq f(a)$ pentru orice $x < a$, deci α va fi un număr finit mai mic sau cel mult egal cu $f(a)$.

Fie $\varepsilon > 0$. Din definiţia supremului rezultă că există $x_\varepsilon < a$ astfel ca $\alpha - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq \alpha$.

Fie $\delta > 0$ astfel ca $x_\varepsilon < a - \delta$, şi fie $x < a$ cu $|x - a| < \delta$. Avem $a - \delta < x < a$, deci $x_\varepsilon < x < a$ de unde rezultă că $f(x_\varepsilon) < f(x) \leq \alpha$, adică $\alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha$.

În concluzie, $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \alpha$.

Analog se demonstrează că $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \inf\limits_{x>a} f(x)$.

O consecinţă a acestui exerciţiu este faptul că mulţimea discontinuităţilor unei funcţii monotone este cel mult numărabilă. Într-adevăr, fiecărui punct a de discontinuitate îi asociem intervalul $I_a = (f(a-), f(a+))$, care este nevid, unde $f(a-) = \lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$ iar $f(a+) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x)$.

Folosind monotonia se arată că aceste intervale sunt disjuncte două câte două, iar o familie de intervale nevide şi disjuncte este cel mult numărabilă (vezi Capitolul 3).

Exerciţiu 146 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $f(x) \in \mathbb{Z}$ implică $x \in \mathbb{Z}$. Demonstraţi că şirul $a_n = f(n) - n$ este descrescător.*

Demonstraţie 141 $a_{n+1} - a_n = f(n+1) - f(n) - 1$.

Presupunem că există $k \in \mathbb{N}$ astfel ca $a_{k+1} - a_k > 0$. Echivalent

$f(k+1) - f(k) > 1$, deci există $p \in \mathbb{Z}$ situat între $f(k+1)$ şi $f(k)$. Deoarece f este continuă, ea are proprietatea lui Darboux, deci există $c \in (\ k\ ,\ k+1)$ cu $f(c) = p$. Deoarece $p \in \mathbb{Z}$ rezultă că $c \in \mathbb{Z}$, ceea ce este absurd.

Exerciţiu 147 *Există funcţii $f : [a, b] \to (a, b)$ bijective care să aibă proprietatea lui Darboux?*

Demonstraţie 142 *Presupunând că există astfel de funcţii, ar rezulta că f este strict monotonă (injectivitatea şi proprietatea lui Darboux implică monotonie strictă).*

O funcţie monotonă nu are discontinuităţi de speţa a doua, iar o funcţie cu proprietatea lui Darboux nu are discontinuităţi de speţa întâi. In concluzie f nu are discontinuităţi , deci este continuă. Dar orice funcţie continuă duce compacţi în compacţi, deci $f[a, b]$ este compactă, ceea ce contrazice bijectivitatea .

6.4 Probleme propuse

Exerciţiu 148 *Calculaţi* $\lim\limits_{x \to \infty} x \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}$.

Exerciţiu 149 *Calculaţi* $\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{\alpha}} \frac{\sin x}{\sqrt{\pi - \alpha x}}$.

Exercițiu 150 *Să se determine* α *și* β *astfel încât funcția*

$f(x) = \left(x^3 + \alpha x^2 + 1\right)^{\frac{1}{3}} - \left(x^3 + \beta x^2 \sin^2 x + 1\right)^{\frac{1}{3}}$,

să aibă limita la ∞ *egală cu* 1.

Exercițiu 151 *Calculați* $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \ln(1+x) + ... + \ln(1+nx)\right)^{\frac{1}{x}}$

Exercițiu 152 *Studiați limita în zero a funcției* $f(x) = \frac{a+\sin\frac{1}{x}}{1+\frac{a}{x}+2^{\frac{1}{x}}}$.

Exercițiu 153 *Calculați* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)...(1-\sin^n x)}{\cos^{2n} x}$

Exercițiu 154 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\sqrt{x^2+1} - \sin x$

Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *și* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)\right)^{\frac{1}{x^2}\cdot\sin f(x)}$.

Exercițiu 155 *Găsiți funcțiile periodice care au limită la* $+\infty$ *sau la* $-\infty$.

Exercițiu 156 *Arătați că o funcție continuă care are limite finite la* $-\infty$ *și la* $+\infty$ *este mărginită.*

Exercițiu 157 *Există funcții continue* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *astfel ca* $\sin^2 x \cdot f(x) + \ln(1+x) < 0$?

Exercițiu 158 *Fie* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un interval și* $f : I \to \mathbb{R}$ *o funcție cu proprietatea lui Darboux astfel încât* $|f|$ *este continuă. Arătați că* f *este continuă.*

Exercițiu 159 *Fie funcția* $f : [a,b] \to [a,b]$ *continuă pe* $[a,b]$ $(a < b,\ a \cdot b > 0)$. *Să se arate că există* $x_0 \in [a,b]$ *astfel ca* $x_0 \cdot f(x_0) = a \cdot b$.

Capitolul 7

Calcul diferenţial

7.1 Funcţii derivabile

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie şi a un punct de acumulare pentru A.

Definiţie 26 *Spunem că f are* ***derivată*** *în punctul a dacă există* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Funcţia f este ***derivabilă*** *în a dacă are derivată finită în acest punct.*

In acest caz limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se notează cu $f'(a)$ şi se numeşte derivata funcţiei f în punctul a.

Observaţie 22 *Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct. Reciproc nu este adevărat: spre exemplu funcţia $x \longmapsto |x|$ nu este derivabilă în $x = 0$.*

Exerciţiu 160 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie definită astfel: $f(x) = |x - a| \cdot \sin x$. Găsiţi punctele în care f este derivabilă.*

Demonstraţie 143 $f(x) = \left\{ \begin{array}{l} (x-a)\sin x, \ \textit{pentru } x \geq a \\ (-x+a)\sin x, \ \textit{pentru } x < a \end{array} \right.$

Observăm că funcţia este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

În punctul a studiem separat;

$\lim\limits_{x\searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\searrow a} \sin x = \sin a.$

$\lim\limits_{x\nearrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\nearrow a} -\sin x = -\sin a$

Deci funcţia este derivabilă în a dacă şi numai dacă $\sin a = -\sin a$, adică $a = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Exerciţiu 161 *Fie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2^n}, \ \textit{pentru } x = \frac{1}{n} \\ 0, \textit{în rest} \end{array} \right.$.*

Să se arate că f este derivabilă în 0 şi să se calculeze $f'(0)$.

Demonstraţie 144 *Fie $(x_n)_n$ un şir care tinde la zero. Dacă $x_n = \frac{1}{n}$ de la un rang, atunci $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{2^n} = y_n$.*

Acest şir tinde la zero, deoarece $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2} < 1$.

Deci, în acest caz există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = 0$.

Dacă $x_n \notin \{\frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^*\}$ *pentru orice* $n \geq N$, *atunci* $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = 0$.

Cazul când x_0 *conţine un subşir de forma* $\frac{1}{n}$ *este o reunire a celor două variante anterioare.*

În concluzie, există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = 0$, *deci funcţia este derivabilă în zero şi derivata sa este zero.*

Exerciţiu 162 *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{ \begin{array}{c} \frac{1}{n^\alpha},\ pentru\ \frac{1}{n+1} < |x| < \frac{1}{n} \\ 0,\ pentru\ x = 0 \end{array}$, $\alpha < 1$. *Studiaţi derivabilitatea funcţiei* f *în* $x = 0$.

Demonstraţie 145 *Vom arăta că* f *nu este derivabilă în* $x = 0$. *Fie* $(x_n)_n$ *un şir care tinde la zero astfel ca* $x_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ *pentru orice număr natural* n. *Atunci* $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{x_n} = \frac{1}{n^\alpha \cdot x_n}$.

Dar $\frac{1}{n^\alpha \cdot x_n} \in \left(\frac{n}{n^\alpha}, \frac{n+1}{n^\alpha}\right)$, *deci* $\frac{1}{n^\alpha \cdot x_n} \to \infty$, *de unde rezultă că funcţia nu este derivabilă în zero.*

Exerciţiu 163 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{ \begin{array}{c} 0,\ pentru\ x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}},\ pentru\ x > 0 \end{array}$. *Este această funcţie derivabilă de două ori?*

Demonstraţie 146 *Observăm că* $f'(x) = \{ \begin{array}{c} 0,\ pentru\ x < 0 \\ \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{-1}{x}},\ pentru\ x > 0 \end{array}$,

iar $f'_d(0) = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y}{e^y} = 0$

$f'_s(0) = 0$, *deci funcţia este derivabilă şi în* $x = 0$.

Analog se demonstrează şi derivabilitatea de două ori.

Exerciţiu 164 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{ \begin{array}{c} x^2 \cos\frac{1}{x^2},\ pentru\ x \neq 0 \\ 0,\ pentru\ x = 0 \end{array}$. *Arătaţi că funcţia este derivabilă pe* $\mathbb{R}$, *dar derivata ei nu este continuă în* $x = 0$.

Demonstraţie 147 *Dacă* $x \neq 0$ *atunci* $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x^2} + x^2 \cdot \frac{-2}{x^3} \cdot \left(-\sin\frac{1}{x^2}\right) = 2x\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \cdot \sin\frac{1}{x^2}$ *iar*

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\cos\frac{1}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \cos\frac{1}{x^2} = 0$, *deci funcţia este derivabilă şi în* $x = 0$.

Pentru a studia continuitatea derivatei în $x = 0$, *alegem şirul* $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}$ *şi observăm că*

$f'(x_n) = 2\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, *care tinde la infinit, deci funcţia* f' *nu este continuă în* $x = 0$.

Exerciţiu 165 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + ... + a_n s \sin nx$. *Dacă* $|f(x)| \leq |\sin x|$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$, *atunci* $|a_1 + 2a_2 + ... + na_n| \leq 1$.

Demonstraţie 148 *Observăm că* $|a_1 + 2a_2 + ... + na_n| = |f'(0)| = \left|\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}\right| \leq$
$\leq \lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1.$

Exerciţiu 166 *Fie f o funcţie definită într-o vecinătate a originii, derivabilă în $x = 0$ şi $f(0) = 0$. Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ *în funcţie de* $f'(0)$.

Demonstraţie 149 *Deoarece* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$ *rezultă că pentru* $\varepsilon > 0$ *fixat, există* $\delta > 0$ *astfel ca pentru orice x cu* $|x| < \delta$ *să rezulte* $\left|\frac{f(x)}{x} - f'(0)\right| < \varepsilon$. *Adică:*

$-\varepsilon\,|x| < f(x) - xf'(0) < \varepsilon\,|x|$

Fie $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca* $\frac{1}{n} < \delta$ *pentru orice* $n \geq N$. *Atunci* $\frac{k}{n^2} < \frac{1}{n} < \delta$, *deci:*

$-\varepsilon \cdot \frac{k}{n^2} < f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} \cdot f'(0) < \varepsilon \cdot \frac{k}{n^2}$

Sumând după n obţinem că:

$-\varepsilon \cdot \frac{n+1}{2n} < \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{n+1}{2n} \cdot f'(0) < \varepsilon \cdot \frac{n+1}{2n}$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)$, *de unde rezultă că limita cerută este* $\frac{f'(0)}{2}$.

În continuare vom calcula derivata de ordinul n pentru diverse funcţii:

Exerciţiu 167 *Calculaţi derivata de ordinul n pentru funcţia* $f(x) = \frac{1}{ax+b}$.

Demonstraţie 150 *O modalitate de rezolvare a unor astfel de exerciţii se bazează pe metoda inducţiei matematice:*

Observăm că $f'(x) = -\frac{b}{(ax+b)^2}$, $f''(x) = \frac{2\cdot b^2}{(ax+b)^3}$, $f'''(x) = -\frac{2\cdot 3\cdot b^3}{(ax+b)^4}, \ldots$

Este uşor acum de probat prin inducţie că $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!\cdot b^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

Exerciţiu 168 *Calculaţi derivata de ordinul n pentru funcţia* $f(x) = \ln(ax+b)$.

Demonstraţie 151 *Observăm că* $f'(x) = \frac{a}{ax+b}$; *folosind exerciţiul precedent obţinem că* $f^{(n)}(x) = a \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!\cdot b^{n-1}}{(ax+b)^n}$.

Exerciţiu 169 *Calculaţi derivata de ordinul n pentru funcţia* $f(x) = \frac{1}{x^3+6x^2+11x+6}$.

Demonstraţie 152 *Observăm că* $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, *după care se descompune în fracţii simple şi se aplică exerciţiul precedent.*

O altă modalitate de abordare a unei astfel de probleme se bazează pe *regula lui Leibniz* :

Dacă $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii care admit derivate până la ordinul n atunci

$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$.

Demonstraţia se face prin inducţie matematică:

Pentru $n = 1$ regula devine $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Presupunem că $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$ şi să demonstrăm că $(f \cdot g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)}$.

Sunt adevărate următoarele relaţii:

$(f\cdot g)^{(n+1)} = \left((f \cdot g)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}\right)' =$

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\left(f^{(n-k)}\right)' \cdot g^{(k)} + f^{(n-k)} \cdot \left(g^{(k)}\right)' \right) =$
$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)} + f^{(n-k)} \cdot g^{(k+1)} \right) =$
$= C_n^0 f^{(n+1)} \cdot g + \left(C_n^0 f^{(n)} \cdot g' + C_n^1 f^{(n)} \cdot g' \right) + \left(C_n^1 f^{(n-1)} \cdot g^{(2)} + C_n^2 f^{(n-1)} \cdot g^{(2)} \right) +$
$+ \left(C_n^2 f^{(n-2)} \cdot g^{(3)} + C_n^3 f^{(n-2)} \cdot g^{(3)} \right) + ... =$
$C_{n+1}^0 f^{(n+1)} \cdot g + C_{n+1}^1 f^{(n)} \cdot g' + C_{n+1}^2 f^{(n-1)} \cdot g^{(2)} + C_{n+1}^3 f^{(n-2)} \cdot g^{(3)} + ...$
Deci $(f \cdot g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)}$

Exerciţiu 170 *Calculaţi derivata de ordin n a funcţiei $h(x) = x^3 e^x$.*

Demonstraţie 153 *Folosind formula lui Leibniz obţinem :*

$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^3)^{(k)} \cdot (e^x)^{(n-k)} = C_n^0 x^3 \cdot e^x + C_n^1 3x^2 \cdot e^x + C_n^2 6x \cdot e^x + C_n^3 6 \cdot e^x$.

7.2 Teoreme fundamentale ale calculului diferenţial

Exerciţiu 171 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie definită prin $f(x) = x^2 \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right)$ dacă $x \neq 0$, şi $f(0) = 0$. Arătaţi că atât f cât şi f' se anulează de o infinitate de ori în fiecare vecinătate a originii.*

Demonstraţie 154 *Să observăm că f este derivabilă:*
Dacă $x \neq 0$ atunci $f'(x) = 2x \cdot \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos \frac{1}{x}$, iar
$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right) = 0.$
$f(x) = 0 \Longrightarrow \sin \frac{1}{x} = -1$, *deci* $x_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$
Deoarece şirul $x_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$ este convergent la zero, rezultă că orice vecinătate a lui zero conţine o infinitate de zero-uri ale lui f. Între două zero-uri ale lui f există unul al derivatei (care se obţine aplicând teorema lui Rolle).

Exerciţiu 172 *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) şi $f(a) = f(b) = 0$. Arătaţi că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) + f(c) \cdot g'(c) = 0$.*

Demonstraţie 155 *Fie $h(x) = f(x) \cdot e^{g(x)}$. Se observă că h este o funcţie Rolle, deci va exista $c \in (a, b)$ astfel ca $h'(c) = 0$. Dar $h'(x) = f'(x) \cdot e^{g(x)} + f(x) \cdot g'(x) \cdot e^{g(x)}$ şi cum exponenţiala nu se anulează rezultă concluzia dorită.*

Aceeaşi idee se foloseşte pentru următoarele două exerciţii:

Exerciţiu 173 *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b). Atunci între două zerouri ale lui f există cel puţin un zerou al funcţiei $\lambda f + f'$.*

Demonstraţie 156 *Se aplică teorema lui Rolle funcţiei $h(x) = f(x) \cdot e^{\lambda x}$, care are aceleaşi zerouri ca şi f.*

Exerciţiu 174 *Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile care verifică relaţia $f' + \lambda f = 0$ şi $f(0) = 0$.*

Demonstraţie 157 *Înmulţind relaţia dată cu* $e^{\lambda x}$ *obţinem că* $\left(e^{\lambda x}\cdot f(x)\right)'=0$, *de unde rezultă că funcţia* $e^{\lambda x}\cdot f(x)$ *este constantă, adică* $f(x)=c\cdot e^{-\lambda x}$. *Deoarece* $f(0)=0$ *rezultă că* $c=0$, *deci* $f=0$.

Exerciţiu 175 *Fie* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* $[a,b]$, *derivabilă pe* (a,b). *Arătaţi că există* $c\in(a,b)$ *astfel ca* $f'(c)=\frac{a+b-2c}{(c-a)(c-b)}$.

Demonstraţie 158 *Se aplică teorema lui Rolle funcţiei* $h(x)=(x-a)(x-b)f(x)$.

Elemente ale calculului diferenţial se folosesc pentru a demonstra o serie de inegalităţi:

Exerciţiu 176 *Să se demonstreze inegalităţile:*
$|\sin x-\sin y|\le|x-y|$ *pentru orice* $x,y\in\mathbb{R}$;
$|\cos x-\cos y|\le|x-y|$ *pentru orice* $x,y\in\mathbb{R}$;
$nx^{n-1}<\frac{y^n-x^n}{y-x}<ny^{n-1}$,*pentru orice* $x,y\in\mathbb{R}$.

Demonstraţie 159 *Se aplică teorema lui Lagrange funcţiilor* sin, cos, *respectiv* $x\mapsto x^n$

Un studiu al derivatei se foloseşte pentru a demonstra următoarele inegalităţi:
$\sin x\le x$ pentru orice $x\ge0$ (respectiv $\sin x\le x$ pentru $x\le0$)
$\ln(1+x)\le x$ pentru orice $x\ge0$;
$e^x\ge x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$
$\tan x\ge x$, pentru orice $x\in[0,\frac{\pi}{2})$
$\arctan x\le x$, pentru orice $x\ge0$.

Exerciţiu 177 *Arătaţi că* $x\le\frac{2}{\pi}\cdot\sin x$, *pentru orice* $x\in[0,\frac{\pi}{2})$.

Demonstraţie 160 *Fie* $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.
$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{x-\tan x}{x^2\cdot\cos x}$.
Deoarece $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ *rezultă imediat că* $f'(x)<0$, *deci funcţia* f *este descrescătoare.*
Deci, $x<\frac{\pi}{2}$ *implică* $f(x)>f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$

Ca o consecinţă :

Exerciţiu 178 *Să se arate că* $\frac{a}{b}<\frac{\sin a}{\sin b}<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a}{b}$, *pentru orice* $0<a<b<\frac{\pi}{2}$.

Demonstraţie 161 *Folosind funcţia* f *de la exerciţiul precedent, obţinem că* $f(a)>f(b)>f(\frac{\pi}{2})$, *rezultă că* $\frac{a}{\sin a}<\frac{b}{\sin b}<\frac{2}{\pi}$, *de unde* $\frac{a}{b}<\frac{\sin a}{\sin b}$, *iar* $\frac{\sin a}{a}\cdot\frac{b}{\sin b}<1\cdot\frac{2}{\pi}$, *de unde rezultă şi cea de-a doua inegalitate.*

Uneori este nevoie şi de studiul derivatei a doua pentru stabilirea unor inegalităţi:

Exerciţiu 179 *Arătaţi că* $e^x>1+\ln(1+x)$, *pentru orice* $x>-1$.

Demonstraţie 162 *Fie* $f(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$.

$f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x}$, *iar* $f''(x) = e^x + \frac{1}{(1+x)^2}$, *deci derivata a doua fiind pozitivă, rezultă că* f' *este crescătoare.*

Dacă $x > 0$, *atunci* $f'(x) > f'(0) = 0$, *deci funcţia* f *este crescătoare pe intervalul* $(0, \infty)$

Prin urmare, dacă $x > 0$, *atunci* $f(x) > f(0) = 0$.

Dacă $x < 0$, *atunci* $f'(x) < f'(0) = 0$, *deci funcţia* f *este descrescătoare pe intervalul* $(-1, 0)$

Prin urmare, dacă $x < 0$, *atunci* $f(x) > f(0) = 0$.

Exerciţiu 180 *Fie* $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ *o funcţie derivabilă astfel încât există* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *şi este finită şi există* $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ *.Atunci* $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Demonstraţie 163 *Evident* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. *Folosind regula lui L'Hospital rezultă că* $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$

Exerciţiu 181 *Fie* $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ *o funcţie derivabilă astfel încât există* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *şi este finită şi există* $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot f'(x)$ *.Atunci* $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot f'(x) = 0$.

Demonstraţie 164 $l = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x \cdot f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x) + x \cdot f'(x)}{1} = l + \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot f'(x)$, *deci* $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot f'(x) = 0$.

Exerciţiu 182 *Dacă* $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ *este o funcţie neconstantă, de două ori derivabilă şi* $f' \geq 0$, $f'' \geq 0$, *atunci* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Demonstraţie 165 *Deoarece* $f' \geq 0$, *şi* $f'' \geq 0$ *rezultă că* f *şi* f' *sunt crescătare, deci există* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *şi există* $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$. *Presupunând că* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ *ar rezulta, folosind regula lui L'Hospital:*

$0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

Cum $f' \geq 0$, *rezultă că* $f' = 0$, *deci funcţia* f *este constantă.*

Exerciţiu 183 *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Demonstraţie 166 *Avem nedeterminare* $[0^0]$.

Fie $f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$. *Prin logaritmare:*

$\ln f(x) = \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}{\ln x}$,

deci, aplicând regula lui L'Hospital, rezultă

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} \cdot \frac{-1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} \cdot \frac{-x^2}{1+x^2} = -1 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = -1$.

de unde rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e^{-1}$.

Exerciţiu 184 *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Demonstraţie 167 *Avem nedeterminare* $[1^\infty]$.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\arcsin x}{x}-1\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{\arcsin x}{x}-1\right)^{\frac{x}{\arcsin x - x}}\right)^{\frac{\arcsin x - x}{x}\cdot\frac{1}{x^2}} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)\cdot\frac{1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2} = \frac{1}{6}$.

Prin urmare, limita este $e^{\frac{1}{6}}$.

Există şi alte criterii de tip L'Hospital care pot fi utile în anumite situaţii :

Propoziţie 8 *Fie* $f, g : (a,\infty) \to (a,\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, *astfel încât:*

i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$;

ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$.

Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = 1$.

Aceasta rămâne adevărată şi în cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$.

Aplicaţii pentru calculul limitelor:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\tan\frac{a}{x}}{\ln\tan\frac{b}{x}}$, $a, b > 0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\frac{x}{\sin x^2}}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{\sin x}{x^4}\right)$

$\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\ln\sin ax}{\ln\arcsin bx}$

7.3 Aplicaţii ale calculului diferenţial

Analiza matematică are aplicatii în alte domenii sau alte ramuri ale matematicii. Vom prezenta în continuare câteva aplicatii ale calculului diferential la probleme de extrem care pot să apară în geometrie si fizică.

Exerciţiu 185 *În triunghiul isoscel* ABC *cu baza* $BC = 2a$ *si înăltimea* $AD = h$, *să se inscrie dreptunghiul de arie maxima, cu o latură pe baza* BC.

Demonstraţie 168 *Vom nota cu* x *si* y *laturile dreptunghiului. Folosind relatiile rezultate din asemănare a triunghiurilor, avem*

$\frac{y}{a} = \frac{h-x}{h} \Longrightarrow y = \frac{a(h-x)}{h}$, *deci aria dreptunghiului va fi* $S = \frac{a(h-x)\cdot x}{h}$.

În concluzie, aria dreptunghiului este maximă dacă functia $f(x) = (h-x)\cdot x$ *este maximă.*

Punctele critice se găsesc anulând derivata $f'(x) = h - 2x$, *rezultând un singur punct critic* $x = \frac{h}{2}$.

Cum derivata a doua este -2, *deci negativă, rezultă că punctul este punct de maxim.*

Cu alte cuvinte aria dreptunghiului este maximă se obtine pentru $x = \frac{h}{2}$, *iar aria maximă obtinută este* $S = \frac{ah}{4}$.

Exerciţiu 186 *Să se înscrie în elipsa* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ *un dreptunghi de arie maximă, având laturile paralele cu axele elipsei.*

Demonstraţie 169 *Un punct curent al elipsei are coordonatele* $\left(x, \frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\right)$ *, deci aria unui dreptunghi înscris în elipsă va fi* $2x\cdot 2y$, *adică*

$S = 4\cdot x\cdot\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$.

Astfel, pentru a găsi aria maximă trebuie să găsim extremele functiei

$f(x) = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

Derivata este $\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$, *iar rădăcinile acesteia sunt* $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$.

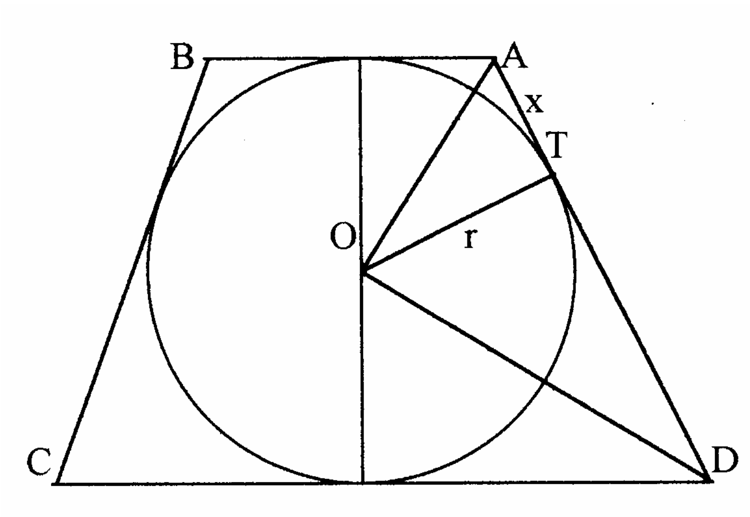
Calculând derivata a doua vom vedea că punctul $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ *este un punct de maxim.*

Aria maximă va fi $S = 2ab$.

Exerciţiu 187 *Să se determine trunchiul de con circular drept de volum minim, circumscris sferei de rază r.*

Demonstraţie 170 *Dacă notăm cu x raza bazei mici a trunchiului, iar cu y raza bazei mari, avem volumul trunchiului:*

$V = \frac{\pi}{3} \cdot \left(Hy^2 - hx^2\right)$



Demonstraţie 171 *unde H, h sunt înăltimile conurilor din care provine trunchiul.Între acestea există relatia*

$\frac{h}{H} = \frac{x}{y} \Rightarrow h = \frac{Hx}{y}$

Folosind faptul că $H - h = 2r$, *obtinem*

$H = \frac{2ry}{y-x}$, *iar* $h = \frac{2rx}{y-x}$, *deci:*

$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2ry^3}{y-x} - \frac{2rx^3}{y-x}\right) = \frac{2\pi r}{3}\left(x^2 + xy + y^2\right)$

Capitolul 8

Siruri şi serii de funcţii

8.1 Siruri de funcţii

Generalizând noţiunea de şir de numere, se pot defini şirurile cu elemente în alte mulţimi . Dacă A este o mulţime , definim un şir cu elemente în A ca o aplicaţie $s : \mathbb{N} \rightarrow A$, şi convenim să notăm aceste şiruri prin $(a_n)_n$. Dacă A este o mulţime de funcţii, atunci şirul respectiv se numeşte şir de funcţii.

Două probleme vom studia în legătură cu aceste şiruri de funcţii: convergenţa punctuală şi convergenţa uniformă.

Definiţie 27 *Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii , $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că $(f_n)_n$* ***converge punctual*** *la $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dacă pentru orice $x \in A$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \geq N$ să avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

$(f_n)_n$ ***converge uniform*** *la $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \geq N$ şi pentru orice $x \in A$ să avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Cele două definiţii sunt periculos de asemănătoare. Convergenţa punctuală presupune găsirea unui rang N care depinde de x şi de ε. Dacă acest rang poate fi ales independent de x, atunci aceasta atrage şi convergenţa uniformă.

Pentru un şir de funcţii $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, convergenţa punctuală se poate studia folosind metodele prezentate la capitolul "Siruri de numere reale". Convergenţa uniformă foloseşte metode noi, cele mai frecvente fiind evidenţiate în continuare.

Propoziţie 9 *Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii , $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât există un şir de numere $(a_n)_n$,care tinde la zero, astfel ca $|f_n(x) - f(x)| < a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi pentru orice $x \in A$. Atunci $(f_n)_n$ converge uniform la f.*

Demonstraţia este evidentă, nu avem decât să scriem ce înseamnă că $a_n \rightarrow 0$.

Propoziţie 10 *Dacă $(f_n)_n$ este un şir de funcţii , $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care converge uniform la funcţia f, atunci $\sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} 0$.*

Exerciţiu 188 *Fie $f_n : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, prin $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$. Aflaţi limita punctuală a acestui şir şi arătaţi că ea este uniformă.*

Demonstraţie 172 *Se observă că pentru orice* $x \in [1,2]$, *avem* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0$, *deci* $f_n \xrightarrow{p} f \equiv 0$.

Deoarece $x \in [1,2]$, *avem* $|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{x+n} < \frac{2}{1+n}$. *Deoarece* $\frac{2}{1+n} \to 0$, *folosind propoziţia precedentă, rezultă că* $f_n \xrightarrow{u} f \equiv 0$.

Situaţia se schimbă semnificativ dacă pentru acest şir modificăm domeniul de definiţie.

Exerciţiu 189 *Fie* $f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, *prin* $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$. *Aflaţi limita punctuală a acestui şir şi arătaţi că ea nu este uniformă.*

Demonstraţie 173 *Evident,* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0$ *pentru orice* $x \in [1,\infty)$.

Presupunând că $f_n \xrightarrow{u} 0$, *ar rezulta că pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca pentru orice* $n \geq N$ *şi pentru orice* $x \in [1,\infty)$ *să avem* $|f_n(x)| < \varepsilon$.

Pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$, *există* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca pentru orice* $n \geq N$ *şi pentru orice* $x \in [1,\infty)$ *să avem* $|f_n(x)| < \frac{1}{2}$. *Dacă* $x = n$, *atunci* $\frac{n}{n+n} < \frac{1}{2}$, *ceea ce este absurd.*

Exerciţiu 190 *Fie* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. *Arătaţi că şirul este convergent, dar nu este uniform convergent.*

Demonstraţie 174 *Observăm că* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \{ \begin{matrix} 0, & \text{pentru } x \in [0,1) \\ 1, & \text{pentru } x = 1 \end{matrix}$

Deoarece funcţiile f_n *sunt continue, iar funcţia limită nu este continuă, rezultă că această convergenţă nu poate fi uniformă.*

Exerciţiu 191 *Arătaţi că şirul* $f_n(x) = \sqrt{(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n} + nx} - \sqrt{nx}$ *este uniform convergent pe* $[1,\infty)$.

Demonstraţie 175 $0 \leq \sqrt{(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n} + nx} - \sqrt{nx} = \frac{(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n}}{\sqrt{(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n} + nx} + \sqrt{nx}} <$

$< \frac{(n^2+1)\frac{\pi^2}{n^2}}{2\sqrt{n}} < \frac{\pi^2}{\sqrt{n}}$, *deci şirul converge uniform la zero.*

Exerciţiu 192 *Arătaţi că şirul* $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2^k \sin\frac{1}{3^k x}$ *nu este uniform convergent.*

Demonstraţie 176 *Presupunem că este uniform convergent şi folosim Criteriul lui Cauchy:*

Pentru orice $\varepsilon > 0$, *există* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca pentru orice* $n \geq N$, *pentru orice* $p \in \mathbb{N}$ *şi pentru orice* $x \in (0,\infty)$ *să avem* $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Alegem $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $p = n$, *şi* $x = \frac{2}{3^{2n+1}\cdot\pi}$ *şi obţinem că:*

$|f_{2n}(x) - f_n(x)| = \left|2^{n+1}(-1)^n + ... + 2^{2n}(-1)\right| > \frac{1}{2}$

Exerciţiu 193 *Studiaţi natura şirului* $(f_n)_n$ *de funcţii , definit de*

$f_n(x) = e^{-nx^2} \cdot \sin nx$.

Demonstraţie 177 *Sirul converge punctual la* 0, *ca fiind produsul dintre un şir mărginit,* $(\sin nx)_n$ *şi unul care tinde la zero,* $\left(e^{-nx^2}\right)_n$.

Observăm că $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-\frac{1}{n}} \cdot \sin 1 \geq e^{-1} \cdot \sin 1 > 0$, *deci convergenţa nu este uniformă.*

Exerciţiu 194 *Fie* $(P_n)_n$ *un şir de polinoame care converge uniform pe* $\mathbb{R}$ *la o funcţie* f*. Atunci* f *este o funcţie polinomială.*

Demonstraţie 178 *Folosind Criteriul lui Cauchy, pentru* $\varepsilon = 1$ *obţinem un rang* N *astfel ca* $|P_n(x) - P_N(x)| < 1$*, pentru orice* $x \in \mathbb{R}$*, şi pentru orice* $n \geq N$*.*

Prin urmare, polinomul $P_n - P_N$ *este mărginit pe* $\mathbb{R}$*, de unde rezultă că este constant. Deci, există* $c_n \in \mathbb{R}$ *astfel ca* $P_n = c_n + P_N$*.*

Deoarece $(P_n)_n$ *este convergent, rezultă că şirul* $(c_n)_n$ *este convergent.Prin trecere la limită în relaţia precedentă, rezultă că* $f = c + P_N$*, de unde concluzia dorită.*

Următorul exerciţiu stabileşte comportamentul convergenţei uniforme la operaţii cu şiruri de funcţii.

Exerciţiu 195 *Fie* $(f_n)_n$ *şi* $(g_n)_n$ *două şiruri de funcţii, uniform convergente la* f*, respectiv* g*. Atunci:*

1) $(f_n + g_n)_n$ *converge uniform la* $f + g$*;*

2) Dacă f *şi* g *sunt mărginite, atunci* $(f_n \cdot g_n)_n$ *converge uniform la* $f \cdot g$*.*

3) Dacă f *şi* g *sunt nemărginite, această proprietate ne este neapărat adevărată.*

Demonstraţie 179 *2)* $|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| =$

$= |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x) + f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq$

$\leq |f_n(x) - f(x)| \cdot |g_n(x)| + |g_n(x) - g(x)| \cdot |f(x)|$

Deoarece $g_n \xrightarrow{u} g$*, pentru* $\varepsilon = 1$*, există un* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca* $|g_n(x) - g(x)| < 1$*, pentru orice* $x \in \mathbb{R}$*. Cum* g *este mărginită rezultă că şi* g_n *sunt mărginite, de la un rang, de aceeaşi constantă (deci sunt uniform mărginite, de la un rang).*

3) Un exemplu este dat de $f_n = id_{\mathbb{R}}$ *, iar* $g_n = \frac{1}{n}$*.*

8.2 Serii de funcţii

O serie de funcţii este cuplul format dintre un şir de funcţii $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi şirul sumelor parţiale asociat , $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x)$. Ca şi în cazul şirurilor de funcţii se vor pune două probleme: *convergenţa punctuală* (o serie $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ este punctual convergentă dacă şirul sumelor parţiale este punctual convergent) şi *convergenţa uniformă* (o serie $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ este uniform convergentă dacă şirul sumelor parţiale este uniform convergent) .

În studiul convergenţei punctuale se vor folosi criteriile de la seriile numerice , iar pentru cea uniformă vom evidenţia câteva metode speciale.

Exerciţiu 196 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^n x}{n^\alpha}$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Demonstraţie 180 *Vom folosi Criteriul radical al lui Cauchy:*

$\lim\limits_{n\to\infty} (|f_n|)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\sin x|}{\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^\alpha} = |\sin x|$.

Deci, dacă $|\sin x| < 1$*, seria va fi avsolut convergentă.*

Dacă $\sin x = 1$*, seria devine* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$*, deci este convergentă pentru* $\alpha > 1$*, şi divergentă pentru* $\alpha \leq 1$*.*

Dacă $\sin x = -1$*, seria devine* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$*, deci este convergentă pentru* $\alpha > 0$*, şi divergentă pentru* $\alpha \leq 0$*.*

Exerciţiu 197 *Studiaţi convergenţa punctuală a seriei* $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\ln n}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$.

Demonstraţie 181 *Folosind criteriul raportului avem* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right|$. *Dacă* $x\neq 0$, *atunci* $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right|<1$, *deci seria este punctual convergentă. Dacă* $x = 0$, *atunci seria devine* $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\ln n}$, *care este convergentă, urmare a Criteriului lui Leibniz.*

Exerciţiu 198 *Studiaţi caracterul convergenţei seriei* $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{x}{1+nx}-\frac{x}{1+(n-1)x}\right)$.

Demonstraţie 182 *Un calcul direct arată că şirul sumelor parţiale este* $s_n(x) = \frac{x}{1+nx}-x$, *care tinde la* $-x$. *Pentru a proba convergenţa uniformă avem:*

$|s_n(x)-s(x)| = \left|\frac{x}{1+nx}\right| < \frac{1}{n}\to 0$, *deci convergenţa este uniformă.*

Exerciţiu 199 *Arătaţi că seria* $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{x^2}{1+n^3x^4}$ *este absolut şi uniform convergentă.*

Demonstraţie 183 $|f_n(x)| = \frac{2\cdot x^2\cdot n^{\frac{3}{2}}}{1+n^3x^4}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\leq\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\to 0.$

Exerciţiu 200 *Arătaţi că seria* $\sum_{n\geq 1}\left(e-(1+\frac{1}{n})^n\right)\cdot\frac{\cos nx}{n+1}$ *este uniform convergentă.*

Demonstraţie 184 *Deoarece şirul* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *este descrescător la e , avem:*

$|f_n(x)|\leq\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\cdot\frac{|\cos nx|}{n+1} <$

$< \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1} < \frac{3}{n(n+1)} < \frac{3}{n^2}$.

Criteriul lui Weierstrass e spune că dacă $|f_n(x)|\leq a_n$, *pentru orice* $n\in\mathbb{N}$ *şi pentru orice* $x\in D$, *iar seria numerică* $\sum_{n\geq 0}a_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum_{n\geq 0}f_n(x)$ *este absolut şi uniform convergentă pe* D.

Acelaşi Criteriu al lui Weierstrass se aplică şi pentru seria următoare:

Exerciţiu 201 *Studiaţi natura seriei* $\sum_{n\geq 1}\arctan\frac{2x}{x^2+n^4}$, $x\in\mathbb{R}_+$.

Demonstraţie 185 *Deoarece funcţia* arctan *este crescătoare şi* $\arctan x\leq x$, *pentru orice* $x\geq 0$, *rezultă că*

$\arctan\frac{2x}{x^2+n^4}\leq\arctan\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$

Cum seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ *este convergentă, rezultă că seria noastră este uniform convergentă.*

Exerciţiu 202 *Este posibil ca o serie de funcţii continue să conveargă neuniform la o funcţie continuă?*

Demonstraţie 186 *Este posibil, după com o arată şi următorul exemplu:*

Pentru seria $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x}\right)$ *şirul sumelor parţiale este* $s_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, *care converge uniform la* 0, *o funcţie continuă. Această convergenţă nu este uniformă, deoarece pentru* $x=\frac{1}{n}$, $|s_n(x)-0| = \frac{1}{2}$.

Exerciţiu 203 *Arătaţi că seria* $\sum_{n\geq 1}\left(x^n-x^{2n}-x^{n-1}+x^{2n-2}\right)$ *converge neuniform pe* $[0,1]$.

Demonstraţie 187 *Sirul sumelor parţiale* $S_n(x) = x^n - x^{2n}$ *tinde la zero. Această convergenţă nu este uniformă deoarece pentru* $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, $|S_n(x) - 0| = \frac{1}{4}$.

Exerciţiu 204 *Fie* $(a_n)_n$ *un şir descrescător la zero, Atunci seriile* $\sum_{n\geq 1} a_n \cos nx$ *şi* $\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ *sunt uniform convergente pe orice mulţime compactă* $A \subset (0, 2\pi)$.

Demonstraţie 188 *Vom aplica Criteriul Abel-Dirichlet, care asigură convergenţa uniformă a seriilor de funcţii de forma* $\sum_{n\geq 0} u_n(x) \cdot v_n(x)$, *pentru care* $(u_n)_n$ *este descrescător şi tinde uniform la zero, iar şirul sumelor parţiale pentru seria* $\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ *este uniform mărginit (există* $M > 0$ *astfel ca* $|\sum_{k=0}^{n} v_k(x)| \leq M$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *şi pentru orice* $x \in D$*).*

În cazul nostru această ultimă condiţie trebuie probată.

$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$, *deci* $|s_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$.

Funcţia $x \mapsto \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$ *este continuă pe orice compact* $A \subset (0, 2\pi)$, *deci este mărginită, adică există* $M > 0$ *astfel ca* $\frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \leq M$ *pentru orice* $x \in A$.

8.3 Serii de puteri

O serie de puteri este o serie de funcţii, în care funcţiile au o formă particulară, adică $f_n(x) = c_n(x - x_0)^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar $(c_n)_n$ este un şir de numere.

Pentru o serie de puteri $\sum_{n\geq 0} c_n(x-x_0)^n$ convergenţa se stabileşte folosindu-ne de raza de convergenţă, $\rho = \sup\{R \in \mathbb{R}$ / pentru orice x cu $|x - x_0| < R$, seria este convergentă$\}$

Teorema Cauchy-Hadamard ne permite calculul razei de convergenţă:

$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}}$

Dacă $x \in (x_0 - \rho,\, x_0 + \rho)$, atunci seria $\sum_{n\geq 0} c_n(x - x_0)^n$ este converegntă;

Dacă $x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, \infty)$, atunci seria $\sum_{n\geq 0} c_n(x - x_0)^n$ este divergentă;

În capete se studiază de la caz la caz. Dacă x este unul din capete, iar seria este convergentă în x, atunci teorema a doua a lui Abel ne spune că suma seriei este continuă în x.

Exerciţiu 205 *Aflaţi raza de converegnţă a seriei* $\sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1}$, *apoi calculaţi suma ei pe mulţimea de converegnţă.*

Demonstraţie 189 $\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2}} = 1.$

În concluzie, dacă $x \in (-1, 1)$ *atunci seria este convergentă. Dacă* $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ *atunci seria este divergentă.*

Dacă $x = 1$, *seria devine* $\sum_{n\geq 1} n^2$, *care este divergentă, iar dacă* $x = -1$, *seria devine* $\sum_{n\geq 1} n^2(-1)^n$, *care, de asemenea, este convergentă.*

Pentru a-i calcula suma pornim de la suma seriei $\sum_{n\geq 0} x^n$.

Fie $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. *Deoarece seriile de puteri pot fi derivate termen cu termen obţinem că* $S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$, *iar* $xS'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k$.

Derivând încă o dată rezultă că $(xS'(x))' = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1}$, *adică exact suma seriei noastre.*

Pe de altă parte, $S(x) = \frac{1}{1-x}$ *(suma seriei geometrice de raţie x)* , $S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, *iar* $(xS'(x))' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1-x^2}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$.

Exerciţiu 206 *Se cer raza de converegnţă şi suma seriei* $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

Demonstraţie 190 $\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}} = 1$

Dacă $x = 1$, *seria devine* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$, *care este convergentă, iar dacă* $x = -1$, *seria devine* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$, *care este şi ea converegntă.*

Deci, mulţimea de convergenţă este $[-1, 1]$.

Pentru a-i calcula suma ne vom folosi de de faptul că seriile de puteri pot fi integrate termen cu termen.

Fie $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$. *Prin urmare,* $\int_0^x S(t)dt = \sum_{n\geq 1} \int_0^x t^{n-1}dt = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$.

Pe de altă parte, $\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x)$.

Deci $-\ln(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$. *Integrând încă o dată,* $\int_0^x -\ln(1-t)dt = \sum_{n\geq 1} \int_0^x \frac{t^n}{n}dt$, *deci*

$\int_0^x -\ln(1-t)dt = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Calculând integrala obţinem că $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -\frac{1-x}{x} \cdot \ln(1-x) - 1$.

Deoarece seria este convergentă şi pentru $x = -1$, *obţinem că*

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = 2\ln 2 - 1$.

8.4 Dezvoltarea unei funcţii în serie Taylor

Unei funcţii $f : I \to \mathbb{R}$ indefinit derivabilă îi putem asocia seria de puteri $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$, pentru $a \in IntI$, care se numeşte *seria Taylor asociată funcţiei f în punctul a*.

Dacă seria Taylor asociată este convergentă şi are suma f, atunci funcţia f se numeşte dezvoltabilă în seria Taylor în jurul punctului a.

Nu orice funcţie indefinit derivabilă este dezvoltabilă în serie Taylor, după cum o arată şi următorul exemplu, al lui Cauchy:

Funcţia $f(x) = \{ \begin{matrix} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ pentru } x \neq 0 \\ 0, \text{ pentru } x = 0 \end{matrix}$ este indefinit derivabilă şi $f^{(n)}(0) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci seria Taylor asociată funcţiei f este seria identic zero, care este convergentă, dar nu are suma f.

Există mai multe metode de a dezvolta o funcţie în serie Taylor. Una dintre ele se bazează pe următorul Criteriu suficient de dezvoltare:

Teorema 21 *Dacă* $f : I \to \mathbb{R}$ *este o funcţie indefinit derivabilă astfel că există* $M > 0$, $\delta > 0$ *cu proprietatea că* $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \cdot \delta^n \cdot n!$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *şi pentru orice* $x \in (a - \frac{1}{\delta}, a + \frac{1}{\delta})$, *atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor.*

Folosind acest criteriu se demonstrează, spre exemplu că funcţiile $\sin, \cos$ şi exponenţiala sunt dezvoltabile în serie Taylor.

Pentru $f(x) = \sin x$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1 \leq 1 \cdot 1^n \cdot n!$, deci sunt îndeplinite condiţiile criteriului, de unde rezultă că $\sin x = \sum_{n\geq 0} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n$, adică

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ....$
Analog se demonstrează că
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$ şi $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ...$

Exemplu 70 *(Seria binomială)Arătaţi că*
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot...\cdot(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n.$

Demonstraţie 191 *Raza de convergenţă* $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot...\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\cdot...\cdot(\alpha-n+1)} \right|} = 1.$

Deci, dacă $x \in (-1,1)$ *seria este convergentă. Fie* $f(x)$ *suma acestei serii. Un calcul direct arată că* $f'(x)+xf'(x) = \alpha f(x)$, *deci* $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{1+x}$, *de unde prin integrare rezultă* $f(x) = (1+x)^\alpha$.

O altă metodă de dezvoltare în serie Taylor se bazează pe seria binomială şi pe faptul că seriile de puteri pot fi integrate şi derivate termen cu termen.

Exemplu 71 *Arătaţi că* $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...$ *pentru orice* $x \in (-1,1]$.

Demonstraţie 192 *Mai întâi observăm raza de convergenţă pentru seria* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ *este* $R = 1$.

Deci dacă $x \in (-1,1)$ *seria este convergentă. Dacă* $x = 1$ *seria devine* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, *care este convergentă (Criteriul lui Leibniz). Pentru* $x = -1$, *atunci seria este* $\sum_{n\geq 1}\frac{-1}{n}$, *deci este divergentă.*

Aşadar, mulţimea de convergenţă este $(-1,1]$.

Fie $f(x) = \ln(1+x)$. *Atunci* $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, *deci am ajuns chiar la seria binomială, pentru* $\alpha = -1$.

Prin urmare, $f'(x) = 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)(-2)\cdot...\cdot(-n)}{n!}\cdot x^n = 1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n x^n.$

Prin integrare obţinem că $\ln(1+x) = x + \sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

A doua teoremă a lui Abel ne permite să prelungim prin continuitate şi în $x = 1$.

Exerciţiu 207 *Dezvoltaţi în serie Taylor funcţia* $f(x) = \arctan x$.

Demonstraţie 193 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} =$
$= 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)(-2)\cdot...\cdot(-n)}{n!}\cdot x^{2n} = 1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n x^{2n},$
$f(x) = x + \sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

Deoarece seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *are raza de convergenţă 1 şi este convergentă şi în punctele 1 şi* -1, *relaţia va fi adevărată pentru* $x \in [-1,1]$.

Exerciţiu 208 *Dezvoltaţi în serie McLaurin funcţia* $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

Demonstraţie 194 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (x^2+1)^{\frac{-1}{2}} =$
$= 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{2}-1)\cdot...\cdot(\frac{-1}{2}-n+1)}{n!}\cdot x^{2n} =$
$= 1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2}}{n!}\cdot x^{2n} = 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^{2n},$
de unde rezultă că
$f(x) = x + \sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

Exerciţiu 209 *Dezvoltaţi în serie McLaurin funcţia* $f(x) = \frac{x-4}{x^2-5x+6}$.

Demonstraţie 195 *Observăm că* $f(x) = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-3}$.

Calculăm derivatele de ordin n pentru o funcţie $g(x) = \frac{1}{x-a}$. *Observăm că* $g'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}$, $g''(x) = \frac{2}{(x-a)^3}$, $g'''(x) = -\frac{2\cdot 3}{(x-a)^4}$, *de unde rezultă imediat, prin inducţie că* $g^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x-a)^{n+1}}$.

Prin urmare,

$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \left(\frac{2}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-3)^{n+1}} \right)$, *deci*

$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq n! \cdot 2 \cdot \delta^n$,

unde δ *este* $\max\{ \sup\limits_{x\in(-1,1)} \left|\frac{2}{x-2}\right|, \sup\limits_{x\in(-1,1)} \left|\frac{1}{x-3}\right| \}$.

Sunt deci îndeplinite condiţiile din Criteriul suficient de dezvoltare, enunţat mai sus. Rezultă că

$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$, *adică*

$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n!\left(-\frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n\geq 0} \left(-\frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) \cdot x^n$

8.5 Calculul limitelor cu ajutorul dezvoltărilor în serie Taylor

Exerciţiu 210 *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Demonstraţie 196 *Reţinem termenii de rang mai mic decât patru din dezvoltarea funcţiilor care apar la numărător:*

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^6)$

$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + o(t^3)$, *de unde* $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^6)$.

Prin urmare,

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^6) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{-x^4}{12} + o(x^6)}{x^4} = -\frac{1}{12}$.

Exerciţiu 211 *Calculaţi* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)\sin x - x^3(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{\sin^5 x - x^5}$.

Demonstraţie 197 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$

$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4)$, *deci* $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^5 = \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^5 + o(x^4) = C_5^5 \cdot 1 - C_5^4 \cdot \frac{x^2}{6} + o(x^4)$,

Aşadar, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^5 = 1 - \frac{5x^2}{6} + o(x^4)$, *de unde rezultă că*

$\sin^5 x - x^5 = \frac{-5x^7}{6} + o(x^9)$.

De asemenea, $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^7)$

iar $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^7)$, *de unde*

$2(1-\cos x)\sin x = x^3 - \frac{x^5}{4} + \frac{x^7}{40} + o(x^7)$

$(1-x^2)^{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + o(x^3)$.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)\sin x - x^3(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{\sin^5 x - x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{19x^7}{160} + o(x^9)}{\frac{-5x^7}{6} + o(x^9)} = -\frac{57}{400}$.

Cu ajutorul dezvoltărilor în serie Taylor se pot calcula şi limitele unor şiruri:

Exerciţiu 212 *Să se arate că şirul* $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^n}{n}$ *este convergent şi să se calculeze limita sa.*

Demonstraţie 198 *Pornim de la dezvoltarea funcţiei* $\ln(1+x)$ *:*

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{(1+c)(n+1)}$.

Atunci $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{(1+c)(n+1)}$, *unde* $c \in (0,1)$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+c)(n+1)} = 0$, *rezultă că* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$.

Funcţii de mai multe variabile

Observăm frecvent în aplicaţiile practice că anumite funcţii depind de mai multe variabile. Spre exemplu, pentru a exprima poziţia unui punct pe o hartă este nevoie de 2 coordonate, deci avem de-a face cu o functie de doua variabile. Profitul unei firme se exprima ca o functie de venituri si cheltuieli, deci este vorba tot despre o functie de mai multe variabile. Volumul unui corp paralelipipedic este o funcţie de trei variabile (lungimea, laţimea si inalţimea).

Vom defini $\mathbf{R}^n$ ca fiind mulţimea n uplurilor $(x_1, x_2, ..., x_n)$ unde $x_1, ...x_n$ sunt numere reale. În cazul lui $\mathbf{R}^2$ vom nota aceste perechi cu (x, z) iar în cazul lui $\mathbf{R}^3$ vom folosi notaţia (x, y, z).

O funcţie reală $f : D \to \mathbf{R}$ de n variabile este o aplicaţie care asociază fiecărui n uplu $(x_1, x_2, ..., x_n)$ din submulţimea D a lui $\mathbf{R}^n$. Vom spune ca D este domeniul de definiţie al funcţiei f. În cele ce urmează D va fi o mulţime deschisă, adica dacă $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$, există r strict pozitiv astfel încât pentru orice $(y_1, y_2, ...y_n)$ cu $x_i - r < y_i < x_i + r$ pentru orice i=$\overline{1,n}$ rezultă $(y_1, y_2, ...y_n) \in D$.

Exemplu 72 *1.* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)/x_2$

Example 2 *2.* $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$
3. $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

Exerciţiu 213 *Exprimaţi volumul V al unui con în funcţie de generatoarea sa x şi de raza bazei y.*

Demonstraţie 199 *Stim ca volumul unui con este*
$V = \frac{\pi y^2 h}{3}$ *unde h este înălţimea conului. Dar* $h = \sqrt{x^2 - y^2}$*, prin urmare* $V = \frac{\pi y^2 \sqrt{x^2-y^2}}{3}$

Exerciţiu 214 *Determinaţi domeniul de existenţă al funcţiei* $f(x, z) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

Demonstraţie 200 *Funcţia este definită dacă* $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ *, aceasta fiind condiţia de existenţă a radicalului şi în plus,* $4 - x^2 - y^2$ *este nenul. Deci*

D emonstraţie. $x^2 + y^2 < 4$, ceea ce înseamnă că domeniul de definiţie al funcţiei este format din mulţimea punctelor interioare cercului de rază 2 cu centrul în originea axelor de coordonate. ■

Exerciţiu 215 *Determinaţi domeniul de existenţă al funcţiei* $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$

Demonstraţie 201 *Primul termen al funcţiei este definit pentru* $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$, *adică pentru* $-2 \leq x \leq 2$.

Al doilea termen are valori reale dacă $x \geq 0$ *şi* $y \geq 0$ *sau* $x \leq 0$ *si* $y \leq 0$, *adică este vorba despre punctele situate în primul şi al treilea cadran.*

Exerciţiu 216 *Exprimaţi volumul V al unei piramide regulate pătrate în funcţie de înălţimea x şi de latura sa laterală y.*

Demonstraţie 202 *Volumul piramidei este* $V = \frac{Ariabazei \cdot inaltimea}{3} = \frac{A_b \cdot x}{3}$

Dacă VO este înălţimea piramidei si VA una din muchiile laterale, atunci din triunghiul dreptunghic AVO rezultă că

$AO = \sqrt{y^2 - x^2}$, *aceasta fiind de fapt jumătate din diagonala bazei.*

Un calcul imediat arată că latura bazei $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{y^2 - x^2}$.

Prin urmare, $V = \frac{2\left(y^2 - x^2\right) \cdot x}{3}$

Exerciţiu 217 *Determinaţi domeniul de definiţie al funcţiilor următoare:*

Exercise 1 *1.* $f(x, y) = \ln(x + z)$

2. $f(x, z) = x + \arccos y$

3. $f(x, z) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

4. $f(x, z) = \arcsin \frac{y}{x}$

Pentru funcţiile de două variabile reale se poate trasa graficul în $\mathbf{R}^3$.

Ca şi în cazul funcţiilor de o variabilă putem defini noţiunile de limită a funcţiei într-un punct.

Definiţie 28 *Dacă* $x_0 \in \boldsymbol{R}^3$ *spunem că* $V \subset \boldsymbol{R}^3$ *este o vecinătate a punctului* x_0 *dacă V conţine o mulţime U deschisă astfel ca* $x_0 \in U$.

Definiţie 29 (*definiţia cu vecinătăţi*)*Fie* $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *o funcţie reală de n variabile şi* $l \in \boldsymbol{R}$. *Spunem că* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *dacă pentru orice vecinătate V a lui l, există o vecinătate U a lui* x_0 *astfel ca* $f(U) \subset V$.

Definition 1 ***Definiţie 30*** (*definiţia cu şiruri*)*Fie* $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *o funcţie reală de n variabile şi* $l \in \boldsymbol{R}$. *Spunem că* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *dacă pentru orice şir* $(x_n)_n \subset \mathbf{R}^n$ *care tinde la* x_0 *rezultă ca* $f(x_n) \to l$.

Definiţie 31 *(definiţia cu* δ *şi* ε *) Fie* $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *o funcţie reală de n variabile şi* $l \in \boldsymbol{R}$. *Spunem că* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *exista* $\delta > 0$ *astfel ca pentru orice* $x \in \mathbf{R}^n$ *cu* $\|x - x_0\| < \delta$ *sa avem* $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Definiţie 32 *Fie* $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *o funcţie reală de n variabile şi* $a \in D$. *Spunem că f este continuă în a dacă* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. *Deci, putem spune că f este continuă în a dacă este îndeplinită una din următoarele trei condiţii:*

1. Pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$ *, există o vecinătate U a lui a astfel ca* $f(U) \subset V$.

2. Pentru orice şir $(x_n)_n \subset \mathbf{R}^n$ *care tinde la a rezultă ca* $f(x_n) \to f(a)$.

3. Pentru orice $\varepsilon > 0$ *exista* $\delta > 0$ *astfel ca pentru orice* $x \in \mathbf{R}^n$ *cu* $\|x - a\| < \delta$ *să avem* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Există foarte multe exemple de funcţii continue de mai multe variabile. Funcţiile elementare ca exponenţiala, logaritmul, funcţiile sin şi cos, funcţiile polinomiale de mai multe variabile, funcţiile lipschitziene şi compuneri ale acestora sunt toate funcţii continue.

Exerciţiu 218 *Găsiţi limitele funcţiilor următoare:*

Exercise 2 *1.* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{xy}$

0$\leq \left|\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{xy}\right| \leq \left|\left(x^2+y^2\right)\right|$

Deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)=0$, *rezultă că si limita cerută este tot 0.*

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{xy}\cdot y = 1\cdot 2 = 2$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$

0$\leq \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \to 0$ *atunci cand* $(x,y)\to(\infty,\infty)$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,k)} \left(1+\frac{y}{x}\right)^x = \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,k)} \left(\left(1+\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\right)^y = e^k$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{xy}\cdot\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} = \ln e \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

In continuare vom arăta că nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$, *folosind definitia cu sirurui. Presupunem prin reducere la absurd că există* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = l$. *Rezultă că pentru orice şir* $(z_n)_n \subset \mathbf{R}^2$ *care tinde la* x_0 *rezultă că* $f(x_n,y_n) = \frac{x_n\cdot y_n}{x_n^2+y_n^2} \to l$*,unde* $z_n=(x_n,y_n)$

Pentru $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$ *rezultă că* $f(x_n,y_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{i}{n^2}} = \frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$

Pe de altă parte, pentru $(x_n,y_n)=\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$ *rezultă că* $f(x_n,y_n) = \frac{\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{4}{n^2}+\frac{i}{n^2}} = \frac{2}{5}$.

Deci, pe de o parte ar rezulta că $l=\frac{1}{2}$, *iar pe de altă parte* $l=\frac{2}{5}$. *Aceasta contrazice unicitatea limitei. Contradicţia provine din presupunerea că există limita.*

Aceasta este o metodă foarte des folosită pentru a arăta că nu există limita unei funcţii de mai multe variabile.

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan\left(x^3+y^5\right)}{x^2+y^4} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan\left(x^3+y^5\right)}{x^3+y^5}\cdot\frac{x^3+y^5}{x^2+y^4} = 1\cdot 0 = 0$, *deoarece*

$$0 \leq \left|\frac{x^3+y^5}{x^2+y^4}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^4}\right| + \left|\frac{y^5}{x^2+y^4}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2}\right| + \left|\frac{y^5}{y^4}\right| \leq |x|+|y| \to 0.$$

Exerciţiu 219 *Studiati continuitatea functiilor:*

1. $f(x,y) = \frac{x^2\cdot y}{\sqrt{x^4+y^2}}$, *pentru* (x,y) *nenuli şi 0 pentru* $(x,y)=(0,0)$.

Demonstraţie 203 *Pentru punctele diferite de origine, funcţia este continuă ca o compunere de funcţii elementare, iar în origine studiem separat:*

$0 \leq \left|\frac{x^2\cdot y}{\sqrt{x^4+y^2}}\right| \leq \sqrt{\frac{2\cdot x^2\cdot y}{x^4+y^2}}\cdot\left|\frac{\sqrt{x^2\cdot y}}{\sqrt{2}}\right| \leq \left|\frac{\sqrt{x^2\cdot y}}{\sqrt{2}}\right| \to 0 = f(0,0)$ *atunci cand* $(x,y)\to(0,0)$.

Deci, funcţia este continuă.

2. $f(x,y) = \frac{2 \cdot x \cdot y}{x^2+y^2}$, *pentru* (x,y) *nenuli şi 0 pentru* $(x,y) = (0,0)$.

Demonstraţie 204 *Pentru punctele diferite de origine, funcţia este continuă ca o compunere de funcţii elementare, iar în origine studiem separat prin reducere la absurd, ca la exerciţiul precedent, punctul 5.*

Exerciţiu 220 *Studiaţi continuitatea funcţiei definită de relaţia* $f(x,y) = \left(1+2xy^2\right)^{\frac{1}{x^3+y^3}}$, *pentru* (x,y) *nenuli şi 0 pentru* $(x,y) = (0,0)$.

Demonstraţie 205 *Pentru punctele diferite de origine, funcţia este continuă ca o compunere de funcţii elementare, iar în origine studiem separat, rezolvand limita ca o nederminare obisnuită de forma* 1^{∞}*:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+2xy^2\right)^{\frac{1}{x^3+y^3}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left(1+2xy^2\right)^{\frac{1}{2xy^2}}\right)^{\frac{2xy^2}{x^3+y^3}} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^3+y^3}}.$$

Exercise 3 ***Demonstraţie 206*** *Limita care a apărut la exponent nu există, aceasta demonstrandu-se ca si in cazurile precedente prin reducere la absurd.*

Presupunem că există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^3+y^3} = l$. *Folosim apoi definitia cu siruri a limitei si utilizăm sirurile:*

$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ *pentru care* $f(x_n, y_n) = \frac{2x_n \cdot y_n^2}{x_n^3+y_n^3} = 1$

si

$(x_n, y_n) = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ *pentru care* $f(x_n, y_n) = \frac{2x_n \cdot y_n^2}{x_n^3+y_n^3} = \frac{4}{9}$

Aceste relatii contrazic unicitatea limitei, contradictia provenind din presupunerea că ar exista limita. În concluzie, funcţia dată nu este continuă în origine.

Exerciţiu 221 *Fie funcţia* F*:*$\boldsymbol{R}^2 \to \mathbf{R}$ *definita prin* $F(x,y) = \int_x^y f(t)dt$, *unde* f *este integrabilă. Arătaţi că* F *este continuă pe* $\boldsymbol{R}^2$.

Demonstraţie 207 $\left|\int_x^y f(t)dt - \int_{x_0}^{y_0} f(t)dt\right| = \left|\int_x^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{y_0} f(t)dt + \int_{y_0}^{y} f(t)dt - \int_{x_0}^{y_0} f(t)dt\right| =$
$\left|\int_x^{x_0} f(t)dt + \int_{y_0}^{y} f(t)dt\right| \le \left|\int_x^{x_0} f(t)dt\right| + \left|\int_{y_0}^{y} f(t)dt\right| \le$

$\le \int_x^{x_0} |f(t)|\,dt + \int_{y_0}^{y} |f(t)|\,dt \le M \cdot (|x-x_0| + |y-y_0|) \le 2M \cdot \|(x,y)-(x_0-y_0)\|$,

unde M *este marginea superioară a funcţiei* f *(aceasta fiind integrabilă este şi mărginită)*.

Cu alte cuvinte funcţia F *este lipschitziană, deci este şi continuă.*

Pentru o mai bună vizibilitate vom defini noţiunea de derivată parţială pentru funcţii de două variabile, generalizarea facându-se usor.

Demonstraţie 208 *(derivate parţiale)Fie* $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *şi* $(a,b) \in D$. *Spunem că* f *este derivabilă parţial în raport cu* x *în punctul* (a,b) *dacă există limita* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$ *şi este finită. Această limită se notează cu* $f\prime_x(a,b)$ *sau cu* $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$.

Definition 2 *Analog,* f *este derivabilă parţial în raport cu* y *în punctul* (a,b) *dacă există limita* $\lim\limits_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$ *şi este finită. Această limită se notează cu* $f\prime_y(a,b)$ *sau cu* $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Observaţie 23 *Pentru a calcula derivatele parţiale în raport cu o variabilă, privim celelalte variabile ca nişte constante şi derivăm funcţia de o variabilă după regulile cunoscute.*

Observaţie 24 *Generalizarea pentru funcţii de n variabile se face usor:*

Remark 1 *Dacă $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ este o funcţie definită pe domeniul $D \subset \mathbf{R}^n$ şi $(a_1, a_2, ..., a_n) \in D$, atunci derivata parţială a lui f în raport cu variabila x_i în punctul $(a_1, a_2, ..., a_n)$ este definită prin*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, ..., a_n) = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_i + h_i, ..., an) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{h_i}$$

Definiţie 33 *Fie $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ si $(a, b) \in IntD$. Spunem că f este diferenţiabilă în punctul (a, b) dacă există numerele reale λ şi μ şi funcţia $\omega : A \to \mathbf{R}$ nulă şi continuă în (a, b) astfel ca*

Definition 3

$$f(x, y) = f(a, b) + \lambda(x - a) + \lambda(y - b) + \omega(x, y) \cdot \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

pentru orice (x, y) dintr-o vecinătate a lui (a, b).

Propoziţie 11 *1. Orice funcţie diferenţiabilă într-un punct este continuă în acel punct.*

Proposition 1 *2. Dacă f este diferenţiabilă în punctul (a, b) atunci f are derivate parţiale în punctul (a, b) atât în raport cu x, cât şi în raport cu y şi, în plus, $f'_x(a, b) = \lambda$, iar $f'_y(a, b) = \mu$.*

3. Dacă f este liniară , i.e. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pentru orice x, $y \in D$, atunci $df = f$ în orice punct.

4. Dacă f este constantă, atunci df=0.

Observaţie 25 *După cum vom vedea în următorul exemplu reciproca punctului 2 din propoziţia precedentă nu este adevărată.*

Exerciţiu 222 *Arătaţi ca funcţia f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ are derivate parţiale în raport cu ambele variabile in origine, dar nu este diferenţiabilă în origine.*

Demonstraţie 209 $f'_x(0, 0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0$

Analog, $f'_y(0, 0) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$

Presupunem acum că f este diferenţiabilă în origine, deci există numerele reale λ şi μ şi funcţia $\omega : A \to \mathbf{R}$ nulă şi continuă în $(0, 0)$ astfel ca

$f(x, y) = f(0, 0) + \lambda(x - 0) + \lambda(y - 0) + \omega(x, y) \cdot \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$,

iar $\lambda = f'_x(0, 0)$, $\mu = f'_y(0, 0)$.

Deci, $f(x, y) = \omega(x, y) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$, *de unde:*

$\omega(x, y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *iar in origine ω este nula si continua.Deci* $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \omega(x, y) = 0$.

Vom arăta însă că nu exista $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *prin reducere la absurd. Presupunem ca există* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = l.$

Folosim apoi definitia cu siruri a limitei si utilizam sirurile:
$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ *pentru care* $f(x_n, y_n) = \sqrt{\frac{x_n \cdot y_n}{x_n^2+y_n^2}} = \frac{1}{2}$
si
$(x_n, y_n) = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ *pentru care* $f(x_n, y_n) = \sqrt{\frac{x_n \cdot y_n}{x_n^2+y_n^2}} = \frac{2}{5}$

Aceste relaţii contrazic unicitatea limitei, contradicţia provenind din presupunerea că ar exista limita.

În concluzie, funcţia dată nu este diferenţiabilă în origine.

Propoziţie 12 *Dacă funcţia* $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, *are derivate parţiale* $f\prime_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ *continue într-o vecinătate a punctului* $(a,b) \in IntD$, *atunci f este diferenţiabilă în* (a,b).

Observaţie 26 *În ipotezele propoziţiei precedente, diferenţiala funcţiei f este aplicaţia liniara notată* $df_{(a,b)}$ *definită astfel:*

Remark 2 $df_{(a,b)}(x,y) = f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,dy$

Exerciţiu 223 *Folosind definiţia să se găsească derivatele parţiale ale funcţiilor următoare în punctele indicate:*

Exercise 4 *1.* $f(x,y) = x^y$ *in punctul* $(1,2)$.
$f'_x(1,2) = \lim\limits_{x\to1} \frac{f(x,2)-f(1,2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}(x+1) = 2$
$f'_y(1,2) = \lim\limits_{y\to2} \frac{f(1,y)-f(1,2)}{y-2} = \lim\limits_{y\to2} \frac{1-1}{y-2} = 0$

2. $f(x,y) = kx^\alpha y^\beta$, *unde* $k,\ \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ *(pentru valori pozitive ale parametrilor functie se numeşte funcţia de producţie a lui Cobb-Douglas)*

Derivatele se pot calcula folosind regulile de derivare:
$f'_x = k\alpha x^{\alpha-1}y^\beta$
$f'_y = k\beta x^\alpha y^{\beta-1}$

Exerciţiu 224 *1. Arătaţi că funcţia* $f(x,y) = \frac{2\cdot x\cdot y}{x^2+y^2}$, *pentru* (x,y) *nenuli şi 0 pentru* $(x,y) = (0,0)$ *are derivate parţiale* f'_x, f'_y *în punctul* $(0,0)$ *desi este discontinuă în acest punct.*

Demonstraţie 210 *Discontinuitatea a fost obiectul unui exerciţiu anterior.*
$f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0.$
Analog $f'_y(0,0) = 0.$

Exercise 5 *2.Folosind regulile de derivare să se calculeze derivatele parţiale ale funcţiei* $f{:}\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = e^x \ln\left(x^2+y^2\right)$.

Demonstraţie 211 $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x\left(\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{2x}{x^2+y^2}\right)$, *iar* $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cdot \frac{2y}{x^2+y^2}$.

Exercise 6 *3. Calculaţi derivatele parţiale ale funcţiei:*
$f(x,y) = \frac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *pentru* (x,y) *nenuli şi 0 pentru* $(x,y) = (0,0)$

Demonstraţie 212 *Pentru puncte diferite de origine derivăm după regulile de derivare ale funcţiilor compuse:*

$f'_x = \frac{y \cdot \sqrt{x^2+y^2} - x \cdot y \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

Analog, $f'_y = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

În origine calculăm derivatele folosind definiţia:

$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0.$

Analog $f'_y(0,0) = 0.$

Exerciţiu 225 *Folosind definiţia să se arate că funcţia* $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = 2x^3 - 3y$ *este diferenţiabilă în punctul* $(1,2)$.

Demonstraţie 213 *f este diferenţiabilă în punctul* $(1,2)$ *dacă există numerele reale* λ *şi* μ *şi funcţia* $\omega : A \to \mathbf{R}$ *nulă şi continuă în* $(1,2)$ *astfel ca*

$f(x,y) = f(1,2) + \lambda(x-1) + \lambda(y-2) + \omega(x,y) \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2},$

iar $\lambda = f'_x(1,2)$, $\mu = f'_y(1,2)$.

Dar $f'_x = 6x^2$, *deci* $f'_x(1,2) = 6$,

iar $f'_y = -3$, *cu alte cuvinte* $\lambda = 6$, $\mu = -3$.

Astfel relaţia devine:

$2x^3 - 3y + 4 = 6(x-1) - 3(y-2) + \omega(x,y) \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$, *de unde*

$\omega(x,y) = \frac{2x^3-6x+4}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = \frac{2(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$

În plus ω *este nula* $(1,2)$. *Astfel, pentru a proba diferentiabilitatea functiei f trebuie să arătăm că* ω *este şi continuă în* $(1,2)$.

$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \omega(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = 0$ *deoarece*

0$\leq \left| \frac{2(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} \right| \leq 2\left|x^2+x-2\right| = 2\left|(x-1)(x+2)\right| \quad \overrightarrow{(x,y)\to(1,2)}$ *0.*

Exerciţiu 226 *Studiaţi diferenţiabilitatea funcţiei* $f(x,y) = (1+xy)^{\frac{1}{\sin x}}$ *pentru* (x,y) *diferit de* $(0,2)$ *şi* $f(0,2) = 0$.

Demonstraţie 214 *Observăm că* $\lim_{(x,y)\to(0,2)} (1+xy)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{xy}{\sin x}} = e^2.$ *Cum* $f(0,2) = 0$, *rezultă că f nu este continuă în punctul* $(0,2)$. *În concluzie funcţia nu este nici diferenţiabilă în acest punct.*

Exerciţiu 227 *Studiaţi diferenţiabilitatea funcţiei* $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ *pentru* (x,y) *diferit de* $(0,0)$ *şi* $f(0,0) = 0$, *in origine.*

Demonstraţie 215 *f este diferenţiabilă în punctul* $(0,0)$ *dacă există numerele reale* λ *şi* μ *şi funcţia* $\omega : A \to \mathbf{R}$ *nulă şi continuă în* $(0,0)$ *astfel ca*

$f(x,y) = f(0,0) + \lambda(x-0) + \lambda(y-0) + \omega(x,y) \cdot \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2},$

iar $\lambda = f'_x(0,0)$, $\mu = f'_y(0,0)$.

$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$

Analog $f'_y(0,0) = 0.$

Deci, relatia devine:
$f(x,y) = \omega(x,y) \cdot \sqrt{x^2+y^2}$, *de unde*
$\omega(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
Deoarece ω *trebuie să fie nulă şi continuă în origine, rezultă:*
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$
Folosim apoi definitia cu siruri a limitei si utilizam sirul:
$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ *pentru care* $f(x_n,y_n) = \frac{x_n^2 \cdot y_n}{(x_n^2+y_n^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}}} =$ 1, *deci limita nu poate fi 0.*

În concluzie, functia nu este diferenţiabilă. Acesta este un exemplu de funcţie continuă în origine, care are derivate parţiale în origine, dar nu este diferenţiabilă în acest punct. Tragem cocluzia că derivatele parţiale nu sunt continue în nici-o vecinătate a originii.

Exerciţiu 228 *Studiaţi diferenţiabilitatea funcţiei* $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ *in origine.*

Demonstraţie 216 f *este diferenţiabilă în punctul* $(0,0)$ *dacă există numerele reale* λ *şi* μ *şi funcţia* $\omega : A \to \mathbf{R}$ *nulă şi continuă în* $(0,0)$ *astfel ca*
$f(x,y) = f(0,0) + \lambda(x-0) + \lambda(y-0) + \omega(x,y)\cdot\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$,
iar $\lambda = f'_x(0,0)$, $\mu = f'_y(0,0)$.
$f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$
Analog $f'_y(0,0) = 0$.
Deci, relatia devine:
$f(x,y) = \omega(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}$, *de unde*
$\omega(x,y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$
Deoarece ω *trebuie să fie nulă şi continuă în origine, rezultă:*
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$
Folosim apoi definitia cu siruri a limitei si utilizam sirul:
$(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ *pentru care* $f(x_n,y_n) = \frac{\sqrt{|x_n\cdot y_n|}}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} = 1$, *deci limita nu poate fi 0.*

În concluzie, funcţia nu este diferenţiabilă în origine.

Exerciţiu 229 *Să se studieze diferenţiabilitatea funcţiei* $f(x,y) = x + y^2$ *în punctul* $(1,2)$.

Demonstraţie 217 $f(x,y) = f(1,2) + \lambda(x-1) + \lambda(y-2) + \omega(x,y)\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$,
iar $\lambda = f'_x(1,2)$, $\mu = f'_y(1,2)$.
$f'_x = 1$, *iar* $f'_y = 2y$, *deci* $\lambda = 1$, $\mu = 4$ *adică*
$f(x,y) = 5 + (x-1) + 4(y-2) + \omega(x,y)\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$,
de unde
$\omega(x,y) = \frac{-4+4y-y^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$ *dacă* $(x,y) \neq (1,2)$ *şi* $\omega(1,2) = 0$.
trebuie să mai arătăm că ω *este continuă în origine.*
$0 \leq |\omega(x,y)| = \frac{(y-2)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = |y-2|\cdot\frac{|y-2|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} \leq |y-2| \to 0$ *când* $(x,y)\to(1,2)$

În concluzie, funcţia este diferenţiabilă în punctul $(1,2)$.

8.6 Derivarea funcţiilor compuse

Cazul unei variabile independente. Dacă $z = f(x, y)$ este o functie derivabila de variabilele x si y care, la randul lor sunt functii derivabile de o variabila independenta t

$x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$,

derivata functiei compuse z=f($\phi(t), \psi(t)$) se poate calcula dupa formula $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$.

În particular, daca t coincide cu una dintre variabile, spre exemplu cu x, atunci

$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$

Exemplu 73 *Calculaţi* $\frac{dz}{dt}$ *dacă* $z = \ln(x + 2y)$ *unde x=cost , y=t^2.*

Demonstraţie 218 $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x+2y} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{2}{x+2y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x+2y} \cdot (-\sin t) + \frac{2}{x+2y} \cdot 2t = \frac{4t - \sin t}{x+2y}$

Exemplu 74 *Calculati derivata parţială* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *şi derivata totală* $\frac{dz}{dx}$ *dacă z=e^{xy}, unde y=$\phi(x)$*

Demonstraţie 219 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} \cdot y$

$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = e^{xy} \cdot y + e^{xy} \cdot x \cdot \phi'(x)$

Cazul mai multor variabile independente. Dacă z este o funcţie compusă de mai multe variabile independente, spre exemplu $z = f(x, y)$ unde $x = \phi(u, v)$ iar $y = \psi(u, v)$, atunci derivatele partiale ale lui z in raport cu u si v , se calculeaza dupa formulele:

$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$

$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$

Exemplu 75 *Calculati* $\frac{\partial z}{\partial u}$ *si* $\frac{\partial z}{\partial v}$ *daca z=f(x, y) unde x=uv, y=$\frac{u}{v}$.*

Demonstraţie 220 $\frac{\partial z}{\partial u} = f'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + f'_y \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = f'_x \cdot v + f'_y \cdot \frac{1}{v}$

$\frac{\partial z}{\partial v} = f'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + f'_y \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = f'_x \cdot u + f'_y \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right)$

Exemplu 76 *Arătaţi că funcţia z=$\varphi\left(x^2 + y^2\right)$ verifică ecuaţia*

Example 3 $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

Demonstraţie 221 $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'\left(x^2 + y^2\right) \cdot 2x$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'\left(x^2 + y^2\right) \cdot 2y$

Deci, $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = y \cdot \varphi'\left(x^2 + y^2\right) \cdot 2x - x \cdot \varphi'\left(x^2 + y^2\right) \cdot 2y = 0$

Exerciţiu 230 *Calculaţi* $\frac{dy}{dt}$ *dacă z=$\frac{x}{y}$, unde x=e^t , y=$\ln t$*

Demonstraţie 222 $\frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{y} \cdot e^t - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{\ln t} \cdot e^t - \frac{e^t}{(\ln t)^2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{e^t}{\ln t}\left(1 - \frac{1}{t \ln t}\right)$

Exerciţiu 231 *Calculaţi* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *şi* $\frac{dz}{dx}$ *dacă* $z = arctan\frac{y}{x}$, *iar* y=x^2.

Demonstraţie 223 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x-y}{x^2+y^2}$

Exerciţiu 232 *Calculaţi* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *şi* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *daca* z=$f(u,v)$, *iar* u=$x^2 - y^2$, v=e^{xy}

Demonstraţie 224 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y \cdot e^{xy}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot x \cdot e^{xy}$

Exerciţiu 233 *Calculaţi* $\frac{\partial z}{\partial u}$ *si* $\frac{\partial z}{\partial v}$ *daca* $z = \arctan\frac{x}{y}$, *unde* $x = u\sin v$, $y = u\cos v$

Demonstraţie 225 $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \sin v + \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot \cos v = \frac{y}{x^2+y^2} \cdot \sin v - \frac{x}{x^2+y^2} \cdot \cos v$

$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} \cdot u\cos v + \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot (-u\sin v) = \frac{y}{x^2+y^2} \cdot u\cos v + \frac{x}{x^2+y^2} \cdot u\sin v$

8.7 Derivate şi diferenţiale de ordin superior

Derivatele parţiale de ordinul 2 ale funcţiei $z = f(x,y)$ sunr derivatele parţiale ale derivatelor sale parţiale de ordinul intâi.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y)$

Derivatele $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ si $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ se mai numesc si derivate mixte de ordinul doi.

Dacă derivatele parţiale de ordinul întâi sunt continue, atunci rezultatul derivării succesive nu depinde de ordinea de derivare.

Inductiv se definesc în acelaşi mod derivatele parţiale de ordin n.

Diferenţiala de ordinul doi a funcţiei $z = f(x,y)$ este diferenţiala diferenţialei de ordinul întâi a acestei funcţii

$d^2 z = d(dz)$

Daca o fuctie are diferentiala de ordinul doi continua, atunci derivatele mixte de ordinul doi ale acestei functii sunt egale.

Analog se defineşte diferenţiala de ordin superior:

$d^n z = d\left(d^{n-1} z\right)$

Dacă $z = f(x,y)$ unde x şi y sunt variabile independente, diferenţiala de ordinul doi a funcţiei z se calculează după formula

$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$

În general, avem formula simbolică:

$d^n z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$

care se va dezvolta după regula binomului lui Newton.

Exemplu 77 *Să se calculeze derivatele de ordinul doi ale funcţiilor următoare, :*

Example 4 *1.* $f(x,y) = 4x^3 - 2xy^2 + 6x - 5y + 7$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 2y^2 + 6, \ \frac{\partial f}{\partial y} = -4xy - 5$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-4xy - 5) = -4y;$ *iar* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(12x^2 - 2y^2 + 6\right) = -4y$

Diferentiala de ordinul doi a functiei f *va fi* $d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$

$d^2 f = 24x dx^2 + 2(-4x)\, dxdy - 4x dy^2$

2. $f(x,y) = x^y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y \cdot (\ln x)^2,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^y \cdot \ln x) = \frac{\partial}{\partial x}(x^y) \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\ln x) = y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1}(y \ln x + 1);$

iar $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y \cdot x^{y-1}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y) \cdot x^{y-1} + y \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(x^{y-1}\right) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x = x^{y-1}(1 + y \ln x)$

Deci,

$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2}dx^2 + 2x^{y-1}(y \ln x + 1)\, dxdy + x^y \cdot (\ln x)^2 dy^2$

3. $f(x,y) = e^{-x} \cdot \left(xy + \frac{1}{x} + \sin x\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x} \cdot \left(xy + \frac{1}{x} + \sin x\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x}\right) \cdot \left(xy + \frac{1}{x} + \sin x\right) + e^{-x} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(xy + \frac{1}{x} + \sin x\right) =$
$= -e^{-x} \cdot \left(xy + \frac{1}{x} + \sin x\right) + e^{-x} \cdot \left(y - \frac{1}{x^2} + \cos x\right) = e^{-x} \cdot \left(-xy - \frac{1}{x} + y - \frac{1}{x^2} - \sin x + \cos x\right)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x} \cdot \left(xy + \frac{1}{x} + \sin x\right)\right) = e^{-x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(xy + \frac{1}{x} + \sin x\right) = e^{-x} \cdot x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x} \cdot \left(-xy - \frac{1}{x} + y - \frac{1}{x^2} - \sin x + \cos x\right)\right) =$
$= -e^{-x} \cdot \left(-xy - \frac{1}{x} + y - \frac{1}{x^2} - \sin x + \cos x\right) + e^{-x} \cdot \left(-y + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \cdot 2x - \cos x - \sin x\right)$
$= e^{-x}\left(xy + \frac{1}{x} - y + \frac{1}{x^2} + \sin x - \cos x - y + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \cos x - \sin x\right) =$
$= e^{-x}\left(xy + \frac{1}{x} - 2y + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} - 2\cos x\right),$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x} \cdot x\right) = 0,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x} \cdot x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x}\right) \cdot x + e^{-x} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x) = -xe^{-x} + e^{-x} = e^{-x}(-x+1);$

iar $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x}\left(xy + \frac{1}{x} - 2y + \frac{2}{x^2} - 2\cos x\right)\right) = e^{-x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(xy + \frac{1}{x} - 2y + \frac{2}{x^2} - 2\cos x\right) =$
$= e^{-x} \cdot (x - 2)$

4. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y \cdot \sqrt{x^2+y^2} - xy \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x \cdot \sqrt{x^2+y^2} - xy \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = y^3 \cdot \frac{-1}{(x^2+y^2)^3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}-1} \cdot 2x =$
$= 3y^3 x \cdot \frac{-1}{(x^2+y^2)^3} \cdot \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} = -3y^3 x \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = x^3 \cdot \frac{-1}{(x^2+y^2)^3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}-1} \cdot 2y = 3yx^3 \cdot \frac{-1}{(x^2+y^2)^3} \cdot \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= -3yx^3 \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{3x^2\cdot\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} - x^3\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}-1}\cdot 2x}{(x^2+y^2)^3} = \frac{3x^2\cdot y^2\cdot\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^3} = \frac{3x^2\cdot y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{3y^2\cdot\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} - y^3\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}-1}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{3x^2\cdot y^2\cdot\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^3} = \frac{3x^2\cdot y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$

Exerciţiu 234 *Calculaţi derivatele mixte de ordinul doi în origine pentru funcţia f definită prin*

Exercise 7 $f(x,y) = xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *pentru* $\mathbf{R}^2/\{(0,0)\}$ *si* $f(0,0) = 0.$

Demonstraţie 226 $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{2x\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}$ *pe* $\mathbf{R}^2/\{(0,0)\}$

deci $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x^2y^3+x^4y-y^5}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{2y\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}$ *pe* $\mathbf{R}^2/\{(0,0)\}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^5-xy^4+4xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1$

Observăm că cele două derivate mixte în origine nu sunt egale.

Exerciţiu 235 *Calculaţi* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *dacă z=* $f(x,y)$*, unde* $u = x^2+y^2$, $v = xy$

Demonstraţie 227 *Calculă, mai întâi derivatele de ordinul întâi folosind formulele de derivare ale funcţiilor compuse*

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot y$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dy} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot y\right)$

Trebuie sa tinem cont ca $\frac{\partial f}{\partial u}$ *si* $\frac{\partial f}{\partial v}$ *depind de x si y prin intermediul lui u si v, deci, derivand dupa regulile produsului obtinem ca:*

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot y$

pentru a calcula $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)$ *si* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$ *folosim formula obtinuta mai sus:*$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}$*, inlocuind pe rand pe f cu* $\frac{\partial f}{\partial u}$*, respectiv* $\frac{\partial f}{\partial v}$.

deci

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 2x\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + y\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 2x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 2x\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + y\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 2x\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

Prin urmare (presupunand ca derivatele mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ *sunt egale) avem:*

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2x\left(2x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right) + y\left(2x\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) + 2\frac{\partial f}{\partial v}$
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial f}{\partial v}$
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot y\right) = 2x\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial f}{\partial v} + y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$

Calculăm $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)$ *şi* $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$ *înlocuind în formula* $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + x\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$ *pe f cu* $\frac{\partial f}{\partial u}$, *respectiv* $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Obţinem
$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 2y\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + x\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 2y\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + x\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 2y\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + x\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 2y\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

Deci,
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x\left(2y\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + x\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\right) + \frac{\partial f}{\partial v} + y\left(2y\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) =$
$= 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\left(x^2 + y^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}$

Acum vom calcula $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot y\right) = 2\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)$ *si* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$ *le-am calculat deja mai sus si am obtinut*
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 2x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 2x\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

Deci,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\left(2x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\right) + y\left(2x\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial f}{\partial u}$

Exerciţiu 236 *Calculati* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *daca* $u = f(x, y, z)$, *unde* $z = \varphi(x, y)$

Demonstraţie 228 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}$

În concluzie,
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

Exerciţiu 237 *Arătaţi că funcţia următoare satisface ecuaţia corzii vibrante* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Exercise 8 $u = \varphi(x - at) + \phi(x + at)$,
unde φ *şi* ϕ *sunt două funcţii derivabile.*

Demonstraţie 229 $\frac{\partial u}{\partial t} = -a\varphi'(x - at) + a\phi'(x + at)$
$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x - at) + \phi'(x + at)$
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-a\varphi'(x - at) + a\phi'(x + at)\right) = a^2\varphi''(x - at) + a^2\phi''(x + at)$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(x - at) + \phi'(x + at)\right) = \varphi''(x - at) + \phi''(x + at)$
Deci, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Exerciţiu 238 *1.Determinaţi funcţia* $u(x,y)$ *dacă* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

Exercise 9 *Din* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ *rezult ca* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$*, deci* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *este constanta in raport cu x, adica*

$\frac{\partial u}{\partial x}=c(y)$ *ceea ce implica* $u(x,y)=xc(y)+k(y)$

2. Determinaţi funcţia $u(x,y)$ *dacă* $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

Din $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ *rezult ca* $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$*, deci* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *este constanta in raport cu y, adica*

$\frac{\partial u}{\partial y}=c(x)$ *ceea ce implica* $u(x,y)=yc(x)+k(x)$

3. Determinaţi funcţia $u(x,y)$ *dacă* $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$

Din $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$ *rezult ca* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$*, deci* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *este constanta in raport cu x, adica*

$\frac{\partial u}{\partial y}=c(y)$ *ceea ce implica* $u(x,y)=\int c(y)dy+k(x)=a(y)+k(x)$

Exercise 10 *Calculati* d^2z *daca* $z=\varphi(t)$*, iar* $t=x^2+y^2$

Definition 4 $d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(t)\cdot 2x\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(t)\right)\cdot 2x+2\cdot\varphi'(t)=$

$=\varphi''(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\cdot 2x+2\cdot\varphi'(t)$

În concluzie, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4x^2\varphi''(t)+2\varphi'(t)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi'(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi'(t)\cdot 2y\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi'(t)\right)\cdot 2y+2\cdot\varphi'(t)=$

$=\varphi''(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\cdot 2y+2\cdot\varphi'(t)$

Deci, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4y^2\varphi''(t)+2\varphi'(t)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(t)\cdot 2y\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(t)\right)\cdot 2y=$

$=\varphi''(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\cdot 2y=4xy\varphi''(t)$

$d^2z=\left(4x^2\varphi''(t)+2\varphi'(t)\right)dx^2+8xy\varphi''(t)dxdy+\left(4y^2\varphi''(t)+2\varphi'(t)\right)dy^2$

Exerciţiu 239 *1. Calculaţi* d^2z *daca* $z=f(u,v)$*, iar* $u=\frac{x}{y}$*,* $v=xy$*.*

Demonstraţie 230 $d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+x\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+y\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+y\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial v\partial u}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)+y\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{1}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\right)+y\left(\frac{1}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)=$

$=\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+x\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{2x}{y^3}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+x\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=-\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)=-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)+x\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)=-\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \right) + x \left(-\frac{x}{y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{x^2}{y^4} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{x^2}{y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + x \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial f}{\partial v} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \left(\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial v \partial u} \right) + \frac{\partial f}{\partial v} + x \left(\frac{1}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^3} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{x}{y} \frac{\partial f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

deci,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^3} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial f}{\partial v} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

În final,

$d^2 z = \left(\frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) dx^2 + 2 \left(-\frac{1}{y^2} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^3} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial f}{\partial v} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) dxdy +$
$+ \left(\frac{2x}{y^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{x^2}{y^4} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{x^2}{y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) dy^2$

Presupunem că o funcţie $f(x,y)$ posedă în vecinătatea punctului (a,b) derivate parţiale continue până la ordinul $n+1$ inclusiv. În aceste condiţii în vecinătatea considerată avem formula lui Taylor:

$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \right] + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \ldots \right.$

$+ \ldots .. + \frac{1}{n!} \left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(a,b) + R_n(x,y)$

unde

$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} \times f(a + \tau(x-a), b + \tau(y-b))$

cu $0 < \tau < 1$

Cu alte notaţii formula precedentă poate fi scrisă:

$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{1}{1!} \left[h \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right] + \frac{1}{2!} \left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + kh \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \right] +$

$+ \ldots .. + \frac{1}{n!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x,y) + \frac{1}{(n+1)!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f(x + \tau h, y + \tau k)$

sau

$\Delta f(x,y) = \frac{1}{1!} df(x,y) + \frac{1}{2!} d^2 f(x,y) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x,y) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x + \tau h, y + \tau k)$

Formula se poate scrie analog şi pentru funcţii de mai multe variabile.

În cazul particular $a = b = 0$ formulele precedente se numesc formulele MacLaurin.

Exemplu 78 *Găsiţi creşterea funcţiei* $f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$

8.8 Gradient şi derivata după o direcţie

Definiţie 34 *Derivata funcţiei* $z = f(x,y)$ *după direcţia dată* $\overrightarrow{l} = (l_x, l_y)$, *de normă 1* $\left(\sqrt{l_x^2 + l_y^2} = 1 \right)$, *în punctul* (a,b) *este*

Definition 5 $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hl_x, b + hl_y) = f(a,b)}{h}$.

Observaţie 27 *Dacă z este o funcţie diferenţiabilă, avem formula* $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial l} \sin \alpha$, *unde* α *este unghiul format de direcţia* $\overrightarrow{l}$ *cu axa Ox.*

Observaţie 28 *În aceiaşi manieră se defineşte derivata după direcţia $\overrightarrow{l}$ a unei funcţii f(x, y, z) de trei variabile*

Definiţie 35 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$, *unde α, β, γ sunt unghiurile pe care le face direcţia $\overrightarrow{l}$ cu axele de coordonate.*

Derivata după o direcţie caracterizează viteza de variaţie a funcţiei în acea direcţie.

Exemplu 79 *Calculaţi derivata funcţiei $z = 2x^2 - 3y^2$ dupa o direcţie care formează unghiul de $\frac{2\pi}{3}$ cu axa Ox.*

Demonstraţie 231 $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{\partial z}{\partial l}\sin\frac{2\pi}{3} = 4x\left(-\frac{1}{2}\right) - 6y\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exemplu 80 *Calculaţi derivata funcţiei $z = x^3 - xy^2 - 1 = f(x, y)$ în punctul $P(1, 1)$ dupa o direcţie care uneşte acest punct cu $M(2, 3)$.*

Demonstraţie 232 *Ecuaţia dreptei PM este* $\frac{y-1}{x-1} = \frac{2-1}{3-1}$, *adică* $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$
$\frac{\partial z}{\partial l}(1, 1) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+hl_x, b+hl_y)=f(a,b)}{h} =$

Definiţie 36 *Numim gradient al funcţiei $z = f(x, y)$ vectorul ale cărui proiecţii pe axele de coordonate sunt derivatele parţiale ale funcţiei*

Definition 6 *grad* $z = \frac{\partial z}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\overrightarrow{j}$

Observaţie 29 *Derivata unei funcţii după o direcţie $\overrightarrow{l}$ este legată de gradientul acestei funcţii prin formula următoare:*

Remark 3 $\frac{\partial z}{\partial l} = proj_{\overrightarrow{l}}\, grad\ z$

8.9 Maxime şi minime relative. Probleme de optimizare

Definiţie 37 *Funcţia $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ admite un maxim local (minim local) în punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$ dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât oricare ar fi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in V \cap A$ are loc inegalitatea f (x) ■ f (a) (respectiv f (x) ■ f (a)). În aceste condiţii, spunem că punctul a este punct de extrem local pentru funcţia f .*

Definition 7 *Dacă inegalităţile de mai sus sunt verificate pe tot domeniul de definiţie A , spunem că punctul a este punct de maxim (minim) global pentru funcţia f .*

Definiţie 38 *Fie $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in intA$ este punct staţionar pentru funcţia f dacă f este diferenţiabilă în a şi diferenţiala $df(a) = 0$.*

Propoziţie 13 *Dacă punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in intA$ este punct staţionar, atunci derivatele parţiale în raport cu toate variabilele sunt nule în punctul a.*

Teorema 22 *Fie $f : A \subset \mathbf{R}^2$ ■ $\mathbf{R}$ şi $(a,b) \in intA$ un punct staţionar pentru f . Presupunem că f admite derivate parţiale de ordinul doi, continue într-o vecinătate V a punctului (a,b). Considerăm expresia*

Theorem 2 $\Delta\ (a,b) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *. Atunci:*

1. Dacă $\Delta(a,b) < 0$, atunci (a,b) este punct de extrem local, şi anume:

- punct de minim local, dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$;

- punct de maxim local, dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$.

2. Dacă $\Delta(a,b) > 0$, atunci (a,b) este punct şa.

Teorema 23 *Fie $f : A \subset \mathbf{R}^n$ ■ $\mathbf{R}$. Presupunem că punctul $a \in A$ este punct staţionar pentru f şi funcţia f are derivate parţiale de ordinul doi continue într-o vecinătate V a punctului a . Atunci:*

Theorem 3 *1) dacă $d^2 f(x;a) < 0$, pentru orice $x \in V \cap A$, atunci a este punct de maxim local;*

2) dacă $d^2 f(x;a) > 0$, pentru orice $x \in V \cap A$, atunci a este punct de minim local;

3) dacă $d^2 f(x;a)$ este nedefinită, atunci a este punct şa.

Algoritm de determinare a punctelor de extrem local pentru o funcţie $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

Etapa 1. Determinăm punctele staţionare, care sunt soluţiile sistemului:

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, ...x_n) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, ...x_n) = 0$

....

$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, ...x_n) = 0$

Etapa 2. Stabilim care dintre punctele staţionare sunt puncte de extrem local.

Pentru fiecare punct staţionar P$(a_1, a_2, ..., a_n)$calculăm matricea hessiană

$$H(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, a_2, ..., a_n) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2, ..., a_n) & ..... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a_1, a_2, ..., a_n) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2, ..., a_n) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1, a_2, ..., a_n) & ..... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a_1, a_2, ..., a_n) \\ .... & .... & ..... & .... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a_1, a_2, ..., a_n) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a_1, a_2, ..., a_n) & ..... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a_1, a_2, ..., a_n) \end{pmatrix}$$

şi minorii $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ ai acesteia, unde Δ_i este minorul format din primele i linii şi i coloane ale matricei H(a,b) , i = 1,n .

■ Dacă toţi minorii $\Delta_i > 0$, atunci $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ este punct de minim local.

■ Dacă minorii Δ_i alternează ca semn, începând cu minus, atunci $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ este punct de maxim local.

■ Orice altă combinaţie de semne, cu ■$_i$ ■ 0 , implică $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ punct şa.

Exemplu 81 *Aflaţi extremele funcţiei $f(x,y) = 3x^2 y + y^3 - 12x - 15y$*

Demonstraţie 233 *Aflăm punctele staţionare rezolvând sistemul*

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 12 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$

De aici $x^2 + y^2 = 5$, *ceea ce implică* $(x+y)^2 - 2xy = 5$ *şi* $xy = 2$.

Deci, $(x+y)^2 = 9$, *adică* $x + y = \pm 3$

Obţinem următoarele puncte staţionare: $P_1(1,2)$, $P_2(2,1)$, $P_3(-1,-2)$, $P_4(-2,-1)$

Matricea hessiană a funcţiei este

$$H_f = \begin{pmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 6y \end{pmatrix}$$

Deci,

$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, *adică* $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 144 - 36 > 0$, *ceea ce dovedeşte că* P_1 *este un punct de minim local.*

Analog,

$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$, *adică* $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 36 - 144 < 0$, *deci* P_2 *nu este punct de extrem.*

$H_f(P_3) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$, *adică* $\Delta_1 = -12 < 0$, $\Delta_2 = 144 - 36 > 0$, *ceea ce dovedeşte că* P_1 *este un punct de maxim local.*

$H_f(P_4) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$, *adică* $\Delta_1 = -6 < 0$, $\Delta_2 = 36 - 144 < 0$, *ceea ce dovedeşte că* P_1 *nu este punct de extrem local.*

Exerciţiu 240 *Găsiţi extremele funcţiei* $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right) \cdot \exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\right)$

Demonstraţie 234 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\right) - 2x \cdot \left(x^2+y^2\right) \exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\right) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\right) - 2y \cdot \left(x^2+y^2\right) \exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\right) = 0$

de unde rezultă fie $x = 0$ *şi* $y = 0$, *fie* $x = 0$ *şi* $x^2 + y^2 = 1$, *de unde rezultă că* $y = \pm 1$, *sau dacă* x *şi* y *sunt nenuli rezultă că* $x^2 + y^2 = 1$, *adică toate punctele aflate pe cercul unitate,* $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ *sunt puncte staţionare pentru f.*

În concluzie, avem următoarele puncte staţionare $P_1(0,0)$, $P_2(0,1)$, $P_3(0,-1)$, $P_4(1,0)$, $P_5(-1,0)$ *şi* $P_6(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Încercăm să stabilim natura acestora folosind hessiana.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\right)\left(1 - 5x^2 + 2x^4 + 2x^2y^2 - y^2\right)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\right)\left(1 - 5y^2 + 2y^4 + 2x^2y^2 - x^2\right)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy\exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\right)\left(2 - x^2 - y^2\right)$

Deci,

$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, *adică* $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$, *ceea ce dovedeşte că* P_1 *este punct de minim local.*

$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *adică* $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, *nu potem decide natura folosind hessiana.*

$H_f(P_6) = \begin{pmatrix} 2\exp(-1)\left(-2\sin^2\alpha\right) & -4\sin\alpha\cos\alpha\exp(-1) \\ -4\sin\alpha\cos\alpha\exp(-1) & 2\exp(-1)\left(-2\cos^2\alpha\right) \end{pmatrix}$, *adică* $\Delta_1 = -4\exp(-1)\sin^2\alpha < 0$,

$\Delta_2 = 16\exp(-2)\sin^2\alpha\cos^2\alpha > 0$, *ceea ce dovedeşte că* P_6 *este punct de maxim local.*

Exerciţiu 241 *Găsiţi extremele funcţiei* $f(x,y) = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Demonstraţie 235 $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{1}{y^2} = 0$

De aici rezultă că punctele staţionare ale funcţiei f sunt $P_1(1,1)$, $P_2(-1,1)$, $P_3(1,-1)$, $P_4(-1,-1)$.

Hessiana

$H_f = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}$,

de unde

$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, *adică* $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$, *ceea ce dovedeşte că* P_1 *este punct de minim local.*

$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, *adică* $\Delta_1 = 2 < 0$, $\Delta_2 = -4 < 0$, *ceea ce dovedeşte că* P_2 *nu este punct de extrem local.*

$H_f(P_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, *adică* $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = -4 < 0$, *ceea ce dovedeşte că* P_3 *nu este punct de extrem local.*

$H_f(P_4) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, *adică* $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$, *ceea ce dovedeşte că* P_4 *este punct de maxim local.*

Un caz aparte de extreme sunt cele cu legături. Un extrem cu legături al unei funcţii este prin definiţie un maximum sau un minimum local al acestei funcţii atins în condiţiile în care variabilele verifică ecuaţia $\varphi(x,y) = 0$ (ecuaţie care se mai numeşte legătură) .

Pentru a determina extremele funcţiei f în preyenţa unei legături $\varphi(x,y) = 0$, formăm ecuaţia auxiliară numită ecuaţia lui Lagrange

$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$

apoi căutăm extremele obişnuite ale acestei funcţii. Condiţiile necesare de extrem împreună cu legătura formează un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute x, y şi λ

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$

$\varphi(x,y) = 0$

Natura punctelor staţionare se află studiind semnul diferenţialei de ordinul 2 a funcţiei lui Lagrange

$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$

cu condiţia ca dx şi dy să fie legate între ele de ecuaţia

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dy = 0$

În aceiaşi manieră se găsesc extremele unei funcţii de trei variabile în prezenţa a unei sau două legături. În cazul a două legături în funcţia lui Lagrange introducem doi termeni nedeterminaţi.

Exemplu 82 *Găsiţi extremele funcţiei $f(x,y) = x - 2y$ în prezenţa legăturii $x^2 + y^2 = 1$.*

Demonstraţie 236 *Funcţia lui Lagrange ataşată este*

$F(x,y) = x - 2y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$

Pentru a afla punctele staţionare avem de rezolvat următorul sistem de 3 ecuaţii cu 3 necunoscute

$1 + 2\lambda x = 0$

$-2 + 2\lambda y = 0$

$x^2 + y^2 = 1$

de unde rezultă

$x = \frac{-1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{\lambda}$, *iar din cea dea treia ecuaţie rezultă*

$\frac{5}{4\lambda^2} = 1$, *adică* $\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Pentru $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}$ *obţinem punctul staţionar* $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, *iar pentru* $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ *obţinem punctul staţionar* $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

$d^2F = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$,

Trebuie să ţinem cont şi de legătură, deci

$2xdx + 2ydy = 0$

Pentru M_1 *avem* $-\frac{1}{\sqrt{5}}dx + \frac{2}{\sqrt{5}}dy = 0$, *adică* $dx = 2dy$ *şi revenind în diferenţiala de ordin doi, obţinem*

$d^2F(M_1) = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 5dy^2 > 0$, *de unde rezultă că* M_1 *este un punct de minim local.*

Procedand analog avem $d^2F(M_2) = -2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 5dy^2 < 0$, *deci* M_2 *este un punct de maxim local.*

În situaţiile în care legăturile sunt reprezentate de ecuaţii simple, se poate folosi metoda reducerii, adică se scoate una dintre variabile în funcţie de celelalte şi se înlocuieşte în funcţie, apoi se determină extremele prin metoda clasică.

Multe probleme practice sau interdisciplinare se rezolvă folosind metodele expuse mai sus.

Exerciţiu 242 *Să se descompună numărul pozitiv a în suma a trei numere pozitive astfel încât produsul lor să fie maxim.*

Demonstraţie 237 *Vom afla extremele funcţiei* $f(x,y,z) = xyz$, *în prezenţa legăturii* $x + y + z = a$.

Funcţia lui Lagrange asociată este $F(x,y,z) = xyz + \lambda(x + y + z - a)$.

$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda = 0$
$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda = 0$
$x + y + z = a$
de unde rezultă $yz = xz = xy$, *deci avem următoarele puncte staţionare*
$M_1(0,0,a)$, $M_2(0,a,0)$, $M_3(a,0,0)$, $M_4\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$
$d^2F = 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz$
În plus, legătura ne dă $dx + dy + dz = 0$, *de unde* $dz = -dx - dy$
$d^2F = -2ydx^2 - 2xdy^2 + 2(a - 2x - 2y)\,dxdy$
$H_F(M_4) = \begin{pmatrix} \frac{-2a}{3} & \frac{-a}{3} \\ \frac{-a}{3} & \frac{-2a}{3} \end{pmatrix}$, *de unde* $\Delta_1 = \frac{-2a}{3} < 0$, $\Delta_2 = \left(\frac{-2a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3} > 0$, *ceea ce înseamnă că* M_4 *este un punct de maxim.*

Deci soluţia problemei este $\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$.

Observaţie 30 *Deoarece legătura are o formă simplă, se putea evita extremul cu legături dacă se inlocuia* z *cu* $a - x - y$ *şi se aflau extremele funcţiei de două variabile* $xy(a - x - y)$.

Exerciţiu 243 *Scrieţi un număr pozitiv* a *ca un produs de patru numere pozitive care să aibă suma minimă.*

Demonstraţie 238 *Trebuie să găsim minimul funcţiei* $f(x,y,z,t) = x + y + z + t$ *în prezenţa legăturii* $xyzt = a$

Funcţia lui Lagrange este $F(x,y,z,t) = x + y + z + t + \lambda(xyzt - a)$
$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + \lambda yzt = 0$
$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + \lambda xzt = 0$
$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + \lambda xyt = 0$
$\frac{\partial F}{\partial t} = 1 + \lambda xyz = 0$
$xyzt = a$

Din primele trei ecuaţii rezultă că $x = y = z = t = \sqrt[4]{a}$, *iar* $\lambda = -\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$
Singurul punct staţionar este $M\left(\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a}\right)$.
$d^2F = 2\lambda ztdxdy + 2\lambda xtdydz + 2\lambda xzdxdz + 2\lambda xzdydt + 2\lambda yzdxdt + 2\lambda xydzdt$

În plus, $yztdx + xztdy + xytdz + xyzdt = 0$, *de unde, ţinând cont că* $x = y = z = t = \sqrt[4]{a}$ *rezultă că* $dx + dy + dz + dt = 0$, *deci* $dt = -dx - dy - dz$
$d^2F\left(\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a}\right) = -\frac{2}{\sqrt[4]{a}}\left(dxdy + dydz + dxdz + dy(-dx - dy - dz) + dx(-dx - dy - dz) + dz(-dx - d\right.$
$d^2F\left(\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a}\right) = -\frac{2}{\sqrt[4]{a}}\left(-dx^2 - dy^2 - dz^2 - dxdy - dxdy - dxdz - dzdy\right)$
$d^2F\left(\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a}\right) = \frac{2}{\sqrt[4]{a}}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dxdy + dxdz + dzdy\right)$
$H\left(\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt[4]{a}} & \frac{1}{\sqrt[4]{a}} & \frac{1}{\sqrt[4]{a}} \\ \frac{1}{\sqrt[4]{a}} & \frac{2}{\sqrt[4]{a}} & \frac{1}{\sqrt[4]{a}} \\ \frac{1}{\sqrt[4]{a}} & \frac{1}{\sqrt[4]{a}} & \frac{2}{\sqrt[4]{a}} \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = \frac{2}{\sqrt[4]{a}} > 0$, $\Delta_2 = \frac{3}{\sqrt[4]{a^2}} > 0$, $\Delta_3 = \frac{4}{\sqrt[4]{a^3}} > 0$, *de unde rezultă că punctul* $M\left(\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a},\sqrt[4]{a}\right)$ *este un punct de minim local.*

Exerciţiu 244 *Să se afle dimensiunile unui bazin acoperit în formă de paralelipiped dreptunghic astfel ca acesta să aibă volumul* V *şi să se folosească minimul de material pentru construcţia lui.*

Demonstraţie 239 *Fie x, y, z dimensiunile bazinului. Pentru a se folosi minimum de material trebuie ca paralelipipedul să aibă suprafaţa totală minimă. Suprafaţa totală este $2(xy + xz + yz)$, iar volumul $V = xyz$. Cu alte cuvinte trebuie să aflăm minimul funcţiei $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ cu legătura $xyz = V$.*

Funcţia lui Lagrange acociată este

$F(x, y, z) = xy + xz + yz + \lambda(xyz - V)$

iar sistemul care ne genereayă punctele staţionare

$\frac{\partial F}{\partial x} = y + z + \lambda yz = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = z + x + \lambda xz = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = y + x + \lambda yx = 0$

$xyz = V$

Pentru a rezolva sistemul scădem primele 3 ecuaţii două câte două şi obţinem

$(x - z)(1 + \lambda y) = 0$

$(z - y)(1 + \lambda x) = 0$

$(y - x)(1 + \lambda z) = 0$

Singura situaţie posibilă este $x = y = z$, ceea ce corelat cu $xyz = V$ ne dă punctul staţionar $M\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$. Valoarea lui λ corespunzătoare acestui punct se află din una din ecuaţii.

$2x + \lambda x^2 = 0$, *adică* $\lambda = -\frac{2}{x} = -\frac{2}{\sqrt[3]{V}}$

Situaţia $z = x$ şi $y \neq z$ ar implica $\lambda = -\frac{1}{x}$, iar înlocuind în cea de-a doua ecuaţie ar rezulta

$2x - \frac{1}{x} \cdot x \cdot x = 0$, *deci* $x = 0$, *ceea ce contrazice* $xyz = V$.

Deci, avem un singur punct staţionar $M\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$.

Pentru a-i stabili natura calculăm diferenţiala de ordinul doi.

$d^2F = 2(1 + \lambda z)\, dxdy + 2(1 + \lambda x)\, dzdy + 2(1 + \lambda y)\, dxdz$

În plus, diferenţiind şi legătura avem

$yzdx + xzdy + xydz = 0$

În punctul M având $x = y = z$, rezultă că $dx + dy + dz = 0$, deci $dz = -dx - dy$.

Revenind obţinem

$d^2F\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right) = 2(1 + \lambda x)(dxdy - dy(dx + dy) - dx(dx + dy))$

$d^2F\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right) = 2(1 + \lambda x)\left(-dx^2 - dy^2 - dxdy\right)$

Dar $1 + \lambda x = 1 - \frac{2}{x} \cdot x = -1$

$d^2F\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right) = -2\left(-dx^2 - dy^2 - dxdy\right)$

$d^2F\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right) = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dxdy$

Scriind matricea hessiană obţinem

$H\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, *adică* $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0$, *deci* $M\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$ *este un punct de minim local.*

Cu alte cuvinte dimensiunile cerute de problemă sunt egale toate cu $\sqrt[3]{V}$, deci ideal va fi să construim bazinul în formă de cub.

Exerciţiu 245 *Determinaţi dimensiunile unei piscine în formă de paralelipiped dreptunghic de capacitate dată V astfel ca să utilizăm minimum de material pentru construcţia sa.*

Demonstraţie 240 *Fie x, y, z dimensiunile bazinului. Pentru a se folosi minimum de material trebuie ca bazinul să aibă suprafaţa minimă. Suprafaţa bazinului este $xy + 2xz + 2yz$, (suprafaţa totală din care s+a scos partea de sus) iar volumul $V = xyz$. Cu alte cuvinte trebuie să aflăm minimul funcţiei $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ cu legătura $xyz = V$.*

Funcţia lui Lagrange acociată este

$F(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V)$

iar sistemul care ne genereayă punctele staţionare

$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2z + \lambda yz = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2z + x + \lambda xz = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2x + \lambda yx = 0$

$xyz = V$

Pentru a rezolva sistemul scădem primele 3 ecuaţii două câte două şi obţinem

$(2z - x)(2 + \lambda y) = 0$

$(2z - y)(2 + \lambda x) = 0$

$(y - x)(1 + \lambda z) = 0$

Singura situaţie posibilă este $x = y = 2z$, ceea ce corelat cu $xyz = V$ ne dă punctul staţionar $M\left(2\sqrt[3]{\frac{V}{2}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{2}}, \sqrt[3]{\frac{V}{2}}\right)$. Valoarea

lui λ corespunzătoare acestui punct se află din una din ecuaţii.

$4x + \lambda x^2 = 0$, *adică* $\lambda = -\frac{4}{x} = -\frac{4}{\sqrt[3]{V}}$

Situaţia $y = x$ şi $y \neq 2z$ ar implica $\lambda = -\frac{2}{x}$, iar înlocuind în cea de-a treia ecuaţie ar rezulta

$4x - \frac{2}{x} \cdot x \cdot x = 0$, *deci* $x = 0$, *ceea ce contrazice* $xyz = V$.

Deci, avem un singur punct staţionar $M\left(2\sqrt[3]{\frac{V}{2}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{2}}, \sqrt[3]{\frac{V}{2}}\right)$.

Pentru a-i stabili natura calculăm diferenţiala de ordinul doi.

$d^2F = 2(1 + \lambda z)\,dxdy + 2(2 + \lambda x)\,dzdy + 2(2 + \lambda y)\,dxdz$

În plus, diferenţiind şi legătura avem

$yzdx + xzdy + xydz = 0$

În punctul M având $x = y = 2z$, rezultă că $dx + dy + 2dz = 0$, deci $dz = \frac{-dx-dy}{2}$.

Revenind obţinem

$d^2F\left(2\sqrt[3]{\frac{V}{2}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{2}}, \sqrt[3]{\frac{V}{2}}\right) = 2\left(1 + \lambda\frac{x}{2}\right)dxdy + 2(2 + \lambda x) \cdot \frac{-dx-dy}{2} \cdot (dx + dy)$

$d^2F\left(2\sqrt[3]{\frac{V}{2}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{2}}, \sqrt[3]{\frac{V}{2}}\right) = -dxdy + 2dx^2 + 4dxdy + 2dy^2$

deoarece $1 + \lambda x = 1 - \frac{4}{x} \cdot \frac{x}{2} = -1$, *iar* $2 + \lambda x = -2$

$d^2F\left(2\sqrt[3]{\frac{V}{2}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{2}}, \sqrt[3]{\frac{V}{2}}\right) = 2dx^2 + 3dxdy + 2dy^2$

Scriind matricea hessiană obţinem

$H\left(2\sqrt[3]{\frac{V}{2}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{2}}, \sqrt[3]{\frac{V}{2}}\right) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$, *adică* $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4} > 0$,

deci $M\left(2\sqrt[3]{\frac{V}{2}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{2}}, \sqrt[3]{\frac{V}{2}}\right)$ este un punct de minim local.

Exerciţiu 246 *Dintre toate triunghiurile de perimetru dat $2p$ să se găsească acelea de arie maximă.*

Demonstraţie 241 *Fie x, y, z laturile triunghiurilor . Aria triunghiului o calculăm folosind formula lui Heron*

$S=\sqrt{p\left(p-x\right)\left(p-y\right)\left(p-z\right)}$

Cu alte cuvinte trebuie să găsim maximum pentru funcţia $f\left(x,y,z\right)=\left(p-x\right)\left(p-y\right)\left(p-z\right)$ *în prezenţa legăturii* $x+y+z=2p$.

Funcţia lui Lagrange este

$F\left(x,y,z\right)=\left(p-x\right)\left(p-y\right)\left(p-z\right)+\lambda\left(x+y+z-2p\right)$

$\frac{\partial F}{\partial x}=-\left(p-y\right)\left(p-z\right)+\lambda=0$

$\frac{\partial F}{\partial y}=-\left(p-x\right)\left(p-z\right)+\lambda=0$

$\frac{\partial F}{\partial x}=-\left(p-y\right)\left(p-x\right)+\lambda=0$

$x+y+z=2p$

Scăzându-le două câte două obţinem $x=y=z=\frac{2p}{3}$*, deci avem un singur punct staţionar* $M\left(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}\right)$.

$d^2F=2\left(p-z\right)dxdy+2\left(p-x\right)dydz+2\left(p-y\right)dxdz$

$d^2F\left(M\right)=2\frac{p}{3}dxdy+2\frac{p}{3}dydz+2\frac{p}{3}dxdz$

Din legătură avem $dx+dy+dz=0$*, deci* $dz=-dx-dy$

$d^2F\left(M\right)=2\frac{p}{3}dxdy+2\frac{p}{3}dy\left(-dx-dy\right)+2\frac{p}{3}dx\left(-dx-dy\right)$

$d^2F\left(M\right)=-\frac{2p}{3}dx^2-\frac{2p}{3}dy^2-\frac{2p}{3}dxdy$

$H\left(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}\right)=\begin{pmatrix}\frac{-2p}{3} & \frac{p}{3}\\ \frac{p}{3} & \frac{-2p}{3}\end{pmatrix}$*, adică* $\Delta_1=\frac{-2p}{3}<0$, $\Delta_2=\frac{4p^2}{9}-\frac{p^2}{9}=\frac{p^2}{3}>0$*, deci* $M\left(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}\right)$ *este un punct de maxim.*

Exerciţiu 247 *Determinaţi distanţa de la punctul* $M\left(1,2,3\right)$ *la planul de ecuaţie* $x=-\frac{y}{3}+\frac{z}{2}$.

Demonstraţie 242 *Fie* N *un punct în plan. Pentru a calcula distanţa de la* M *la plan trebuie să găsim minimul lungimii segmentului* MN*, adică minimul funcţiei* $f\left(x,y,z\right)=\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-3\right)^2$ *cu legătura* $x+\frac{y}{3}-\frac{z}{2}=0$.

Funcţia lui Lagrange este:

$F\left(x,y,z\right)=\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-3\right)^2+\lambda\left(x+\frac{y}{3}-\frac{z}{2}\right)$

Pentru a afla punctele staţionare avem de rezolvat sistemul:

$\frac{\partial F}{\partial x}=2\left(x-1\right)+\lambda=0$

$\frac{\partial F}{\partial y}=2\left(y-2\right)+\frac{\lambda}{3}=0$

$\frac{\partial F}{\partial z}=2\left(z-3\right)-\frac{\lambda}{2}=0$

$x+\frac{y}{3}-\frac{z}{2}=0$

Acesta este echivalent cu:

$2x-2+\lambda=0$

$6y-12+\lambda=0$

$4z-12-\lambda=0$

$x+\frac{y}{3}-\frac{z}{2}=0$

De aici: $x=\frac{-\lambda+2}{2}$, $y=\frac{-\lambda+12}{6}$, $z=\frac{\lambda+12}{4}$

Revenind în ultima ecuaţie obţinem

$\frac{-\lambda+2}{2}+\frac{-\lambda+12}{18}-\frac{\lambda+12}{8}=0$*, de unde rezultă* $\lambda=\frac{12}{49}$*, adică* $x=\frac{43}{49}$, $y=\frac{96}{49}$, $z=\frac{150}{49}$.

Punctul staţionar este $M\left(\frac{43}{49},\frac{96}{49},\frac{150}{49}\right)$

$d^2F=2dx^2+6dy^2+4dz^2$*, iar* $dx+\frac{1}{3}dy-\frac{1}{2}dz=0$*, deci* $dz=2dx+\frac{2}{3}dy$.

În concluzie,

$d^2F=2dx^2+6dy^2+4\left(4dx^2+\frac{8}{3}dxdy+\frac{4}{9}dy^2\right)$

$d^2F=18dx^2+\frac{32}{3}dxdy+\frac{16}{9}dy^2$

$H_F(M) = \begin{pmatrix} 18 & \frac{16}{3} \\ \frac{16}{3} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 18 > 0$, $\Delta_2 = 32 - \frac{256}{9} = \frac{288-256}{9} > 0$, *deci punctul* $M\left(\frac{43}{49}, \frac{96}{49}, \frac{150}{49}\right)$ *este un punct de minim.*

Distanţa de la punct la plan este lungimea segmentului $MN = \sqrt{\left(\frac{43}{49}-1\right)^2 + \left(\frac{96}{49}-2\right)^2 + \left(\frac{150}{49}-3\right)^2} = \frac{\sqrt{36+4+9}}{49} = \frac{1}{7}$.

Exerciţiu 248 *Determinaţi axele elipsei de ecuaţie* $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$.

Demonstraţie 243 *Dacă* $M(x,y)$ *este un punct pe elipsă, atunci distanţa de la* M *la originea elipsei, care este şi originea axelor de coordonate este* $x^2 + y^2$. *Vom căuta extremele funcţiei* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *cu legătura* $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$.

Funcţia lui Lagrange este $F(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda\left(5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9\right)$.

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 10\lambda x + 8\lambda y = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 10\lambda y + 8\lambda x = 0$

$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$

Scazând primele două ecuaţii obţinem $(x-y)(2+2\lambda) = 0$, *de unde avem fie* $x = y$, *fie* $\lambda = -1$.

Dacă $x = y$ *revenim în legătură şi obţinem* $18x^2 = 9$, *deci* $x = y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. *În acest caz dacă revenim în prima ecuaţie avem*

$2x + 8\lambda x + 10\lambda x = 0$, *iar* x *fiind nenul rezultă că* $\lambda = -\frac{1}{18}$.

Dacă $x \neq y$ *atunci* $\lambda = -1$, *din prima ecuaţie rezultă că* $-8x - 8y = 0$, *deci* $y = -x$. *Din legătură obţinem* $x = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

În concluzie, punctele staţionare sunt $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, *corespunzătoare valorii* $\lambda = -\frac{1}{18}$ *şi*

$M_3\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_4\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, *corespunzătoare valorii* $\lambda = -1$.

$d^2F = (2+10\lambda)\,dx^2 + (2+10\lambda)\,dy^2 + 8\lambda dxdy$

iar din legătură

$(10x+8y)\,dx + (10y+8x)\,dy = 0$

Pentru M_1 *avem* $dx + dy = 0$, *deci*

$d^2F(M_1) = 2(2+12\lambda)\,dx^2$

$d^2F(M_1) = 4\cdot\frac{5}{6}dx^2$, *deci* M_1 *este punct de minim local*

Analog, $d^2F(M_2) = 2(2+12\lambda)\,dx^2$

$d^2F(M_2) = 4\cdot\frac{5}{6}dx^2$, *deci şi* M_2 *este punct de minim local.*

Una dintre axe este $M_1M_2 = 2$

Pentru M_3 *avem*

$dx - dy = 0$, *deci* $dx = dy$

$d^2F(M_3) = (4+28\lambda)\,dx^2$, $\lambda = -1$

$d^2F(M_1) = -24dx^2$, *deci* M_3 *este punct de maxim local*

Analog, $d^2F(M_4) = -24dx^2$ *deci şi* M_4 *este punct de maxim local.*

A doua axă este $M_3M_4 = 6$.

Exerciţiu 249 *Să se determine distanţa de la punctul* $M(1,2,3)$ *la dreapta de ecuaţie* $x = -\frac{y}{3} = \frac{z}{2}$.

Demonstraţie 244 *Fie $N(x,y,z)$ un punct pe dreaptă. Vom căuta acel punct N pentru care lungimea segmentului MN este minimă. Cu alte cuvinte căutăm minimul funcţiei $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-2)^2-(z-3)^2$ cu legăturile $x=-\frac{y}{3}$ şi $-\frac{y}{3}=\frac{z}{2}$.*

Funcţia lui Lagrange este:

$F(x,y,z)=(x-1)^2+(y-2)^2-(z-3)^2+\lambda_1(3x+y)+\lambda_2(2y+3z)$

$\frac{\partial F}{\partial x}=2(x-1)+3\lambda_1=0$

$\frac{\partial F}{\partial y}=2(y-2)+\lambda_1+2\lambda_2=0$

$\frac{\partial F}{\partial z}=2(z-3)+3\lambda_2=0$

$x=-\frac{y}{3}$

$-\frac{y}{3}=\frac{z}{2}$

Avem $x=\frac{-3\lambda_1+2}{2}$, $y=\frac{-\lambda_1-2\lambda_2+4}{2}$, $z=\frac{-3\lambda_2+6}{2}$

Revenind în ultimele două ecuaţii obţinem $\lambda_1=\frac{13}{21}$, $\lambda_2=\frac{40}{21}$, $x=\frac{1}{14}$, $y=\frac{-3}{14}$, $z=\frac{2}{14}$.

$d^2F=2dx^2+2dy^2+2dz^2$

În plus avem din legături $dy=-3dx$ *şi* $dz=-\frac{2}{3}dy=2dx$

Deci $d^2F=2dx^2+18dx^2+8dx^2=28dx^2$, *de unde rezultă că punctul* $\left(\frac{1}{14},\frac{-3}{14},\frac{2}{14}\right)$ *este un punct de minim local.*

Distanţa de la M la dreaptă va fi egală cu $\sqrt{\left(\frac{1}{14}-1\right)^2+\left(\frac{-3}{14}-2\right)^2-\left(\frac{2}{14}-3\right)^2}=\frac{\sqrt{2730}}{14}$.

Exerciţiu 250 *O întreprindere realizează produse în cantităţile x şi y. Cheltuielile totale deproducţie sunt $c(x,y)=10+4x-4y$ .Preţurile unitare ale celor două produse depind de nivelul producţiei astfel: $p_1=16-x^2$,$p_2=8-2y$. Să se determine în ce cantităţi trebuie să fie fabricate produsele şi la ce preţuri astfel încât beneficiul total să fie maxim.*

Demonstraţie 245 $f(x,y)=p_1x+p_2y-c(x,y)=x(16-x^2)+y(8-2y)-10-4x+4y$ *adică:*

$f(x,y)=-x^3-2y^2+12x+12y-10,\ \ x>0,\ y>0$

Pentru a găsi punctele staţionare rezolvăm sistemul

$\frac{\partial f}{\partial x}=-3x^2+12=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}=-4y+12=0$

Deci, avem un punct staţionar $M(2,3)$.

$H_f=\begin{pmatrix}-6x & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$, *adică* $H_f(M)=\begin{pmatrix}-12 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$, *deci* $\Delta_1=-12>0$, $\Delta_2=48>0$.

În concluzie, M este un punct de maxim, adică beneficiul maxim este $f(2,3)=24$ *şi se obţine pentru* $p_1=12$, $p_2=2$.

Exerciţiu 251 *Cursurile a două râuri sunt aproximativ reprezentate de o parabolă $y=x^2$ şi de o dreaptă de ecuaţie $x-y-2=0$. Se pune problema să reunim cursurile celor două râuri printr-un canal rectiliniu astfel ca lungimea sa să fie minimă. prin ce puncte râurilor se va face trecerea?*

Demonstraţie 246 *Fie $M_1(x,y)$ şi $M_2(z,t)$ două puncte aflate pe parabolă, respectiv pe dreaptă. Deci $x^2=y$ şi $z-t-2=0$.*

Lungimea segmentului M_1M_2 *este* $\sqrt{(x-z)^2+(y-t)^2}$. *Pentru ca această lungime să fie minimă, vom căuta minimul funcţiei*

$f(x,y,z,t)=(x-z)^2+(y-t)^2$ *cu două legături* $x^2=y$ *şi* $z-t-2=0$.

Funcţia lui Lagrange este

$F(x,y,z,t)=(x-z)^2+(y-t)^2+\lambda_1\left(x^2-y\right)+\lambda_2(z-t-2)$

Pentru a găsi punctele staţionare rezolvăm sistemul

$\frac{\partial F}{\partial x}=2(x-z)+2\lambda_1 x=0$

$\frac{\partial F}{\partial y}=2(y-z)-\lambda_1=0$

$\frac{\partial F}{\partial z}=-2(x-z)+\lambda_2=0$

$\frac{\partial F}{\partial t}=-2(y-t)-\lambda_2=0$

$x^2=y$

$z-t-2=0$

Adunând ecuaţiile a doua şi a patra obţinem $\lambda_2=-\lambda_1$.

Adunând prima şi a treia ecuaţie obţinem $2\lambda_1 x=-\lambda_2$. *Deci* $2\lambda_1 x=\lambda_1$, *de unde avem fie* $x=\frac{1}{2}$ *fie* $\lambda_1=0$.

Dacă $x=\frac{1}{2}$, *atunci* $y=\frac{1}{4}$. *Revenind cu aceste valori în ecuaţii obţinem* $z=\frac{\lambda_1+1}{2}$, $t=\frac{\lambda_1-3}{2}$ *pe care dacă le ănlocuim ăn a patra ecuaţie obţinem* $\lambda_1=\frac{7}{4}$. *În concluzie* $z=\frac{11}{8}$ *şi* $t=\frac{-5}{8}$.

Avem deci punctul staţionar $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{11}{8},\frac{-5}{8}\right)$.

$d^2F=(2+2\lambda_1)\,dx^2+2dy^2+2dz^2+2dt^2-4dxdz-4dydt$

Iar prin diferenţierea legăturilor $2xdx-dy=0$ *şi* $dz-dt=0$, *adică pentru punctul staţionar obţinut avem* $dy=dx$ *şi* $dt=dz$.

Deci

$d^2F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{11}{8},\frac{-5}{8}\right)=\frac{11}{2}dx^2+2dx^2+2dz^2-4dxdz-4dxdz$

$d^2F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{11}{8},\frac{-5}{8}\right)=\frac{15}{2}dx^2+4dz^2-8dxdz$

$H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{11}{8},\frac{-5}{8}\right)=\begin{pmatrix}\frac{15}{2} & -4\\ -4 & 4\end{pmatrix}$ *de unde* $\Delta_1=\frac{15}{2}>0$, $\Delta_2=30-16=14>0$, *deci punctul este de minim.*

În concluzie punctele care vor determina canalul cerut sunt $M_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ *şi* $M_2\left(\frac{11}{8},\frac{-5}{8}\right)$

Exerciţiu 252 *O fabrică de mobilă realizează două produse pentru export cu cheltuieli unitare fixe de producţie de 4 u.m. şi 5 u.m. Cererile pe piaţa externă ale celor două produse sunt:* $x_1=2(p_2-p_1), x_2=3p_1-10p_2+8$ *unde* p_1 *şi* p_2 *reprezintă preţurile de vânzare ale produselor. Să se determine preţurile* p_1 *şi* p_2 *astfel încât beneficiul realizat din vânzarea celor două produse să fie maxim.*

Demonstraţie 247 *Beneficiul este* $f(p_1,p_2)=p_1x_1+p_2x_2-4x_1-5x_2=p_1\cdot 2(p_2-p_1)+p_2\cdot(3p_1-10p_2+8)-8(p_2-p_1)-5(3p_1-10p_2+8)$

$f(p_1,p_2)=-2p_1^2-10p_2^2+5p_1p_2-7p_1+50p_2-40$

$\frac{\partial f}{\partial p_1}=-4p_1+5p_2-7=0$

$\frac{\partial f}{\partial p_2}=-20p_2+5p_1+50=0$

Rezolvând sistemul obţinem $p_1=2$, $p_2=3$, *deci avem un singur punct staţionar* $M(2,3)$.

$H_f=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 5 & -20\end{pmatrix}$, $\Delta_1=-4<0$, $\Delta_2=80-25=55>0$, *deci* M *este un punct de maxim local, adică beneficiul maxim se obţine pentru preţurile* $p_1=2$

u.m. şi $p_2 = 3$ *u.m. iar beneficiul va fi* $f(2,3) = 28$

Exerciţiu 253 *Se consideră funcţia de producţie:* $f(x,y) = 12 - \frac{2}{x} - \frac{4}{y}$, *unde* x *şi* y *sunt nivelele factorilor (materii prime, energie etc.). Dacă factorii au costurile unitare 2, respectiv 4 u.m., iar preţul unitar al produsului finit este 9 u.m., să se determine structura producţiei astfel încât beneficiul să fie maxim.*

Demonstraţie 248 *Beneficiul este* $B(x,y) = 9f(x,y) - 2x - 4y = 108 - \frac{18}{x} - \frac{36}{y} - 2x - 4y$, $x > 0$, $y > 0$.

$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{18}{x^2} - 2 = 0$

$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{36}{y^2} - 4 = 0$

deci, avem un singur punct stationar $M(3,3)$.

$H_B = \begin{pmatrix} \frac{-36}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{-72}{y^3} \end{pmatrix}$

deci

$H_B(M) = \begin{pmatrix} \frac{-36}{27} & 0 \\ 0 & \frac{-72}{27} \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = \frac{-4}{3} < 0$, *iar* $\Delta_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{3} > 0$, *deci punctul* M *este punct de maxim.*

Beneficiul maxim este $B(3,3) = 72$.

8.10 Aproximare liniară. Metoda celor mai mici patrate

Să revenim la derivata funcţiilor reale de o variabilă reală. Fie $y = f(x)$ o astfel de functie. Derivata acesteia in punctul c

$\frac{dy}{dx}(c) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$,

ceea ce poate fi rescris $\Delta y = \frac{dy}{dx}(c)\, h + \varepsilon h$,

unde $\Delta y = f(c+h) - f(c)$, iar $\varepsilon = \varepsilon(h,c)$ este astfel ca $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon = 0$.

Această ultimă formulă ne dă o aproximare liniară pentru $y = f(x)$

$f(c+h) \approx f(c) + \frac{dy}{dx}(c)\, h$

Încercăm să obţinem o astfel de aproximare liniară şi pentru funcţii de două variabile.

Propoziţie 14 *Fie* $z = f(x,y)$ *o funcţie de două variabile şi* $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. *Presupunem că derivatele parţiale* f_x, f_y *sunt continue pe un dreptunghi* D *care conţine punctul* (a,b) *în interior. Atunci pentru orice* $(a+h, b+k) \in D$ *avem*

Proposition 4 $\Delta\, z = f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\, k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$

unde ε_1, ε_2 *depind de* (a,b), *de h şi k şi verifică* $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0$, $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$

Această teoremă ne permite să facem aproximarea

$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\, k$

pentru h şi k suficient de mici.

Una din problemele actuale cu care se confruntă în special agenţii economici este prognoza nivelului rezultatelor unei anumite activităţi. Pentru realizarea acestui obiectiv este necesară înregistrarea valorilor rezultatelor pentru o perioadă mai mare de timp şi găsirea unei funcţiicare să modeleze cât mai exact fenomenul studiat. În teoria economică matematică, cele mai utilizate sunt modelele de ajustare a datelor folosind metoda celor mai mici pătrate.

Tipurile de ajustare frecvent utilizate sunt:

■ Ajustare liniară: $y = ax + b$

■ Ajustare parabolică: $y = ax^2 + bx + c$

■ Ajustare hiperbolică: $y = a + \frac{b}{x}$; cu notaţia $z = \frac{1}{x}$ se ajunge la ajustare liniară

■ Ajustare după o funcţie exponenţială: $y = b \cdot a^x$; prin logaritmare se obţine: $lny = lnb + xlna$ sau $z = A + Bx$ şi se ajunge tot la o ajustare liniară.

Exemplu 83 *Consumul de materii prime al unei societăţi comerciale înprimele 5 luni ale anului, exprimat în milioane lei, a fost:*

Example 5

Luna	*ianuarie*	*februarie*	*martie*	*aprilie*	*mai*
Consum(mil. lei)	*2,7*	*2,5*	*3*	*3,9*	*4,1*

Să se ajusteze datele după o dreaptă şi să se facă o prognoză pentru luna iulie.

Demonstraţie 249 *Tabelul poate prezentat sub forma următoare*

x_i	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*
y_i	*2,7*	*2,5*	*3*	*3,9*	*4,1*

Considerăm funcţia de ajustare $f(x) = ax + b$.

Suma pătratelor erorilor este dată de funcţia

$F(a, b) = \sum_{i=1}^{5} [f(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{5} [ax_i + b - y_i]^2$

Punem condiţia ca suma pătratelor erorilor să fie minimă:

$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^{5} 2x_i (ax_i + b - y_i) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=1}^{5} 2 (ax_i + b - y_i) = 0$

Sistemul este echivalent cu

$a\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{5} x_i - \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 0a\sum_{i=1}^{5} x_i + b\sum_{i=1}^{5} 1 - \sum_{i=1}^{5} y_i = 0$

$\sum_{i=1}^{5} x_i = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 = 0$

$\sum_{i=1}^{5} y_i = 2,7 + 2,5 + 3 + 3,9 + 4,1 = 16,2$

$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10$

$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = -2 \cdot 2,7 - 1 \cdot 2,5 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3,9 + 2 \cdot 4,1 = 4,2$

Cele două ecuaţii ale sistemului devin:

$10a - 4,2 = 0$

$5b - 16,2 = 0$

de unde $a = 0,42$ *şi* $b = 3,24$

Am obţinut dreapta de ajustare $f(x) = 0,42x + 3,24$.

Pentru o prognoză pe luna iulie vom considera $x = 4$ *şi vom obţine* $f(4) = 4,92$ *mil. lei.*

Exemplu 84 *Volumul vânzărilor, unui produs, în mil. lei, în timp de 7 luni a înregistrat următorea evoluţie:*

Example 6

Luna	ian.	febr.	mart.	apr.	mai	iun.	iul
Volumul vânzărilor	30	54	76	82	70	50	45

Să se ajusteze datele după o parabolă şi să se facă o prognoză pentru luna următoare.

Demonstraţie 250 *Tabelul precedent poate fi prezentat sub forma:*

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	30	54	76	82	70	50	45

Considerăm funcţia de ajustare $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Suma pătratelor erorilor este dată de funcţia:

$$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{7} [f(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{7} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2$$

Punem condiţia ca suma pătratelor erorilor să fie minimă. Sistemul care ne dă punctele staţionare este:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^{7} 2x_i^2 \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=1}^{7} 2x_i \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \sum_{i=1}^{7} 2 \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) = 0$$

adică

$$a\sum_{i=1}^{7} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{7} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - \sum_{i=1}^{7} x_i^2 y_i = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{7} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{7} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{7} x_i - \sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{7} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{7} x_i + c\sum_{i=1}^{7} 1 - \sum_{i=1}^{7} y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = -3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{7} y_i = 30 + 54 + 76 + 82 + 70 + 50 + 45 = 407$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 = 28$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i y_i = -3 \cdot 30 - 2 \cdot 54 - 1 \cdot 76 + 0 \cdot 82 + 1 \cdot 70 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 45 = 31$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^3 = -27 - 8 - 1 + 0 + 1 + 8 + 27 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^4 = 81 + 16 + 1 + 0 + 1 + 16 + 81 = 196$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 y_i = 9 \cdot 30 + 4 \cdot 54 + 1 \cdot 76 + 0 \cdot 82 + 1 \cdot 70 + 4 \cdot 50 + 9 \cdot 45 = 1237$$

Ecuaţiile sistemului devin:
$196a + 0 \cdot b + 28c = 1237$
$0 \cdot a + 28b + 0 \cdot c = 31$
$28 \cdot a + 0 \cdot b + 7c = 407$
de unde: $a = -4,654$, $b = 1,107$ *şi* $c = 76,761$
Astfel, parabola de ajustare va fi $f(x) = -4,654x^2 + 1,107x + 76,761$
Pentru o prognoză pe luna următoare vom calcula $f(4) = 6,725$ *mil. lei.*

Exerciţiu 254 *La un magazin de desfacere a unui anumit produs, procentul de produse nevândute a scăzut ca urmare a îmbunătăţirii calităţii produsului conform tabelului:*

Exercise 11

Ani	*2003*	*2004*	*2005*	*2006*	*2007*	*2008*
Procent	*20*	*15*	*12,5*	*9*	*8*	*6*

a. Să se determine tendinţa de scădere a procentului produselor nevândute.
b. Să se facă extrapolarea pentru anul 2009.

Demonstraţie 251 *Vom încerca o ajustare hiperbolică:* $y = a + \frac{b}{x}$.
Tabelul poate fi prezentat sub forma:

x_i	*-3*	*-2*	*-1*	*1*	*2*	*3*
y_i	*20*	*15*	*12,5*	*9*	*8*	*6*

Suma pătratelor erorilor este dată de funcţia:
$F(a,b) = \sum_{i=1}^{6} [f(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{6} \left(a + \frac{b}{x_i} - y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{6} \left(a^2 + \frac{2ab}{x_i} + \frac{b^2}{x_i^2} + y_i^2 - 2ay_i - \frac{2by_i}{x_i}\right)$
$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{x_i} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0$
$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = 2 \cdot \frac{49}{36}$
$\sum_{i=1}^{6} y_i = 70,5$
$\sum_{i=1}^{6} y_i^2 = 962,25$
$\sum_{i=1}^{6} \frac{y_i}{x_i} = -\frac{20}{3} - \frac{15}{2} - 12,5 + 9 + 4 + 2 = 11,66$
$F(a,b) = 6a^2 - 141a + \frac{49}{18}b^2 - 23,32b + 962,25$
Pentru ca suma pătratelor erorilor să fie minimă:
$\frac{\partial F}{\partial a} = 12a - 141 = 0$
$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{49}{9}b - 23,32 = 0$
de unde $a = \frac{141}{12} = 11,75$ *şi* $b = \frac{23,32 \cdot 9}{49} = 4,28$
$H_F(11,75, \quad 4,28) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & \frac{49}{9} \end{pmatrix}$, *de unde rezultă că punctul este de minim.*

Deci, hiperbola de ajustare este $y = f(x) = 4,28 + \frac{11,75}{x}$, *iar prognoza pe anul 2009 este* $f(4) = 7,21$.

Exerciţiu 255 *Volumul vânzărilor la un articol în sezoanele toamnă-iarnă în cadrul unui magazin de specialitate este:*

Exercise 12

Luna	*sep.*	*oct.*	*nov.*	*dec.*	*ian.*	*febr.*	*mart.*
Volum vânzări	*20*	*40*	*50*	*70*	*50*	*30*	*10*

1.Să se determine tipul curbei de ajustare cu ajutorul reprezentării grafice.

2. Să se determine trendul vânzărilor în vederea stabilirii stocurilor lunare pentru aceeaşi perioadă a anului următor.

Demonstraţie 252 *Vom încerca o ajustare parabolică.*

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	20	40	50	70	50	30	10

Considerăm funcţia de ajustare $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Suma pătratelor erorilor este dată de funcţia:

$$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{7} [f(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{7} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2$$

Punem condiţia ca suma pătratelor erorilor să fie minimă. Sistemul care ne dă punctele staţionare este:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^{7} 2x_i^2 \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=1}^{7} 2x_i \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \sum_{i=1}^{7} 2 \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) = 0$$

adică

$$a\sum_{i=1}^{7} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{7} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - \sum_{i=1}^{7} x_i^2 y_i = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{7} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{7} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{7} x_i - \sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{7} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{7} x_i + c\sum_{i=1}^{7} 1 - \sum_{i=1}^{7} y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = -3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{7} y_i = 20 + 40 + 50 + 70 + 50 + 30 + 10 = 270$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 = 28$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i y_i = -3 \cdot 20 - 2 \cdot 40 - 1 \cdot 50 + 0 \cdot 70 + 1 \cdot 50 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 10 = -50$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^3 = -27 - 8 - 1 + 0 + 1 + 8 + 27 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^4 = 81 + 16 + 1 + 0 + 1 + 16 + 81 = 196$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 y_i = 9 \cdot 20 + 4 \cdot 40 + 1 \cdot 50 + 0 \cdot 70 + 1 \cdot 50 + 4 \cdot 30 + 9 \cdot 10 = 650$$

Ecuaţiile sistemului devin:

$196a + 0 \cdot b + 28c = 650$

$0 \cdot a + 28b + 0 \cdot c = -50$

$28 \cdot a + 0 \cdot b + 7c = 270$

de unde: $a = -5,11,\ b = -1,78$ *şi* $c = 59,01$

Astfel, parabola de ajustare va fi $f(x) = -5,11x^2 - 1,78x + 59,01$

Bibliografie

[1] Bătineţu, D.M., Maftei, I.V., Stancu-Minasian, *Exerciţii şi probleme de analiză matematică*, Editura didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

[2] Colecţia Gazeta Matematică, 1980-2001

[3] Colecţia Revista matematică a elevilor din Timişoara, 1980-1990

[4] Demidovitch, B. *Recueil d'exercices et de problemes d'analyse mathematique*, Editions Mir, 1977

[5] Megan, M., Sasu, B., Neamţu, M., Crăciunescu, A. *Bazele Analizei matematice prin exerciţii şi probleme*, Editura Helicon, Timişoara, 1996

[6] Nicolescu, M. Dinculeanu, N. şi Marcus, S., *Ana liză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, 1966

[7] Niculescu, C.P. *Curs de Analiză Matematică - Analiza pe dreapta reală*, Reprografia Universităţii din Craiova, 2001

[8] Niculescu, C.P. *Probleme de Analiză Matematică*, Editura Cardinal, 1994

[9] Sireţchi, Gh. *Calcul diferenţial şi integral*, Editura Stiinţifică şi Enciclopedică, 1985

[10] Silov, G.E., *Analiză Matematică*, Editura Stiinţifică şi Enciclopedică, 1989