CAPITOLUL 1. ELEMENTE DE ALGEBRA

1.1 Mulţimi

Definiţia 1.1.1 *(Cantor) Prin* ***mulţime*** *se înţelege un ansamblu de obiecte bine determinate şi distincte, care formează o entitate.*

Obiectele care formează o mulţime se numesc elementele mulţimii.

Vom nota mulţimile cu literele mari A, B,......., iar elementele lor cu literele mici a, b, ..., x.

A determina o mulţime înseamnă a preciza individual elementele sale sau a preciza o proprietate caracteristică (pe care o au elementele mulţimii respective şi numai acestea). Menţionăm că nu orice proprietate (în sensul uzual al cuvântului) determină o mulţime, însă se acceptă că orice proprietate determină o clasă (sau famili) (clasa obiectelor ce satisfac proprietatea respectivă). Amintim, de exemplu, că nu se poate vorbi de mulţimea tuturor mulţimilor ci de clasa tuturor mulţimilor. Restricţiile ce se impun asupra proprietăţilor pentru ca acestea să determine mulţimi derivă din presupunerile enunţate în definiţia 1.1.1.

Dacă A este o mulţime, iar a este un element al mulţimii A, vom nota $a \in A$, iar în caz contrar notăm $a \notin A$.

Definiţia 1.1.2 *Spunem ca mulţimea A este inclusă în mulţimea B şi scriem $A \subseteq B$ dacă orice element din mulţimea A se află şi în mulţimea B. Dacă $A \subseteq B$, atunci A mai este numită* ***submulţime*** *a lui B.*

Admitem existenţa unei mulţimi care nu are nici un element, numită mulţimea **vidă**, pe care o vom nota cu $\emptyset$.

Pentru orice mulţime A, are loc $\emptyset \subseteq A$.

Spunem că mulţimile A şi B coincid şi scriem $A = B$ dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$.

Definiţia 1.1.3 *Fiind date două mulţimi A şi B, vom nota cu $A \cap B$ mulţimea*

$\{x \mid x \in A$ şi $x \in B\}$ şi o vom numi ***intersecţia*** *mulţimilor A şi B.*

Dacă $A \cap B = \emptyset$ vom spune că A şi B sunt **disjuncte**.

Definiţia 1.1.4 *Fiind date două mulţimi A şi B, vom nota cu* $A \cup B$ *mulţimea* $\{ x \mid x \in A$ *sau* $x \in B\}$ *şi o vom numi* ***reuniunea*** *mulţimilor A şi B .*

Definiţia 1.1.5 *Fiind date două mulţimi A şi B, vom nota cu B – A mulţimea*

$$\{ x \mid x \in B , x \notin A\}$$

şi o vom numi ***diferenţa*** *mulţimilor B şi A. Dacă* $A \subseteq B$, *atunci B - A se mai notează* $\mathbf{C}_B A$ *şi este numită* ***complementara mulţimii A relativ la B***.

Dacă pentru un context dat se are în vedere o mulţime U (numită şi mulţimea universală) ce conţine ca submulţimi toate mulţimile în discuţie în contextul respectiv şi $A \subseteq U$, atunci $\mathbf{C}_U A$ se mai notează **C**A şi este numită, simplu, **complementara lui A**.

Pentru orice mulţimi A, B, D au loc următoarele proprietăţi:

1) $\emptyset \cap A = \emptyset$; $A \cap U = A$; $\emptyset \cup A = A$; $A \cup U = U$; $A - \emptyset = A$; $A - A = \emptyset$;

2) $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$; $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$;

3) $A \cap (A \cup B) = A = A \cup (A \cap B)$;

4) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

5) $(A \cap B) \cap D = A \cap (B \cap D)$; $(A \cup B) \cup D = A \cup (B \cup D)$;

6) $A \cup A = A = A \cap A$;

7) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup D \subseteq B \cup D$; $A \cap D \subseteq B \cap D$; $\mathbf{C}B \subseteq \mathbf{C}A$;

8) $A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$;

$A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D)$;

9) $\mathbf{C} (A \cup B) = \mathbf{C}A \cap \mathbf{C}B$; $\mathbf{C} (A \cap B) = \mathbf{C}A \cup \mathbf{C}B$;

$\mathbf{C} (\mathbf{C} A) = A$;

10) $B - A = B \cap \mathbf{C}A$.

Pentru o familie de mulţimi $M = \{ M_i \mid i \in I\}$ definim:

- reuniunea mulţimilor din familia M şi scriem $\bigcup_{i\in I} M_i$, mulţimea $\{x \mid$ există $i \in I$, astfel încât $x \in M_i\}$
- reuniunea mulţimilor din familia M şi scriem $\bigcap_{i\in I} M_i$, mulţimea $\{x \mid$ pentru orice $i \in I$, avem $x \in M_i\}$

Sunt adevărate proprietăţile:

1. $M_i \subseteq \bigcup_{i\in I} M_i$, pentru orice $i \in I$;
2. $\bigcap_{i\in I} M_i \subseteq M_i$ pentru orice $i \in I$;

3. $M \cap (\bigcup_{i \in I} M_i) = \bigcup_{i \in I}(M \cap M_i)$;
4. $M \cup (\bigcap_{i \in I} M_i) = \bigcap_{i \in I}(M \cup M_i)$;
5. $\complement(\bigcap_{i \in I} M_i) = \bigcup_{i \in I} \complement M_i$ şi $\complement(\bigcup_{i \in I} M_i) = \bigcap_{i \in I} \complement M_i$.

Dacă A şi B sunt mulţimi şi a ∈ A, b ∈ B, atunci putem forma **perechea ordonată** (a,b).

Avem $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ dacă $a_1 = a_2$ şi $b_1 = b_2$.

Definiţia 1.1.6 *Mulţimea {(a, b) | a ∈ A, b ∈ B} este notată cu A × B şi este numită* ***produsul cartezian*** *al mulţimilor A şi B.*

Pentru A = B notăm A × A cu A^2.

Inductiv, definim pentru mulţimile $A_1, A_2, ..., A_n$ produsul cartezian

$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, ..., a_n) \mid \forall\, i = 1,2, \ldots n,\ a_i \in A_i, \}$

Definiţia 1.1.7 *Mulţimea (A - B) ∪ (B - A) se numeşte* ***diferenţa simetrică*** (sau ***suma booleană)*** *a mulţimilor A şi B şi se notează cu A Δ B.*

Pentru orice mulţimi A, B, D au loc egalităţile:

1) (A Δ B) Δ D = A Δ (B Δ D);

2) A Δ B = B Δ A;

3) A Δ ∅ = A; A Δ A = ∅ ;

4) A ∩ (B Δ D) = (A ∩ B) Δ (A ∩ D).

Exemple de mulţimi importante:

Prima mulţime de numere cunoscute este mulţimea numerelor naturale, notată

N ={0, 1, 2, 3, …,n,…}, iar mulţimea numerelor naturale fără zero

N* = {1, 2, 3,…,n, …}

Apare apoi mulţimea numerelor întregi, notată

Z = {…-n, …,-3, 2, -1, 0, 1, 2, 3, …,n, …}, observându-se că **N**⊂ **Z**.

În această mulţime nu se poate efectua împărţirea de fiecare dată ca să obţinem un număr întreg. Exempu 7:2=3,5∉**N**.

Atunci, vom fi conduşi la ideea extinderii mulţimii numerelor întregi, obţinând mulţimea numerelor raţionale, notată **Q**=$\left\{ \frac{m}{n} / m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$ numite şi fracţii, cu observaţia că **N**⊂**Z**⊂**Q**, **Q** conţine numerele zecimale finite, periodice simple şi periodice compuse.

Dar mai apar şi alte numere în practică, spre exemplu la calculul diagonalei unui pătrat de latură 1, unde diagonala este $\sqrt{2}$, . De aici, necesitatea definirii unei mulţimi mai largi de numere, numită mulţimea numerelor reale şi notată cu **R**.

Mulţimea numerelor reale se defineşte axiomatic, unele axiome fiind, de fapt, proprietăţi ale mulţimilor **N**, **Z**, **Q**, ceea ce face ca prin această definire să se regăsească în **R** proprietăţile mulţimilor anterioare.

În definirea axiomatică a mulţimii numerelor reale se cere ca acestă mulţime să verifice un sistem de axiome împărţit în cinci grupe:

1. **Axiomele operaţiei de adunare**

Pe **R** se defineşte o lege internă, notată + : **R**x**R** → **R**, care asociază fiecărei perechi ordonate de numere reale (a, b), numărul real unic a+b, care verifică:

A1. Este **asociativă** : (a + b) + c = a + (b + c); ∀a, b, c ∈**R**.

A2. Este **comutativă** : a + b = b + a; ∀a, b ∈**R**.

A3. Numărul 0 est **element neutru** pentru adunare : a + 0 = 0 + a = a.

A4. Numărul (-a) este **simetricul** lui a (opusul) faţă de adunare : a + (-a) = (-a) + a = 0

(**R**, +) capătă astfel o structură de grup abelian

2. **Axiomele operaţiei de înmulţire**

Pe **R** se defineşte încă o lege internă, notată · : **R**x**R** → **R**, care asociază fiecărei perechi ordonate de numere reale (a, b), numărul real unic a·b, care verifică:

Î1. este **asociativă**: (a·b) ·c = a· (b·c); ∀a, b, c ∈**R**.

Î2. este **comutativă** : $a \cdot b = b \cdot a$; $\forall a, b \in \mathbf{R}$.

Î3. Numărul 1 est **element unitate** pentru înmulţire : $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Î4. Pentru orice număr real a diferit de zero există un număr real a^{-1}, numit **inversul** lui a astfel ca:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

3. **Axioma distributivităţii înmulţirii faţă de adunare**

   $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot b$ $(\forall) a, b, c \in \mathbf{R}$. (revedeţi scoaterea factorului comun)

   Cu cele două legi mulţimea numerelor reale devine **corp comutativ**.

4. **Axiomele de ordine**

R este un corp comutativ total ordonat, adică între elementele sale există o relaţie notată $\leq$ astfel încât sunt îndeplinite condiţiile:

O1. Pentru orice număr real a, $a \leq a$ (**reflexivitate**);

O2. Pentru orice numere reale a,b, c, din $a \leq b$ şi $b \leq c$, rezultă $a \leq c$ (**tranzitivitate**);

O3. Pentru orice numere reale a, b, din $a \leq b$ şi $b \leq a$, rezultă $a = b$ (**antisimetrie**);

O4. Pentru orice numere reale a, b, avem $a \leq b$ sau $b \leq a$ (**totală ordonare**);

O5. Pentru orice numere reale a,b, c, din $a \leq b$, rezultă $a + c \leq b + c$ (**compatibilitatea relaţiei de ordine cu adunarea**);

O6. Pentru orice numere reale a,b, c, din $a \leq b$ şi $0 \leq c$, rezultă $a \cdot c \leq b \cdot c$ (**compatibilitatea relaţiei de ordine cu înmulţirea**).

Deoarece şi Q verifică relaţiile de mai sus, rezultă că este nevoie de încă o axiomă:

5. **Axioma marginii superioare**

Definiţia 1.1.8 *O mulţime A de numere reale se numeşte* ***majorată*** *sau* ***mărginită superior*** *daca există un număr real M astfel încât* $a \leq M$*, pentru orice a din A.*

O mulţime A de numere reale se numeşte **minorată** sau **mărginită inferior** daca există un număr real m astfel încât m $\leq$ a, pentru orice a din A.

O mulţime A de numere reale se numeşte **mărginită** daca este majorată şi minorată.

Definiţia 1.1.9 *Fie o mulţime A de numere reale majorată. Se numeşte* ***supremum*** *lui A cel mai mic majorant. Cu alte cuvinte* $\alpha = \sup A$ *dacă:*

1) *α este majorant pentru mulţimea A;*
2) *α este cel mai mic dintre majoranţi, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $a_\varepsilon \in A$, astfel ca* $a_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$

Definiţia 1.1.10 *Fie o mulţime A de numere reale minorată. Se numeşte* ***infimum*** *lui A cel mai mare minorant. Cu alte cuvinte* $\alpha = \inf A$ *dacă:*

1) *α este minorant pentru mulţimea A;*
2) *α este cel mai mare dintre minoranţi, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $a_\varepsilon \in A$, astfel ca* $a_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$

Axioma marginii superioare: Daca A este o mulţime majorată de numere reale, atunci există un cel mai mic majorant.

Principiul lui Arhimede: Pentru orice numere reale x, y cu $y > 0$ există un număr natural n astfel ca $ny > x$.

Definiţia 1.1.11 *O dreaptă pe care s-a fixat originea O, un sens şi o unitate de măsură se numeşte axă.*

Între mulţimea punctelor de pe axă şi mulţimea numerelor reale există o corespondenţă biunivocă. Oricărui număr real îi corespunde un punct pe axă şi reciproc. S-au mai introdus două simboluri respectiv "+∞" şi "-∞", care reprezintă un număr foarte mare pozitiv iar "-∞" reprezintă un număr foarte mare în valoare absolută dar cu semnul minus.

1.2 Funcţii

Definiţia 1.2.1 *Fiind date două mulţimi A şi B, spunem că am definit o* ***funcţie*** *pe A cu valori în B şi notăm $f: A \to B$, dacă fiecărui element din A îi corespunde un singur element din B.*

Mulţimea A poartă numele de **domeniu** de definiţie al funcţiei f, iar B poartă numele de **codomeniu** funcţiei f. Elementele mulţimiii A se numesc **variabile** sau **argumente**, iar elementele mulţimii B se numesc **valori**.

Vom spune că două funcţii f şi g **coincid** dacă au acelaşi domeniu de definiţie A, acelaşi codomeniu B şi $\forall$ x $\in$ A, avem f(x) = g(x).

Fie f : A → B, A' ⊆ A şi B' ⊆ B.

f(A') = {f(x) | x ∈ A'} este numită **imaginea directă a submulţimii A'** prin funcţia f,

iar

f^{-1}(B') = {x ∈ A |f(x) ∈ B'} este numită **imaginea inversă a submulţimii B'** prin funcţia f.

Se poate arata că $f(f^{-1}(B')) \subseteq B'$ şi $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$ de unde obţinem că:

$$f(f^{-1}(f(A'))) = f(A') \text{ şi } f^{-1}(f(f^{-1}(B'))) = f^{-1}(B').$$

Au loc proprietăţile: pentru orice familie de submulţimi ale lui A, $\{A_i\}_{i\in I}$, şi pentru orice familie de submulţimi ale lui B, $\{B_i\}_{i\in I}$, avem:

1. $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$
2. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$
3. $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$
4. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

Definiţia 1.2.2 *Fie f : A → B, g : B → C.*

Funcţia g ∘ f : A → C, ∀x ∈ A, (gof) (x) = g (f (x)) este numită ***compusa*** *funcţiilor g şi f.*

Se remarcă faptul că, dacă f : A → B, g : B → C şi h : C → D atunci: ho (gof) = (hog) of.

Definiţia 1.2.3 *Fie f : A → B o funcţie.*

i) f este numită funcţie ***injectivă*** *dacă:*

$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ *(sau, echivalent* $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$*);*

ii) f este numită funcţie ***surjectivă*** *dacă* $\forall b \in B, \exists\, a \in A$*, aşa încât* $f(a) = b$*;*

iii) f este numită funcţie ***bijectivă*** *dacă este injectivă şi surjectivă.*

Observaţie:

Fie f : A → B, g : B → C

i) Dacă f şi g sunt injective (surjective), atunci gof este injectivă (surjectivă);

ii) Dacă gof este injectivă (surjectivă), atunci f este injectivă (g este surjectivă).

Definiţia 1.2.4 Funcţia h : B → A se numeşte **inversa** funcţiei f : A → B dacă $hof = 1_A$ şi $f \circ h = 1_B$ (unde $1_A : A \to A$, prin $1_A(a) = a$ pentru orice a din A).

Inversa funcţiei f, dacă există, se notează cu f^{-1}. În acest caz, funcţia f se numeşte funcţie **inversabilă**.

Definiţia 1.2.4 *O funcţie f: R →R se numeşte;*

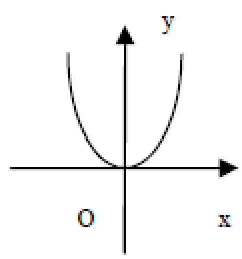
- ***pară (respectiv impară)*** *dacă f(x) = f(-x) (respectiv f(-x) = -f(x)) pentru orice x real (respectiv f(-x) = -f(x));*
- ***crescătoare*** *dacă pentru orice x ≤ y, avem f(x) ≤ f(y). Dacă inegalităţile sunt stricte, atunci f se numeşte strict crescătoare;*
- ***descrescătoare*** *dacă pentru orice x ≥ y, avem f(x) ≥ f(y). Dacă inegalităţile sunt stricte, atunci f se numeşte strict crescătoare;*
- ***monotonă*** *dacă este crescătoare sau descrescătoare.*

Funcţii elementare:

1. **Funcţia putere**
   - Cu exponent par

Este funcţia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, $f(x) = x^n$, cu n par.

Graficul funcţiei este:



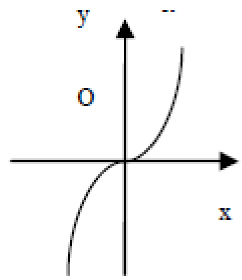
Funcţia este pară, este descrescătoare pe (-∞, 0), crescătoare pe (0, ∞), nu este injectivă, dar este surjectivă.

- Cu exponent impar

Este funcţia f: **R** → **R**, f(x) = x^n, cu n impar.

Funcţia este crescătoare şi bijectivă.

Graficul funcţiei este:

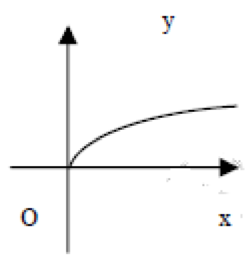


2. **Funcţia radical**

- De ordin par

Este funcţia f: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, f(x) = $\sqrt[n]{x}$, cu n par.

Graficul funcţiei este:

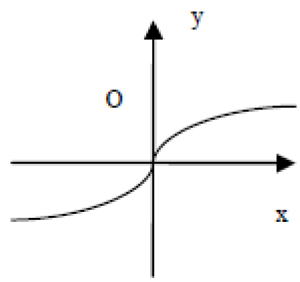


Funcţia este crescătoare şi bijectivă.

- De ordin impar

Este funcţia f: **R** → **R**, f(x) = $\sqrt[n]{x}$, cu n impar.

Graficul funcţiei este:



Funcţia este crescătoare, bijectivă şi impară.

3. **Funcţia de gradul 1**

Funcţia $f:R\to R,\quad f(x)=ax+b,\quad a\neq 0$ se numeşte funcţie de gradul 1.

Exemplu: $f:R\to R,\quad f(x)=-2x+1$

Intersecţia cu axele

a) $\cap ox \Rightarrow y=f(x)=0\Rightarrow ax+b=0\Rightarrow x=\frac{-b}{a}\Rightarrow A\left(\frac{-b}{a},0\right)$;

b) $\cap oy\Rightarrow x=0\Rightarrow y=f(x)=b\Rightarrow B(0,b)$;

Graficul funcţiei de gradul I

- Este o **dreaptă.**
- Se construieşte astfel: se află intersecţia cu axele, se reprezintă în sistem ortogonal de axe xOy cele două puncte A şi B, apoi se unesc aceste puncte obţinându-se o dreaptă ce reprezintă graficul funcţiei.

Monotonia funcţiei de gradul I

- Dacă **a > 0** atunci f este ***crescătoare***
- Dacă **a < 0** atunci f este ***descrescătoare***
- Dacă **a = 0** atunci f este ***constantă*** $\left(f(x)=b\right)$

Semnul funcţiei de gradul I, $f:R\to R,\quad f(x)=ax+b,\quad a\neq 0$, se determină astfel:

- Se scrie şi se rezolvă ecuaţia ataşată: $ax+b=0\Rightarrow x=\frac{-b}{a}$;

- Se face tabelul:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
f(x)		semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Exemplu: Să se afle semnul funcţiei $f(x) = -3x + 18$, ataşăm ecuaţia -3x+18=0 şi găsim x=6.

x	$-\infty$			6			$+\infty$
$f(x)$	+	+	+	0	-	-	-

Dacă : $x \in (-\infty, 6)$: $f(x) > 0$

$x = 6$: $f(x) = 0$

$x \in (6, \infty)$: $f(x) < 0$

Exemplificăm aplicaţii la rezolvarea unor inecuaţii de forma $\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$; $\frac{ax+b}{cx+d} \geq c$

Să se rezolve inecuaţia $\frac{5x-10}{-x+6} < 0$

Rezolvăm numărătorul şi numitorul acestei fracţii, apoi studiem semnul în tabelul.

5x-10=0 x=2

–x+6=0 x=6

Soluţia: $x \in (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$

x	$-\infty$			2		6		$+\infty$
5x-10	-	-	-	0	+	+	+	

-x+6	+	+	+	+	+	0	-	-
$\frac{5x-10}{-x+6}$	-	-	-	0	+	‖	-	-

Rezolvarea sistemelor de tipul : $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}, m, n, p, c, a, b \in \Re$

Repetăm metoda reducerii şi metoda substituţiei din gimnaziu. Având în vedere că cele două ecuaţii sunt două drepte , ne interesează poziţia relativă a celor două drepte.

Pentru rezolvarea sistemelor de inecuaţii de gradul I vom rezolva fiecare inecuaţie apoi intersectăm soluţiile lor şi obţinem soluţia sistemului.

Exemplu:

a) $\begin{cases} x+1>3 \\ 2x+1\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ 2x\le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(2,\infty) \\ x\in\left(-\infty,\frac{9}{2}\right] \end{cases} \Rightarrow x\in(2,\infty)\cap\left(-\infty,\frac{9}{2}\right]=\left(2,\frac{9}{2}\right]$

Să se rezolve:

a) $\begin{cases} \frac{x-2}{3}+x\ge\frac{x}{2}-1 \\ -\frac{x}{3}+\frac{3x}{2}<\frac{x+1}{6} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3\le 0 \\ 3x-1>0 \\ 2x-1\ge 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3\ge 0 \\ \frac{x(x-1)}{x+1}<0 \end{cases}$

4. **Funcţia de gradul 2**

Funcţia $f:R\to R,\quad f(x)=ax^2+bx+c,\quad a\ne 0$ se numeţte funcţie de gradul 2.

Ecuaţia ataşată: $ax^2+bx+c=0;\quad \Delta=b^2-4ac$

- Dacă $\Delta>0\Rightarrow x_1\ne x_2;\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ - ecuaţia are 2 rădăcini reale **diferite**;

- Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ - ecuaţia are 2 răcini reale **egale**;
- Dacă $\Delta < 0$ - ecuaţia **nu are rădăcini reale**.

Intersecţia cu axele, vârf, grafic, monotonie

- Graficul este o parabolă cu vârful jos dacă a>0 şi cu vârful sus dacă a<0.
- Vârful are coordonatele $x_V = \frac{-b}{2a}$; $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$. Deci, $V\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.
- $\cap ox \Rightarrow y = f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

a) Dacă $\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2$; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ deci graficul intersectează axa OX în 2 puncte distincte.

b) Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ deci graficul intersectează axa OX într-un singur punct care va fi vârful parabolei.

c) Dacă $\Delta < 0$ graficul nu intersectează axa OX.

- $\cap oy \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(x) = c \Rightarrow A(0, c)$

Relaţiile lui Viete

$$x^2 - Sx + P = 0; \quad \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}; \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

Semnul funcţiei de gradul II – se studiază astfel: se scrie ecuaţia ataşată $ax^2 + bx + c = 0$;

- Dacă $\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2$; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, deci avem tabelul:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$

f(x)	semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a

- Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$, deci avem tabelul:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	semnul lui a	0	semnul lui a

- Dacă $\Delta < 0$ nu avem rădăcini reale, deci tabelul devine:

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	semnul lui a	

Să se determine funcţia

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad dacă \quad f(0) = 1, \quad f(-2) = 2 \quad şi \; f(1) = -1$

Condiţiile date conduc la sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-2) = 2 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 1 \\ a \cdot (-2)^2 + (-2) \cdot b + c = 2 \\ a \cdot 1^2 + 1 \cdot b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}; b = -\frac{3}{2}; c = 1 \Rightarrow f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 1$$

Forma canonică a funcţiei de gradul al doilea:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Exemplu:

Să se scrie funcţia de gradul doi sub forma canonică şi să se deducă valoarea extremă a funcţiei în cazurile:

$a)\ f(x)=3x^2-x;\ b)\ f(x)=x^2+x+2;\ c)\ f(x)=-4x^2+2x+3$

Rezolvare:

Pentru b) $f=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=1\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

$a=1$
$b=1 \quad \Delta=b^2-4ac=1-8=-7$
$c=2$

Daca a=1>0, f are un minim $V_{min}\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ $X_{min}=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}$;

$Y_{min}=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{7}{4}\Rightarrow f\min=\frac{7}{4}$;

La fel pentru a) şi c).

Să se traseze graficul următoarelor funcţii:

1) $f(x)=-x^2-2x+8$; 2) $f(x)=-x^2+4x-4$; 3) $f(x)=x^2+2x-3$; 4) $f(x)=-x^2-2x+3$

Aplicaţii: Rezolvare de inecuaţii:

a) $x^2-x\geq 0$; $b)\ 3x^2+6x<0$; $c)\ x^2-9<0$; $d)\ x^2+4x+9\geq 0$

Rezolvăm b) $3x^2+6x<0$; ataşăm ecuaţia $3x^2+6x=0$; o rezovăm

$x(3x+6)=0 \quad x_1=0;\ x_2=-2 \quad S: x\in(-2,0)$

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
$f(x)=3x^2+6x$	$-\infty$	0	-	0	+	

Rezolvarea sistemelor simetrice de forma $\begin{cases} x+y=S \\ x\cdot y=P \end{cases}$

Atunci ecuaţia în sumă şi produs este $Z^2 - SZ + P = 0$

Exemple:

$$\begin{cases} 2xy+5(x+y)=55 \\ 6xy+3(x+y)=81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P+5S=55 \\ 6P+3S=81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=7 \\ P=10 \end{cases}$$ atunci

$Z^2 - 7Z + 10 = 0 \Rightarrow Z_1 = 2 \text{ şi } Z_2 = 5$ care dau tocmai soluţia sistemului (2, 5) şi (5, 2)

Rezolvarea sistemelor formate dintr-o ecuaţie de gradul I şi o ecuaţie de gradul 2 sau intersecţia dintre o dreaptă şi o parabolă , de forma $\begin{cases} mx+n=y \\ ax^2+bx+c=y \end{cases}$ $a, b, c, m, n \in \Re$

Exemplu:

$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=x^2-3x+5 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-3x+5=x+1 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \quad x_1=x_2=2 \Rightarrow y_1=y_2=3$$

Să se rezolve sistemele: 1) $\begin{cases} y-x+1=0 \\ y=x^2-2x-1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-2x=0 \\ y=x^2+x+3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y+xy=29 \\ xy-2(x+y)=2 \end{cases}$

1.3 Algebră liniară

1.3.1 Matrice

Definiţia 1.3.1: *Se numeşte* ***matrice cu n linii şi m coloane de numere reale*** *orice aplicaţie*

$$A : \{1, 2, \ldots n\} \times \{1, 2, \ldots m\} \to \mathbf{R}, \ (i, j) \to a_{ij} \in \mathbf{R},$$

descrisă cu ajutorul tabloului

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Pentru elementul a_{ij}, indicele i arată linia pe care se află elementul, iar al doilea indice j indică pe ce coloană este situat.

Vom nota cu $M_{n \times m}(\mathbf{R})$ mulţimea tuturor matricelor cu n linii şi m coloane de numere reale.

Cazuri particulare

1) O matrice de tipul $1 \times m$ (deci cu o linie şi *n* coloane) se numeşte *matrice linie* şi are forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_m \end{pmatrix}.$$

2) O matrice de tipul $n \times 1$ (cu *n* linii şi o coloană) se numeşte *matrice coloană* şi are forma

$$B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}.$$

3) O matrice de tip $n \times m$ se numeşte *nulă (zero)* dacă toate elementele ei sunt zero. Se notează cu O

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Dacă numărul de linii este egal cu numărul de coloane, atunci matricea se numeşte *pătratică*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Printre aceste matrici una este foarte importantă aceasta fiind

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

şi se numeşte *matricea unitate* (pe diagonala principală are toate elementele egale cu 1, iar în rest sunt egale cu 0).

Sistemul de elemente $(a_{11}\ \ a_{22}\ \ \dots\ \ a_{nn})$ reprezintă *diagonala principală* a matricii *A*, iar suma acestor elemente $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ se numeşte *urma matricii A* notată $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}$. Sistemul de elemente $(a_{1n}\ \ a_{2\,n-1}\ \ \dots\ \ a_{n1})$ reprezintă *diagonala secundară* a matricii *A*.

Fie $A = (a_{i\,j}), B = (b_{i\,j}) \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$. Spunem că matricile *A*, *B* *sunt egale* şi scriem *A* = *B* dacă $a_{i\,j} = b_{i\,j},\ (\forall)\ i = \overline{1,n}, (\forall)\ j = \overline{1,m}$.

Definiţia 1.3.2 *Date fiind două matrice de n linii şi m coloane, A=* $(a_{ij})_{i,j}$ *şi B=* $(b_{ij})_{i,j}$*, definim* ***suma*** *acestora, A+B, ca fiind o matrice C =* $(c_{ij})_{i,j}$ *tot cu n linii şi m coloane, unde* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$*, pentru orice* $i = \overline{1,n}$ *şi orice* $j = \overline{1,m}$*, deci*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+\mathrm{b}_{21} & a_{22}+\mathrm{b}_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+\mathrm{b}_{n1} & a_{n2}+\mathrm{b}_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemplu: Să se calculeze *A* + *B* pentru:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix};$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Rezolvare: 1. Avem

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 5 & -3\\ 10 & 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & -1+5 & 2-3\\ 3+10 & 0+1 & 1+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 13 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

2. Avem

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.=\begin{pmatrix}1+0 & 1+1\\ -1+1 & 1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Proprietăţi ale adunării matricilor

$\mathbf{A_1}$ Adunarea matricilor este **asociativă**, adică:

$$(A+B)+C=A+(B+C),\ (\forall)A, B, C \in M_{n \times m}(\mathbf{R}).$$

$\mathbf{A_2}$ Adunarea matricilor este **comutativă**, adică:

$$A+B=B+A,\ (\forall)A, B \in M_{n \times m}(\mathbf{R}).$$

$\mathbf{A_3}$ Adunarea matricilor admite matricea nulă ca **element neutru**, adică $\exists\ O_{n,m} \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$ astfel încât $A + O_{n,m} = A,\ (\forall)A \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$.

$\mathbf{A_4}$ Orice matrice $A \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$ are un **opus**, notat $-A$, astfel încât

$$A+(-A)=O_{n,m}.$$

Definiţia 1.3.3 ***Produsul dintre o matrice A*** $\in$ ***M*** $_{n \times m}$***(R) şi un număr real λ*** *se defineşte ca fiind o matrice $C = (c_{ij})_{i,j}$ tot cu n linii şi m coloane, unde $c_{ij} = \lambda\, a_{ij}$, pentru orice $i = \overline{1,n}$ şi orice $j = \overline{1,m}$, deci*

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot a_{11} & \cdots & \lambda\cdot a_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda\cdot a_{n1} & \cdots & \lambda\cdot a_{nm}\end{pmatrix}$$

Exemplu Fie $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & 5 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $6A = \begin{pmatrix} 3 & -18 & 30 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Proprietăţi ale înmulţirii matricilor cu scalari

S$_1$ $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, $(\forall)\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}, (\forall)\ A \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$;

S$_2$ $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $(\forall)\ \lambda \in \mathbf{R}, (\forall)\ A, B \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$;

S$_3$ $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $(\forall)\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}, (\forall)\ A \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$;

S$_4$ $1 \cdot A = A, 1 \in \mathbf{R}, (\forall)\ A \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$;

Definiţie 1.3.4 Fie $A \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$, $B \in M_{m \times p}(\mathbf{R})$. **Produsul dintre matricile** *A* şi *B* (**în această ordine**), notat $A \cdot B$ este matricea $C = (c_{kj}) \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$ definită prin

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ki} b_{ij},\ (\forall)\ k = \overline{1,n}, (\forall)\ j = \overline{1,m}.$$

Observaţii

1) Produsul *AB* a două matrici nu se poate efectua întotdeauna decât dacă $A \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$ şi $B \in M_{m \times p}(\mathbf{R})$, adică **numărul de coloane ale lui** *A* **este egal cu numărul de linii ale lui** *B*, când se obţine o matrice $C = A \cdot B \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$.

2) Dacă matricile sunt pătratice $A, B \in \mathrm{M}_n(R)$ atunci are sens întotdeauna atât $A \cdot B$ cât şi $B \cdot A$, iar, în general, $A \cdot B \neq B \cdot A$ adică înmulţirea matricilor **nu este comutativă**.

Proprietăţi ale înmulţirii matricilor

I$_1$ Înmulţirea matricilor este **asociativă**, adică

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), (\forall) A \in \mathrm{M}_{m,n}(C), (\forall) B \in \mathrm{M}_{n,p}(C), (\forall) C \in \mathrm{M}_{p,s}(C).$$

I$_2$ Înmulţirea matricilor este **distributivă în raport cu adunarea matricilor**, adică

$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C,\ \ C\cdot(A+B) = C\cdot A + C\cdot B,\ \ (\forall)A,\ B,\ C$ matrici pentru care au sens operaţiile de adunare şi înmulţire.

$\mathbf{I_3}$ Dacă $I_n \in M_n(\mathbf{R})$ este matricea unitate, atunci

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A,\ (\forall)A \in M_n(\mathbf{R}) .$$

Se spune că I_n este **element neutru** în raport cu operaţia de înmulţire a matricilor.

Definiţia 1.3.5 *Fie* $A \in M_n(\boldsymbol{R})$ *. Atunci* $A^1 = A,\ A^2 = A\cdot A,\ A^3 = A^2\cdot A,\ \ldots,\ A^k = A^{k-1}\cdot A, (\forall)$ $k \in \boldsymbol{N}^*$. *(Convenim* $A^0 = I_n$*).*

1.3.2 Determinanţi

Definiţie 1.3.5 *Se numeşte* ***permutare*** *de ordinal n orice funcţie bijectivă*

$$\sigma: \{1, 2,\ldots,n\} \rightarrow \{1, 2,\ldots,n\}$$

Pentru a nota o permutare se foloseşte următorul tablou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Mulţimea tuturor prmutărilor de ordin n se notează S_n.

Definiţie 1.3.6 *Perechea (i, j) se numeşte* ***inversiune*** *pentru permutarea σ dacă*

$$i < j \text{ şi } \sigma(i) > \sigma(j).$$

Numărul inversiunilor unei permutări se notează cu m(σ), iar numărul $(-1)^{m(\sigma)}$ *se notează cu ε(σ) şi se numeşte signatura permutarii* σ.

Permutarea σ se numeşte pară dacă ε(σ) =1 şi impară dacă ε(σ) = -1.

Fie $A=(a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ o matrice pătratică. Vom asocia acestei matrici un număr notat det(A) numit **determinantul matricii** A, definit prin

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{1\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

Observaţii:

1. Dacă A=$\left(a_{11}\right)$ este o matrice pătratică de ordinul întâi, atunci

$$\det(\mathrm{A}) = a_{11}.$$

2. Determinantul matricii $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ este numărul

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

Deoarece există două inversiuni de ordinal doi:

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ cu ε(σ_1) =1 şi $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ cu ε(σ_2) = -11

3. Determinantul matricii

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{este numărul}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Deoarece există şase inversiuni de ordinal trei:

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,
$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ şi ε(σ_1) = ε(σ_2) = ε(σ_3) =1, ε(σ_4) = ε(σ_5) = ε(σ_6) = -1

Pentru calculul determinantului de ordin trei se utilizează două tehnici simple:

Regula lui Sarrus

Fie determinantul de ordin 3, $d = \left|a_{i\,j}\right|_{i,\,j=\overline{1,3}}$. Pentru a calcula un astfel de determinant se utilizează tabelul de mai jos.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

(am scris sub determinant primele două linii)

Se face produsul elementelor de pe diagonale. Produsul elementelor de pe o diagonală descendentă este cu semnul plus. Avem trei astfel de produse: $a_{11}a_{22}a_{33}, a_{13}a_{21}a_{32}, a_{12}a_{23}a_{31}$.

Produsul elementelor de pe o diagonală ascendentă este cu semnul minus. Avem trei astfel de produse: $-a_{13}a_{22}a_{31}, -a_{12}a_{21}a_{33}, -a_{11}a_{23}a_{32}$.

Suma celor şase produse dă valoarea determinantului *d* de ordin 3. Acest procedeu de calcul se numeşte „regula lui Sarrus”.

Regula triunghiului

Am văzut că determinantul de ordin trei are în dezvoltarea sa şase termeni, trei cu semnul plus şi alţi trei cu semnul minus.

Primul termen cu plus se găseşte înmulţind elementele de pe diagonala principală, iar ceilalţi doi, înmulţind elementele situate în vârfurile celor două triunghiuri care au o latură paralelă cu cu diagonala principală. După aceeaşi regulă, referitoare la diagonala secundară, se obţin termenii cu minus.

Observaţie: Atât „regula lui Sarrus” cât şi „regula triunghiului” se aplică **numai determinanţilor de ordin 3**.

Exemplu: Să se calculeze prin cele două metode de mai sus determinantul

$$d = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Regula lui Sarrus

$$d=-3\cdot 2\cdot 0+0\cdot 1\cdot 1+3\cdot 0\cdot (-1)-[3\cdot 2\cdot 1+(-3)\cdot 1\cdot (-1)+0\cdot 0\cdot 0]=0+0+0-(6+3+0)=-9$$

Regula triunghiului

$$d=-3\cdot 2\cdot 0+0\cdot (-1)\cdot 3+0\cdot 1\cdot 1-[3\cdot 2\cdot 1+(-3)\cdot 1\cdot (-1)+0\cdot 0\cdot 0]=0+0+0-(6+3+0)=-9$$

Definiţie 1.3.7 *Se numeşte* ***minor*** *asociat elementului* $a_{i\,j}$ *determinantul matricii pătratice de ordin n – 1 obţinut prin suprimarea liniei i şi coloanei j din matricea A. Se notează acest minor prin* $D_{i\,j}$.

Definiţie 1.3.8 *Se numeşte* ***complement algebric*** *al elementului* $a_{i\,j}$ *numărul* $(-1)^{i+j}\cdot D_{ij}$ *şi se notează* A_{ij}.

Proprietate (dezvoltarea determinantului după linia i) Determinantul matricii *A* de ordin *n* este suma produselor elementelor din o linie cu complemenţii lor algebrici adică

$$\det(A)=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+\ldots+a_{in}A_{in}.$$

Deci, calculul unui determinant de ordinul n se poate reduce la calculul a n determinanţi de ordinul n-1.

Exemplu Să se calculeze determinantul de ordin 4:

$$d=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

Rezolvare: Aplicăm proprietatea dată mai sus pentru *n* = 4 şi dezvoltăm determinantul după elementele liniei întâi. Avem:

$$d = 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 0 - 1 + 2 = 1,$$

unde determinanţii de ordin 3 i-am calculat prin una din metodele prezentate la determinanţii de ordin 3.

Proprietăţile determinanţilor

$\mathbf{P_1}$. Determinantul unei matrici coincide cu determinantul matricii transpuse, adică $\det(A) = \det({}^tA)$.

$\mathbf{P_2}$. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricii este nul.

$\mathbf{P_3}$. Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau două coloane) între ele obţinem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricii iniţiale.

$\mathbf{P_4}$. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice, atunci determinantul său este nul.

$\mathbf{P_5}$. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrici sunt înmulţite cu un număr α, obţinem o matrice al cărei determinant este egal cu α înmulţit cu determinantul matricii iniţiale.

$\mathbf{P_6}$. Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrici sunt proporţionale, atunci determinantul este nul.

$\mathbf{P_7}$. Dacă linia *i* a unei matrici *A* este suma a doi vectori, atunci determinantul ei este egal cu suma a doi determinanţi corespunzători matricelor care au aceleaşi linii ca *A*, cu excepţia liniei *i* unde au câte unul din cei doi vectori.

$\mathbf{P_8}$. Dacă o linie (o coloană) a unei matrici pătratice este o combinaţie liniară de celelalte linii (coloane), atunci determinantul matricii este zero.

$\mathbf{P_9}$. Dacă la o linie (o coloană) a matricii A adunăm elementele altei linii (coloane) înmulţite cu acelaşi număr, atunci această matrice are acelaşi determinant ca şi matricea A.

$\mathbf{P_{10}}$. $\det(I_n)=1$

$\mathbf{P_{11}}$. $\det(\lambda A)=\lambda^n \det(A)$, $A\in M_n(\mathbf{R})$.

$\mathbf{P_{12}}$. Dacă $A=(a_{ij})$ este o matrice triunghiulară (sau diagonală), atunci $\det(A)=a_{11}a_{22}...a_{nn}$. (Valoarea determinantului este egală cu produsul elementelor de pe diagonala principală).

$\mathbf{P_{13}}$. Dacă A, $B\in M_n(\mathbf{R})$, atunci $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$ (Determinantul produsului a două matrici pătratice este egal cu produsul determinanţilor acelor matrici).

În particular $\det(A^n)=(\det(A))^n$, $n\in N^*$.

1.3.3 Transformări elementare asupra matricelor

Definiţie 1.3.9 *Fie T o matrice pătratică de ordinal n. Se numeşte* ***transformare matriceală*** *o aplicaţie* $T : M_{n,m} \to M_{n,m}$ *care asociază fiecărei matrice* $A\in M_{n,m}$ *matricea produs* $T\cdot A \in M_{n,m}$, *numită transformarea matricei A prin matricea T.*

Transformări elementare:

1. Înmulţirea unei linii cu un număr nenul λ

   Dacă $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, adică se obţine din matricea unitate prin înmulţirea liniei i cu λ, atunci $T_1\cdot A$ va fi o matrice egală cu A cu excepţia liniei i care va avea elementele inmulţite cu λ;
2. Adunarea la o linie a unei alte linii înmulţită cu un număr λ se obţine cu transformarea:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & & 0 \ldots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \ldots & \lambda & & 1 \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & & 0 \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

3. Schimbarea locului a două linii se obţine cu transformarea

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & & 1 \ldots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \ldots & 1 & & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & & 0 \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Astfel, o **transformare elementară a unei matrice** constă în:

1. Înmulţirea unei linii(coloane) cu un număr nenul
2. Adunarea la o linie (coloană) a altei linii (coloane) înmulţită cu un număr nenul
3. Schimbarea între ele a două linii (coloane)

Definiţie 1.3.10 *Două matrice A şi B care se obţin una din cealaltă printr-o transformare elementară se numesc* ***echivalente****.*

Aplicaţii ale transformărilor elementare:

I. Metoda eliminării totale (Gauss-Jordan) sau metoda pivotării

Constă în aducerea unei matrici la o formă cât mai simplă, numită formă redusă). Se procedează astfel:

- Se alege în matricea A un element nenul a_{ij} care se va numi pivot;
- Linia i, notată L_i (care se va numi linie pivot) se împarte la pivot şi se înlocuieşte cu linia $L_i' = \frac{1}{a_{ij}} \cdot L_i$, iar astfel locul pivotului va fi luat de numărul 1;
- Pentru fiecare k≠i se scade din linia L_k produsul $a_{kj} \cdot L_i'$ şi se obţine o nouă linie $L_k' = L_k - a_{kj} \cdot L_i' = L_k - a_{kj} \cdot \frac{1}{a_{ij}} \cdot L_i$

Astfel, elementele a_{kl} ale matricei, care nu se află pe linia pivotului vor fi înlocuite cu a_{kl}' obţinute după regula dreptunghiului:

Din dreptunghiul

$$\begin{matrix} [a_{ij}] & a_{il} \\ a_{kj} & a_{kl} \end{matrix}$$

ce calculează a_{kl}' ca fiind diferenţa dintre produsul elementelor de pe diagonala ce conţine pivotal şi produsul elementelor de pe cealaltă diagonal, iar rezultatul se împarte la pivot, adică $a_{kl}' = \frac{a_{ij} \cdot a_{kl} - a_{il} \cdot a_{kj}}{a_{ij}}$. În acest fel toate elementele de pe coloana pivotului devin 0. Se va obţine deci o nouă coloană C_j cu toate elementele 0 cu excepţia celui de pe poziţia (i,j) care va fi 1. Noua linie i se va numi ***linie pivot cu coloană redusă***.

- Procedeul continuă alegând alt pivot de pe o linie neconsiderată până în acel moment.
- Algoritmul se încheie când nu mai există linii cu elemente nenule sau nu mai există linii neconsiderate.

Definiţie 1.3.11 *O matrice $A \in M_{n,m}$, se numeşte* ***matrice redusă*** *dacă fiecare linie ce conţine elemente nenule este linie pivot cu coloană redusă.*

Exemplu: Să se aducă la forma redusă matricea:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 9 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Considerăm linia întâi ca linie pivot şi ca pivot a_{11}:

$$A \sim \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 9 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & \mathbf{-2} & 3 \\ 0 & -4 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II. Metoda eliminării parţiale

Aceasta este o formă simplificată a metodei eliminării totale, ea constând tot în pivotări successive, însă se lucrează numai sub diagonal principal, iar elementele noii matrice se calculează tot după regula dreptunghiului, fără să mai împărţim la a_{ii}.

Această metodă se poate folosi, spre exemplu pentru a calcula rangul unei matrice:

Definiţie 1.3.12 *Se numeşte* ***rangul*** *matricei A acel număr r cu proprietatea că există un minor de ordin r, nenul şi toţi minorii de ordin r + 1 sunt nuli.*

Pentru a calcula rangul unei matrice se foloseşte metoda eliminării parţiale pentru a adduce matricea la o matrice superior triunghiulară.

Exemplu: Să se afle rangul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & \mathbf{-2} & 6 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Deci rangA = 3

1.3.4 Inversa unei matrice

Definiţie 1.3.9 *Spunem că o matrice A pătratică de ordinul n este* ***inversabilă*** *dacă există o matrice pătratică de ordin n,* A^{-1} *astfel incât* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Proprietăţi:

P1. $(A^{-1})^{-1} = A$

P2. Dacă A şi B sunt inversabile, atunci A+B este inversabilă şi $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

P3. Dacă A şi B sunt inversabile, atunci A·B este inversabilă şi $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Aflarea inverse unei matrice A se poate afla prin mai multe metode. Prezentăm aici două:

Metoda1. Se urmează algoritmul:

- Se calculează determinantul matricei A;

- Se face transpusa matrice A, A^t;
- Se află adjunct matricei A, $A^* = (A_{ij})_{i,j}$ unde A_{ij} sunt complemenţii algebrici ai transpusei;
- $A^{-1} = \frac{1}{detA}A^*$.

Metoda 2. Se aplică metoda eliminării totale matricei de n linii şi 2n coloane obţinută prin alăturarea matricei unitate la dreapta matricei A. După n pivotări în stânga tabloului se va obţine matricea unitate, iar în dreapta chiar inversa căutată.

Exemplu: *Să se afle inversa matricei*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Metoda1:

- Se calculează determinantul matricei A: detA = -1 + 9 – 8 – 6 + 6 + 2 = 2
- Se face transpusa matrice A:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Se află adjuncta matricei A,

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & -11 & 7 \\ -3 & 7 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $A^{-1} = \frac{1}{detA}A^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -11 & 7 \\ -3 & 7 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Metoda 2:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -11/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 7/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Deci, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -11 & 7 \\ -3 & 7 & -5 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -11 & 7 \\ -3 & 7 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1.3.5 Sisteme de ecuaţii liniare

Forma generală a unui sistem de ecuaţii liniare cu m ecuaţii şi n necunoscute este următoarea:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$ (1.3.5.1), unde

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ formează matricea sistemului

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ formează coloana termenilor liberi

Forma matriceală a sistemului dat este A·X = B (1.3.5.2), unde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Definiţie 1.3.10 *Sistemul (1.3.5.1) se numeşte* ***compatibil*** *dacă există vectorul coloană X pentru care A·X = B, caz în care X se numeşte soluţia sistemului.*

Sistemul (1.3.5.1) se numeşte ***compatibil determinat*** *dacă soluţia este unică. În caz contrar se numeşte* ***compatibil nedeterminat.***

Definiţie 1.3.11 *Sistemul (1.3.5.1) se numeşte* ***liniar omogen*** *dacă vectorul coloană al termenilor liberi este nul.*

Observaţie: orice sistem liniar omogen este compatibil, acesta admiţând soluţia nulă.

Metode de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare

1. **Metoda matriceală:**

Se aplică în cazul în care matricea sistemului este pătratică.

Considerăm forma matriceală a sistemului:

$A \cdot X = B$

Dacă $\det A \neq 0$, atunci A este inversabilă, atunci există inversa A^{-1} şi putem înmulţi la stânga cu A^{-1}, deci vom obţine $X = A^{-1} \cdot B$

Exemplu: *Rezolvaţi sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

Rezolvare: Scriem forma matriceală a sistemului $A \cdot X = B$, unde:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Acum calculăm inversa matricei A:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Deci, $X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. **Metoda lui Cramer:**

Se aplică tot pentru matricele pătratice, deci pentru sisteme de *n* ecuaţii cu *n* necunoscute.

Dacă $d = \det A$ este nenul, atunci soluţiile sistemului vor fi:

$$x_i = \frac{d_i}{d}$$

Unde d_i este determinantul obţinut din d prin înlocuirea coloanei i cu coloana termenilor liberi.

Exemplu: *Rezolvaţi sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 9x_3 = -1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Rezolvare:

Matricea sistemului este A $= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 9 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, iar detA = 12 - 12 – 54 +54 + 18 - 8 = 10

$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -6 & 9 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ = -12 + 6 + 36 – 36 – 18 + 4 = - 20

$d_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 9 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ = 2 – 12 – 27 + 9 + 18 – 4 = -14

$d_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ = 12 + 4 + 6 – 18 – 2 – 8= - 6

Deci,

$x_1 = -\frac{20}{10} = -2$, $x_2 = \frac{-14}{10} = \frac{-7}{5}$, $x_3 = \frac{-3}{5}$.

3. Metoda lui Gauss (metoda eliminării succesive)

Constă în aducerea la o formă redusă a matricei extinse a sistemului (matricea format prin alăturarea coloanei termenilor liberi la matricea sistemului şi pe care o vom nota $\underline{A}$). Dacă rangA= rang$\underline{A}$, atunci sistemul va fi compatibil, în caz contrar sistemul este incompatibil.

Ca exemplu să rezolvăm sistemul anterior cu ajutorul acestei metode:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 9x_3 = -1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Matricea extinsă:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 9 & -1 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & \mathbf{-2} & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 11 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -7/5\\ 0 & 0 & 1 & -3/5\end{pmatrix}$$

Se observă că rangA= rang$\underline{A}$=3, deci sistemul va fi compatibil determinat, iar soluţia se citeşte din forma finală a matricii reduse: $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{-7}{5}$, $x_3 = \frac{-3}{5}$.

Capitolul 2: Elemente de algebră liniară

2.1 Spaţii vectoriale. Dependenţă şi independenţă liniară

Definiţia 2.1.1 *Se numeşte **spaţiu vectorial real** orice mulţime V pe care s-au definit două legi, una internă, notată "+" (numită adunare) şi alta externă, notată "·" (înmulţire), unde:*

*+ : VxV → V, iar · : **R**xV → V*

îndeplinesc următoarele axiome:

V1) pentru orice x, y, z din V (x + y) + z = x + (y + z) (asociativitatea)

V2) pentru orice x, y din V x + y = y + x (comutativitatea)

V3) există un element în V, notat 0, astfel încât x + 0 = x, pentru orice x ∈ V (0 se numeşte element nul)

V4) pentru orice x din V există un element în V notat – x, astfel ca x + (- x) = 0

*V5) pentru orice x, y din V şi orice α∈ **R**, α · (x + y) = α · x + α · y*

*V6) pentru orice x din V şi orice α, β ∈ **R**, (α + β) · x = α · x + β · x*

*V7) pentru orice x din V şi orice α, β ∈ **R**, (α · β) · x = α · (β · x)*

V8) pentru orice x din V 1· x = x

Elementele unui spaţiu vectorial se vor numi ***vectori***.

Exemple:

1) $\mathbf{R}^n$ se poate organiza ca un spaţiu vectorial considerând adunarea definită astfel:
   Pentru orice x, y ∈ $\mathbf{R}^n$ şi orice $\alpha \in \boldsymbol{R}$:
   $x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
   $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$
   unde $x = (x_1,\ x_2, \dots, x_n)$ şi $y = (y_1,\ y_2, \dots, y_n)$
2) Mulţimea $M_{n,m}(\mathbf{R})$ a matricelor de n linii şi m coloane formează spaţiu vectorial împreună cu adunarea matricelor şi înmulţirea cu scalari a acestora.

Definiţia 2.1.2 *Se numeşte **subspaţiu vectorial** al spaţiului V orice submulţime W ⊆V care verifică:*

SV1) pentru orice x, y din W rezultă x + y ϵ W

SV2) *pentru orice x din W şi orice α ∈ **R** rezultă α · x ϵ W*

Observaţie: Condiţiile *SV1)* şi *SV2)* pot fi înlocuite cu:

*SV3) pentru orice x, y din W şi orice α, β ∈ **R**, rezultă α · x + β · y ϵ W*

Exemple:

1) Mulţimea M = { (x, 0) / x ∈ ***R***} formează un subspaţiu pentru $\mathbf{R}^n$.
2) Mulţimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ cu a, b ∈ ***R*** formeaza subspaţiu pentru spaţiul vectorial al matricelor pătratice de ordinul 2.

Fie S ={v_1, v_2,…,v_n} o submulţime a spaţiului vectorial V, pe care o vom mai numi şi sistem de vectori.

Definiţia 2.1.3 *Se numeşte **combinaţie liniară** a vectorilor din S orice vector v de forma:*

$$v = \alpha_1\ v_1 + \alpha_2\, v_2 + \cdots \alpha_n\ v_n$$

unde α_1 , α_2 , ... α_n ∈ ***R.***

α_1 , α_2 , ... α_n se vor numi ***coeficienţii combinaţiei*** liniare.

Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare a vectorilor din S se va nota cu Sp(S).

Definiţia 2.1.4 *Sistemul de vectori S ={v_1, v_2,...,v_n} se numeşte **liniar independent** dacă din orice combinaţie liniară nulă a acestora rezultă că toţi coeficienţii sunt nuli.*

*În caz contrar (adică dacă există o combinaţie liniară nulă în care măcar un coeficient este nenul), sistemul se numeşte **liniar dependent**.*

Exemple:

1) Vectorii e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1) sunt liniar independenţi deoarece dacă am considera o combinaţie liniară nulă a acestora $\alpha_1\ e_1 + \alpha_2\ e_2 + \alpha_3\ e_3$ = (0,0,0), ar rezulta (α_1 , α_2 , α_3)= (0,0,0), deci rezultă că toţi coeficienţii sunt nuli.
2) Vectorii v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (1, 2) sunt liniar dependenţi deoarece dacă am considera o combinaţie liniară nulă a acestora $\alpha_1\ v_1 + \alpha_2\ v_2 + \alpha_3\ v_3$ = (0,0,0), ar rezulta ($\alpha_1 + \alpha_3$, $\alpha_2 + 2\alpha_3$)= (0,0), ceea ce este posibil pentru (α_1 , α_2 , α_3)= (-1,-2,1).

Se poate observa imediat că dacă un sistem este liniar dependent, atunci unul dintre ei va fi o combinaţie liniară a celorlalţi vectori.

2.2 Baze. Dimensiune

Definiţia 2.2.1 *Un sistem de vectori S se numeşte* ***sistem de generatori*** *dacă Sp(S) = V.*

Fie B ={v_1, v_2,…,v_n} un sistem de vectori în spaţiul vectorial V.

Definiţia 2.2.2 *Sistemul de vectori B se numeşte* ***bază*** *în V dacă sunt îndeplinite:*

B1) B este sistem de vectori liniar independenţi;

B2) B este sistem de generatori.

Observaţie: Dacă *B* este bază, atunci orice vector *v* din V se va scrie ca o combinaţie liniară a vectorilor din *B*, adică $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n$, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ se vor numi **coordonatele** vectorului *v* în baza *B*.

Exemple:

1) Sistemul format din vectorii e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1) formează o bază în $\mathbf{R}^3$, numită **baza canonică**.
2) Generalizând, vectorii e_1 = (1, 0,…, 0), e_2 = (0, 1,…, 0), …e_n = (0, 0,… 1) formează o bază în $\mathbf{R}^n$, numită **baza canonică în** $\mathbf{R}^n$.
3) Vectorii v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 1) formează bază în $\mathbf{R}^n$.

Observaţie: Dacă există o bază formată cu n vectori, atunci orice bază va avea tot n vectori, iar numărul n se va numi ***dimensiunea*** spaţiului vectorial V şi se va nota dimV= n.

Dacă B ={e_1, e_2,…,e_n} este o bază în V, iar S ={v_1, v_2,…,v_m} este un sistem de vectori, vom scrie vectorii din S in baza dată astfel:

$v_1 = a_{11}\ e_1 + a_{21}\ e_2 + \cdots a_{n1}\ e_n$

$v_2 = a_{12}\ e_1 + a_{22}\ e_2 + \cdots a_{n2}\ e_n$

…………………………………………..

$v_m = a_{1m}\ e_1 + a_{2m}\ e_2 + \cdots a_{nm}\ e_n$

Astfel, sistemului de vectori i se va asocia o matrice cu n linii şi m coloane, format din coordonatele fiecărui vector, aşezate ca şi coloană:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

2.3 Aplicaţii liniare

Definiţia 2.3.1 *Fie U şi V două spaţii vectoriale reale. Aplicaţia* $A: U \to V$ *se numeşte* ***aplicaţie liniară*** *dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

L1) $A(x+y) = A(x) + A(y)$, *pentru orice* $x, y \in U$ *(vom spune că A este aditivă)*

L2) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$ *pentru orice* $x \in U$ *şi pentru orice* $\alpha \in \mathbf{R}$ *(A este omogenă).*

Cele două proprietăţi ale aplicaţiei liniare pot fi formulate într-una singură:

L3) $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$, *pentru orice* $x, y \in U$ *şi pentru orice* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Exemple:

1) $A : V \to V$, $A(x) = x$ (aplicaţia identică)
2) $A : M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $A(A) = tr(A)$, pentru orice matrice A pătratică de ordin n

Vom nota cu $\mathcal{L}(U, V)$ mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare definite pe U cu valori în V.

Definiţia 2.3.2 *Pentru orice aplicaţie liniară* $A \in \mathcal{L}(U, V)$ *definim* ***nucleul*** *lui A ca fiind mulţimea notată Ker(A), unde*

$$Ker(A) = \{x \in U \,/\, A(x) = 0\}$$

iar ***imaginea*** *lui A, notată Im(A) ca fiind mulţimea:*

$$Im(A) = \{y \in V \,/\, \exists x \in U \text{ cu } A(x) = y\}$$

Definiţia 2.3.3 *O aplicaţie liniară* $A \in \mathcal{L}(U, V)$ *se numeşte:*

1. ***injectivă*** *dacă:*

$\forall x_1, x_2 \in U, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ *(sau, echivalent* $\forall x_1, x_2 \in U, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$*), ceea ce este echivalent cu Ker(A)={0};*

2. ***surjectivă*** *dacă* $\forall y \in V, \exists x \in U$*, aşa încât A(x) = y, ceea ce este echivalent cu Im(A)=V;*

Dacă dimU = n şi dimV = m, iar $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ este o bază în U, iar $B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ este o bază în V, atunci vectorii $A(u_1), \ldots A(u_n)$ se vor putea scrie în baza B_2 astfel:

$A(u_1) = a_{11}\ v_1 + a_{21}\ v_2 + \cdots a_{m1}\ v_m$

$A(u_2) = a_{12}\ v_1 + a_{22}\ v_2 + \cdots a_{m2}\ v_m$

……………………………………………….

$A(u_n) = a_{1n}\ v_1 + a_{2n}\ v_2 + \cdots a_{mn}\ v_m$

Matricea

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

având pe coloane coordonatele vectorilor $A(u_1), \ldots A(u_n)$ în baza B_2, se va numi ***matricea asociată aplicaţiei liniare A în raport cu bazele B₁ şi B₂*** şi o vom nota cu $T_{B_1 B_2}$.

Observăm, pe baza proprietăţilor aplicaţiilor liniare, că pentru orice $x \epsilon U$ avem scrierea

$$A(\mathbf{x})_{B_2} = T^t{}_{B_1 B_2} \cdot \boldsymbol{x_{B_1}}$$

unde y_B reprezintă vectorul coloană din $\mathbf{R}^n$ care are ca şi componente coordonatele vectorului y în baza B, iar $T^t{}_{B_1 B_2}$ reprezintă transpusa matricei de trecere $T_{B_1 B_2}$.

Exemplu:

1. *Fie A:* $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$*, prin* $A(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$*, unde* $x = (x_1, x_2, x_3)$
   a. *Să se arate că aplicaţia A este liniară*
   b. *Să se scrie matricea asociată aplicaţiei A în raport cu bazele canonice din* $\mathbf{R}^3$ *şi* $\mathbf{R}^2$.

Rezolvare:

a. Vom arăta că $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$, *pentru orice* $x, y \in \mathbf{R}3$ *şi pentru orice* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Fie $x = (x_1, x_2, x_3)$ şi $y = (y_1, y_2, y_3)$.

$A(\alpha x + \beta y) = A((\alpha x_1 + \beta y_1,\ \alpha x_2 + \beta y_2,\ \alpha x_3 + \beta y_3)) = (\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3) =$

$= (\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2), \alpha(x_2 + x_3) + \beta(y_2 + y_3)) = \alpha(x_1 + x_2, x_2 + x_3) + \beta(y_1 + y_2, y_2 + y_3) =$

$= \alpha A(x) + \beta A(y)$

Deci, aplicaţia A este liniară.

b. Pentru a scrie matricea asociată vom exprima vectorii $A(e_1)$, $A(e_2)$, $A(e_3)$ în baza canonică din $\mathbf{R}^2$, ai cărei vectori vor fi $f_1 = (1, 0)$ *şi* $f_2 = (0,1)$.
$A(e_1) = A(1, 0, 0) = (1, 0)$
$A(e_2) = A(0, 1, 0) = (1, 1)$
$A(e_3) = A(0, 0, 1) = (0, 1)$
Deci,

$$T_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vom vedea acum cum se modifică matricea de trecere atunci când se trece la două noi baze.

Fie $B'_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ este o altă bază în U, iar $B'_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ este o nouă bază în V şi fie C şi D matricele de trecere de la B_1 la B'_1, respectiv de la B_2 la B'_2.

Deci

$$A(\mathbf{x})_{B_2} = T^t{}_{B_1B_2} \cdot \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B_1}}$$

Şi

$$A(\mathbf{x})_{B'_2} = T^t{}_{B'_1B'_2} \cdot \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B'_1}}$$

Ştim că

$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B_1}} = C \cdot \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B'_1}}$ şi $A(\mathbf{x})_{B_2} = D \cdot A(\mathbf{x})_{B'_2}$

Prin urmare,

$D \cdot A(\mathbf{x})_{B'_2} = T^t{}_{B_1B_2} \cdot C \cdot \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B'_1}}$

Dacă înmulţim la stânga cu inversa lui D, obţinem:

$A(\mathbf{x})_{B'_2} = D^{-1} \cdot T^t{}_{B_1B_2} \cdot C \cdot \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B'_1}}$

Pe de altă parte, $A(\mathbf{x})_{B'_2} = T^t{}_{B'_1B'_2} \cdot \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B'_1}}$, deci

$$T^t{}_{B'_1B'_2} = D^{-1} \cdot T^t{}_{B_1B_2} \cdot C$$

De unde $T_{B'_1B'_2} = (D^{-1} \cdot T^t{}_{B_1B_2} \cdot C)^t$,

Ţinând cont de proprietăţile transpusei, rezultă că

$$T_{B'_1B'_2} = C^t \cdot T^t{}_{B_1B_2} \cdot (D^{-1})^t$$

Formula anterioară constituie formula de schimbare a matricei asociată unei aplicaţii liniare când se schimbă bazele în cele două spaţii vectoriale U şi V.

2.3 Forme biliniare

Fie U şi V două spaţii vectoriale reale.

Definiţia 2.3.1 *Se numeşte **formă biliniară** o aplicaţie A: U*x*V →R, care îndeplineşte condiţiile:*

B1) $A(x + y, z) = A(x, z) + A(y, z)$, pentru orice $x, y \in U$ şi $z \in V$

B2) $A(\alpha x , z) = \alpha A(x, z)$, pentru orice $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $x \in U$ şi $z \in V$

B3) $A(x, y + z) = A(x, y) + A(x, z)$, pentru orice $x \in U$ şi $y, z \in V$

B4) $A(x , \alpha z) = \alpha A(x, z)$, pentru orice $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $x \in U$ şi $z \in V$

Observaţie: Condiţiile de mai sus pot fi înlocuite cu:

B5) $A(\alpha x +\beta y, z) = \alpha A(x, z) + \beta A(y, z)$, pentru orice $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, $x,y \in U$ şi $z \in V$

B6) $A(x, \alpha y +\beta z) = \alpha A(x, y) + \beta A(x, z)$, pentru orice $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, $x \in U$ şi $y, z \in V$

Dacă $B_1 =\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ este o bază în U, iar $B_2 =\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ este o bază în V, iar $x \in U$ şi $y \in V$ admit scrierea $x = x_1\, u_1 + x_2\, u_2 + \cdots x_n\, u_n$ şi $y = y_1\, v_1 + y_2\, v_2 + \cdots y_m\, v_m$, atunci

$A(x, y) = A(x_1\, u_1 + x_2\, u_2 + \cdots x_n\, u_n, y_1\, v_1 + y_2\, v_2 + \cdots y_m\, v_m)$

Deci

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j A(u_i, v_j)$$

Notând $a_{ij} = A(u_i, v_j)$, rezultă

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j$$

Matricea $(a_{ij})_{i,j}$ care s-a evidenţiat astfel se numeşte matricea formei biliniare A în raport cu bazele B_1 şi B_2, iar elementele a_{ij} se numesc coeficienţii formei biliniare în raport cu cele două baze.

Dacă $\mathbf{x} = (x_1 , x_2 , ... x_n)$, iar $\mathbf{y} = (y_1 , y_2 , ... y_n)^t$, atunci

$A(x, y) = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{y}$, unde **A** este matricea cu n linii şi m coloane, de elemente $(a_{ij})_{i,j}$.

Definiţia 2.3.2 *O formă biliniară A se numeşte **simetrică** dacă U = V şi $A(x, y) = A(y, x)$ pentru orice $x, y \in U$.*

Probleme de algebra

Probleme rezolvate

1. *Fie A şi B două mulţimi. Definim suma acestor mulţimi prin:*

$$A + B = \{a + b \,/\, a \in A ,\, b \in B\}$$

Arătaţi că dacă A şi B sunt mărginite, atunci A + B este mărginită şi:

sup(A + B) = supA + supB şi inf(A + B) = infA + infB

Rezolvare:

Fie α = supA şi β = supB, rezultă că

a ≤ α pentru orice a ∈A şi b ≤ β pentru orice b ∈ B, de unde:

a + b ≤ α + β, pentru orice a ∈A şi orice b ∈ B. În concluzie, α + β este majorant pentrumulţimea A +B.

Fie ε > 0; deoarece α = supA, rezultă că α este cel mai mic majorant, deci există $a_\varepsilon \in$ A, astfel ca $a_\varepsilon > \alpha - \varepsilon/2$.

Analog, din β = supB, rezultă că există $b_\varepsilon \in$ B, astfel ca $b_\varepsilon > \beta - \varepsilon/2$.

Prin urmare, $a_\varepsilon + b_\varepsilon > \alpha + \beta - \varepsilon$ şi $a_\varepsilon \in A$, $b_\varepsilon \in B$, deci α + β este cel mai mic majorant pentru A + B, adică α + β = sup(A + B).

Analog se demonstrează pentru infimum.

2. *Fie A o mulţime de numere reale si x un număr pozitiv. Definim produsul dintre numărul x şi mulţimea A prin:*

$$x\cdot A = \{x \cdot a \,/\, a \in A\}$$

Arătaţi că dacă A este mărginită, atunci x·A este mărginită şi sup(x·A) = x· supA şi inf(x·A) = x· infA.

Rezolvare: Fie α = supA, rezultă că a ≤ α pentru orice a ∈A şi deci x ·a ≤ x ·α pentru orice a ∈A. Aşadar, x ·α este majorant pentru mulţimea x·A.

Fie $\varepsilon > 0$; deoarece $\alpha = \sup A$, rezultă că α este cel mai mic majorant, deci există $a_\varepsilon \in A$, astfel ca $a_\varepsilon > \alpha - \varepsilon/x$. Prin înmulţire cu x (care este pozitiv), rezultă că

$x \cdot a_\varepsilon > x \cdot \alpha - \varepsilon$, ceea ce arată că $x \cdot \alpha$ este cel mai mic majorant pentru mulţimea $x \cdot A$.

Deci, $x \cdot \alpha = \sup(x \cdot A)$

Analog se demonstrează pentru infimum.

3. *Fie A şi B două mulţimi astfel ca $B \subset A$. Atunci:*

$$\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$$

Rezolvare: Fie $b \in B$, rezultă că $b \in A$, deci $b \leq \sup A$, cu alte cuvinte supA este majorant pentru mulţimea B, cum supB este cel mai mic majorant pentru mulşimea B, rezultă că $\sup B \leq \sup A$. Analog pentru infimum.

4. *Fie A şi B două mulţimi de numere reale positive. Definim produsul acestor mulţimi prin:*

$$A \cdot B = \{a \cdot b \,/\, a \in A,\ b \in B\}$$

Arătaţi că dacă A şi B sunt mărginite, atunci $A \cdot B$ este mărginită şi

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B \text{ şi } \inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$$

Rezolvare: Fie $a \in A$; atunci $a \cdot B \subset A \cdot B$, deci potrivit exerciţiului 3. Rezultă că:

$\inf(A \cdot B) \leq \inf a\cdot B \leq \sup a\cdot B \leq \sup(A \cdot B)$

Acum folosim exerciţiul 2. Deci $\inf a\cdot B = a \cdot \inf B$ şi $\sup a\cdot B = a \cdot \sup B$, prin urmare:

$\inf(A \cdot B) \leq a \cdot \inf B \leq a \cdot \sup B \leq \sup(A \cdot B)$, relaţie care este adevărată pentru orice $a \in A$, cu alte cuvinte $\inf(A \cdot B)$ şi $\sup(A \cdot B)$ sunt minoranţi pentru mulţimea $(\inf B) \cdot A$, respectiv $(\sup B) \cdot A$. Deci $\inf((\inf B) \cdot A) \geq \inf(A \cdot B)$, adică, folosind din nou ex.2, avem inf A · inf B ≥ inf (A · B) (1)

Pentru inegalitatea inversă vom observa că a · b ≥ inf A · inf B (A şi B fiind mulţimi de numere positive), deci inf A · inf B este minorant pentru mulţimea A · B, deci

inf A · inf B≤ inf (A · B)   (2)

Din (1) şi (2) rezultă că inf(A · B) = inf A · inf B

Analog se demonstrează şi pentru supremum.

5. *Să se determine infA şi supA pentru mulţimile următoare:*
   i. $A = \{ \frac{m}{n} / m,\ n \in \boldsymbol{N}\ 0 \leq m < n \ \}$
   ii. $A = \{ \frac{(-1)^n}{n} / \ n \in \boldsymbol{N}^* \ \}$
   iii. $A = \{ \left\{(2+\sqrt{3})^n\right\} /n \in \boldsymbol{N} \ \}$*, unde { } reprezintă parte fracţionară.*

Rezolvare: i. Observăm că 0 se află în mulţimea A, iar celelalte elemente sunt positive, deci infA = 0.

Vom demonstra că supA =1. Deoarece m < n, resultă că 1 este un majorant pentru A.

Fie ε >0. Alegem n∈ N astfel ca $\frac{1}{n}$ < ε (spre exemplu n = $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ + 1) şi m = n – 1. Se observă imediat că $\frac{n-1}{n}$ > 1 – ε, deci 1 este cel mai mic majorant.

ii. Se observă că -1 ≤ $\frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{2}$ şi -1 şi $\frac{1}{2}$ aparţin mulţimii, deci supA = $\frac{1}{2}$, infA = -1.

iii. Deoarece elementele mulţimii sunt numere positive, iar 0 ∈ A, rezultă că infA = 0.

În continuare vom arăta că supA = 1.

Folosind binomul lui Newton obţinem că:

$$(2+\sqrt{3})^n = C_n^n 2^{n-1} + C_n^{n-1} 2^{n-1}\sqrt{3} + C_n^{n-2} 2^{n-}2\cdot 3 + \ldots$$

$(2-\sqrt{3})^n = C_n^n 2^{n-1} - C_n^{n-1} 2^{n-1}\sqrt{3} + C_n^{n-2} 2^{n-} 2\cdot 3 + \ldots$

Prin adunare obţinem

$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2(C_n^n 2^{n-1} + C_n^{n-2} 2^{n-} 2\cdot 3 + \ldots) = p \in \mathbf{N}$

Deci, $(2+\sqrt{3})^n = p - (2-\sqrt{3})^n$

Deoarece $(2-\sqrt{3})^n \in [0,\ 1)$, rezultă că $[(2+\sqrt{3})^n] = p-1$, unde [ ], reprezintă partea întreagă, deci

$\{(2+\sqrt{3})^n\} = (2+\sqrt{3})^n - p + 1 = 1 - (2-\sqrt{3})^n$

Această ultimă relaţie ne arată că 1 este majorant pentru A. Vom arăta că 1 este cel mai mic majorant:

Fie $\varepsilon > 0$. Trebuie să arătăm că există un număr natural n astfel ca $1 - (2-\sqrt{3})^n > 1 - \varepsilon$, care este echivalent cu $(2-\sqrt{3})^n < \varepsilon$, iar prin logaritmare obţinem $n > \frac{ln\varepsilon}{\ln(2+\sqrt{3})}$ (deoarece $\ln(2-\sqrt{3})$ este negativ). În concluzie, putem alege $n = [\frac{ln\varepsilon}{\ln(2+\sqrt{3})}] + 1$.

Exerciţii:

1) Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\frac{2x-1}{x+3} \le 0$; b) $\frac{1-3x}{x} < 0$; c) $\frac{x}{x+3} \ge 0$; d) $\frac{(x+1)(x-1)}{2x+3} \ge 0$;

e) $(2x-1)(3x+1)(4x-5) > 0$

2) Să se reprezinte grafic funcţiile: f:D→**R**

a) $f(x) = 3x;\ D = [-2, \infty)$; b) $f(x) = -3x;\ D = (-\infty, 1]$; c) $f(x) = -2x+1;\ D = [-1, 3]$;

Rezolvarea sistemelor de tipul : $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$, $m, n, p, c, a, b \in \Re$

Probleme rezolvate:

1. *Să se calculeze produsele A·B şi B ·A pentru următoarele matrice:*

   i. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ *şi* $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

   A·B= $\begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 0+1\cdot 1 & 2\cdot(-2)+3\cdot 2+1\cdot 5 \\ 1\cdot 1+4\cdot 0+2\cdot 1 & 1\cdot(-2)+4\cdot 2+2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$

   B·A= $\begin{pmatrix} 1\cdot 2+(-2)\cdot 1 & 1\cdot 3+(-2)\cdot 4 & 1\cdot 1+(-2)\cdot 2 \\ 0\cdot 2+2\cdot 1 & 0\cdot 3+2\cdot 4 & 0\cdot 1+2\cdot 2 \\ 1\cdot 2+5\cdot 1 & 1\cdot 3+5\cdot 4 & 1\cdot 1+5\cdot 2 \end{pmatrix}$

   B·A = $\begin{pmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 7 & 23 & 11 \end{pmatrix}$

   ii. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *şi* $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

   A·B= $\begin{pmatrix} 14 & -5 & 22 & 6 \\ 7 & 10 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   Produsul B·A nu se poate realiza.

   iii. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ *şi* $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

   A·B= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -13 & 7 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ iar B·A = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \\ 6 & -7 & -5 \end{pmatrix}$

2. *Se consideră matricea pătratică de ordinal n, A definită astfel încât*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i+j = n+1 \\ 0, & i+j \neq n+1 \end{cases}$$

Să se calculeze A^2.

Rezolvare: Se observă că matricea are toate elementele 0, cu excepţia celor de pe diagonala secundară care sunt 1. Deci:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Fie A =* $\begin{pmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{pmatrix}$

Să se calculeze A^n.

Rezolvare: $A^2 = \begin{pmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} cos^2x - sin^2x & 2 \cdot sinx \cdot cosx \\ -2 \cdot sinx \cdot cosx & cos^2x - sin^2x \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} cos2x & sin2x \\ -sin2x & cos2x \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} cos2x & sin2x \\ -sin2x & cos2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} cos2x \cdot cosx - sin2x \cdot sinx & cos2x \cdot sinx + sin2x \cdot cosx \\ -cos2x \cdot sinx - sin2x \cdot cosx & cos2x \cdot cosx - sin2x \cdot sinx \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} cos3x & sin3x \\ -sin3x & cos3x \end{pmatrix}$$

Deci, se observă că $A^n = \begin{pmatrix} cos\, nx & sin\, nx \\ -sin\, nx & cos\, nx \end{pmatrix}$, regulă care se demonstrează prin inducţie matematică.

4. *Fie A =* $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Să se calculeze A^{33}.

Rezolvare: Se observă că $A = \begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{6} & sin\frac{\pi}{6} \\ -sin\frac{\pi}{6} & cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$ şi, potrivit exerciţiului precedent:

$A^n = \begin{pmatrix} cos\frac{n\pi}{6} & sin\frac{n\pi}{6} \\ -sin\frac{n\pi}{6} & cos\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix}$, deci $A^{33} = \begin{pmatrix} cos\frac{33\pi}{6} & sin\frac{33\pi}{6} \\ -sin\frac{33\pi}{6} & cos\frac{33\pi}{6} \end{pmatrix}$

Dar $cos\frac{33\pi}{6} = cos(6\pi - \frac{3\pi}{6}) = cos(6\pi - \frac{\pi}{2}) = cos\frac{\pi}{2} = 0.$ ţinând cont de periodicitatea şi de paritatea funcţiei *cos*, iar:

$sin\frac{33\pi}{6} = sin(6\pi - \frac{3\pi}{6}) = sin(6\pi - \frac{\pi}{2}) = - sin\frac{\pi}{2} = -1$

Deci, $A^{33} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. *Fie matricea A pătratică de ordinal 2,* $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$.

a) Să se calculeze A^2 *şi* A^3 *şi apoi să se determine* A^n, *în funcţie de n număr natural.*

b) Să se afle $x, y, u, v,$ *numere reale astfel încât*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rezolvare:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + a\cdot 0 & a\cdot 1 + a\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2a\cdot 0 & a\cdot 1 + 2a\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Observăm că:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demonstrăm formula propusă prin inducţie:

P(1): $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este adevărată

$P(n) \to P(n+1)$

Presupunem că

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şi arătăm că

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + na \cdot 0 & a \cdot 1 + na \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(A)}$$

Deci $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+u & y+v \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+u=1 \Rightarrow x=0 \\ y+v=0 \Rightarrow y=-1 \\ u=1 \\ v=1 \end{cases}$

Deci $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Probleme rezolvate

1. *Să se calculeze următorii determinanţi:*

i. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

ii. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$

iii. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (am dezvoltat după linia a doua)

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24 + 4 + 2 - 16 - 2 - 6 = 6$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (am adunat linia 1 la linia 2) $= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6$ (am dezvoltat după linia 1)

iv.

$$\begin{vmatrix} a+d & b+d & c+d \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (conform\ P7) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & d & d \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + d\cdot 0 = 0$$

2. Dacă $A = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$*, calculaţi* $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & b^2+a^2 \end{vmatrix}$

Rezolvare: $\det A = \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = -2abc$

$$A\cdot A^t = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & b^2+a^2 \end{pmatrix}$$

Deci $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & b^2+a^2 \end{vmatrix}$ = det(A·A^t) = det(A)^2 = 4a^2 b^2 c^2

3. *Calculaţi d =* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

Scădem: linia 2 din linia 1, linia 3 din linia 2, linia 4 din linia 3 şi obţinem:

D =

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c-d & d \\ (a-b)(a+b) & (b-c)(b+c) & (c-d)(c+d) & d^2 \\ (a-b)(a^2+ab+b^2\,) & (b-c)(b^2+bc+c^2\,) & (c-d)(c^2+cd+d^2\,) & d^3 \end{vmatrix}$$

D = (-1)$^{1+4}$ (a-b)(b-c)(b-d)$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+d \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 & c^2+cd+d^2 \end{vmatrix}$

(am folositP_5)

Pentru calculul determinantului de ordin 3 scădem linia 2 din linia 1 şi linia 3 din linia2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+d \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 & c^2+cd+d^2 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-c & b-d & c+d \\ (a-c)(a+b+c) & (b-d)(b+d+c) & c^2+cd+d^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a-c & b-d \\ (a-c)(a+b+c) & (b-d)(b+d+c) \end{vmatrix} =$$

$$=(a-c)(b-d)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b+c & b+d+c \end{vmatrix} =$$

= (a-c)(b-d)(d-a)

Aşadar, D = - (a-b)(b-c)(b-d) (a-c)(b-d)(d-a), adică D = (a-b)(b-c)(b-d)(a-c) (a-d)(b-d)

4. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Rezolvare: Dezvoltăm determinantul după prima linie:

$$1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} + x \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} x & x \\ x & 1 \end{vmatrix} + x \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & x \\ x & 1 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 - x(x - x^2) + x(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 - x^2 + x^3 + x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 2x^2 - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(x-1) - (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2(x-1) - (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow (x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}$$

Deci $x \in \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$.

Probleme rezolvate:

1. *Să se rezolve şi să se discute sistemul:*

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \end{cases}$$

Rezolvare:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{m} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/m & 1/m & 1/m \\ 0 & (\boldsymbol{m^2-1})/\boldsymbol{m} & (m-1)/m & (m-1)/m \\ 0 & (m-1)/m & (m^2-1)/m & (m-1)/m \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/(m+1) & 1/(m+1) \\ 0 & \mathbf{1} & 1/(m+1) & 1/(m+1) \\ 0 & 0 & (\boldsymbol{m}-\mathbf{1})(\boldsymbol{m}+\mathbf{2})/(\boldsymbol{m}+\mathbf{1}) & (m-1)/(m+1) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/(m+2) \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1/(m+2) \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1/(m+2) \end{pmatrix}$$

Deci, sistemul este compatibil determinat şi are soluţia $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{m+2}$.

2. *Să se rezolve şi să se discute sistemul:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + mx_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Rezolvare:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boldsymbol{m}-\mathbf{4} & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & (m-2)/(m-4) & 1 \\ 0 & 1 & -1/(m-4) & 0 \\ 0 & 0 & (\boldsymbol{m}-\mathbf{8})/(\boldsymbol{m}-\mathbf{4}) & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -(m+4)/(m-8) \\ 0 & 1 & 0 & 2/(m-8) \\ 0 & 0 & 1 & 2(m-4)/(m-8) \end{pmatrix} \sim$$

Această configuraţie corespunde cazului m≠4 şi m≠8 (pentru a putea considera pivoţii *m-4* şi *(m-8)/(m-4)* la pivotările a 2-a, respective a 3-a. În acest caz sistemul este compatibil determinat iar $x_1 = -\frac{m+4}{m-8}$, $x_2 = \frac{2}{m-8}$ şi $x_3 = \frac{2(m-4)}{m-8}$.

În cazul *m=4* pivotarea a doua se va face cu pivotul a_{23}, deci avem:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-4} & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

De aici rezultă soluţiile $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ şi $x_3 = 0$.

În cazul *m=8* după pivotarea a doua obţinem:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Deci nu se mai poate face o pivotare. Se observă că rangA = 2, iar rang$\underline{A}$ = 3, deci în acest caz sistemul este incompatibil.

3. *Să se rezolve şi să se discute sistemul:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ a^2x_1 + b^2 x_2 + c^2x_3 = d^2 \end{cases}$$

Rezolvare:

d =detA = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot$

$\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$ = *(b-a)(c-a)* = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$ =*(b-a)(c-a)(c-b)*

Deci, dacă *a≠b≠c≠a,* atunci detA ≠0 şi se poate aplica regula lui Cramer

$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, care se obţine din *detA* pentru *a =d*, deci d_1 *=(b-d)(c-d)(c-b)*

$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & d & c \\ a^2 & d^2 & c^2 \end{vmatrix}$, care se obţine din *detA* pentru *b=d*, deci d_1 *=(d-a)(c-a)(c-d)*

$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix}$, care se obţine din *detA* pentru *c=d*, deci d_1 *=(b-a)(d-a)(d-b)*

Deci $x_1 = \frac{(b-d)(c-d)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}$

$x_2 = \frac{(d-a)(c-d)}{(b-a)(c-b)}$ şi

$x_3 = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$

a=b≠c

Folosind metoda pivotării obţinem:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ a & a & c & d \\ a^2 & a^2 & c^2 & d^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{c-a} & d-a \\ 0 & 0 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & (d-a)/(c-a) \\ 0 & 0 & 0 & (d-a)(c-a) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & (d-a)/(c-a) \\ 0 & 0 & 0 & (\boldsymbol{d-a})(\boldsymbol{c-d}) \end{pmatrix} \sim$$

Dacă *d≠a* şi *d≠c* rezultă că rang$\underline{A}$ = 3≠ rangA=2, deci sistemul va fi incompatibil.

Probleme propuse:

1. *Fie A şi B două mulţimi mărginite de numere reale. Arătaţi că:*
   i. *Orice submulţime a lui A este mărginită;*
   ii. *A∩B, A∪B, A/B, A Δ B sunt mărginite;*
2. *Daţi exemple de mulţimi A şi B pentru care:*

$$\sup(A\cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B \text{ şi } \inf(A\cdot B) \neq \inf A \cdot \inf B$$

3. *Să se determine infA şi supA pentru mulţimile următoare:*

   $A = \{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \ /m,\ n \in \boldsymbol{N}^* \}$

   $B = \{ \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1} / \ n \in \boldsymbol{N} \}$

   $C = \{ \{\sqrt{n}\} \ /n \in \boldsymbol{N} \}$, *unde { } reprezintă parte fracţionară.*

   $D = \{\frac{6+x^2}{6-x^2} \ /x \in [-2,1] \}$

   $E = \{a = x^2 + 1/x \in [-2,1] \}$
4. *Explicitaţi funcţia* $f(x)=inf_{t\leq x} t^2$.
5. *Să se determine funcţia* $f: R \to R,\ f(x) = ax^2 + bx + c$ *dacă punctele A(4,0), B(2,0), C(5,12) aparţin graficului funcţiei.*
6. *Să se determine parametrul m încât între rădăcinile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei* $x^2 - 3x + m = 0$ *să existe relaţia* $x_1^2 + x_2^2 = 3$
7. *Să se rezolve inecuaţia:* $\frac{x^2+3}{5} - \frac{2x}{3} < \frac{1}{15}$
8. *Să se determine semnul expresiei :* $E(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$
9. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii liniare:
   i. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2\,x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$
   ii. $\begin{cases} 4x_1 + \ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 11x_1 - 4\,x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + 4\,x_2 + 0x_3 = 16 \end{cases}$

10.Să se discute şi să se rezolve sistemele:

i. $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 3 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} nx_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2m\,x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}$

Probleme rezolvate de algebră liniară

2. *Decideţi care sistemele de vectori sunt liniar independenţi:*

   a.v = (1, 2, -1), u = (2, 0, 3), w = (1,1,1)

   b. u = (1, -1), v = (1, 2)

   c. u = (1, 2, 1), v = (1, -1, 3), w = (2, 4, 2)

3. *Fie A:* $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$, *prin* $A(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$, *unde* $x = (x_1, x_2, x_3)$

   c. *Să se arate că aplicaţia A este liniară*

   d. *Să se scrie matricea asociată aplicaţiei A în raport cu bazele canonice din* $\boldsymbol{R}^3$ *şi* $\boldsymbol{R}^2$.

Rezolvare:

c. Vom arăta că $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$, *pentru orice x, y* ϵ $\boldsymbol{R}3$ *şi pentru orice* $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.

Fie $x = (x_1, x_2, x_3)$ şi $y = (y_1, y_2, y_3)$.

$$A(\alpha x + \beta y) = A((\alpha x_1 + \beta y_1,\ \alpha x_2 + \beta y_2,\ \alpha x_3 + \beta y_3)) =$$

$$= (\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2,\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3) =$$

$$= (\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2),\ \alpha(x_2 + x_3) + \beta(y_2 + y_3)) =$$

$$= \alpha(x_1 + x_2, x_2 + x_3) + \beta(y_1 + y_2, y_2 + y_3) =$$

$$= \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Deci, aplicaţia A este liniară.

d. Pentru a scrie matricea asociată vom exprima vectorii $A(e_1)$, $A(e_2)$, $A(e_3)$ în baza canonică din $\mathbf{R}^2$, ai cărei vectori vor fi $f_1 = (1, 0)$ *şi* $f_2 = (0,1)$.

$A(e_1) = A(1, 0, 0) = (1, 0)$

$A(e_2) = A(0, 1, 0) = (1, 1)$

$A(e_3) = A(0, 0, 1) = (0, 1)$

Deci,

$$T_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. *Fie* $A: \boldsymbol{R}^3 \text{x}\ \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ *prin* $A(x, y) = x_1 y_2 + 2x_1 y_3 - x_3 y_1 + 3x_3 y_3$, *unde* $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$
   a. *Să se arate că A este o formă biliniară şi să se decidă dacă este simetrică;*
   b. *Să se găsească matricea formei A în baza canonică din* $\boldsymbol{R}^3$
   c. *Să se determine matricea formei A în raport cu baza formată din vectorii* $u = (1, -1, 2)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (2, -1, 1)$
5. Să se decidă care dintre aplicaţiile următoare sunt forme biliniare:
   a. $A: \boldsymbol{R}^3 \text{x}\ \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ *prin* $A(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_3 y_1 + 2$
   b. $A: \boldsymbol{R}^4 \text{x}\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}$ *prin* $A(x, y) = x_1 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_4 y_4$

6. *Fie A:* $\boldsymbol{R}^3$x $\boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}$ *prin* $A(x, y)=x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2 - x_2y_3$, *unde* $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$
   a. *Să se arate că A este o formă biliniară şi să se decidă dacă este simetrică;*
   b. *Să se găsească matricea formei A în baza canonică din* $\boldsymbol{R}^3$
   c. *Să se determine matricea formei A în raport cu baza formată din vectorii* $u = (0, 2, -1)$, $v = (-1, 1, 1)$, $w = (1, 0, 1)$

7. *Fie A:* $\boldsymbol{R}^3$x $\boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}$ *care are forma* $A(x, y)=x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 - 3x_3y_3$. *Să se determine expresia sa în baza formată de vectorii*
   $u = (1, 0, -1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (1, 1, -1)$

Bibliografie:

1. Atanasiu, Gh., Munteanu, Gh., Postolache, M., *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, ecuaţii diferenţiale*, Ed. ALL, Bucureşti, 1998
2. Bălan, V., *Algebră liniară, geometrie analitică*, Ed. Fair Partners, Bucureşti, 1999
3. Bucur, Maria-Liliana, *Matematică şi statsitică*, Ed. Sitech, Craiova 2014
4. Udrişte, C., *Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale,* ed. Didactică şi Pedagogică R.A., Bucureşti, 1993
5. Vladimirescu, I., Popescu, M., *Algebră liniară şi geometrie analitică*, Ed. Universitaria, Craiova, 1993