Profesor emerit dr. Octavian STĂNĂŞILĂ

ANALIZĂ MATEMATICĂ

EDIŢIA DEFINITIVĂ

Colecţia "Cărţi mari ale Şcolii Româneşti"

Fundaţia

Floarea Darurilor

Bucureşti, 2014

Culegerea textului şi tehnoredactarea: MORARU Camelia
Controlul final al textului: JALBĂ Liviu Ioan

Tipărită la Regia Autonomă Monitorul Oficial Bucureşti, ROMÂNIA
În 1000 exemplare, din care prezenta carte are numărul:

Semnătura autorului

ISBN 978-973-0-17788-6

PREFAŢĂ

Acest manual a fost elaborat în cadrul Catedrei de Matematici II din Universitatea POLITEHNICA Bucureşti şi se adresează studenţilor facultăţilor de ingineri (cu precădere în profilul electric), putând fi util şi studenţilor facultăţilor de matematică, fizică, economie.

Analiza matematică constituie o componentă esenţială a culturii ştiinţifice a oricărui cercetător al naturii pentru că, alături de rostul informaţional, ea dezvoltă abilităţi de calcul (fiecare teoremă principală fiind legată de evaluări numerice), disciplinează gândirea, canalizează intuiţia, oferind nenumărate exemple de modelare matematică a unor fenomene fizice, chimice, economice; ea şi-a lărgit permanent obiectul de studiu prin elaborarea de concepte noi şi în corelare cu tehnica modernă de calcul, a rezolvat probleme inaccesibile până nu demult, influenţând nemijlocit drumul spre cunoaştere şi impresionând prin universalitatea rezultatelor ei. Analiza matematică este şi o ”simfonie a infinitului”, după spusele lui Hilbert.

Argumentul suprem în a promova un rezultat teoretic (sau un algoritm) rămâne demonstrarea acestuia. Se ştie că rigoarea are un caracter istoric şi nu poate fi un scop în sine, dar unicul mod de a face înţeleasă o noţiune este acela de a o defini riguros, de a sublinia convingător sursa, finalitatea şi proprietăţile ei; adeseori, un raţionament corect este legat de un limbaj încărcat, purtător al dificultăţilor obiective legate de descrierea entităţilor studiate. Se cunosc dificultăţile întâlnite de studenţii anului I în faţa unui curs ca acesta, care nu este doar o coleţie de reţete, formule, algoritmi. Este cert că studiul individual bine organizat, învăţarea activă, rezolvarea de multe exerciţii (inclusiv cele peste 200 exerciţii din această carte), disponibilitatea în general, îl conduc la succes pe cititor.

Scriind acest curs, nu am căutat originalitatea cu orice chip; prin programă a fost inclus studiul funcţiilor aritmetice şi booleene, ceea ce nu impietează asupra unităţii lucrării. Am urmărit sistematic să conjug calitatea ştiinţifică cerută unei astfel de lucrări cu atributele unui curs vorbit liber, cu convingerea că succesul în comunicarea matematicii depinde esenţial de cultivarea diverselor punţi cu realitatea.

Port îndatoritoare recunoştinţă profesorilor mei M. Nicolescu, C. Andreian-Cazacu, S. Marcus, I.Gh. Şabac şi îmi amintesc cu plăcere de atmosfera matematică din seminarul de analiză complexă S. Stoilow, iar discuţiile cu C. Bănică şi cu M. Jurchescu.

Am ţinut cont de observaţiile unor colegi de catedră sau ale unor foşti studenţi ai mei şi ţin să le mulţumesc şi acum. În acest sens, le aduc un cuvânt de mulţumire profesorilor Paul Flondor, Vasile Brînzănescu, Mihnea Moroianu, Mircea Olteanu ş.a., cu care am purtat, în timp, discuţii în cadrul seminarului metodic al catedrei.

Analiza matematică a rămas o disciplină fundamentală pentru învăţământul tehnic şi un domeniu ştiinţific, cu un număr mare de ramificaţii. Calculatoarele nu au redus importanţa asimilării ei, ci doar au inversat unele priorităţi. Derivatele şi integralele, în multiplele lor iposteze, au devenit indicatori sintetici pentru descrierea multor evoluţii în timp sau spaţiu, evidenţiate de diversele ştiinţe.

În ultimii ani, nu s-au produs mutaţii în modul de predare a analizei, cu excepţia unor încercări de forţare a originalităţii. Ţinând cont de noile tendinţe în didactica matematică, am dorit ca această carte să aibă rolul de ”carte de învăţătură”. Ca atare, am pus accent pe înţelegerea noţiunilor şi teoremelor prin multe exemple ilustrative şi mai puţin pe unele demonstraţii prea complicate, pentru care am făcut trimiteri bibliografice accesibile. În schimb, am preferat comentariile şi un plus de aplicaţii. Nu uit că, înainte de a fi fost un matematician printre ingineri, aveam ambiţia de a da demonstraţii ”complete”, cu orgoliul dascălului tânăr nerealist.

Mulţumesc d-lui dr. ing. Liviu Jalbă, iniţiatorul inimos al publicării unor manuale utile generaţiilor tinere şi fundaţiei ”Floarea Darurilor”. De asemenea mulţumesc d-nei Camelia Moraru, care a tehnoredactat un text suficient de dificil.

octombrie 2014 Autorul

Analiza matematică, această ramură fundamentală a ştiinţei, s-a dezvoltat din nevoile directe ale studiului fenomenelor naturii; noţiunea de funcţie ocupă un loc central în analiză şi constituie substratul general abstract al oricărei legi a naturii.
(S. STOILOW)

Capitolul 1

Preliminarii

Introducere

În acest capitol vom prezenta câteva concepte fundamentale utilizate în diverse etape ale oricărui proces de matematizare şi construind o parte importantă a culturii matematice a viitorului inginer.

Nu vom studia noţiuni primare ca: obiect, element, mulţime, submulţime, colecţie, egalitate, proprietate etc. Presupunem de asemenea cunoscută semnificaţia semnelor $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $\cap$, $\cup$, $\complement$, $=$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\equiv$, $\neg$, $(\exists)$, $(\forall)$, $(\exists\,!)$.

Sensul logic şi regulile de utilizare ale acestor semne sunt cele din limbajul uzual (numit uneori naiv în comparaţie cu limbajele formalizate). Teoria naivă a mulţimilor, aşa cum a fost prezentată în liceu, poate să ajungă uneori la paradoxuri, datorită în special bogăţiei nelimitate a limbajului uzual. Iată un astfel de paradox, evidenţiat de Richard prin considerarea următoarei propoziţii:

"Fie m cel mai număr natural care nu poate fi definit cu mai puţin de 100 semne". Această propoziţie are 65 de semne, constituite din literele şi cifrele utilizate. Pe de o parte, m nu poate fi definit cu mai puţin de 100 semne şi pe de alta, m este totuşi definit prin cele 65 de semne. Contradicţie !

Pentru a evita astfel de situaţii, matematicienii au fundamentat teoria axiomatică a mulţimilor, în care se fixează de la început alfabetul care va fi utilizat, semnele logice, obiectele (termenii) cu care se raţionează, tipurile de proprietăţi ale acestor obiecte etc. În acest sens, este necesară fixarea unui univers $\mathcal{U}$ de mulţimi, care să cuprindă toate mulţimile care pot să apară în cele ce urmează. Actualmente întreaga matematică poate fi fundamentată cu extremă rigoare, dar prin natura şi prin adresa acestui curs, vom folosi un limbaj mai direct, neformalizat, dar formalizabil. Menţionăm aici importanţa deosebită a procesului de formalizare, strâns legat de cel de programare.

Acest capitol tratează mai întâi conceptul general de funcţie (relaţie funcţională), cu exemple justificative, fixându-se totodată terminologia şi notaţiile utilizate curent în tot restul lucrării. O atenţie specială este acordată unor elemente de analiză a mulţimii $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, prezentând noţiunile de mulţime numărabilă şi funcţie aritmetică. În ultima parte a capitolului sunt date unele elemente utile de logică matematică şi aplicaţii.

1.1 Relaţii funcţionale, Relaţii de ordine

1.1.1 Conceptul general de funcţie şi exemple

În cele ce urmează, vom adopta notaţiile consacrate:

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\},\ \mathbb{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\ldots\},\ \mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}|p,q\in\mathbb{Z},\ q>0\right\},$$

prezentând totodată definiţia naivă a mulţimilor respective de numere, prin enumerarea elementelor lor. Se poate indica un procedeu riguros de construcţie a mulţimilor $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, pornind de la $\mathbb{N}$, prin operaţii de teoria mulţimilor. În capitolul următor vom face o discuţie detaliată asupra mulţimii $\mathbb{R}$ a numerelor reale, a cărei înţelegere este esenţială pentru orice utilizator de matematică.

Din multitudinea de situaţii concrete de dependenţă a unor mărimi, stări, indici cantitativi sau calitativi etc. de alte mărimi, stări, indici, s-a observat că în orice situaţie de dependenţă sunt angajate două mulţimi de elemente. Aceasta a condus la definiţia clasică formulată de G.L. Dirichlet (1805-1859) şi de N.I. Lobacevski (1792-1856): *a da (a stabili, a defini) o funcţie* (sau echivalent, *o aplicaţie) f de la o mulţime M la o mulţime N înseamnă a asocia oricărui element $x \in M$ un element unic determinat din N, notat $f(x)$ şi numit valoarea funcţiei f în x.*

În acest caz se scrie

$$f : M \to N, \quad x \mapsto f(x) \tag{1}$$

şi se spune (sugestiv dar incorect) că f "transportă informaţie" de la M la N.

Mulţimea M se numeşte *domeniul de definiţie* al lui f, iar N *domeniul de valori al lui f*. În definiţia anterioară există unele imperfecţiuni logice, în special privind sensul termenului "a asocia". În ultimul timp s-a impus o altă definiţie, esenţialmente echivalentă cu cea anterioară şi pe care o prezentăm mai jos.

Fie M şi N două mulţimi fixate. Reamintim că orice colecţie R de perechi ordonate (x, y) cu $x \in M$ şi $y \in N$ se numeşte *relaţie binară de la M la N*; o astfel de relaţie este deci o submulţime a produsului cartezian $M \times N$, adică $R \subset M \times N$. Elementele lui $M \times N$ se împart în două clase: elemente (x, y) care aparţin lui R şi se scrie xRy (se citeşte: x este în relaţia R cu y) şi elemente $(x, y) \notin R$ şi atunci se scrie $\neg(xRy)$ sau $x\not R y$.

Definiţia 1.1. *Se numeşte* **relaţie funcţională** *F de la M la N orice relaţie binară $F \subset M \times N$, cu proprietatea*

$$(\forall)\, x \in M, (\exists!)\, y \in N \quad \text{astfel încât} \quad (x, y) \in F.$$

Dacă f este o aplicaţie în sensul definiţiei lui Dirichlet-Lobacevski, atunci se consideră relaţia funcţională $F = \{(x, f(x)) | x \in M\}$, numită şi **graficul lui** f; reciproc, dacă F este relaţie funcţională ca în definiţia 1.1, atunci se poate defini aplicaţia $f : M \to N$, $x \mapsto$ acel unic y astfel încât $(x, y) \in F$. Tocmai în acest sens, cele două definiţii ale conceptului de funcţie au fost calificate ca esenţialmente echivalente.

În cele ce urmează, vom adopta cu precădere definiţia clasică. Remarcăm aici că scrierea (1) este uneori înlocuită prin $y = f(x)$, spunându-se neriguros că y este funcţie de variabila x. Dar cine este y? De asemenea cuvântul "variabilă" aminteşte de timp, ceea ce este o restricţie inutilă şi de aceea el este substituit prin "element oarecare din mulţimea M".

Subliniem încă o dată că dacă $f : M \to N$ este o aplicaţie, atunci pentru orice element $x \in M$ este pus în evidenţă *un singur* element din N, notat $f(x)$; se mai spune că f este uniformă (sau univocă). Există situaţii în care pentru două mulţimi fixate M, N, fiecărui element $x \in M$ să-i poată fi asociate eventual mai multe elemente din N; se spune atunci că este definită o funcţie multiformă $M \to N$. De exemplu, luând $M = N = \mathbb{C}$ şi asociind oricărui $z \in \mathbb{C}$ toate numerele complexe w astfel încât $w^3 = z$. Un exemplu semnificativ are loc în cadrul fenomenului de histerezis unde apar dependenţe de mărimi fizice reale $x \mapsto y$ ilustrate grafic ca în fig. I.1 (valorii $x = \alpha$ îi corespund trei $y - i$). Trebuie remarcat faptul că orice funcţie multiformă $M \to N$ se poate considera ca o funcţie uniformă $M \to \mathcal{P}(N)$ (reamintim că pentru orice mulţime A se notează cu $\mathcal{P}(A)$ mulţimea părţilor lui A).

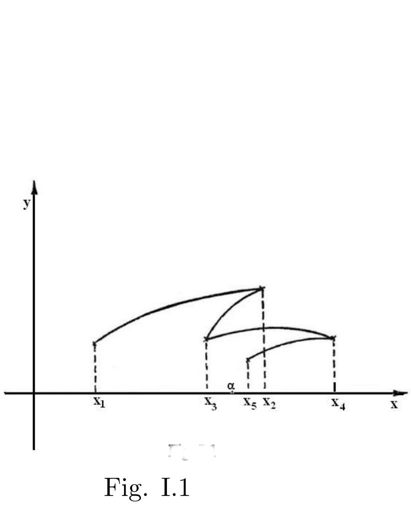


Fig. I.1

În întreaga lucrare vom considera exclusiv funcţii (aplicaţii) uniforme.

Definiţia 1.2. *Două funcţii* $f : M \to N$, $g : M_1 \to N_1$ *se consideră* **egale** *(şi se scrie* $f = g$*) dacă* $M = M_1$, $N = N_1$ *şi în plus,* $(\forall)x \in M$, *avem* $f(x) = g(x)$.

Aşadar, prin convenţie, două funcţii sunt egale dacă au acelaşi domeniu de definiţie, acelaşi domeniu de valori şi dacă "ele lucrează la fel". Multe formule matematice pot fi interpretate ca egalităţi de funcţii; de exemplu, relaţia $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ semnifică egalitatea funcţiilor reale $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, $g(x) = 1$. Remarcăm de asemenea că uneori funcţii distincte sunt notate la fel (de exemplu: $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$).

Dacă M şi N sunt mulţimi fixate, atunci se notează cu N^M sau $\mathrm{Hom}(M, N)$, mulţimea tuturor funcţiilor $M \to N$ (fig. I.2).

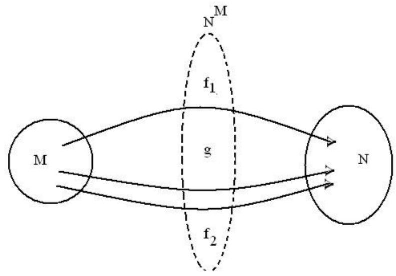


Fig. I.2

De exemplu, dacă M este un interval $[\alpha, \beta]$ din $\mathbb{R}$ şi $N = \mathbb{R}$, atunci $\mathrm{Hom}(M, N)$ este mulţimea tuturor funcţiilor reale având graficul cuprins între dreptele $x = \alpha$, $x = \beta$ (fig. I.3).

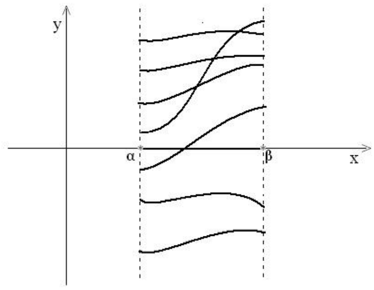


Fig. I.3

Exemple de funcţii

Pentru a sublinia importanţa conceptului general de funcţie este suficient de arătat de la început că şirurile, familiile de elemente, operaţiile algebrice, transformările geometrice, omomorfismele, funţionalele, operatorii etc. sunt, înainte de orice, funcţii. Se poate spune că, alături de numere, funcţiile domină întreaga matematică.

a) Şiruri. *Se numeşte* **şir de elemente dintr-o mulţime** E *orice funcţie* $f : \mathbb{N} \to E$*; pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *este definit un element* $a_n = f(n)$ *din* E. *Şirul însuşi se notează* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sau* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *în loc de* $\mathbb{N} \to E$, $n \mapsto a_n$, *iar mulţimea* $\{x \in E | (\exists)n \in \mathbb{N}, x = a_n\}$ *se numeşte* **mulţimea termenilor şirului**. Trebuie făcută distincţia între un şir şi mulţimea termenilor lui, deoarece două şiruri distincte pot avea aceleaşi mulţimi de termeni (de exemplu $E = \mathbb{Z}$, $a_n = 1 + (-1)^n$, $b_n = 1 - (-1)^n$, $n \geq 0$). În esenţă noţiunea de şir presupune o anumită ordonare, o enumerare a termenilor, ceea ce nu este cerut în cazul elementelor unei mulţimi.

Dacă $E = \mathbb{R}$ (respectiv $\mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$), atunci şirurile corespunzătoare de elemente din E poartă numele de *şiruri de numere reale* (respectiv *raţionale, iraţionale*). Dacă M, N sunt mulţimi fixe şi $E = \mathrm{Hom}(M, N)$, atunci orice aplicaţie $\mathbb{N} \to E$, $n \mapsto f_n$ se numeşte şir $\{f_n\}_{n\geq 0}$ de funcţii $M \to N$; de exemplu, dacă $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$, $(\forall)x \in \mathbb{Q}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$, atunci se pot considera funcţiile $f_0, f_1, f_2, \ldots$ şi ca atare este definit un şir $\{f_n\}_{n\geq 0}$ de funcţii $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

Se poate considera o noţiune mai generală decât cea de şir, anume noţiunea de familie. Dacă I, E sunt mulţimi oarecare, se numeşte **familie de elemente din** E **indexată după** I orice aplicaţie $I \to E$, $i \mapsto x_i$, notată de obicei $\{x_i\}_{i\in I}$. Şirurile sunt familii indexate după mulţimea $\mathbb{N}$. Familiile cu $I \subset \mathbb{Z}$ se numesc tot *şiruri.*

Fie $\{M_i\}_{i\in I}$ o familie de mulţimi. Se pot defini atunci **reuniunea** acestei familii

$$\bigcup_{i\in I} M_i \triangleq \{x | (\exists)i \quad \text{astfel încât} \quad x \in M_i\},$$

intersecţia acestei familii

$$\bigcap_{i\in I} M_i \triangleq \{x | (\forall)i, \quad x \in M_i\}$$

şi **produsul cartezian** $\prod_{i\in I} M_i \triangleq$ mulţimea tuturor familiilor $\{x_i\}_{i\in I}$ de elemente din $\bigcup_{i\in I} M_i$ astfel încât $x_i \in M_i$, $(\forall)i \in I$.

(Simbolul Δ semnifică definiţia membrului stâng). Dacă $I = \{1, 2\}$, regăsim respectiv mulţimile $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$, $M_1 \times M_2$.

b) Operaţii algebrice. Fie M o mulţime fixată şi $n \geq 1$ un număr natural. Se notează

$$M^n \stackrel{\Delta}{=} \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in M \quad \text{pentru orice} \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

Aşadar, $M^n = \prod_{1 \leq i \leq n} M_i$ unde $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$. Se numeşte **operaţie (algebrică) n-ară pe mulţimea** M orice aplicaţie $M^n \to M$. Aşadar o operaţie n-ară $*$ pe M asociază oricărui element $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M^n$ un element bine determinat din M, notat $*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Pentru $n = 2$ se obţine conceptul de operaţie binară, ca funcţie $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x * y = *(x, y)$, iar pentru $n = 1$ cel de operaţie *unară* (funcţie $M \to M$).

Definind M^0 ca fiind o mulţime formată dintr-un singur element, se poate considera noţiunea de operaţie *nulară* $M^0 \to M$ pe M, care constă în fixarea unui element din M. De exemplu, dacă $M = \mathbb{Z}$, atunci adunarea $+ : M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x + y$ şi înmulţirea $\cdot : M \times M \mapsto M$, $(x, y) \mapsto xy$ sunt operaţii binare; luarea opusului $M \to M$, $x \mapsto -x$ este o operaţie unară, iar fixarea numărului 2015 este o operaţie nulară pe $\mathbb{Z}$.

Un mare salt în conştiinţa matematică a fost acela în care operaţiile algebrice au fost definite ca funcţii; în particular, prin mijloacele moderne de calcul nu se execută numai sume, produse etc., ci se realizează operaţii de adunare, înmulţire etc. Este clară diferenţa între a calcula suma $3 + 7$ şi a calcula *toate* valorile funcţiei-adunare $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

c) Fie $I = [a, b]$ un interval fixat; se notează cu $C^0_{[a,b]} = C^0(I)$ mulţimea funcţiilor continue $I \to \mathbb{R}$ şi pentru orice $k \geq 1$ natural se defineşte mulţimea $C^k_{[a,b]} = C^k(I)$ a funcţiilor $I \to \mathbb{R}$ care sunt de k ori derivabile astfel încât derivata $f^{(k)}$ să fie continuă de I. Se pot defini atunci două aplicaţii remarcabile şi anume:

operatorul de derivare $\mathcal{D} : C^k(I) \to C^{k-1}(I)$, $f \mapsto f'$ ($k \geq 1$ fixat);

funcţionala de luare a integralei $\mathcal{I} : C^0(I) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$.

d) Printre cele mai importante exemple de funcţii se disting funcţiile cu valori reale $X \to \mathbb{R}$ definite pe o mulţime oarecare X, numite uneori funcţii numerice reale sau funcţionale.

Uneori se utilizează în practică funcţii definite prin tabele. Dacă $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$, $N = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ sunt două mulţimi finite de numere reale cu $x_1 < x_2 < \ldots < x_p$ şi I un interval astfel încât $M \subset I$, atunci orice funcţie reală $f : I \to \mathbb{R}$ verificând relaţiile $f(x_i) = y_i$, $1 \leq i \leq p$ se numeşte *funcţie de interpolare pe* I asociată tabelei de valori

x_1	x_2	$\ldots$	x_p
y_1	y_2	$\ldots$	y_p

Astfel de situaţii apar în diverse măsurători ale mărimilor fizice.

Multe alte tipuri de funcţii vor fi întâlnite chiar şi în cadrul acestui curs. Pornind de la funcţii date se pot defini altele noi. Dăm câteva exemple în acest sens:

1) Fie $f : M \to N_1$, $g : N_2 \to P$ două funcţii astfel încât $N_1 \subset N_2$; în această situaţie se poate considera *funcţia compusă*

$$g \circ f : M \to P, \ x \mapsto g(f(x)),$$

aplicând mai întâi f şi apoi g; aşadar, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $(\forall) x \in M$. Presupunând că avem aplicaţii $f : M \to N$, $g : N \to M$, atunci au sens funcţiile compuse $g \circ f$, $f \circ g$, dar în general acestea sunt funcţii distincte (de exemplu, luând $M = N = \mathbb{R}$, $f = \sin$ şi $g = \exp$, rezultă că $f \circ g : x \mapsto \sin e^x$ şi

$g \circ f : x \mapsto e^{\sin x}$). Aşadar compunerea de aplicaţii nu este comutativă; ea este totuşi asociativă, atunci când operaţiile au sens.

Dacă $f : M \to N$ este o funcţie, atunci se poate adopta următoarea "interpretare sistemică": numim elementele lui M intrări, elementele lui N ieşiri şi f apare ca o modalitate prin care oricărei intrări $x \in M$ îi corespunde ieşirea $y = f(x)$ şi se poate considera astfel un sistem intrare-ieşire (fig. I.4).

Fig. I.4

Dacă $g : N \to P$ este o altă funcţie, atunci funcţia $g \circ f$ corespunde legării în serie a celor două sisteme intrare-ieşire corespunzătoare (fig. I.5). Necomutativitatea compunerii confirmă importanţa decisivă pe care o are ordinea în cadrul legării în serie a sistemelor.

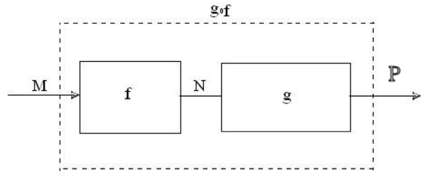


Fig. I.5

2) Fie B o mulţime şi $A \subset B$ o submulţime a ei; se poate defini atunci aplicaţia de incluziune $i : A \to B$, $x \mapsto x$. Dacă $f : B \to M$ este o funcţie, atunci funcţia $f \circ i : A \to M$ se numeşte *restricţia lui f la A* şi se notează $f|A$. Aşadar $(f|A)(x) = f(i(x)) = f(x)$, $(\forall)x \in A$. Dacă $g : A \to M$este o funcţie fixată, atunci orice funcţie $h : B \to M$ astfel încât $g = h|A$ (adică $g(x) = h(x)$, $(\forall)x \in A$) se numeşte *prelungirea lui g la B*.

De exemplu, funcţia $\sin : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ poate fi prelungită la întreg $\mathbb{R}$, dar funcţia $\operatorname{tg} \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ nu poate fi prelungită prin continuitate la $\mathbb{R}$ (adică la o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$).

3) Dacă $f, g : X \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii numerice definite pe aceeaşi mulţime, atunci se pot defini *suma* şi *produsul* lor

$$f + g : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{şi} \quad fg : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)g(x),$$

produsul lui f cu un număr real α

$$\alpha f : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \alpha f(x)$$

şi *câtul*

$$\frac{f}{g} : X \setminus Z_g \to \mathbb{R},\ z \mapsto \frac{f(x)}{g(x)},$$

unde $Z_g = \{x \in X | g(x) = 0\}$ este mulţimea zerourilor funcţiei g.

Definiţia 1.3. *O funcţie $f : M \to N$ se numeşte* **injectivă** *dacă are loc implicaţia*

$$(\forall)\, x_1, x_2 \in M,\ \{f(x_1) = f(x_2)\} \Rightarrow \{x_1 = x_2\}$$

sau, logic echivalent,

$$(\forall)\, x_1, x_2 \in M,\ \{x_1 \neq x_2\} \Rightarrow \{f(x_1) \neq f(x_2)\}.$$

Funcţia $f : M \to N$ se numeşte **surjectivă** *dacă $(\forall)y \in N$ $(\exists)x \in M$ astfel încât $f(x) = y$. Funcţia $f : M \to N$ se numeşte* **bijectivă** *(sau simplu* **bijecţie***) dacă f este injectivă şi surjectivă; în acest caz se mai spune că f stabileşte o corespondenţă bijectivă între mulţimile M şi N.*

Lema 1. *Fie $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$ două aplicaţii oarecare. Dacă $v \circ u$ este injectivă (respectiv surjectivă), atunci u este injectivă (respectiv v surjectivă).*

Demonstraţie. Presupunem funcţia $v \circ u$ injectivă şi avem de arătat că u este injectivă; fie $x_1, x_2 \in M$ şi $u(x_1) = u(x_2)$, deci $v(u(x_1)) = v(u(x_2))$, adică $(v \circ u)(x_1) = (v \circ u)(x_2)$. Deoarece aplicaţia $v \circ u$ este injectivă prin ipoteză, rezultă $x_1 = x_2$.

Dacă aplicaţia $v \circ u$ este surjectivă şi $z \in P$ este arbitrar, atunci există $x \in M$ astfel încât $(v \circ u)(x) = z$, adică $v(u(x)) = z$, deci v este surjectivă.

Lema 2. *O funcţie $f : M \to N$ este bijectivă dacă şi numai dacă pentru orice $y \in N$, ecuaţia $f(x) = y$ are soluţie, unică, $x \in M$.*

Demonstraţie. Presupunem f bijectivă şi fie $y \in N$ fixat arbitrar. Atunci ecuaţia $f(x) = y$ are soluţie deoarece f este surjectivă; în plus dacă $x_1, x_2 \in M$ sunt soluţii ale ei, atunci $f(x_1) = y$, $f(x_2) = y$ şi cum f este injectivă, rezultă

$x_1 = x_2$ deci soluţia este unică. Reciproc, dacă ecuaţia $f(x) = y$ are soluţie şi este unică pentru orice $y \in N$, atunci f este evident bijectivă.

Fie $f : M \to N$ a aplicaţie bijectivă; atunci se poate defini *inversa* f^{-1} *a lui* f

$$f^{-1} : N \to M,\ y \mapsto \text{ unicul element } x \in M \text{ astfel încât } f(x) = y.$$

Pentru orice mulţime M se poate considera *aplicaţia identică a lui* M, anume aplicaţia

$$1_M : M \to M,\ x \mapsto x.$$

Evident, 1_M este aplicaţie bijectivă şi $(1_M)^{-1} = 1_M$.

Teorema 1.1. *Fie $f : M \to N$ o aplicaţie oarecare.*

a) *Avem $f \circ 1_M = f$ şi $1_N \circ f = f$;*

b) *Dacă f este bijectivă, atunci $f^{-1} \circ f = 1_M$* şi $f \circ f^{-1} = 1_N$;

c) *Fie $g : N \to M$ o aplicaţie astfel încât $g \circ f = 1_M$, $f \circ g = 1_N$. Atunci f şi g sunt bijective, $g = f^{-1}$ şi $f = g^{-1}$.*

Demonstraţie. a) Pentru orice $x \in M$ avem $(f \circ 1_M)(x) = f(1_M(x)) = f(x)$ şi $(1_N \circ f)(x) = 1_N(f(x)) = f(x)$.

b) Fie $(\forall)x \in M$ şi $y = f(x)$; atunci $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$. Din definiţia lui f^{-1} rezultă că $f^{-1}(y) = x$, deci $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, adică $f^{-1} \circ f = 1_M$. În mod similar se probează relaţia $f \circ f^{-1} = 1_N$.

c) Deoarece $g \circ f = 1_M$, din lema 1 va rezulta că f este injectivă şi că g este surjectivă; în mod similar, din ipoteza $f \circ g = 1_N$, rezultă că f este surjectivă şi g este injectivă. Aşadar, f şi g sunt bijective. În plus, din relaţia $g \circ f = 1_M$ şi aplicând punctul a), rezultă $(g \circ f) \circ f^{-1} = 1_M \circ f^{-1} = f^{-1}$; pe de altă parte, $(g \circ f) \circ f^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) = g \circ 1_N = g$ şi se obţine relaţia $g = f^{-1}$. În mod similar, din relaţia $f \circ g = 1_N$ se obţine $(f \circ g) \circ g^{-1} = 1_N \circ g^{-1} = g^{-1}$ şi pe de altă parte, $(f \circ g) \circ g^{-1} = f \circ (g \circ g^{-1}) = f \circ 1_M = f$, deci $f = g^{-1}$.

Corolar. a) *Dacă $f : M \to N$ este o aplicaţie bijectivă, atunci f^{-1} este bijectivă şi $(f^{-1})^{-1} = f$;*

b) *Dacă $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$ sunt aplicaţii bijective, atunci funcţia compusă $v \circ u$ este bijectivă şi în plus, $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.*

Demonstraţie. a) Luând $g = f^{-1}$ rezultă $f \circ g = 1_N$, $g \circ f = 1_M$ şi aplicând teorema 1.1. c) rezultă că g este bijectivă şi în plus $g^{-1} = f$, adică $(f^{-1})^{-1} = f$.

b) În general, dacă u şi v sunt injective (respectiv surjective), la fel va fi aplicaţia $v \circ u$. Aşadar, dacă aplicaţiile u şi v sunt bijective, atunci funcţia $v \circ u$ este bijectivă; în plus, $(v \circ u) \circ (u^{-1} \circ v^{-1}) = v \circ (u \circ u^{-1}) \circ v^{-1} = (v \circ 1_N) \circ v^{-1} = v \circ v^{-1} = 1_P$ şi similar, $(u^{-1} \circ v^{-1}) \circ (v \circ u) = u^{-1} \circ (v^{-1} \circ v) \circ u = u^{-1} \circ (1_N \circ u) = u^{-1} \circ u = 1_M$. Aplicând teorema 1.1. c) pentru $g = v \circ u$, $f = u^{-1} \circ v^{-1}$, rezultă că $f = g^{-1}$, adică $u^{-1} \circ v^{-1} = (v \circ u)^{-1}$, tocmai relaţia din enunţ.

Exemple. a) Aplicaţia $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definită prin

$$\varphi(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{dacă} \quad n \text{ este par} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{dacă} \quad n \text{ este impar} \end{cases}$$

este bijectivă. Aşadar, există o corespondenţă bijectivă între mulţimea $\mathbb{N}$ şi mulţimea $\mathbb{Z}$ (deşi $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z}$). Un fapt similar nu are loc pentru mulţimi finite. Anume, dacă M şi N sunt mulţimi finite şi dacă $\varphi : M \to N$ este o aplicaţie bijectivă, atunci M şi N au acelaşi număr de elemente; aşadar, dacă $M \subsetneqq N$, atunci nu poate exista nici o bijecţie de la M la N.

b) Fie $M = N = \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$. În acest caz f este bijectivă şi $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Funcţia $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $x \mapsto e^x$ este bijectivă şi $\exp^{-1} = \log$ (logaritmul natural).

Funcţia $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ este bijectivă şi $\sin^{-1} = \arcsin$; în mod similar, pentru funcţia bijectivă $\mathrm{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ avem $\mathrm{tg}^{-1} = \mathrm{arctg}$.

Observaţie. Aplicaţiile bijective au un rol deosebit în matematică. Astfel, izomorfismele de grupuri, izomorfismele de spaţii vectoriale, izomorfismele de grafuri, de automate etc. sunt în primul rând aplicaţii bijective între anumite mulţimi. De asemenea, un model matematic ideal M al unui sistem fizic F presupune existenţa unei bijecţii f între entităţi fizice ale lui F şi obiecte matematice (numere, funcţii, matrici etc.) legate de modelul M. Prin aplicaţia f se traduc matematic legi fizice, determinări calitative sau cantitative etc, care sunt prelucrate în M, iar datele finale obţinute se interpretează (prin f^{-1}) în termenii sistemului fizic F considerat. Această interpretare este desigur imperfectă, grosieră, dar poate fi precizată în contexte fizice concrete (fig. I.6).

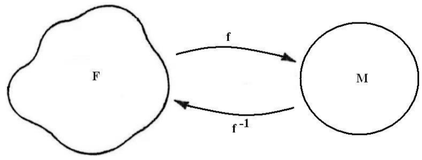


Fig. I.6

1.1.2 Imagini directe şi imagini inverse de submulţimi printr-o aplicaţie

Fie $f : M \to N$ o aplicaţie fixată.

Definiţia 1.4. *Pentru orice submulţime $A \subset M$, submulţimea lui N*

$$f(A) \stackrel{\Delta}{=} \{y \in N | (\exists) x \in A \text{ astfel încât } \ y = f(x)\}$$

se numeşte **imaginea directă a lui A prin f**.

Aşadar, $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$. Mulţimea $f(M)$ se numeşte *domeniul strict* de valori al lui f şi este uneori notată cu $\mathrm{Im}\, f$ (imaginea lui f). Aplicaţia $M \to f(M)$, $x \mapsto f(x)$ este evident surjectivă şi se numeşte *corestricţia lui f*. Se observă că aplicaţia f iniţială este surjectivă dacă şi numai dacă $\mathrm{Im}\, f = N$.

Definiţia 1.5. *Pentru orice submulţime $B \subset N$, submulţimea lui M*

$$f^{-1}(B) \stackrel{\Delta}{=} \{x \in M | f(x) \in B\}$$

se numeşte **imaginea inversă** *(sau* **preimaginea***)* **lui B prin f**.

Este evident că $f^{-1}(N) = M$. Dacă $y \in N$ este un element fixat, mulţimea $f^{-1}(y) = \{x \in M | f(x) = y\}$ se numeşte *fibra lui f în y*. Aplicaţia f este surjectivă dacă şi numai dacă pentru orice $y \in N$ fibra lui f în y este o mulţime nevidă.

Proprietăţile principale ale imaginilor directe şi inverse de submulţimi sunt cuprinse în

Teorema 1.2. *Fie $f : M \to N$ o aplicaţie fixată.*

(a) *Aplicaţiile $\mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$, $A \mapsto f(A)$ şi $\mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(M)$, $B \mapsto f^{-1}(B)$ păstrează incluziunile*;

(b) *Dacă A_1, A_2 sunt mulţimi ale lui M, atunci*

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \text{ şi } f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$$

(c) *Dacă B_1, B_2 sunt submulţimi ale lui N, atunci*

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \text{ şi } f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

(d) *Dacă $B \subset N$, atunci $\complement f^{-1}(B) = f^{-1}(\complement B)$, adică*

$$M \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(N \setminus B).$$

Demonstraţie. (a) Trebuie arătat că dacă $A_1 \subset A_2 \subset M$, atunci $f(A_1) \subset f(A_2)$ şi că dacă $B_1 \subset B_2 \subset N$, atunci $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. Într-adevăr, fie $(\forall) z \in f(A_1)$ deci $z = f(x)$ cu $x \in A_1$. Atunci $x \in A_2$ (căci $A_1 \subset A_2$), deci $z \in f(A_2)$ şi ca atare, $f(A_1) \subset f(A_2)$. În mod similar, fie $(\forall) u \in f^{-1}(B_1)$ deci $f(u) \in B_1$. Dar $B_1 \subset B_2$, deci $f(u) \in B_2$, adică $u \in f^{-1}(B_2)$ şi ca atare, $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(b) Deoarece $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ şi $A_1 \cap A_2 \subset A_2$, rezultă că $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$ şi $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$, conform (a). Aşadar $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

Egalitatea de mulţimi $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ se probează prin dublă incluziune, ca şi egalităţile de la punctul (c).

(d) Fie $(\forall) x \in \complement f^{-1}(B)$. Atunci $x \notin f^{-1}(B)$, adică $f(x) \notin B$, $f(x) \in \complement B$, deci $x \in f^{-1}(\complement B)$. Aşadar, $\complement f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\complement B)$. Pentru a proba cealaltă incluziune, fie $(\forall) z \in f^{-1}(\complement B)$ deci $f(z) \in \complement B$, $f(z) \notin B$, deci $z \notin f^{-1}(B)$, $z \in \complement f^{-1}(B)$ şi ca atare, $f^{-1}(\complement B) \subset \complement f^{-1}(B)$.

Se observă că imaginea inversă are proprietăţi "mai bune" decât ale imaginii directe.

Exemple. a) Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ şi $A = [-3, 2]$. În acest caz, avem $f(A) = [0, 9]$ şi $f^{-1}(A) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

b) Fie aplicaţia $\mathcal{I} : C^0_{[0,1]} \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. Această aplicaţie este surjectivă, deoarece pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, există chiar o infinitate de funcţii $f \in C^0_{[0,1]}$ astfel încât $\mathcal{I}(f) = \lambda$, adică aria dintre graficul lui f, axa Ox şi dreptele $x = 0$, $x = 1$ să fie egală cu λ. Dacă P este mulţimea restricţiilor la intervalul [0,1] de funcţii de gradul întâi, atunci evident imaginea directă a lui P este $\mathcal{I}(P) = \mathbb{R}$.

c) Fie $\mathcal{D} : C^1_{[0,1]} \to C^0_{[0,1]}$ operatorul de derivare. Această aplicaţie este surjectivă (deoarece orice funcţie continuă pe [0,1] are primitivă).

Pentru orice funcţie continuă $f \in C^0_{[0,1]}$ fibra $\mathcal{D}^{-1}(f)$ este mulţimea tuturor primitivelor lui f pe intervalul [0,1].

Observaţii. 1) Fie $f : M \to N$ o aplicaţie injectivă; atunci aplicaţia de corestricţie $M \to f(M)$, $x \mapsto f(x)$ este bijectivă şi deoarece $f(M) \subset N$ rezultă că există o corespondenţă bijectivă între M şi o submulţime a lui N. Mai general, dacă $f : M \to N$ este o aplicaţie oarecare, atunci există aplicaţii φ, ψ astfel încât $f = \psi \circ \varphi$, φ să fie surjectivă şi ψ injectivă (*descompunerea canonică a lui* f); anume, se consideră $\varphi : M \to f(M)$, $x \mapsto f(x)$, corestricţia lui f şi $\psi : f(M) \to N$, $y \mapsto y$, aplicaţia de incluziune.

Remarcăm de asemenea că dacă $f : M \to N$ este o aplicaţie oarecare, atunci prin restricţii şi corestricţii convenabile ale lui f se obţine o aplicaţie bijectivă. De exemplu, funcţia $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ nu este nici injectivă, nici surjectivă, dar funcţia $\sin : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ este bijectivă (ca de obicei, am utilizat aceeaşi notaţie "sin" pentru funcţii distincte).

2) Dacă $f : M \to N$ este o aplicaţie bijectivă şi dacă $B \subset N$, atunci notaţia $f^{-1}(B)$ poate fi interpretată în două sensuri: ca imagine inversă a lui B prin f şi ca imagine directă a lui B prin aplicaţia f^{-1}. Din fericire acestea coincid, adică

$$\{x \in M | f(x) \in B\} = \{f^{-1}(y) | y \in B\}.$$

1.1.3 Relaţii de ordine; margini

Există multe proprietăţi care angajează perechi de elemente dintr-o mulţime fixată. Astfel, faptul că 14 este divizibil cu 7 nu este o proprietate a lui 14 sau a lui 7 separat, ci a perechii (14, 7) de numere întregi, după cum inegalitatea $5 < 9$ este o proprietate a perechii (5,9). Dacă M este o mulţime fixată, orice colecţie R de perechi ordonate de elemente din M (adică $R \subset M \times M$) se numeşte *relaţie binară* pe M. De exemplu luând $M = \mathbb{Z}$ şi $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x$ este divizibil cu $y\}$ avem 14 R 7, deoarece $(14, 7) \in R$ şi 14 $\not R$ 8; în mod similar, luând $M = \mathbb{R}$ şi $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x < y\}$, avem 5 S 8 dar 5 $\not S$ 4.

Definiţia 1.6. *Fie M o mulţime fixată şi R a relaţie binară pe M. R se numeşte* **relaţie de ordine parţială** *dacă este reflexivă ($x\,R\,x$, $(\forall) x \in M$), tranzitivă (dacă $x, y, z \in M$, $x\,R\,y$, $y\,R\,z$, atunci $x\,R\,z$) şi antisimetrică (dacă $x, y \in M$, $x\,R\,y$ şi $y\,R\,x$, atunci $x = y$). O relaţie de ordine parţială R pe M cu proprietatea că pentru orice $x, y \in M$ avem fie $x\,R\,y$, fie $y\,R\,x$, se numeşte* **relaţie de ordine totală**.

Exemple. a) fie E o mulţime fixată şi $M = \mathcal{P}(E)$; relaţia de incluziune între părţile lui E este o relaţie de ordine parţială, care nu este totală.

b) Pe aceeaşi mulţime pot coexista două relaţii de ordine distincte. Fie $M = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$; definim relaţiile R, S pe M astfel: pentru $x, y \in M$, $x\, R\, y \overset{\Delta}{\longleftrightarrow} \{x \leq y\}$, $x\, S\, y \overset{\Delta}{\longleftrightarrow} \{$ y este divizibil cu $x\}$. Este evident că R şi S sunt relaţii reflexive, tranzitive şi antisimetrice deci relaţii de ordine parţială; în plus R este relaţie de ordine totală (numită ordinea uzuală).

c) Fie $M = \mathrm{Hom}\,(X, \mathbb{R})$ mulţimea funcţiilor reale definite pe o mulţime X. Se poate defini relaţia de ordine parţială pe M

$$f\, R\, g \longleftrightarrow f \leq g \quad (\text{adică } f(x) \leq g(x), \quad (\forall) x \in X).$$

Definiţia 1.7. *O mulţime M se numeşte* **ordonată** *dacă pe M este fixată o relaţie de ordine parţială (pe care o notăm $\leq$). Fie $(M, \leq)$ o mulţime ordonată şi $P \subset M$ o submulţime fixată. Se numeşte* **majorant al lui** P *orice element $x \in M$ astfel încât $z \leq x$ pentru orice $z \in P$; se spune că P* **are cel mai mare element** *dacă există un majorant al lui P aparţinând lui P.*

Dacă există un cel mai mare element al lui P, acesta este unic şi este notat $\max P$; într-adevăr, dacă m_1, m_2 ar fi ambele în situaţia de cel mai mare element al lui P, atunci $m_1 \leq m_2$ şi $m_2 \leq m_1$ deci din antisimetrie rezultă $m_1 = m_2$.

Se definesc în mod similar noţiunile de **minorant** şi de **cel mai mic element** (notat $\min P$) pentru o submulţime P a unei mulţimi ordonate $(M, \leq)$. Dacă o submulţime $P \subset M$ are majoranţi (respectiv minoranţi), atunci P se numeşte **mărginită superior** (respectiv **mărginită inferior**); mulţimea P se numeşte **mărginită** dacă are majoranţi şi minoranţi (adică este mărginită superior şi inferior).

Exemple. a) Considerăm mulţimea $M = \mathbb{Z}$ cu relaţia de ordine uzuală $R =\leq$ şi fie submulţimile ei $P_1 = \mathbb{N}$, $P_2 = \{4, 5, 7, 100\}$, $P_3 =$ mulţimea numerelor prime. P_1 nu are majoranţi şi 0 este cel mai mic element al lui P_1. Mulţimea P_2 este mărginită având cel mai mic element 4 şi cel mai mare element 100. Mulţimea P_3 este nemărginită, are cel mai mic element 2 etc.

b) Fie $M = \mathbb{N}^*$ cu relaţia de divizibilitate ($x \leq y \leftrightarrow y$ este divizibil cu x) şi fie $P = \{3, 8, 10\}$. Majoranţii lui P sunt toate numerele naturale divizibile cu 3, 8, 10 (adică divizibile cu 120) şi P are 1 ca minorant. Submulţimea $P \subset M$ nu are nici cel mai mare element şi nici cel mai mic element.

c) Fie E o mulţime fixată şi $M = \mathcal{P}(E)$, ordonată cu relaţia de incluziune. Dacă $F_1, F_2 \in M$ adică F_1, F_2 sunt submulţimi ale lui E şi dacă $P = \{F_1, F_2\} \subset M$, atunci majoranţii lui P sunt submulţimile lui E care conţin F_1 şi F_2, deci cel mai mic majorant al lui P va fi $F_1 \cup F_2$, iar minoranţii lui P sunt submulţimile lui E incluse în F_1 şi în F_2, deci cel mai mare minorant al lui P va fi $F_1 \cap F_2$.

Definiţia 1.8. *Fie $(M, \leq)$ o mulţime ordonată şi $P \subset M$ o submulţime. Se spune că P* **are margine superioară** *dacă P are majoranţi şi dacă mulţimea (nevidă) a majoranţilor lui P are cel mai mic element, notat* $\sup P$. *Se spune că P* **are margine inferioară** *dacă P are minoranţi şi mulţimea minoranţilor lui P are cel mai mare element, notat* $\inf P$.

Aşadar, dacă există, $\sup P$ este cel mai mic majorant al lui P, iar $\inf P$ este cel mai mare minorant al lui P şi în particular, sunt unice. Dacă P are cel mai mare element (respectiv cel mai mic element), atunci $\sup P = \max P$ (respectiv $\inf P = \min P$).

Exemple. a) Fie E o mulţime fixată şi $M = \mathcal{P}(E)$, ordonată prin incluziune. Fixăm $P \subset M$, deci P este o colecţie de submulţimi al lui E. Majoranţii (respectiv minoranţii) lui P sunt părţile lui E care includ toate mulţimile din colecţia P (respectiv sunt incluse în toate mulţimile din P). În plus, P are atât margine superioară, cât şi margine inferioară, anume

$$\sup P = \bigcup_{A \in P} A, \quad \inf P = \bigcap_{A \in P} A.$$

b) Fie $M = \mathbb{Q}$ cu ordinea uzuală ($\leq$) şi $P = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$. Evident, P este mulţime mărginită, dar nu are nici margine superioară, nici margine inferioară în M. Dacă $M = \mathbb{Z}$ cu ordinea uzuală ($\leq$), atunci orice submulţime mărginită P a lui $\mathbb{Z}$ are atât margine inferioară ($\inf P = \min P$) cât şi margine superioară ($\sup P = \max P$).

O proprietate extrem de importantă a mulţimii $\mathbb{R}$ este aceea că pentru orice submulţime nevidă mărginită superior (respectiv inferior) $A \subset \mathbb{R}$ există $\sup A$ (respectiv $\inf A$), relativ la relaţia de ordine uzuală $\leq$; astfel, dacă $M = \mathbb{R}$ şi $P = \{x \in \mathbb{R} | x^2 < 2\}$, atunci $\sup P = \sqrt{2}$, $\inf P = -\sqrt{2}$ (dar nu există $\max P$, $\min P$) iar dacă $Q = \{x \in \mathbb{R} | x^2 \leq 2\}$, atunci $\sup Q = \max Q = \sqrt{2}$ şi $\inf Q = \min Q = -\sqrt{2}$.

Dacă $f : X \to \mathbb{R}$ este o funcţie reală şi dacă domeniul strict de valori $f(X) = \{f(x) | x \in X\}$ are margine superioară (respectiv inferioară) atunci se notează

$$\sup_x f = \sup f(X) \quad (\text{respectiv } \inf_x f = \inf f(X)).$$

Dacă există, $\sup\limits_x f$, $\inf\limits_x f$ sunt numere reale unice, numite **marginile lui** f **pe** X sau **extremele globale ale lui** f **pe** X.

Aplicaţie

Se numeşte *mulţime de momente* (sau *mulţime-timp*) orice mulţime $\mathcal{T}$ pe care este definită o relaţie de ordine totală (notată "$\leq$"). Elementele lui $\mathcal{T}$ se numesc *momente*. Exemplele tipice de mulţimi-timp sunt submulţimi ale lui $\mathbb{R}$; de exemplu $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ (care admite un cel mai mic moment, numit moment iniţial şi anume $t = 0$), $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$, $\mathcal{T} = [a, b]$ (în ultimul caz există un moment iniţial a şi un moment final b). Dacă $\mathcal{T}$ este o mulţime finită, de exemplu $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, N - 1\}$, atunci se spune că timpul este *finit.* Dacă $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}$ se spune că timpul este *discret* iar dacă $\mathcal{T}$ este un interval al lui $\mathbb{R}$, timpul este *continuu* (sau mai corect, *continual*).

Fie $(\mathcal{T}, \leq)$ o mulţime fixată de momente. Se numeşte *semnal real* relativ la $\mathcal{T}$ orice funcţie $s : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$; pentru orice moment $a \in \mathcal{T}$, numărul $s(a)$ se numeşte *eşantionul* semnalului s la momentul a. Aşadar, semnalele reale sunt cazuri particulare de funcţii numerice. Se pot considera *semnale discrete* sau *semnale continuale*, după cum timpul este discret sau continuu. Un semnal discret $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ se identifică cu şirul $\{s(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ al eşantioanelor sale.

Definiţia anterioară a conceptului de semnal este totuşi restrictivă, deoarece nu cuprinde cazul impulsurilor (studiat în cadrul teoriei distribuţiilor, în capitolul VI) şi cazul semalelor multidimensioale. Printre semnalele continuale, exemple importante sunt *treapta unitate* σ a lui O. HEAVISIDE (1850-1925), definită prin

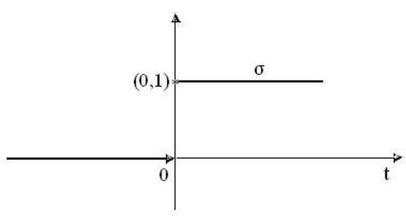


Fig. I.7

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t < 0 \\ 1 & \text{dacă} \quad t \geq 0, \end{cases}$$

având graficul din fig. I.7 şi *funcţia de fantă* (sau *de eşantionare*) "sa" : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

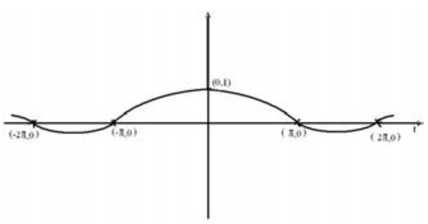


Fig. I.8

$$sa\,(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{dacă} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{dacă} \quad t = 0, \end{cases}$$

având graficul indicat în fig. I.8.

Dacă $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este un semnal continual şi $a < b$ sunt momente fixate, se numeşte *secvenţa lui s pe intervalul* $[a, b]$ semnalul

$$s_{a,b}(t) = [\sigma(t - a) - \sigma(t - b)] \cdot s(t);$$

aşadar

$$s_{a,b}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t < a \text{ sau dacă } t \geq b \\ s(t) & \text{dacă} \qquad t \in [a, b). \end{cases}$$

Dacă $s(t) = A$ constant, atunci $s_{a,b}$ se numeşte semnal ”dreptunghiular” pe $[a, b]$ având amplitudinea A; figura I.9c.

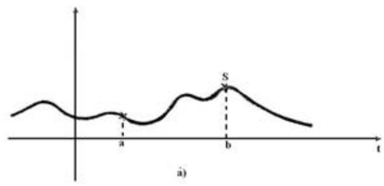


Fig. I.9a

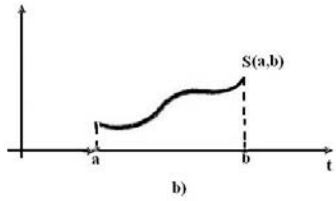


Fig. I.9b

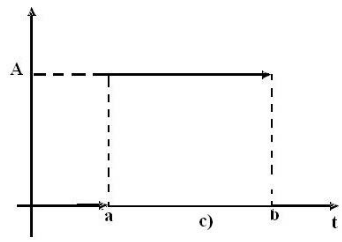


Fig. I.9c

1.1.4 Exerciţii

1. Fie M o mulţime şi $f : M \to M$ a aplicaţie. Să se arate că dacă $f \circ f = 1_M$, atunci aplicaţia f este bijectivă; dar reciproc ? Să se probeze că pentru $M = [0, 1]$ funcţia reală $f : M \to M$ definită prin $f(x) = (1 - x^n)^{1/n}$, $n \geq 1$ întreg fixat, satisface relaţia $f \circ f = 1_M$.

2. Să se arate că aplicaţia

$$\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (k, l) \mapsto \frac{(k + l)(k + l + 1)}{2} + k$$

este bijectivă.

3. Fie M o mulţime nevidă. Să se arate că nu există nici o aplicaţie surjectivă $M \to \mathcal{P}(M)$.

4. Fie E o mulţime fixată şi $\{P_n\}_{n\geq 0}$ un şir de părţi ale lui E. Se notează

$$\underline{\lim}\, P_n = \bigcup_{m\geq 0} \bigcap_{n\geq m} P_n\ , \overline{\lim}\, P_n = \bigcap_{m\geq 0} \bigcup_{n\geq m} P_n\ .$$

a) Să se arate că

$$\bigcap_{n\geq 0} P_n \subset \underline{\lim}\, P_n \subset \overline{\lim}\, P_n \subset \bigcup_{n\geq 0} P_n \quad \text{şi} \quad \underline{\lim}\, \complement P_n = \complement\,(\overline{\lim} P_n).$$

b) Şirul $\{P_n\}_{n\geq 0}$ se numeşte *convergent* dacă $\underline{\lim}\, P_n = \overline{\lim}\, P_n$. Să se arate că dacă şirul este crescător, adică $P_n \subset P_{n+1}$, $(\forall) n \geq 0$ (respectiv descrescător, adică $P_n \supset P_{n+1}$, $(\forall)\, n \geq 0$) atunci el este convergent.

($\underline{\lim}$ şi $\overline{\lim}$ poartă numele de *limită inferioară* şi *limită superioară*).

1.2 Mulţimi numărabile, algoritmi

1.2.1 Mulţimea $\mathbb{N}$; cardinale

Am considerat ca dată mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale; proprietăţile ei intrinseci sunt următoarele trei, cunoscute ca axiomele lui G. Peano (1858-1932):

I. există o funcţie injectivă $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$ (numită *funcţia succesor*);

II. orice element din $\mathbb{N}$, cu excepţia lui 0, este succesorul unui element;

III. dacă $A \subset \mathbb{N}$ este o submulţime astfel încât $0 \in A$ şi $s(A) \subset A$ (adică $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$), atunci $A = \mathbb{N}$.

Din proprietatea III decurge *principiul inducţiei matematice*: fie $P(n)$ o proprietate relativ la numărul n astfel încât $P(0)$ să fie adevărată şi să aibă loc implicaţia $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $(\forall) k \in \mathbb{N}$; considerând mulţimea $A = \{n \in \mathbb{N} | P(n)$ este adevărată $\}$, rezultă că $0 \in A$ şi $s(A) \subset A$ deci conform III, $A = \mathbb{N}$, adică $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Este evident că orice submulţime $A \subset \mathbb{N}$ are un cel mai mic element. Iată o consedinţă a acestui fapt.

Teorema 2.1. *Pentru orice submulţime infinită $A \subset \mathbb{N}$ există o aplicaţie bijectivă de la $\mathbb{N}$ la A.*

Demnonstraţie. Evident, $(\forall) n \in \mathbb{N} (\exists) k \in A$ astfel încât $k > n$ (deoarece A este infinită). Construim prin inducţie aplicaţia $\varphi : \mathbb{N} \to A$ definită prin

$$\varphi(0) = \min_{k\in A} k \quad \text{şi} \quad \varphi(m + 1) = \min_{k\in A, k>\varphi(m)} k.$$

Aşadar, $\varphi(m+1) > \varphi(m)$, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, deci φ este injectivă. Arătăm că φ este surjectivă; pentru orice $a \in A$ fixat, notăm $\mu = \min\{m \in \mathbb{N} | \varphi(m) \geq a\}$. Dacă $\mu \geq 1$, atunci $\varphi(\mu - 1) < a \leq \varphi(\mu)$, deci $a = \varphi(\mu)$ (deoarece $a \in A$), iar dacă $\mu = 0$, atunci $\varphi(0) \geq a$ şi cum $a \in A$, rezultă $a = \varphi(0)$. Aşadar, φ este şi surjectivă.

În fond construcţia anterioară constă în ordonarea crescătoare a tuturor elementelor mulţimii A

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots (\text{notând } \varphi(n) = a_n, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}).$$

Aritmetica elementară a numerelor naturale are o extindere importantă la o aritmetică a cardinalelor, datorată lui G. Cantor (1845-1918).

Fixăm un univers de mulţimi $\mathcal{U}$, care conţine mulţimile finite, submulţimile lui $\mathbb{R}$, precum şi mulţimile obţinute din acestea prin operaţiile uzuale (reuniune, intersecţie, complementară, produs cartezian etc.); universul $\mathcal{U}$ conţine toate mulţimile care pot apărea în descrierile matematice care urmează.

Definiţia 2.1. *Două mulţimi P, Q din universul $\mathcal{U}$ se numesc* **echipotente** *dacă există o aplicaţie bijectivă $P \to Q$; se scrie $P \sim Q$.*

Relaţia "$\sim$" pe $\mathcal{U}$ este reflexivă ($P \sim P$) pentru orice mulţime P deoarece aplicaţia identică 1_P este bijectivă), simetrică (dacă $P \sim Q$, atunci există o bijecţie $P \xrightarrow{\varphi} Q$ deci conform corolarului teoremei 1.1, aplicaţia $\varphi^{-1} : Q \to P$ este bijectivă, deci $Q \sim P$) şi tranzitivă (dacă $P \sim Q$, $Q \sim R$ şi dacă $P \xrightarrow{u} Q$, $Q \xrightarrow{v} R$ sunt bijecţii, atunci $v \circ u$ este bijecţie, deci $P \sim R$), deci este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{U}$. Pentru orice mulţime P din $\mathcal{U}$, se numeşte **cardinalul lui** P, notat $|P|$, clasa de echivalenţă a mulţimii P, deci colecţia tuturor mulţimilor echipotente cu P. Aşadar, dacă $P, Q \in \mathcal{U}$, atunci $|P| = |Q| \leftrightarrow P \sim Q$.

Este evident că două mulţimi finite sunt echipotente dacă şi numai dacă au acelaşi număr de elemente. Dacă P este o mulţime finită cu $n \geq 1$ elemente, atunci există a bijecţie $\varphi : I_n \to P$, unde $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Notând $x_k = \varphi(k)$, $1 \leq k \leq n$, rezultă că $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; se mai spune că elementele lui P sunt "numerotate". Cardinalele naturale finite pot fi puse în corespondenţă bijectivă cu numerele naturale (prin asocierea $|P| \mapsto$ numărul de elemente al lui P).

Indicăm succint regulile de bază ale aritmeticii cardinalelor. Fie P şi Q două mulţimi oarecare din $\mathcal{U}, p = |P|$ şi $q = |Q|$. Atunci se definesc:

• egalitatea $p = q \overset{\triangle}{\longleftrightarrow} P \sim Q$;

• suma $p + q \overset{\triangle}{=} |P \bigcup_d Q|$, unde $|P \bigcup_d Q| = (\{0\} \times P) \cup (|\{1\} \times Q)$ este reuniunea disjunctă a mulţimilor P şi Q.

• produsul $p\, q \overset{\triangle}{=} |P \times Q|$; $q^p \overset{\triangle}{=} |\mathrm{Hom}\,(P, Q)|$;

• inegalitatea $p \leq q \overset{\triangle}{\longleftrightarrow} P$ este echipotentă cu o submulţime a lui Q (adică există o aplicaţie injectivă $P \to Q$) etc. Acestea extind la cardinale oarecare operaţiile uzuale cu numere naturale.

1.2.2 Mulţimi numărabile

Definiţia 2.2. *Se numeşte* **mulţime numărabilă** *orice mulţime echipotentă cu $\mathbb{N}$; se notează $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ "(alef zero)". O mulţime care este finită sau numărabilă se numeşte* **cel mult numărabilă**.

Aşadar, dacă P este o mulţime numărabilă, atunci există o aplicaţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to P$ şi fie $x_n = f(n)$, $n \geq 0$. Avem $x_m \neq x_n$ pentru $m \neq n$ şi orice element din P coincide cu un x_n, deci $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, adică *elementele oricărei mulţimi numărabile sunt termenii unui şir*; reciproc, este evident că mulţimea termenilor oricărui şir este cel mult numărabilă. Conform teoremei 2.1, orice submulţime a unei mulţimi numărabile este finită sau numărabilă.

Lema 3. *Fie $f : P \to Q$ o aplicaţie oarecare.*

(a) *Dacă f este injectivă şi Q este mulţime numărabilă, atunci P este cel mult numărabilă*;

(b) *dacă f este surjectivă şi P este mulţime numărabilă, atunci Q este cel mult numărabilă.*

Demonstraţie. (a) Conform ipotezei, există bijecţie $g : Q \to \mathbb{N}$, deci aplicaţia $h = g \circ f$ este injectivă, $h : P \to \mathbb{N}$. Atunci P este echipotentă cu submulţimea $h(P)$ a lui $\mathbb{N}$. Conform teoremei 2.1, $h(P)$ este finită sau numărabilă, deci P este cel mult numărabilă.

(b) Fie $(\forall)y \in Q$ fixat; cum f este surjectivă, fibra $f^{-1}(y)$ este nevidă şi fixăm un singur element ξ_y al ei. Aşadar, $\xi_y \in P$ şi $f(\xi_y) = y$. Aplicaţia $Q \to P$, $y \mapsto \xi_y$ este evident injectivă (căci dacă $\xi_y = \xi_z$ cu $y, z \in Q$, atunci $f(\xi_y) = f(\xi_z)$, adică $y = z$). Folosind rezultatul probat în (a) şi ipoteza că P este numărabilă, rezultă că mulţimea Q este cel mult numărabilă.

Teorema 2.2. *Produsul cartezian a două mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă (adică $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$).*

Demonstraţie. Mai întâi, se observă că aplicaţia $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto 2^m \cdot 3^n$ este injectivă. Într-adevăr, dacă $\varphi(m, n) = \varphi(m_1, n_1)$, cu $m, m_1, n, n_1 \in \mathbb{N}$, atunci $2^m \cdot 3^n = 2^{m_1} \cdot 3^{n_1}$. Dacă $m > m_1$, rezultă $2^{m-m_1} \cdot 3^n = 3^{n_1}$, adică 3^{n_1} este divizibil cu 2, absurd; dacă $m < m_1$, ar rezulta $2^{m_1-m} \cdot 3^{n_1} = 3^n$, adică 3^n este divizibil cu 2, absurd. Rămâne ca unică posibilitate $m = m_1$ şi din relaţia $2^m \cdot 3^n = 2^{m_1} \cdot 3^{n_1}$, rezultă $n = n_1$, deci $(m, n) = (m_1, n_1)$, adică φ este aplicaţie injectivă.

Conform lemei 3, (a), mulţimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ar rezulta cel mult numărabilă şi fiind infinită, ea rezultă numărabilă, adică $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.

Fie acum P şi Q două mulţimi numărabile oarecare şi $\mathbb{N} \xrightarrow{f} P$, $\mathbb{N} \xrightarrow{g} Q$ aplicaţii bijective. Atunci aplicaţia

$$f * g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to P \times Q,\ (x, y) \mapsto (f(x), g(y))$$

este evident bijectivă, deci $|P \times Q| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.

Teorema 2.3. *Fie $\{P_n\}_{n\geq 0}$ un şir de mulţimi numărabile. Atunci mulţimea $P = \bigcup_{n\geq 0} P_n$ este numărabilă.*

Demonstraţie. Conform ipotezei, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există câte o bijecţie $\varphi_n : \mathbb{N} \to P_n$. Se poate atunci defini aplicaţia

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to P,\ (m, n) \mapsto \varphi_n(m).$$

Această aplicaţie este surjectivă, deoarece $(\forall)y \in P$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $y \in P_n$ (căci $P = \bigcup\limits_{n\geq 0} P_n$) şi cum φ_n este bijectivă, $(\exists)m \in \mathbb{N}$ astfel încât $y = \varphi_n(m)$, adică $y = f(m, n)$.

Aplicaţia f fiind surjectivă, lema 3(b) şi teorema 2.2 arată că P este cel mult numărabilă. Dar $P \supset P_1$, deci P este mulţime infinită şi ca atare, rezultă că P este numărabilă.

Ca o consecinţă directă teoremei 2.3, se obţine următorul

Corolar. *Orice reuniune finită de mulţimi numărabile este numărabilă; orice reuniune numărabilă de mulţimi finite este cel mult numărabilă.*

Teorema 2.4. *Mulţimile $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$ sunt numărabile.*

Demonstraţie. În §1.1 am indicat explicit o aplicaţie bijectivă $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, deci $\mathbb{Z}$ este numărabilă. [Altă demonstraţie se obţine observând că $\mathbb{Z}$ este reuniune numărabilă de mulţimi finite, anume $\mathbb{Z} = \bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$, unde $A_n = \{-n, n\}$].

Pe de altă parte, mulţimea $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ este numărabilă (căci există bijecţia $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, $n \mapsto n + 1$), deci mulţimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ este numărabilă, conform teoremei 2.2. Faptul că mulţimea $\mathbb{Q}$ este numărabilă, rezultă aplicând lema 3, (b) aplicaţiei evident surjective

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}, \quad (p, q) \mapsto p/q.$$

Dăm în continuare câteva elemente de combinatorică, referitoare la cardinalitatea anumitor mulţimi remarcabile.

A. Reamintim că dacă M şi N sunt două mulţimi finite, nevide şi $|M| = m$, $|N| = n$, atunci $|M \cup N| = m+n-|M \cap N|$, $|M \times N| = mn$, $|\text{Hom}(M, N)| = n^m$. Vom nota cu $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ mulţimea având două elemente, 0, şi 1, numită *codul binar.*

Teorema 2.5. *Fie M o mulţime oarecare. Atunci există o bijecţie naturală*

$$\chi : \mathcal{P}(M) \to \text{Hom}\,(M, \mathbb{B}).$$

Demonstraţie. Pentru orice submulţime $N \subset M$ notăm $\chi_N : M \to \mathbb{B}$ aplicaţia definită prin

$$\chi_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad x \in N, \\ 0, & \text{dacă} \quad x \in M \setminus N, \end{cases}$$

numită *funcţia caracteristică a lui N*. Dacă $N_1, N_2 \in \mathcal{P}(M)$, $\chi_{N_1} = \chi_{N_2}$ şi $x \in M$, atunci $x \in N_1 \leftrightarrow \chi_{N_1}(x) = 1 \leftrightarrow \chi_{N_2}(x) = 1 \leftrightarrow x \in N_2$, deci $N_1 = N_2$. Aşadar, aplicaţia χ este injectivă. Pe de altă parte, pentru orice funcţie $f \in \text{Hom}\,(M, \mathbb{B})$, notăm $N = \{x \in M | f(x) = 1\}$; atunci dacă $x \in M$, avem $\chi_N(x) = 1 \leftrightarrow x \in N \leftrightarrow f(x) = 1$ şi $\chi_N(x) = 0 \leftrightarrow x \notin N \leftrightarrow f(x) = 0$, deci $\chi_N = f$. Aşadar aplicaţia χ este bijectivă.

Ca o consecinţă, rezultă că dacă $|M| = m$, atunci $|\mathcal{P}(M)| = 2^m$. Vom vedea ulterior şi alte interpretări ale teoremei 2.5.

Indicăm câteva proprietăţi ale funcţiei caracteristice a submulţimilor.

Teorema 2.6. *Fie o mulţime fixată şi P, Q submulţimi oarecare ale lui M.*
(a) $P = Q \leftrightarrow \chi_P = \chi_Q$;
(b) $\chi_{P \cap Q} = \chi_P \cdot \chi_Q$, $\chi_{p \cup Q} = \chi_P + \chi_Q - \chi_P \cdot \chi_Q$;
(c) $\chi_{P \setminus Q} = \chi_P - \chi_P \cdot \chi_Q$, $\chi_{\complement P} = 1 - \chi_P$.
(Mulţimea $\mathbb{B}$ este aici considerată ca o submulţime a lui $\mathbb{N}$, adică $0, 1 \in \mathbb{N}$).

Demonstraţie. Afirmaţia (a) este evidentă.

(b) Dacă $x \in M$ este un element oarecare, avem de arătat că $\chi_{P \cap Q}(x) = \chi_P(x) \cdot \chi_Q(x)$ şi $\chi_{P \cup Q}(x) = \chi_P(x) + \chi_Q(x) - \chi_P(x) \cdot \chi_Q(x)$; sunt de analizat patru cazuri: dacă $x \in P$ şi $x \in Q$, aceste relaţii devin $1 = 1.1$ şi $1 = 1 + 0 - 0$ etc. În mod similar se procedează pentru (c).

B. Pentru orice întreg $r \geq 1$ notăm $\mathbb{N}_r = \{1, 2, \ldots, r\}$. Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o mulţime finită oarecare (deci $|A| = n$), numită ad-hoc *alfabet*; elementele lui A se numesc *litere*, iar funcţiile $\mathbb{N}_r \to A$ se numesc *cuvinte de lungime r în alfabetul A*. Aşadar, pentru orice cuvânt $c : \mathbb{N}_r \to A$, notând $c_k = c(k)$, $1 \leq k \leq r$, c se identifică cu şirul finit de litere $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ şi se mai scrie $c = c_1 c_2 \ldots c_r$. Deci orice cuvânt se reprezintă prin juxtapunere de litere. Două cuvinte $c = c_1 \ldots c_r$, $d = d_1 \ldots d_s$ în alfabetul A se consideră *egale* dacă au aceeaşi lungime ($r = s$) şi dacă $c_i = d_i$, $1 \leq i \leq r$ (aceasta rezultă din convenţia de egalitate a două funcţii).

Vom nota cu $C_r(A)$ mulţimea tuturor cuvintelor de lungime r în alfabetul A şi cu A^* mulţimea tuturor cuvintelor în alfabetul A, de orice lungime, la care se adaugă cuvântul vid "$\wedge$" (cuvântul fără litere). Aşadar,

$$A^* = \{\wedge\} \cup C_1(A) \cup C_2(A) \cup \ldots$$

Mulţimea A^* se numeşte *dicţionarul alfabetului A*; orice submulţime $L \subset A^*$ (adică orice colecţie de cuvinte) se numeşte *limbaj în alfabetul A*.

Teorema 2.7. (a) *Pentru orice $r \geq 1$, $|C_r(A)| = n^r$;*
(b) *Dicţionarul A^* este mulţime numărabilă, iar mulţimea limbajelor $\mathcal{P}(A^*)$ nu este numărabilă.*

Demonstraţie. (a) Deoarece $C_r(A) = \text{Hom}\,(\mathbb{N}_r, A)$, rezultă că $|C_r(A)| = |A|^r = n^r$.

(b) Deoarece $A^* = \{\wedge\} \cup \left(\bigcup_{r\geq 1} C_r(A)\right)$, rezultă că dicţionarul A^* este reuniune numărabilă de mulţimi finite, disjuncte două câte două, deci A^* este mulţime numărabilă, conform corolarului teoremei 2.3.

Mulţimea $\mathcal{P}(A^*)$ este evident infinită (deoarece A^* este infinită). Rămâne de arătat că nu există o corespondenţă biunivocă între A^* şi $\mathcal{P}(A^*)$. Dacă prin absurd ar exista o aplicaţie bijectivă $\Phi : A^* \to \mathcal{P}(A^*)$, considerând elementul $L \in \mathcal{P}(A^*)$ definit prin $L \stackrel{\triangle}{=} \{x \in A^* | x \notin \Phi(x)\}$, ar rezulta că există $c \in A^*$ astfel ca $\Phi(c) = L$. Apar două cazuri: dacă $c \in L$, atunci $c \notin \Phi(c)$ şi cum $\Phi(c) = L$, ar rezulta $c \notin L$; dacă $c \notin L$, atunci $c \in \Phi(c) = L$, deci $c \in L$, ajungându-se la contradicţie în ambele situaţii. În concluzie, mulţimea $\mathcal{P}(A^*)$ nu este numărabilă.

[Se poate demonstra un fapt mai precis, anume că $\mathcal{P}(A^*) \sim \mathbb{R}$].

În cazul când $A = \mathbb{B}$, codul binar, dicţionarul $\mathbb{B}^*$ este compus din cuvinte binare (succesiuni finite de 0 şi 1).

Corolar. *Pentru orice $r \geq 1$ există 2^r cuvinte binare de lungime r. Mulţimea cuvintelor binare $\mathbb{B}^*$ este numărabilă, iar mulţimea limbajelor binare $\mathcal{P}(B^*)$ nu este numărabilă.*

1.2.3 Algoritmi şi funcţii recursive

În matematica elementară au fost descrise multe clase de procese algoritmice: operaţii algebrice, extragerea radicalului din numere reale pozitive, descompunerea numerelor întregi în factori, schema lui Horner, aflarea valorii numerice a unor funcţii etc. Termenul de algoritm este inspirat de numele matematicianului arab Al Horezmi (780-850). Conceptul de algoritm a fost studiat intensiv şi multe teoreme de analiză matematică pot fi însoţite în aplicaţii de scheme algoritmice. Există însă şi probleme care nu admit o rezolvare algoritmică.

O preocupare mereu actuală a matematicienilor şi logicienilor este aceea de a preciza conceptul de algoritm, depăşind nivelul euristic şi tocmai aceste cercetări au condus printre altele la toeria maşinilor ideale de calcul şi la teoria funcţiilor recursive. Într-o primă accepţiune, algoritmii sunt proceduri efective, reductibile la instrucţiuni precise pentru realizarea unui şir de operaţii aritmetice şi logice asupra datelor de intrare; mai precis, dacă A este al alfabet fixat, un algoritm în A este un procedeu de transformare a unor cuvinte din A^* în alte cuvinte din A^*:

– *deterministic* (la fiecare moment se îndeplineşte o operaţie bine definită şi se cunoaşte operaţia următoare),

– *rezultativ* (în cazul când procedeul se aplică, se obţine rezultatul urmărit după un număr finit de paşi) şi

– *masiv* (în sensul că se aplică la o întreagă clasă de probleme de un acelaşi tip).

Calculatoarele apar ca realizări fizice ale ”algoritmului de îndeplinire a programului”.

Cele spuse anterior nu se pot substitui unei definiţii riguroase a conceptului de algoritm. În cele ce urmează, studiem algoritmii în $\mathbb{N}$. Se poate dealtfel demonstra că teoria algoritmilor şi teoria funcţiilor recursive sunt esenţialmente echivalente.

Definiţia 2.3. *Fie $p, q \geq 1$ întregi oarecare. Orice funcţie $f : A \to \mathbb{N}^q$ definită pe o submulţime $A \subset \mathbb{N}^p$ se numeşte* **funcţie aritmetică**.

Aşadar, oricărui sistem ordonat de p numere naturale $x = (x_1, \ldots, x_p) \in A$ îi corespunde prin f un sistem ordonat de q numere naturale bine determinat $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x))$, unde $f_1, \ldots, f_q : A \to \mathbb{N}$ sunt funcţii cu valori naturale, numite *componentele lui f*.

Funcţiile aritmetice $\mathbb{N}^p \to \mathbb{N}^q$ definite pe întreaga mulţime $\mathbb{N}^p$ se numesc *totale*, iar celelalte se numesc *parţiale*.

Cazul cel mai important îl constituie cazul $q = 1$ al funcţiilor aritmetice cu valori în $\mathbb{N}$.

Exemple. a) Se numesc *funcţii de bază* următoarele trei tipuri de funcţii aritmetice: funcţia succesor $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x + 1$; funcţiile constante $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto k$ (k fiind un număr fixat) şi proiecţiile canonice $p_i^r : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$, $(x_1, \ldots, x_r) \mapsto x_i$, $1 \le i \le r$.

b) Funcţia radical este parţială, deoarece este definită doar pe submulţimea $A = \{0, 1, 4, \ldots, k^2, \ldots\}$ a lui $\mathbb{N}$. În mod similar, funcţia diferenţă $(x, y) \mapsto x-y$ este definită doar pe mulţimea $A = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x \ge y\}$.

c) Fie $r, s, t \ge 1$ întregi şi $A \xrightarrow{F} B \xrightarrow{G} \mathbb{N}^t$ unde $A \subset \mathbb{N}^r$, $B \subset \mathbb{N}^s$. Compunerea $H = G \circ F$ este de asemenea o funcţie aritmetică. Fie $(\forall) x \in A$, $x = (x_1, \ldots, x_r)$, deci $F(x) \in B$, adică $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_s(s))$ unde $f_1, \ldots, f_s : A \to \mathbb{N}$. Dacă $y \in B$, $y = (y_1, \ldots, y_s)$ şi $G(y) = (g_1(y), \ldots, g_t(y))$ unde $g_1, \ldots, g_t : B \to \mathbb{N}$ şi dacă $H(x) = (h_1(x), \ldots, h_t(x))$ unde $h_1, \ldots, h_t : A \to \mathbb{N}$, atunci $h_i(x) = g_i(f_1(x), \ldots, f_s(x))$, $1 \le i \le t$. Operaţia de compunere este uneori numită *substituţie*.

De exemplu, dacă $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, 2xy)$ şi $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(u, v) \mapsto u + zv$, atunci $G \circ F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto (x + y + 4xy)$.

Definiţia 2.4. *Pentru orice două funcţii aritmetice* $f : A \to \mathbb{N}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ *şi* $g : B \to \mathbb{N}$, $(y, z, x_1, \ldots, x_n) \mapsto g(y, z, x_1, \ldots, x_n)$ *unde* $A \subset \mathbb{N}^n$, $B \subset \mathbb{N}^{n+2}$, *se numeşte* **funcţia obţinută din** f, g **prin recursivitate primitivă** *funcţia aritmetică de* $n+1$ *variabile* $k = f \odot g$ *definită pe o anumită submulţime* $C \subset \mathbb{N}^{n+1}$, $h : C \to \mathbb{N}$, *având proprietăţile*

$$\begin{aligned} h(0, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \text{ şi } h(y + 1, x_1, \ldots, x_n) = \\ = g(y, h(y, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{2}$$

pentru orice $x_1, \ldots, x_n$, y *admisibile (adică astfel încât relaţiile anterioare să aibă sens).* y se mai numeşte *variabilă de recursivitate*, iar $x_1, \ldots, x_n$ se numesc *parametri.*

Se acceptă şi cazul $n = 0$ când nu există parametri, unde f este o constantă k; în acest caz relaţiile (2) se înlocuiesc cu

$$h(0) = k \quad \text{şi} \quad h(y + 1) = g(y, h(y)).$$

Este evident că dacă funcţiile f şi g sunt totale, atunci aceeaşi proprietate o are $f \odot g$.

Definiţia 2.5. *Se numeşte* **funcţie primitiv recursivă** *(pe scurt* **p.r.***) orice funcţie totală* $\mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ *care se obţine pornind de la funcţii aritmetice de bază (succesor, constante, proiecţii canonice) printr-un număr finit de compuneri şi recursivităţi primitive, ordinea acestora fiind indiferentă.*

O funcţie aritmetică $F : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}^q$, $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_q(x))$ se numeşte *primitiv recursivă* dacă funcţiile componente $f_i : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$, $1 \le i \le q$ ale lui F sunt p.r. Compunerea a două astfel de funcţii este evident p.r.

Evident, funcţiile de bază sunt p.r.

Teorema 2.9. a) *Mulţimea funcţiilor p.r. este numărabilă*;

b) *Există funcţii aritmetice* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *care nu sunt p.r.*

Demonstraţie. a) Fie $\mathcal{B}$ mulţimea funcţiilor aritmetice de bază; evident, $\mathcal{B}$ este numărabilă. Pentru orice $k \ge 0$ notăm cu $\mathcal{B}_k$ mulţimea tuturor funcţiilor aritmetice care se obţin pornind de la funcţii din $\mathcal{B}$ prin k operaţii de compunere şi recursivitate primitivă. Evident, $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ şi fiecare mulţime $\mathcal{B}_k$, $k \ge 0$ este numărabilă. Mulţimea tuturor funcţiilor p.r. este egală cu $\bigcup_{k \ge 0} \mathcal{B}_k$ deci este numărabilă (conform teoremei 2.3.).

b) Conform punctului a) funcţiile $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care sunt p.r. pot fi dispuse într-un şir $f_0, f_1, f_2, \ldots$,; considerăm atunci funcţia aritmetică $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definită prin $\Phi(n) = f_n(n) + 1$. Evident, Φ nu coincide cu nici una din funcţiile f_m din şirul precedent (căci dacă $\Phi = f_m$, atunci $\Phi(m) = f_m(m)$, adică $f_m(m)+1 = f_m(m)$, absurd). Aşadar, Φ nu este p.r.

Exemple. 1) Adunarea $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(y, x) \mapsto x + y$ şi înmulţirea $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(y, x) \mapsto xy$ sunt funcţii p.r.

Într-adevăr, fie $f = p_1^1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x$ şi $g = s \circ p_2^3 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto s(x_2) = x_2 + 1$. Atunci $\sigma = f \odot g$ (căci $0 + x = x$, adică $\sigma(0, x) = f(x)$ şi $\sigma(y+1, x) = g(y, \sigma(y, x), x)$ ceea ce revine la $x+(y+1) = (x+y)+1$). Aşadar, funcţia sumă σ este p.r.

Fie apoi $f = 0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto 0$ şi $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_2 + x_3$. Avem $\pi = f \odot g$ (căci $0 \cdot x = 0$, deci $\pi(0, x) = f(x)$ şi $\pi(y + 1, x) = g(y, \pi(y, x), x)$, aceasta revenind la $(y + 1)x = yx + x$); aşadar π este p.r., deoarece f, g sunt p.r.

Funcţia $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$ este de asemenea p.r. căci $h = p_1^1 \cdot p_1^1 = \pi(p_1^1, p_1^1)$.

2) Funcţia predecesor $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $p(n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad n = 0 \\ n-1 & \text{dacă} \quad n \geq 1 \end{cases}$ este p.r. căci $p(0) = 0$, $p(y + 1) = p_1^2(y, p(y))$, deci $p = 0 \odot p_1^2$.

3) Funcţia diferenţă proprie $d : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, definită prin

$$d(y, x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x < y \\ x - y & \text{dacă} \quad x \geq y \end{cases}$$

este p.r. căci $d(0, x) = p_1^1(x)$ şi $d(y+1, x) = p(p_2^3(y, d(y, x), x)$, predecesorul lui $d(y, x)$, adică $d = p_1^1 \odot q$. Atunci şi funcţia distanţă $\delta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto |x-y|$ este p.r. căci $\delta(x, y) = d(x, y) + d(y, x)$, $(\forall)x, y \in \mathbb{N}$. (Am notat $q = p \circ p_2^3$, adică $q(y, z, x) = p(z)$).

Fie $f(x_1, \ldots, x_k)$, $f : A \to \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{N}^k$ o funcţie aritmetică. Se consideră ecuaţia

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y) = x_k, \tag{3}$$

ca ecuaţie în y cu $x_1, \ldots, x_{k-1}$, x_k fixate arbitrar. Dacă ecuaţia (3) are o soluţie y_0 şi dacă $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y)$ este definit pentru orice $y < y_0$ iar valorile ei sunt distincte de x_k, se notează $\mu_f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) = y_0$. Dacă ecuaţia (3) nu are soluţii $y \in \mathbb{N}$, atunci se consideră că μ_f nu este definit, iar dacă y_0 este cea mai mică soluţie a ecuaţiei (3) şi există $y_1 < y_0$ astfel încât $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_1)$ să nu aibă sens, atunci se consideră de asemenea că μ_f nu este definit. Reţinem că $\mu_f(x_1, \ldots, x_k)$ se consideră definit dacă şi numai dacă ecuaţia (3) are o soluţie minimă y_0 iar $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y)$ are sens pentru orice $y < y_0$ astfel ca $(x_1, \ldots, x_{k-1}, y) \in A$.

În acest mod, este definită o funcţie aritmetică μ_f care în general este parţială; se mai spune că μ_f este **obţinută prin minimizarea lui** f **în raport cu variabila** x_k. Se mai scrie

$$\mu_f(x_1, \ldots, x_k) = \min_k \{y \in \mathbb{N} | f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y) = x_k\}.$$

Operaţia de minimizare poate fi definită în raport cu oricare din variabile.

Exemple. Fie $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, definită pe $A = \mathbb{N}^2$. În acest caz, $\mu_f(x_1, x_2) = x_2 - x_1$ (minimzare în raport cu x_2) şi μ_f este definită pe mulţimea $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 | x_1 \leq x_2\}$. Se observă că deşi f este totală, totuşi μ_f este o funcţie aritmetică parţială.

În mod similar, dacă $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, atunci $\mu_f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$ (minimizare în raport cu x_1); această funcţie este definită pe mulţimea $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 | x_2 \neq 0$ şi x_1 este divizibil cu $x_2\}$.

Definiţia 2.6. *O funcţie aritmetică obţinută din funcţiile de bază printr-un număr finit de compuneri, recursivităţi primitive şi minimizări se numeşte* **parţial recursivă**. *O funcţie parţial recursivă care este totală se numeşte* **recursivă**.

Evident, au loc următoarele incluziuni de clase de funcţii aritmetice:

$$\{\text{primitiv recursive}\} \subset \{\text{recursive}\} \subset \{\text{parţial recursive}\}.$$

Am văzut că funcţia aritmetică g definită prin $g(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$ este parţial recursivă (deoarece g este minimizarea funcţiei produs, care la rândul ei se obţine din funcţiile de bază prin compuneri şi recursivităţi primitive). Deoarece această funcţie nu este totală, ea nu este recursivă. Un exemplu profund de funcţie recursivă care nu este primitiv recursivă a fost dat de matematicianul român Gabriel SUDAN (1899-1976), fost profesor la Institutul Politehnic din Bucureşti.

Se poate defini conceptul de funcţie aritmetică calculabilă prin algoritmi, ale cărei valori pot fi calculate prin proceduri mecanizabile. Importanţa funcţiilor aritmetice studiate anterior constă în următorul rezultat fundamental: *mulţimea funcţiilor calculabile coincide cu mulţimea funcţiilor parţial recursive*, a cărui stabilire depăşeşte cadrul acestui curs. În acest mod s-a dat un răspuns teoretic unei întrebări fireşti privind caracterizarea funcţiilor ale căror valori pot fi calculate cu ajutorul calculatoarelor moderne.

1.2.4 Exerciţii

1. Fie M, N mulţimi nevide; pentru orice funcţie $f : M \to N$ se poate defini graficul lui f, $\text{Gr } f = \{(x, f(x)) \in M \times N | x \in M\}$. Să se arate că aplicaţia

$$\theta : \text{Hom}\,(M, N) \to \mathcal{P}(M \times N),\ f \mapsto \text{Gr } f$$

este injectivă, dar nu surjectivă. Să se deducă inegalitatea $n^m \leq 2^{mn}$ pentru orice întregi $m, n \geq 1$.

Indicaţie. Dacă $f, g : M \to N$ şi $\text{Gr } f = \text{Gr } g$, atunci $f = g$. Apoi dacă M, N sunt finite şi $|M| = m$, $|N| = n$, atunci $|\text{Hom}\,(M, N)| = n^m$ şi $|\mathcal{P}(M \times N)| = 2^{mn}$ etc.

2. a) Fie $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ o mulţime finită. Să se arate că $(\forall) n \in \mathbb{N}$, numărul funcţiilor $f : M \to \mathbb{N}$ astfel încât $\sum_{i=1}^{m} f(a_i) \leq n$ este egal cu C_{m+n}^{n}.

b) Să se arate că numărul modurilor în care o mulţime cu n elemente poate fi partiţionată în r submulţimi având respectiv $k_1, k_2, \ldots, k_r$ elemente este egal cu $\frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_r!}$.

Indicaţie. Dacă A este o mulţime şi $\{B_i\}_{i \in I}$ o familie de submulţimi ale lui A se spune că aceasta partiţionează A dacă $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ şi $B_1 \cap B_j = \phi$ pentru $i \neq j$.

3. Fiind date două mulţimi M, N, să se indice două mulţimi disjuncte M_1, N_1 astfel încât $M \sim M_1$ şi $N \sim N_1$.

Indicaţie. Se pot lua $M_1 = \{0\} \times M$, $N_1 = \{1\} \times N$.

4. Fie M o mulţime infinită şi $a \in M$. Să se arate că M este echipotentă cu $M \setminus \{a\}$.

Indicaţie. Se consideră un şir de elemente distincte $\{x_n\}_{n \geq 0}$, $x_0 = a$ din M şi se defineşte aplicaţia bijectivă $\varphi : M \to M \setminus \{a\}$ punând $\varphi(x_n) = x_{n+1}$, $(\forall) n \geq 0$ şi $\varphi(x) = x$ pentru orice $x \neq x_n$ etc.

5. a) Să se expliciteze $G \circ F$ în fiecare din cazurile

1) $$\begin{array}{cc} \mathbb{N}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{N}^3, & \mathbb{N}^2 \xrightarrow{G} \mathbb{N}, \\ (x, y) \mapsto (x + 2, y^2, y + 1) & (x, y, z) \mapsto x + 2y + z \end{array}$$

2) $\begin{array}{ll} \mathbb{N} \xrightarrow{F} \mathbb{N}^2, & \mathbb{N}^2 \xrightarrow{G} \mathbb{N}^3, \\ x \mapsto (x, x+1) & (u,v) \mapsto (u+1, 0, uv) \end{array}$

b) Să se determine funcţia $h = f \odot g$ în fiecare din cazurile:

1) $\begin{array}{ll} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}, & \mathbb{N}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{N}, \\ x \mapsto x+1 & (x,y,z) \mapsto x+2y+z \end{array}$

2) $\begin{array}{ll} \mathbb{N}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{N}, & \mathbb{N}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{N}, \\ (x,y) \mapsto x+y & (x,y,z) \mapsto xy+zt \end{array}$

3) $f =$ constanta 1, $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x,y) \mapsto 2x+3y$.

6. Să se arate că funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x+5$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto 5x$, $h_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x,y) \mapsto x^2+xy+y^2$, $h_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$h_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x = 0 \text{ sau } 1 \\ 3 & \text{dacă} \quad x \geq 2 \end{cases}, \text{ sunt primitiv recursive}$$

7. O mulţime $A \subset \mathbb{N}^r$ ($r \geq 1$ fixat) se numeşte recursivă dacă funcţia ei caracteristică $\chi_A : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ este recursivă. Să se arate că:

a) mulţime $\mathbb{N}^r, \phi$ sunt recursive;

b) dacă mulţimile $A, B \subset \mathbb{N}^r$ sunt recursive, atunci $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement A$ sunt recursive;

c) să se arate că mulţimea numerelor pare $P \subset \mathbb{N}$ şi mulţimea numerelor impare sunt recursive.

Indicaţie. a) În acest caz funcţia caracteristică este constantă; b) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B; \chi_{\complement A} = 1 - \chi_A$. Suma, produsul de funcţii recursive sunt funcţii recursive; c) Funcţia diferenţă proprie $d : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $d(y,x) = x - y$ dacă$x > y$ şi $d(y,x) = 0$ dacă $x \leq y$ este primitiv recursivă. Se arată că $\chi_P(x) = 1 - d\left(2\left[\frac{x}{2}\right], x\right)$, $(\forall) x \in \mathbb{N}$, deci χ_P este recursivă.

8. Fie o reţea având trei întrerupătoare x_1, x_2, x_3 şi două lămpi L_1, L_2 astfel încât L_1 să funcţioneze dacă şi numai dacă cel puţin două întrerupătoare sunt deschise iar L_2 să funcţioneze dacă şi numai dacă întrerupătorul x_1 sau x_3 (sau - exclusivist) este deschisă. Să se descrie lucrul reţelei cu ajutorul unei funcţii aritmetice.

Indicaţie. Se ataşează 0 (respectiv 1) poziţiei deschise (închise) a întrerupătorului; se asociază apoi 1 (respectiv 2; 0) dacă L_1 funcţionează (respectiv dacă L_2 funcţionează; dacă L_1 şi L_2 nu funcţionează). Se poate atunci considera funcţia aritmetică $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ definită prin $\varphi(0,0,0) = 0$, $\varphi(0,0,1) = 1$, $\varphi(0,1,0) = 1$, $\varphi(0,1,1) = 2$, $\varphi(1,0,0) = 1$, $\varphi(1,0,1) = 0$, $\varphi(1,1,0) = 2$, $\varphi(1,1,1) = 2$ etc.

1.3 Calcul logic şi aplicaţii

Limbajul logicii matematice a pătruns în multe domenii teoretice şi aplicative. În cele ce urmează, vom prezenta succint câteva elemente ale calculului logic (propoziţional-boolean, cu predicate etc.) şi vom schiţa câteva aplicaţii.

1.3.1 Calcul propoziţional

Se fixează o colecţie de propoziţii elementare E, care sunt sau adevărate sau false (fără a defini termenii de propoziţie elementară, adevăr, fals). În acest mod este definită o aplicaţie $v : E \to \mathbb{B}$, numită *luarea valorii de adevăr*; anume dacă o propoziţie $a \in E$ este adevărată (falsă), atunci $v(a) = 1$ (respectiv $v(a) = 0$). Se mai scrie $a = 1$ (respectiv $a = 0$). Din cauza ipotezei că valorile de adevăr ale propoziţiilor sunt numai 0 şi 1, calculul logic care urmează se mai numeşte *bivalent* ("terţiul exclus").

Considerăm acum semnele logice $\neg$, $\wedge$ (conjuncţie), $\vee$ (disjuncţie), $\Rightarrow$ (implicaţie), $\equiv$ (echivalenţă) cu semnificaţia din cadrul limbajului uzual (respectiv "non", "şi", "sau", "dacă ... atunci", "dacă şi numai dacă"). Indicăm tabelele de adevăr convenţionale pentru expresiile logice $\neg a$, $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \Rightarrow b$, $a \equiv b$.

a	$\neg a = \bar{a}$
0	1
1	0

$\neg$

$\setminus b$ / $a \setminus$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\wedge$

$\setminus b$ / $a \setminus$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\vee$

$\setminus b$ / $a \setminus$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\Rightarrow$

$\setminus b$ / $a \setminus$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\equiv$

Trebuie remarcat că dacă $a, b \in E$, atunci $(a \Rightarrow b)$ este o nouă propoziţie, care poate fi adevărată sau falsă; este frapant faptul că propoziţia $(a \Rightarrow b)$ este adevărată dacă a este falsă (sau dacă b este adevărată). Propoziţiile $\neg a$, $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \equiv b$ pentru $a, b \in E$ nu mai sunt considerate elementare. Din propoziţii elementare, cu ajutorul semnelor logice, se pot concstrui noi propoziţii numite formule logice. Pentru a da o definiţie precisă, fie mulţimea $E' = E \cup \{\neg, \vee, (\ ,\ )\}$, obţinută adăugând la propoziţiile elementare semnele logice $\neg, \vee$ şi parantezele deschisă şi închisă. Notăm cu C' mulţimea tuturor cuvintelor din alfabetul E'.

Definiţia 3.1. *Se numeşte* **formulă logică** *orice cuvânt A din C', care este inserat într-un şir finit $A_1, A_2, \ldots, A_n = A$ de cuvinte din C' astfel încât pentru orice i, $1 \leq i \leq n$, să fie satisfăcută una din următoarele trei condiţii*:

1. $A_i \in E$;
2. *există* $j < i$ *astfel încât* $A_i = \neg(A_j)$;
3. *există* $j, k < i$ *astfel încât* $A_i = (A_j \vee A_k)$.

Dăm câteva exemple de formule logice: $(a \vee \neg a)$, $\neg(a \vee b)$, $a \vee (b \vee c)$ pentru $a, b, c \in E$. Următoarele cuvinte din C' : $a \neg b$, $(a \vee b, a \vee (b \neg c))$ etc. nu sunt formule logice.

Vom nota cu $\mathcal{F}_E$ mulţimea formulelor logice. Două formule logice $A, B \in \mathcal{F}_E$ se consideră *echivalente* şi se scrie $A \equiv B$ (sau $A \leftrightarrow B$) dacă ele au aceeaşi tabelă de adevăr, fiind simultan adevărate sau false. Trebuie observat că semnele logice $\wedge, \Rightarrow$ pot fi exprimate cu ajutorul lui $\neg$, $\vee$, anume $(a \wedge b) \equiv \neg(\neg a \vee \neg b)$ şi $(a \Rightarrow b) \equiv (\neg a) \vee b$.

Teorema 3.1. *Pentru orice $a, b, c \in E$ au loc următoarele echivalenţe de formule logice*:

1) $(a \wedge b) \equiv (b \wedge a)$, $(a \vee b) \equiv (b \vee a)$ (*comutativitatea lui* $\wedge, \vee$);

2) $a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$ (*asociativitatea lui* $\wedge, \vee$);

3) $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (*distributivitatea*);

4) $0 \wedge a \equiv 0$, $0 \vee a \equiv a$, $1 \wedge a \equiv a$, $1 \vee a \equiv 1$ (0 *fiind falsul şi* 1 *adevărul*);

5) $\neg(a \wedge b) \equiv (\neg a) \vee (\neg b)$, $\neg(a \vee b) \equiv (\neg a) \wedge (\neg b)$ (*formulele lui DE MORGAN*, 1806-1871);

6) $(a \Rightarrow b) \equiv (\neg a) \vee b \equiv (\neg b \Rightarrow \neg a)$ (*principiul reducerii la absurd*);

7) $\neg(\neg a) \equiv a$ (*principiul dublei negaţii*).

În plus:

8) *dacă propoziţia a şi implicaţia* $(a \Rightarrow b)$ *sunt adevărate, atunci propoziţia b este adevărată (modus ponens)*;

9) *sunt adevărate*: $(a \Rightarrow (b \Rightarrow a))$, $(a \wedge b) \Rightarrow a \Rightarrow (a \vee b)$.

Demonstraţie. Aceste echivalenţe se pot verifica direct comparând tabelele de adevăr ale celor doi membri. Probăm de exemplu 6). Apar patru cazuri: $a = 0$, $b = 0$, deci $(a \Rightarrow b) = 1$; apoi $\neg\, a = 1$, $\neg\, b = 1$ şi astfel cele trei formule logice au valoarea de adevăr 1. Cazurile $a = 0$, $b = 1$; $a = 1$, $b = 0$; $a = 1$, $b = 1$ se tratează similar. Fiecare din cele trei formule vor avea aceeaşi valoare de adevăr etc.

Afirmaţiile din teorema anterioară se extind la cazul când a, b, c sunt formule logice oarecare.

Definiţia 3.2. *Un şir* $P_1, P_2, \ldots, P_m \in \mathcal{F}_E$ *se numeşte* **text demonstrativ** *dacă diecare* P_i *este o proprietate de tipul* $1-9$ *din teorema 3.1 sau dacă există* j, k, $1 \leq j, k \leq m$ *astfel ca* $j < k < i$ *şi* $P_i = (P_j \Rightarrow P_k)$.

Orice formulă logică inserabilă într-un text demonstrativ se numeşte **teoremă** *a calculului propoziţional şi prin convenţie, proprietăţile* $1-9$ *din teorema precedentă se numesc* **axiomele** *calculului propoziţional.*

Dacă P şi $(P \Rightarrow Q)$ sunt teoreme, atunci Q este teoremă; într-adevăr, dacă $P_1, P_2, \ldots, P_r = P$ este un text demonstrativ pentru P şi $Q_1, Q_2, \ldots, Q_S = (P \Rightarrow Q)$ un text demonstrativ pentru $(P \Rightarrow Q)$, atunci $P_1, P_2, \ldots, P_r, Q_1, Q_2, \ldots, Q_S, Q$ este un text demonstrativ pentru Q.

Se poate arăta că teoremele sunt exact formulele logice având valoarea de adevăr 1 oricare ar fi valorile de adevăr ale propoziţiilor elementare componente.

Definiţia 3.3. *Se numeşte* **latice** *orice mulţime ordonată* $(L, \leq)$ *astfel încât orice două elemente* $a, b \in L$ *să aibă un cel mai mic majorant, notat cu* $a \vee b$ *şi un cel mai mare minorant* $a \wedge b$*, deci există* $a \vee b = \sup\{a, b\}$, $a \wedge b = \inf\{a, b\}$.

O latice $(L, \leq)$ *se numşte* **distributivă** *dacă*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

pentru orice $a, b, c \in L$. *O latice distributivă* $(L, \leq)$ *în care există un cel mai mic element* $0 \in L$*, un cel mai mare element* $1 \in L$ *şi în plus,* $(\forall) a \in L (\exists!) \bar{a} \in L$ *astfel încât* $a \wedge \bar{a} = 0$, $a \vee \bar{a} = 1$*, se numeşte* **latice booleană** *(după lui numele G. BOOLE, 1815-1864).*

Dacă L, L' *sunt latici booleene, se numeşte* **izomorfism** *de la* L *la* L' *orice aplicaţie bijectivă* $f : L \to L'$ *astfel încât* $\{a \leq b\} \Rightarrow \{f(a) \leq \underline{f(b)}\}$, $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\bar{a}) = \overline{f(a)}$, $(\forall) a, b \in L$.

Direct din definiţia unei latici $(L, \leq)$ rezultă că $(\forall) a, b, c \in L$ au loc proprietăţile:

1) $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$ (idempotenţă);

2) $a \wedge a = b \wedge a$, $a \vee a = b \vee a$ (comutativitate);

3) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (asociativitate);

4) $a \wedge (a \vee b) = a$, $\quad a \vee (a \wedge b) = a$ (absorbţie);

5) $(a \leq b) \leftrightarrow (a \wedge b = a) \leftrightarrow (a \vee b = b)$.

Exemplu. Fie M o mulţime oarecare. Mulţimea $\mathcal{P}(M)$ a părţilor lui M este o latice booleană relativ la relaţia de incluziune. În acest caz, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(M)$, avem $\inf\{A, B\} = A \cap B$ şi $\sup\{A, B\} = A \cup B$, există cel mai mic element, anume ϕ, cel mai mare element este M şi pentru orice $A \subset M$, luând $\bar{A} = M \setminus A$ avem $A \cap \bar{A} = \phi$, $A \cup \bar{A} = M$.

Teorema 3.2. *Mulţimea* $\mathcal{F}_E$ *a formulelor logice este latice booleană relativ la relaţia de implicaţie* $(a \leq b) \overset{\triangle}{\leftrightarrow} (a \Rightarrow b)$.

Demonstraţie. Mai înâi trebuie observat că implicaţia este relaţia de ordine (este reflexivă, tranzitivă, antisimetrică). Apoi $\mathcal{F}_E$ este latice, deoarece pentru orice $a, b \in \mathcal{F}_E$, avem $\inf\{a, b\} = a \wedge b$ şi $\sup\{a, b\} = a \vee b$. Cel mai mic element din $\mathcal{F}_E$ este 0 (falsul) şi cel mai mare element este 1 (adevărul). De asemenea pentru orice $a \in \mathcal{F}_E$, luând $\bar{a} = \neg\, a$, avem $a \wedge \bar{a} = 0$, $a \vee \bar{a} = 1$ etc.

1.3.2 Funcţii booleene

Obiectul principal al analizei matematice îl constituie studiul funcţiilor, în special al funcţiilor de una sau mai multe variabile reale $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ şi al funcţiilor de una sau mai multe variabile complexe $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}^*$. Obiectul de cercetare al analizei poate fi extins astfel încât să cuprindă şi studiul funcţiilor aritmetice $f : A \to \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{N}^n$, ca şi al funcţiilor booleene.

Definiţia 3.4. *Se numeşte* **funcţie booleană de n variabile booleene** ($n \geq 1$) *orice aplicaţie* $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.

Aşadar, pentru orice sistem ordonat de n elemente din $\mathbb{B}$, numite variabile booleene $(x_1, \ldots, x_n)$, se asociază un element bine determinat din $\mathbb{B}$, adică 0 sau 1. Deoarece $|\mathbb{B}^n| = 2^n$ rezultă că există 2^{2^n} funcţii booleene distincte de n variabile booleene.

Exemple. Punând $f(x) = \neg x$ se defineşte o funcţie booleană de o variabilă $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$; aşadar, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. În mod similar, toate semnele logice definesc funcţii booleene; de exemplu, $(x, y) \mapsto x \wedge y$, $(x, y) \mapsto x \vee y$, $(x, y) \mapsto (x \equiv y)$, $(x, y) \mapsto (x \Rightarrow y)$. Punând $f(a, b, c) = ((a \wedge b) \Rightarrow (a \vee c))$, $(\forall) a, b, c \in \mathbb{B}$, se defineşte o funcţie booleană de trei variabile.

Orice funcţie booleană de n variabile booleene $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto z$ poate fi definită tabelat printr-un tabel cu $n + 1$ coloane şi 2^n linii, de forma

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	z
0	0	$\ldots$	0	z_0
0	0	$\ldots$	1	z_1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	1	$\ldots$	1	z_{2^n-1}

Un fapt evident este acela că orice formulă logică defineşte o funcţie booleană, în care variabilele sunt asimilate cu propoziţiile elementare componente. Teorema care urmează arată că afirmaţia inversă este de asemenea adevărată.

Teorema 3.3. *Fie* $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ *o funcţie booleană. Atunci pentru orice* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{B}$ *au loc egalităţile*:

a) $f(x_1, \ldots, x_n) = (f(1, \ldots, 1) \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \vee f(1, \ldots, 1, 0) \wedge$
$\wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \wedge \bar{x}_n) \vee \ldots \vee (f(0, \ldots, 0) \wedge \bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_n)$
(*de câte ori apare 0 pe un loc k apare negaţia pe variabila x_k*);

b) $f(x_1, \ldots, x_n) = (f(0, \ldots, 0) \vee x_1 \vee \ldots \vee x_n) \wedge f(0, \ldots, 0, 1) \vee$
$\vee x_1 \vee \ldots \vee x_{n-1} \vee \bar{x}_n) \wedge \ldots \wedge (f(1, \ldots, 1) \vee \bar{x}_1 \vee \ldots \vee \bar{x}_n)$
(*de câte ori apare 1 pe un loc k apare negaţia pe variabila x_k*).

Demonstraţie. În relaţiile anterioare s-a notat $\bar{x} = \neg\, x$. Demonstrăm egalitatea a). Fixăm $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{B}$ şi presupunem că $x_{i_1} = 0$, $x_{i_2} = 0, \ldots x_{i_p} = 0$, unde $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ (iar celelalte sunt egale cu 1). Deoarece pentru orice indice k cuprins între 1 şi n, distinct de $i_1, \ldots, i_p$ avem $x_k = 1$, deci $\bar{x}_k = 0$ şi cum $1 \wedge a = a$, $0 \wedge a = 0$, pentru orice $a \in \mathbb{B}$, rezultă că toate parantezele din membrul drept al relaţiei a) cu excepţia lui

$$f(1, \ldots, 1, \overset{i_1}{0}, \ldots, \overset{i_2}{0}, 1, \ldots, \overset{i_p}{0}, \ldots, 1, \ldots, 1) \wedge$$

$$\wedge x_1 \ldots \wedge \bar{x}_{i_1}, \wedge \ldots \wedge \bar{x}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \bar{x}_{i_p} \wedge \ldots \wedge x_n$$

sunt egale cu 0. Acestea din urmă este evident egală cu

$$f(1, \ldots, 1, \overset{i_1}{0}, \ldots, \overset{i_2}{0}, 1, \ldots, \overset{i_p}{0}, \ldots, 1, \ldots, 1) \wedge 1 \ldots \wedge 1 = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Egalitatea b) se demonstrează similar.

Corolar. *Orice funcţie booleană $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ este funcţie booleană asociată formulei logice*

$$(f(1,\ldots,1) \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \vee (f(1,\ldots,1,0) \wedge x_1 \ldots \wedge x_{n-1} \wedge \bar{x}_n) \ldots$$

$$\ldots \vee (f(0,\ldots,0) \wedge \bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_n).$$

Acest corolar este o reformulare a teoremei 3.3. a) şi arată că orice funcţie booleană de variabilele $x_1, \ldots, x_n$ este exprimabilă printr-un număr finit de semne logice $\neg, \vee, \wedge$ cu ajutorul lui $x_1, \ldots, x_n$; de aceea se mai spune că $\{\neg, \wedge, \vee$ reprezintă un sistem complet de semne logice. Se poate arăta că funcţia lui Scheffer singură ($\varphi(x, y) \stackrel{\triangle}{=} \neg\, (x \wedge y)$) constituie un sistem complet de formule logice; este suficient de observat că $\neg\, x = \varphi(x, x)$, $x \wedge y = \varphi(\varphi(x, y), \varphi(x, y))$, $x \vee y = \varphi(\varphi(x, x), \varphi(y, y))$. Acelaşi lucru pentru funcţia lui Pierce ($\psi(x, y) \stackrel{\triangle}{=} \neg\, (x \vee y)$). O altă consecinţă a teoremei 3.3, având o importanţă principală, este următoarea teoremă de reducere a funcţiilor booleene la forma canonică.

Teorema 3.4. *Fie $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ o funcţie booleană oarecare.*

a) *Dacă $f \neq 0$ şi dacă $P_1, P_2, \ldots, P_p$ sunt punctele din $\mathbb{B}^n$ unde f ia valoarea 1, atunci*

$$\begin{aligned} &f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_p, \ \textit{unde} \\ &\varphi_j = y_{j_1} \wedge y_{j_2} \wedge \ldots \wedge y_{j_n} \ (1 \leq j \leq p) \end{aligned} \tag{4}$$

şi

$$y_{js} = \begin{cases} x_s \ \textit{dacă coordonata } s \textit{ a punctului } P_j \textit{ este egală cu 1} \\ \bar{x}_s \ \textit{dacă coordonata } s \textit{ a punctului } P_j \textit{ este egală cu 0,} \end{cases}$$

pentru $1 \leq s \leq n$ (forma canonică normal disjunctivă a lui f);

b) *Dacă $f \neq 1$ şi dacă $Q_1, Q_2, \ldots, Q_q$ sunt punctele din $\mathbb{B}^n$ unde f ia valoarea 0, atunci*

$$\begin{aligned} &f(x_1, \ldots, x_n) = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_q, \ \textit{unde} \\ &\psi_k = z_{k1} \vee z_{k_2} \vee \ldots \vee z_{kn} \ (1 \leq k \leq q) \end{aligned} \tag{5}$$

şi

$$z_{ki} = \begin{cases} x_i \ \textit{dacă coordonata } t \textit{ a punctului } Q_k \textit{ este egală cu 0} \\ \ldots \\ \bar{x}_t \ \textit{dacă coordonata } t \textit{ a punctului } Q_k \textit{ este egală cu 1,} \end{cases}$$

pentru $1 \leq t \leq n$ (forma canonică normal conjunctivă a lui f);

Demonstraţie. a) Aplicăm relaţia a) din teorema 3.3 observând că dacă f ia valoarea 0 într-un punct, atunci dispare termenul corespunzător din membrul drept al acestei relaţii. Aşadar, în această relaţie rămân termenii care corespund valorilor lui f în punctele $P_1, P_2, \ldots, P_p$ şi este suficient să notăm parantezele respective cu $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$.

Punctul b) se demonstrează în mod analog utilizând teorema 3.3, b) .

Funcţiile φ_j se numesc *conjuncţii elementare* (*mintermeni conjunctivi*) iar ψ_k *disjuncţii elementare* (sau *mintermeni disjunctivi*).

Exemple. a) Indicăm forma normal disjunctivă pentru funcţia booleană $z = f(x_1, x_2)$, $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ dată de tabelul

x_1	x_2	z
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

În acest caz, $P_1(0, 0), P_2(1, 0)$ deci $p = 2$ şi $\varphi_1 = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$, $\varphi_2 = x_1 \wedge \bar{x}_2$, deci

$$f(x_1, x_2) = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) = (\bar{x}_1 \vee x_1) \wedge \bar{x}_2 = 1 \wedge \bar{x}_2 = \bar{x}_2.$$

b) Indicăm forma normal disjunctivă şi forma normal conjunctivă pentru funcţia booleană $z = f(x_1, x_2, x_3)$ dată prin tabelul

x_1	x_2	x_3	z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Deoarece $f \neq 0$ putem da forma normal disjunctivă; punctele unde f ia valoarea 1 sunt $P_1(0,0,1)$, $P_2(1,1,0)$, $P_3(1,1,1)$ deci $\varphi_1 = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$, $\varphi_2 = x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3$, $\varphi_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ şi $f(x_1, x_2, x_3) = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3$; se observă că

$$\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3 = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee [(x_1 \wedge x_2) \wedge (\bar{x}_3 \vee x_3)] =$$

$$= (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee [(x_1 \wedge x_2) \wedge 1] = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2).$$

Deoarece $f \neq 1$ se poate da şi forma normal conjunctivă, în care apar 5 mintermeni corespunzători celor 5 puncte $Q_1(0,0,0)$, $Q_2(0,1,0)$, $Q_3(0,1,1)$, $Q_4(1,0,0)$, $Q_5(1,0,1)$ în care funcţia f ia valoarea 0; aşadar, $f(x_1, x_2, x_3) = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 \wedge \psi_4 \wedge \psi_5$, unde $\psi_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$, $\psi_2 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$, $\psi_3 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$, $\psi_4 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$, $\psi_5 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$.

Egalitatea a două funcţii booleene se defineşte conform convenţiei generale de egalitate a funcţiilor (definiţia 1.2). Am definit un concept de echivalenţă a două formule logice, care revine la aceea că tabelele de adevăr sunt aceleaşi, deci funcţiile booleene asociate sunt egale; sunt unele dificultăţi în cazul când numărul de variabile în cele două formule logice nu este acelaşi şi apar variabile fictive (de exemplu, formulele logice $(x_1 \wedge x_2) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_3)$ şi $(x_1 \wedge x_2)$ sunt echivalente iar x_3 apare ca variabilă fictivă).

Aplicaţie. Cu ajutorul dipolilor se pot realiza sisteme intrare-ieşire elementare corespunzând semnelor logice:

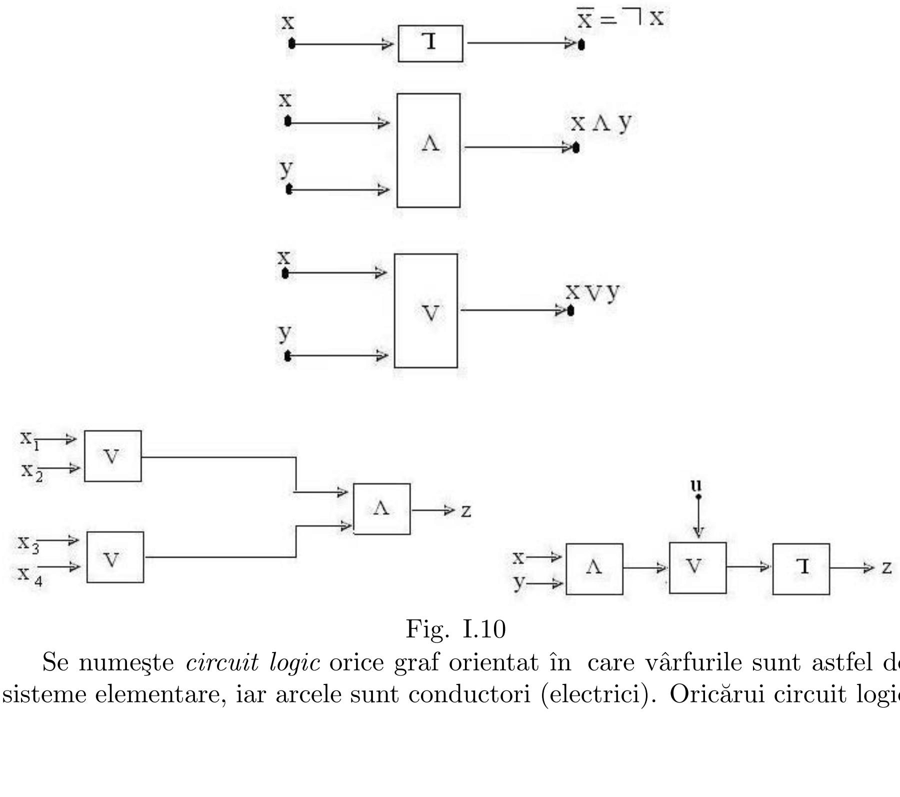


Fig. I.10

Se numeşte *circuit logic* orice graf orientat în care vârfurile sunt astfel de sisteme elementare, iar arcele sunt conductori (electrici). Oricărui circuit logic i se poate asocia în mod bine determinat o formulă logică numită *formulă de structură*.

De exemplu, circuitul logic din prima figură din fig. I. 10 are formula de structură $z = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee x_4)$, iar circuitul logic următor din fig. I. 10 are formula de structură $z = \neg((x \wedge y) \vee u)$, care exprimă dependenţa ieşirii de intrări.

Am văzut că oricărui circuit logic îi corespunde o funcţie booleană, definită prin formula de structură: reciproc, oricărei funcţii booleene sau oricărei formule logice, îi corespunde un circuit logic.

1.3.3 Calcul cu predicate

Calculul propoziţional nu poate descrie toate formulările matematice şi sunt necesare extinderi ale lui. Astfel ”7 este număr prim” în $\mathbb{N}$ este o propoziţie elementară adevărată, în timp ce construcţia lingvistică ”x este număr prim în $\mathbb{N}$” nu este propoziţie elementară; aceasta din urmă se numeşte propoziţie cu o variabilă (proprietate relativ la câte un element sau predicat unar). Se pot considera propoziţii cu două variabile, numite proprietăţi relativ la perechi de elemente sau predicate binare (de exemplu, ”x este divizibil cu y în $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$”), propoziţii cu trei variabile (de exemplu $x + y \geq z$ în $\mathbb{R}$) etc. Revenind la propoziţia cu o variabilă ”x este număr prim în $\mathbb{N}$”, se observă că este definită în mod natural o funcţie $p : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ punând

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \text{ este prim} \\ 0 & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

În mod similar, în cazul propoziţiei ”$x + y \geq z$ în $\mathbb{R}$” este evidenţiată funcţia $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{B}$ definită prin

$$p(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x + y \geq z \\ 0 & \text{dacă } x + y < z. \end{cases}$$

Aceasta sugerează următoarea

Definiţia 3.5. *Fie M o mulţime oarecare fixată şi $n \geq 1$ un întreg. Se numeşte* **predicat n-ar la** M *(sau* **propoziţie cu** n **variabile în** M*) orice aplicaţie $p : M^n \to \mathbb{B}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto p(x_1, \ldots, x_n)$. Propoziţiile elementare se consideră predicate nulare* (de ordin 0).

Mulţimea $M_p = \{(x_1, \ldots, x_n) | p(x_1, \ldots, x_n) = 1\} = p^{-1}(1)$ se numeşte **mulţimea de adevăr a lui** p.

Rezolvarea ecuaţiilor, inecuaţiilor, sistemelor de ecuaţii etc. revine la explicitarea mulţimii de adevăr a anumitor predicate asociate.

În cele ce urmează, ne restrângem la predicate unare ($n = 1$). Dacă p şi q sunt predicate (unare) relativ la o mulţime M, atunci se pot construi noi predicate cu ajutorul semnelor logice, $p \vee q$, $p \wedge q$, $\bar{p} = \neg\, p$, $p \Rightarrow q$ etc. De exemplu $p \wedge q$ este predicatul definit prin

$$(p \wedge q)(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } p(x) = 1 \text{ şi } q(x) = 1 \\ 0 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

deci $(\forall)x \in M$, $(p \wedge q)(x) = p(x) \wedge q(x)$; similar $(p \vee q)(x) = p(x) \vee q(x)$, $\bar{p}(x) = \neg\, p(x)$ etc. Se pot de asemenea defini predicatul 0 şi predicatul 1 având ca mulţimi de adevăr ϕ şi respectiv M.

Fie $p : M \to \mathbb{B}$ un predicat unar: dacă $x \in M_p$ (adică $x \in M$ şi $p(x) = 1$) se mai spune că *elementul x are proprietatea p* (sau că *p este adevărat în x*).

Teorema 3.5. (a) *Fie p, q predicate relativ la o mulţime M. Atunci*

$$(p \Rightarrow q) \leftrightarrow (M_p \subset M_q),\ (p = q) \leftrightarrow (M_p = M_q),\ M_{\bar{p}} = \complement M_p,$$

$$M_{p\wedge q} = M_p \cap M_q,\ M_{p\vee q} = M_p \cup M_q,\ M_{p\Rightarrow q} = \complement M_p \cup M_q.$$

(b) *Mulţimea predicatelor relativ la o mulţime M are o structură naturală de latice booleană izomorfă cu laticea $\mathcal{P}(M)$ a părţilor lui M.*

Demonstraţie. (a) Avem $(p \Rightarrow q) \leftrightarrow (\forall)x \in M\ \{p(x) \Rightarrow q(x)\},\ \leftrightarrow$ { ori de câte ori $x \in M_p$, rezultă $x \in M_q$} $\leftrightarrow M_p \subset M_q$. Apoi $(p = q) \leftrightarrow p(x) = q(x)$, $(\forall)x \in M \leftrightarrow M_p = M_q$; celelalte afirmaţii rezultă imediat.

(b) Definim relaţia de ordine între predicate punând $p \le q \overset{\triangle}{\leftrightarrow} (p \Rightarrow q)$. Faptul că predicatele pot fi organizate ca o latice booleană relativ la $\vee, \wedge, \neg, 0, 1$ este evident.

Fie aplicaţia

$$\varphi : \mathrm{Hom}\,(M, \mathbb{B}) \to \mathcal{P}(M), \quad p \mapsto M_p\,.$$

Această aplicaţie este evident injectivă (căci $M_p = M_q \Rightarrow p = q$). Probăm că φ este surjectivă: pentru orice $N \subset M$ considerăm funcţia $p : M \to \mathbb{B}$ definită prin

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in N \\ 0 & \text{dacă } x \in M \setminus N \end{cases} \quad \text{(funcţia caracteristică a lui } N)$$

şi avem evident $M_p = N$, adică $\varphi(p) = N$.

Dacă $p \le q$, atunci $M_p \subset M_q$ adică $\varphi(p) \le \varphi(q)$. Avem $\varphi(p \vee q) = M_{p\vee q} = M_p \cup M_q = \varphi(p) \cup \varphi(q)$, $\varphi(p \wedge q) = M_{p\wedge q} = M_p \cap M_q = \varphi(p) \cap \varphi(q)$, $\varphi(\bar{p}) = M_{\bar{p}} = \complement M_p$ pentru orice două predicate p, q şi $\varphi(0) = \phi$, $\varphi(1) = M$, deci aplicaţia φ este un izomorfism de latice booleene. Teorema 3.5 este demonstrată.

Din predicate n-are ($n \ge 1$) se obţin predicate de ordin de aritate mai mic în două moduri: prin particularizarea variabilelor şi prin aplicarea cuantificatorilor logici existenţial ($\exists$) şi universal ($\forall$). Fie $p : M^n \to \mathbb{B}$ un predicat n-ar relativ la M şi M_p mulţimea sa de adevăr. Faptul că $M_p = M^n$ se exprimă echivalent astfel: $(\forall)x\ p(x)$, iar faptul că $M_p \ne \phi$ se exprimă: $(\exists)x\ p(x)$: în fine $(\exists!)x\, p(x)$ are semnificaţia că $|M_p| = 1$.

În general, variabilele cărora li se aplică cuantificatori se numesc *legate*. Dintr-un predicat unar, prin aplicarea lui ($\exists$) sau ($\forall$) se obţin propoziţii, iar dintr-un predicat binar, aplicând un cuantificator se obţine un predicat unar etc. În predicate binare, ternare etc. ordinea aplicării cuantificatorilor este esenţială.

Exemple. 1) Dacă $p(x)$ este predicatul "x este număr prim în $\mathbb{N}$", atunci $(\exists)x\, p(x)$ este propoziţia există un număr prim în $\mathbb{N}$", care este adevărată, iar $(\forall)x\, p(x)$ este propoziţia "orice număr din $\mathbb{N}$ este prim", care este evident falsă.

2) Considerăm predicatul binar $P(f, g) =$ "f este derivata lui g în mulţimea M a funcţiilor derivabile $[0, 1] \to \mathbb{R}$". Propoziţia $(\forall)f\,(\exists)\,g\,P(f, g)$ adică "orice funcţie din M este derivata unei funcţii din M" este adevărată, în timp ce propoziţia $(\exists)g(\forall)f\ P(f, g)$ este evident falsă.

Teorema 3.6. *Fie p, q două predicate relativ la o mulţime M.*
(a) *Predicatul $(p \Rightarrow q)$ este egal cu $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ (principiul reducerii la absurd).*
(b) $\neg\,\neg\, p = p$ *(principiul dublei negaţii)*
(c) $\neg\,(p \wedge q) = \neg\, p \vee \neg\, q$, $\neg\,(p \vee q) = \neg\, p \wedge \neg\, q$ *(relaţiile de Morgan).*
(d) $\neg\,(\forall)x\ p(x) \equiv (\exists)x\ \neg\, p(x)$, $\neg\,(\exists)x\, p(x) \equiv (\forall)x\ \neg\, p(x)$.

Demonstraţie. Afirmaţiile (a), (b), (c) rezultă din teorema 3.5 şi se reduc la relaţii între mulţimi de adevăr; de exemplu, afirmaţia (a) revine la a arăta că $M_p \subset M_q \longleftrightarrow \complement M_q \subset \complement M_p$, iar (b) revine la $\complement\complement M_p = M_p$.

(d) $(\forall)x\ p(x)$ înseamnă că $M_p = M$, deci negaţia $(\neg\,\forall)x\ p(x)$ revine la $M_p \ne M$ adică $\complement M_p \ne \phi$ deci $M_{\bar{p}} \ne \phi$, aşadar $(\exists)x\,\bar{p}(x)$. În mod similar, faptul că $(\exists)x\ p(x)$ revine la $M_p \ne \phi$, iar $\neg\,(\exists)x\ p(x)$ înseamnă că $M_p = \phi$, adică $\complement M_p = M$, $M_{\bar{p}} = M$ deci $(\forall)x\ \bar{p}(x)$.

Calculul cu predicate nu acoperă multitudinea de formulări matematice; în diferite alte alte dezvoltări se introduc relaţii între elemente din diverse mulţimi şi nu întotdeauna ne putem referi la o singură mulţime M ca mai sus.

1.3.4 Mulţimi vagi (nuanţate)

Fie M o mulţime oarecare fixată şi $\mathcal{P} = \mathrm{Hom}\,(M, \mathbb{B})$ mulţimea predicatelor (unare) relativ la M. Am văzut că $\mathcal{P}$ este o latice booleană izomorfă cu laticea $\mathcal{P}(M)$. În laticea $\mathcal{P}$ relaţia de ordine este

$$p \leq q \longleftrightarrow p(x) \leq q(x), \quad (\forall)x \in M \text{ (socotind că } 0 < 1 \text{ în } \mathbb{B})$$

şi pe de altă parte

$$p \wedge q = \min(p, q),\ p \vee q = \max(p, q),\ \bar{p} = 1 - p,$$

pentru orice $p, q \in \mathcal{P}$. L. Zadeh a avut ideea de a considera mulţimea funcţiilor $M \to [0, 1]$ adică

$$\mathcal{V} = \mathrm{Hom}\,(M, [0, 1]),$$

obţinută înlocuind codul binar $\mathbb{B}$ cu întreg intervalul închis [0,1] de numere reale şi de a numi orice element al lui $\mathcal{V}$ *mulţime vagă* (sau *nuanţată*) (relativ la M). Aşadar, o mulţime vagă este o funcţie $M \to [0, 1]$. Dacă $f, g \in \mathcal{V}$ sunt două mulţimi vagi, ele se consideră *egale* dacă $f = g$ (egalitate de funcţii) şi f este *submulţime vagă a lui* g (şi se scrie $f \subset g$) dacă $f \leq g$, adică $f(x) \leq g(x)$, $(\forall)x \in M$. Se definesc de asemenea reuniunea şi intersecţia a două mulţimi vagi

$$f \cup g = \max(f, g), \quad f \cap g = \min(f, g)$$

şi complementara $\complement f = 1 - f$. Funcţia constantă 0 se mai numeşte *mulţimea vagă vidă*, iar funcţia constantă 1 *mulţimea vagă totală*.

Mulţimea $\mathcal{V}$ are o structură de latice relativ la ordinea anterior definită, dar nu este latice booleană (în general nu avem $f \cap \complement f = 0$; de exemplu, luând $f = \dfrac{1}{3}$, rezultă $\complement f = 1 - f = \dfrac{2}{3}$ şi deci

$$f \cap \complement f = \min(f, \complement f) = \min\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \neq 0).$$

Prin considerarea mulţimilor vagi se trece de la logica bivalentă la logica infinit-valentă, în care valori de adevăr pot fi toate punctele intervalului $[0, 1]$ şi nu numai capetele 0 şi 1 ale acestui interval. Mai precis, după cum predicatele relativ la M (adică funcţiile $M \to \mathbb{B}$ se asimilează cu proprietăţi relativ la elementele lui M, tot astfel, orice mulţime vagă $f : M \to [0, 1]$ poate fi asimilată cu o proprietate relativ la M care este adevărată pentru un element $x \in M$ cu "coeficientul de adevăr" $f(x)$.

1.3.5 Exerciţii

1. Să se construiască tabelele de adevăr pentru următoarele formule logice:
$(a \Rightarrow (a \Rightarrow b))$; $(\neg\, a \Rightarrow (a \Rightarrow b))$; $(a \Rightarrow (b \vee \neg\, c)) \wedge (\neg\, a \Rightarrow c)$;
$(p \Rightarrow q) \vee (\neg\, p \Rightarrow q)$.

2. Să se indice forma canonică disjunctivă pentru funcţiile booleene f, g definite prin

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg\, x_1 \wedge x_2) \wedge \bar{x}_1$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow x_3)) \wedge \bar{x}_1\ .$$

3. Să se simplifice expresiile

$$E_1 = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z),$$

$$E_2 = [x \wedge (y \vee z)] \vee [\bar{z} \wedge (y \vee z)] \wedge (\bar{y} \wedge \bar{z}).$$

4. Să se indice circuite logice având formulele de structură

$$\neg\, a \vee (b \wedge c),\ (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a),$$

$$[a \wedge (b \vee \bar{c})] \vee (b \wedge c \wedge d),\ (a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow \neg\, a).$$

Gândirea matematică s-a născut din nevoia de a simula realitatea externă.

(R. THOM)

Capitolul 2

Analiză pe dreapta reală

Introducere

În unele exemplificari din capitolul I am folosit deja numerele reale, dar numai cu rol ilustrativ. Înţelegerea profundă a numărului real este de cea mai mare importanţă pentru matematician, inginer, fizician, chimist sau economist şi însăşi denumirea atât de fericită pe care a primit-o, dovedeşte rolul acestuia în orice determinări cantitative efectuate în cursul cercetării realităţii înconjurătoare. Se poate spune că numărul real este obiect de permanentă reflecţie, inepuizabil.

În primii ani de şcoală am învaţat să socotim cu numere naturale şi ne amintim cu nostalgie că la acea vârstă calculele $3-4$ şi $2:5$ "nu se puteau"; abia mai târziu am aflat că, prin introducerea numerelor întregi şi apoi a numerelor raţionale, avem $3-4=-1$ şi $2:5=0,4$. În liceu există dificultăţi pentru prezentarea riguroasă a numerelor reale şi cu toţii am rămas cu o anumită intuiţie, abilitate de calcul, reprezentare, suficiente doar până în momentul când simţim necesitatea utilizării responsabile a conceptelor. De obicei, prin mulţime de numere se înţelege o mulţime ale cărei elemente se pot afla în anumite relaţii (de exemplu, de ordine), pe care sunt definite anumite operaţii (de exemplu, adunări, înmulţiri). Lărgirea noţiunii de număr, sintetizată prin incluziunile

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \ldots$$

s-a facut într-un mod sinuos, dovedit şi de terminologia defectuoasă utilizată uneori (de exemplu, numere imaginare); fiecare za a acestui lanţ de incluziuni a fost obţinută prin aportul unor generaţii succesive de cercetători şi are o justificare deplină în practica procesuală.

În acest capitol vom indica mai întâi proprietăţile principale ale mulţimii $\mathbb{R}$ (numită şi dreapta reală), în continuarea Analizei matematice studiată în liceu. Strâns legată de numerele reale este noţiunea de spaţiu metric, care constituie cadrul natural pentru teoria aproximaţiilor succesive. Vor fi de asemenea studiate în acest capitol seriile de numere reale, precum şi seriile de funcţii mărginite cu valori reale.

2.1 Disponibilităţile numerelor reale

2.1.1 Sistem de numere reale

Definiţia 1.1. *Se numeşte* **sistem de numere orice** *mulţime R având proprietăţile următoare*:

(I) *există două operaţii algebrice + (adunare), (înmulţire) pe mulţimea R, relativ la care R este corp comutativ*;

(II) *pe mulţimea R există o relaţie de ordine totală $\leq$, compatibilă cu operaţiile algebrice*;

(III) *pentru orice submulţime nevidă majorată $A \subset R$, există* $\sup A \in R$.

Proprietatea definitorie (I) concentrează toate disponibilităţile de calcul în R. Astfel, $(R,+,0)$ şi $(R\backslash\{0\},\cdot,1)$ sunt grupuri abeliene (N. ABEL, 1802-1829) şi în plus, $x(y+z)=xy+xz$, pentru orice $x,y,z\in R$. Se definesc apoi pentru orice $x,y\in R$, $x-y=x+(-y)$ şi dacă $y\neq 0$, $x/y=xy^{-1}$, cu regulile uzuale de calcul. Deoarece aplicaţia $\mathbb{N}\to R$, $n\mapsto n\cdot 1=\underbrace{1+\ldots+1}_{n\ ori}$ este injectivă, atunci se poate considera că $\mathbb{N}\subset R$ (identificând n cu $n\cdot 1$), deci $\mathbb{Z}\subset R$ şi $\mathbb{Q}\subset R$.

Proprietatea (II) implică faptul că de îndată ce $x\leq y$ în R, rezultă $x+z\leq y+z$, $(\forall)z\in R$ şi în plus, din inegalităţile $0\leq x$, $0\leq y$, rezultă $0\leq xy$. Din proprietăţile (I), (II) se pot deduce toate proprietăţile uzuale ale inegalităţilor între numere reale. Reamintim câteva din acestea (pentru $x,y,z,x_1,y_1\in R$):

a) dacă $x\leq y$ şi $y\leq x$, atunci $x=y$;

b) dacă $x\leq y$, $y\leq z$, atunci $x\leq z$;

c) inegalităţile se pot aduna: $x\leq y$, $x_1\leq y_1$ implică $x+x_1\leq y+y_1$;

d) dacă $0<x<y$, atunci $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$; dacă $x<y$ atunci $-y<-x$;

e) avem $x^2\geq 0$ pentru orice $x\in R$; dacă $x^2+y^2=0$, atunci $x=0$, $y=0$.

Este comod să notăm $R_+=\{x\in R|x\geq 0\}$ şi $R_-=\{x\in R|x\leq 0\}$, deci $R=R_+\cup R_-$, $R_+\cap R_-=\{0\}$.

Definind *modulul* $|x|$ al unui număr real $x\in R$ punând

$$|x|\triangleq\max(x,-x),$$

se probează imediat următoarele proprietăţi:

$N_1\cdot|x|\geq 0$, pentru orice $x\in R$ şi $|x|=0\leftrightarrow x=0$;

$N_2\cdot|x+y|\leq|x|+|y|$ pentru orice $x,y\in R$;

$N_3\cdot|xy|=|x|\cdot|y|$ pentru orice $x,y\in R$.

Prin inducţie, se verifică uşor că $\left|\sum_{i=1}^{k}x_i\right|\leq\sum_{i=1}^{k}|x_i|$ pentru orice $x_1,\ldots,x_k\in R$.

De asemenea, notând

$$\mathrm{d}(x,y)=|x-y|,\quad(\forall)x,y\in R,$$

se verifică imediat, folosind N_1,N_2,N_3, că au loc proprietăţile:

$D_1\cdot\mathrm{d}(x,y)\geq 0$ pentru orice $x,y\in R$ şi $\mathrm{d}(x,y)=0\leftrightarrow x=y$;

$D_2\cdot\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{d}(y,x)$, pentru orice $x,y\in R$;

$D_3\cdot\mathrm{d}(x,z)\leq\mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z)$ pentru orice $x,y,z\in R$.

Numărul real şi pozitiv $\mathrm{d}(x,y)$ este numit *distanţa euclidiană* între numerele x şi y; evident $|x|=\mathrm{d}(x,0)$, adică modulul unui număr real x reprezintă distanţa euclidiană între x şi 0. Trebuie remarcat că în acest mod este definită o aplicaţie

$$\mathrm{d}:R\times R\to R,\quad(x,y)\mapsto|x-y|.$$

În sfârşit, proprietatea (III) constituie punctul de plecare în stabilirea tuturor rezultatelor profunde ale analizei. Este evident că dacă $B\subset R$ este o submulţime nevidă minorată, atunci B are margine inferioară; într-adevăr, mulţimea $-B\triangleq\{x\in R|-x\in B\}$ va fi majorată, deci există $\sup(-B)$ şi se verifică uşor că $\inf B=-\sup(-B)$.

Observaţie. Definiţia 1.1 este numită definiţia axiomatică a numerelor reale; dealtfel proprietatea (III) poartă numele de axioma Cantor-Dedekind, în amintirea celor doi fondatori ai teoriei numerelor reale: G. CANTOR (1845-1918), R. DEDEKIND (1831-1916). Ca în faţa oricărui sistem de axiome descriind o anumită entitate, se pun în mod natural trei întrebări:

a) este sistemul respectiv de axiome necontradictoriu, adică nu cumva din acele axiome s-ar putea deduce logic atât o proprietate p cât şi negaţia ei $\neg p$?

b) există efectiv o mulţime R cu proprietăţile (I), (II), (III) ?

c) este unic sistemul de numere reale ?

Întrebarea a) este o problemă delicată de logică matematică. Se poate arăta că necontradicţia sistemului de numere reale decurge din necontradicţia sistemului de numere naturale. K. GÖDEL (1906-1978) a arătat însă că necontradicţia sistemului $\mathbb{N}$ de numere naturale nu poate fi probată fără a utiliza entităţi din afara lui $\mathbb{N}$. În orice caz, Practica a confirmat şi confirmă sistematic valabilitatea cunoştinţelor noastre asupra numerelor reale.

Fără a intra în detalii, trebuie subliniat că răspunsul la întrebarea b) este afirmativ, aşa cum ne aşteptam. Se cunosc cel puţin trei tipuri de sisteme de numere reale, construite pornind de la $\mathbb{Q}$, pe care le prezentăm succint în continuare:

Construcţia lui Dedekind. Se numeşte *tăietură* în $\mathbb{Q}$ orice submulţime nevidă $A \subset \mathbb{Q}$ astfel încât $A \neq \mathbb{Q}$, A nu are un cel mai mic element şi în plus, de îndată ce $a \in A$ şi $a \leq b$ în $\mathbb{Q}$, rezultă $b \in A$. Notăm cu R_1 mulţimea tăieturilor în $\mathbb{Q}$. Evident, $\mathbb{Q} \subset R_1$ deoarece orice număr raţional $a \in \mathbb{Q}$ poate fi identificat cu tăietura $A_a = \{a \in \mathbb{Q} | x > a\}$. Dacă A, B sunt tăieturi în $\mathbb{Q}$, se definesc suma $A + B \triangleq \{a + b | a \in A \text{ şi } b \in B\}$, zero $0 = A_0 = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$, $-A = \{x \in \mathbb{Q} | x > -a$ pentru orice $a \in A\}$ şi se pune $\{A \leq B\} \rightleftarrows B$ este o submulţime a lui A; dacă A, B sunt tăieturi pozitive (adică $A \subset A_0$, $B \subset A_0\}$), se defineşte produsul $AB \triangleq \{a \in A \text{ şi } b \in B\}$ etc. Se poate arăta că mulţimea R_1 astfel organizată verifică proprietăţile (I), (II), (III), deci constituie un sistem de numere reale.

Construcţia lui Cantor. Un şir de numere raţionale $\{a_n\}_{n\geq 0}$ se numeşte şir fundamental dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ raţional există un număr natural $N(\varepsilon)$ depinzând de ε astfel încât $|a_m - a_n| < \varepsilon$, pentru orice $m, n \geq N(\varepsilon)$. În mulţimea $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$ a şirurilor fundamentale de numere raţionale se introduce următoarea relaţie de echivalenţă: două şiruri $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $\{b_n\}_{n\geq 0}$, din $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$ se consideră echivalente dacă $(\forall)\varepsilon > 0$ raţional $(\exists)N(\varepsilon)$ natural astfel încât $|a_n - b_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$. Se notează cu R_2 mulţimea claselor de echivalenţă corespunzătoare. Atunci $\mathbb{Q} \subset R_2$, deoarece orice număr raţional a se identifică prin clasa şirului constant $a_n = a$, $n \geq 0$; se definesc în mod natural suma, produsul pentru orice două clase din R_2, ca şi relaţia de ordine şi se probează că mulţimea R_2 este un sistem de numere reale. Se mai spune că mulţimea R_2 este obţinută prin completarea lui $\mathbb{Q}$.

Construcţia zecimală. Fie R_3^+ mulţimea tuturor şirurilor infinite de cifre zecimale $\alpha = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, indexate după mulţimea $\mathbb{Z}$, astfel încât să existe $k \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $a_n = 0$ pentru orice $n < k$ şi să nu existe $l \in \mathbb{Z}$ astfel ca $a_n = 9$ pentru orice $n > l$. Elementele lui R_3^+ se mai numesc *fracţii zecimale reduse pozitive*. Două elemente $\alpha = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\beta = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ din R_3^+ se consideră egale dacă şi numai dacă $a_n = b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

Respectăm convenţia de a plasa o virgulă între termenii de indice 0 şi 1 ai oricărei fracţii zecimale, renunţând totodată la zerourile de dinaintea primei cifre nenule a părţii întregi.

Exemple. Şirul $\alpha = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ din R_3^+ unde $a_{-2} = 4$, $a_{-1} = 1$, $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = 0$, $a_3 = 7$, $a_n = 0$ pentru $n \geq 4$ se scrie simplu $\alpha = 414{,}307$. În mod similar, şirul $\beta = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ din R_3^+ definit prin $b_n = 0$ pentru $n \leq 1$ şi $b_n = 3$ pentru $n \geq 2$ se scrie $\beta = 0{,}0333\ldots$ Conform definiţiei anterioare, elementul $3{,}81999\ldots$ în care se repetă indefinit cifra 9 nu aparţine lui R_3^+; există raţiuni serioase ca el să fie identificat totuşi cu fracţia zecimală redusă 3,82 (motivul restricţiei cuprinse în definiţia anterioară cu privire la repetarea cifrei 9 este strâns legat de relaţia de egalitate în R_3^+; se evită astfel ca două şiruri distincte să poată defini aceeaşi fracţie zecimală redusă).

Se notează cu 0 şirul $\alpha \in R_3^+$ cu toţi termenii nuli.

Din aritmetică se ştie că orice număr raţional pozitiv are o unică reprezentare ca fracţie zecimală redusă, cu o anumită periodicitate de la un rang încolo; astfel, $\dfrac{17}{5} = 3{,}400\ldots$; $\dfrac{142}{11} = 12{,}9090\ldots$.

Observaţie. Fracţiile zecimale reduse pozitive pot fi considerate ca nişte cuvinte, eventual de lungime infinită, din alfabetul cu 11 litere format din cele 10 cifre zecimale, la care se adaugă o virgulă. Această reprezentare, cu convenţiile menţionate mai sus, se mai numeşte scriere sintactică şi va primi ulterior un sens semantic (conform teoremei 3.2).

Fiecărui element $\alpha \in R_3^+$ i se poate asocia elementul $-\alpha$ şi se notează $R_3^- = \{-\alpha | \alpha \in R_3^+\}$. Prin definiţie, pentru $\alpha, \beta \in R_3^+$, avem $-\alpha = -\beta$ dacă şi numai dacă $\alpha = \beta$. Se poate atunci considera mulţimea

$$R_3 = R_3^+ \cup R_3^-, \quad \text{unde} \quad R_3^+ \cap R_3^- = \{0\},$$

pe care o vom înzestra ca sistem de numere reale; prin convenţie, $-(-\alpha) = \alpha$, $(\forall)\alpha \in R_3$ şi $-0 = 0$. Pentru două elemente $\alpha = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\beta = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ din R_3^+ se defineşte: $\alpha \leq \beta \overset{\Delta}{\leftrightarrow} \alpha = \beta$ sau $(\exists)N$ natural astfel încât $a_n = b_n$ pentru $n < N$ şi $a_N < b_N$. Dacă $\alpha \leq \beta$ şi $\alpha \neq \beta$, se scrie $\alpha < \beta$. Relaţia de ordine totală astfel definită (numită uneori ordinea lexicografică) pe mulţimea R_3^+ se extinde la R_3 (socotind că dacă $\alpha \in R_3^-$ şi $\beta \in R_3^+$, atunci $\alpha \leq \beta$ iar dacă $\alpha, \beta \in R_3^-$, avem $\alpha \leq \beta \leftrightarrow -\beta \leq -\alpha$ în sensul ordinei anterioare din R_3^+). În plus, se poate proba că mulţimea R_3 este total ordonată şi satisface proprietatea (III).

Folosind trunchierile, se pot defini riguros operaţii de adunare şi înmulţire pe R_3, verificând proprietăţile (I) şi (II).

Pentru orice şir $\alpha \in R_3^+$, $\alpha = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se defineşte *trunchierea de ordin k* ($k \in \mathbb{Z}$ fiind fixat) *a lui* α ca fiind şirul $\alpha^{(k)} = \{a_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, unde

$$a_n^{(k)} = \begin{cases} a_n & \text{dacă} \quad n \leq k \\ 0 & \text{dacă} \quad n > k. \end{cases}$$

Evident, $|\alpha - \alpha^{(k)}| \leq 10^{-k}$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$. De exemplu, pentru $\alpha = 27,4139\ldots$ trunchierile de ordin $0,1,2,3$ sunt respectiv $27; 27,4; 27,41; 27,413$. În mod similar, pentru $\beta = 328,43\ldots$ avem $\beta^{(-2)} = 300$; $\beta^{(-1)} = 320$; $\beta^{(0)} = 328$; $\beta^{(1)} = 328,4$; $\beta^{(2)} = 328,43$. Evident, trunchierile unei fracţii zecimale reduse sunt numere raţionale. În calcule efective cu numere reale, inclusiv la introducerea datelor numerice în calculator, se folosesc exclusiv trunchieri ale acestora, al căror ordin depinde de gradul de precizie urmărit. Dacă $\alpha, \beta \in R_3^+$, se definesc $\alpha + \beta = \sup\limits_{k,l\in\mathbb{Z}} (\alpha^{(k)} + \beta^{(l)})$, $\alpha\beta = \sup\limits_{k,l\in\mathbb{Z}} \alpha^{(k)}\beta^{(l)}$ etc.

Observaţie. Fie $x_1, \ldots, x_p$ numere reale pozitive în număr finit; trunchierile lor de un anumit ordin sunt numere raţionale care aduse la acelaşi numitor Q, se scriu sub forma $\frac{y_1}{Q}, \ldots, \frac{y_p}{Q}$, unde $y_1, \ldots, y_p$ sunt numere naturale. Se poate stabili astfel o legătură între funcţiile reale şi funcţiile aritmetice.

Am indicat, fără a intra în detalii, construcţia a trei sisteme de numere reale, dând astfel răspuns afirmativ întrebării b). Pentru utilizatorul de matematică sistemul R_3 este cel mai comod. Sistemele de numere reale R_1, R_2, R_3 sunt distincte şi ar părea că întrebarea c) are răspuns negativ. În realitate, este vorba de o unicitate mai subtilă, anume unicitatea până la izomorfism. Se poate demonstra următoarea teoremă: dacă R, R' sunt două sisteme de numere reale, atunci există o aplicaţie bijectivă $\Phi : R \to R'$ astfel încât $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 1$, $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$, $\Phi(xy) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$ pentru orice $x, y \in R$ şi în plus, dacă $x \leq y$ în R, atunci $\Phi(x) \leq \Phi(y)$ în R'. Aşadar, din punctul de vedere al utilizării operaţiilor algebrice, inegalităţilor şi proprietăţilor care decurg din axiomele (I), (II), (III), mulţimile R, R' se pot identifica; orice calcul efectuat în R se transferă în R' prin aplicaţia Φ şi reciproc, orice calcul făcut în R' se transferă în R prin Φ^{-1}. Teorema precedentă se enunţă pe scurt spunând: *R, R' sunt corpuri total ordonate izomorfe*. Conform acestei teoreme, rezultă în particular că R_1, R_2, R_3 sunt corpuri izomorfe.

Începând din acest moment, vom fixa o dată pentru totdeauna un sistem de numere reale, pe care îl vom nota cu $\mathbb{R}$ (de exemplu $\mathbb{R} = R_3$).

2.1.2 Câteva proprietăţi ale mulţimii $\mathbb{R}$

Teorema 1.1. *Pentru orice numere reale fixate $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $nx \geq y$.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $(\forall) n \in \mathbb{N}$ am avea $nx < y$. Atunci submulţimea $A = \{0, x, 2x, 3x, \ldots\}$ a lui $\mathbb{R}$ ar fi majorată de y, deci conform (III) există $\xi = \sup A$. Rezulta că în intervalul $(\xi - x, \xi]$ există puncte din A, deci $(\exists) p \geq 1$ natural astfel încât $\xi - x < px \leq \xi$, de unde $\xi < (p+1)x$; această inegalitate este absurdă, deoarece $\xi = \sup A$ şi $(p+1)x \in A$.

Teorema 1.1 se mai numeşte *proprietatea lui Arhimede* (ARHIMEDE, 287 - 212 i.e.n.). Aşadar, "se poate goli un ocean folosind în mod repetat o pipetă", căci dacă y reprezintă cantitatea de apa a oceanului şi x capacitatea pipetei, atunci există $n \geq 1$ astfel încât $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ ori}} \geq y$.

Corolar. *Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ fixat. Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ raţional avem $a < \varepsilon$, atunci neapărat $a = 0$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $a \neq 0$, atunci $a > 0$ şi conform teoremei 1.1, ar exista $n \geq 1$ întreg astfel încât $na \geq 1$. Luând $\varepsilon = \dfrac{1}{2n}$ şi aplicând ipoteza, rezultă $a < \dfrac{1}{2n}$, adică $na < 1$, absurd.

Teorema 1.2. *Mulţimea $\mathbb{R}$ este nenumărabilă.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $\mathbb{R}$ ar fi numărabilă, adică ar coincide cu mulţimea termenilor unui şir, $\mathbb{R} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. Considerăm scrierile acestor termeni ca fracţii zecimale reduse distincte

$$x_0 = \alpha_0, a_0^0 a_1^0 a_2^0 a_3^0 \ldots$$
$$x_1 = \alpha_1, a_0^1 a_1^1 a_2^1 a_3^1 \ldots$$
$$x_2 = \alpha_2, a_0^2 a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

unde $\{a_i^j\}_{i \geq 0, j \geq 0}$ constituie un şir dublu de cifre zecimale (adică întregi cuprinşi între 0 şi 9). Considerăm elementul

$$\beta = 0, b_0 b_1 b_2 b_3 \ldots$$

unde b_0 este astfel ales încât $b_0 \neq a_0^0$, apoi $b_1 \neq a_1^1$ etc. Deoarece $\beta \in \mathbb{R}$, există $p \geq 0$ astfel încât $\beta = x_p$, adică $0, b_0 b_1 b_2 b_3 \ldots = \alpha_p, a_0^p a_1^p a_2^p a_3^p \ldots$ şi din unicitatea scrierii fracţiilor zecimale reduse, va rezulta că $b_p = a_p^p$, ceea ce contravine alegerii cifrelor zecimale $b_0, b_1, b_2, \ldots$.

Corolar. a) *Orice interval deschis (α, β), $\alpha < \beta$ este mulţime nenumărabilă.*
b) *Mulţimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este nenumărabilă.*

Demonstraţie. a) Intervalul (α, β) este echipotent cu $\mathbb{R}$.

b) Dacă mulţimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ar fi numărabilă, atunci ar rezulta că $\mathbb{R}$ este o reuniune de două mulţimi numărabile, anume $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, adică ar rezulta că $\mathbb{R}$ este numărabilă, absurd.

Aşadar, $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$, deci există "mai puţine" numere raţionale decât numere iraţionale.

Teorema 1.3. (*lema intervalelor închise incluse*). *Fie $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ un şir descrescător de intervale închise şi mărginite în $\mathbb{R}$, $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 0$. Atunci intersecţia $\bigcap\limits_{n \geq 0} I_n$ a acestor intervale este nevidă.*

Demonstraţie. Aşadar, au loc inegalităţile

$$a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_p \leq \ldots \leq b_q \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0.$$

Considerăm mulţimile $A = \{x | \exists p, x = a_p\}$, $B = \{y | \exists q, y = b_q\}$. Evident, b_0 este un majorant al lui A, iar a_0 este un minorant al lui B. Conform (III) există $\xi = \sup A$ şi $\eta = \inf B$. Deoarece $a_p \leq b_q$ pentru orice $p, q \geq 0$, rezultă că $\xi \leq b_q$ pentru orice q, deci $\xi \leq \eta$. Vom dovedi incluziunea $[\xi, \eta] \subset \bigcap\limits_{n\geq 0} I_n$.

Fie $(\forall)t \in [\xi, \eta]$. Atunci au loc inegalităţile $a_n \leq \xi \leq t \leq b_n$ pentru orice $n \geq 0$, deci $t \in I_n$, adică $t \in \bigcap\limits_{n\geq 0} I_n$. Aşadar, intersecţia $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n$ conţine intervalul $[\xi, \eta]$ şi în particular, rezultă nevidă.

Observaţie. Evident, dacă lungimile $l(I_n)$ ale intervalelor I_n tind către zero, pentru $n \to \infty$, atunci $0 \leq \eta - \xi \leq l(I_n)$ şi conform corolarului teoremei 1.1 aplicat pentru $a = \eta - \xi$, rezultă că $\xi = \eta$, adică intersecţia $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n$ este în acest caz redusă la un punct.

Trebuie de asemenea remarcat că pentru un şir de intervale deschise sau semideschise, nu are loc un rezultat similar teoremei 1.3. De exemplu, pentru $I_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right]$ avem $I_n \supset I_{n+1}$, $(\forall)n \geq 1$ şi totuşi $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n = \emptyset$.

2.1.3 Proprietăţi ale şirurilor de numere reale

Reamintim că un şir $\{x_n\}_{n\geq 0}$ în $\mathbb{R}$, adică un şir de numere reale, se numeşte *mărginit* dacă exista numere reale $\alpha < \beta$ astfel încât $\alpha < x_n < \beta$ pentru orice $n \geq 0$ sau echivalent, există $M > 0$ real astfel ca $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \geq 0$.

Definiţia 1.2. *Se spune că un şir* $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *de numere reale pozitive este* **convergent către zero** *(şi se scrie* $x_n \to 0$ *pentru* $n \to \infty$*) dacă este îndeplinită condiţia următoare*:

$$(\forall)\varepsilon > 0 \text{ real } (\exists)N(\varepsilon) \text{ natural astfel încât pentru } (\forall)n \geq N(\varepsilon),\ x_n < \varepsilon. \quad (1)$$

Un şir dublu $\{x_{mn}\}_{m,n\geq 0}$ de numere reale pozitive este convergent către zero pentru $m \to \infty$, $n \to \infty$ dacă

$$(\forall)\varepsilon > 0 \text{ real } (\exists)N(\varepsilon) \text{ natural astfel încât } (\forall)m, n \geq N(\varepsilon),\ x_{mn} < \varepsilon. \quad (2)$$

Această definiţie corespunde pe deplin intuiţiei; ea nu poate fi testată pe un calculator. Trebuie făcută distincţia între "egalitate cu zero" şi "convergenţă către zero". Evident, $\dfrac{0}{n} = 0$, $\dfrac{1}{n} \to 0$, $2^{-n} \to 0$, $a^n \to 0$, $na^n \to 0$, $n^2a^n \to 0$, (a fiind fixat, $|a| < 1$) pentru $n \to \infty$; de asemenea, $\dfrac{1}{m^2 + n^2} \to 0$ pentru $m \to \infty$, $n \to \infty$. Dacă $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $\{b_n\}_{n\geq 0}$ sunt şiruri de numere reale şi dacă $|a_n| \leq b_n$, $(\forall)n \geq 0$ iar $b_n \to 0$, atunci $a_n \to 0$.

Definiţia 1.3. *Un şir* $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *de numere reale se numeşte* **convergent** *(sau* **având limită finită***) dacă există* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât şirul de numere pozitive* $d(x_n, a) = |x_n - a|$, $n \geq 0$ *să conveargă către zero. Aceasta revine, conform (1) la îndeplinirea condiţiei următoare*:

$$(\forall)\varepsilon > 0 \text{ real } (\exists)N(\varepsilon) \text{ natural astfel încât } (\forall)n \geq N(\varepsilon),\ |x_n - a| < \varepsilon. \quad (3)$$

Se scrie în acest caz, $x_n \overset{\text{în } \mathbb{R}}{\longrightarrow} a$ pentru $n \to \infty$, sau echivalent $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Dacă $x_n \to a$ şi $x_n \to b$, atunci $a = b$; cu alte cuvinte, limita unui şir convergent este unică. Într-adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$ $(\exists)N_1, N_2$ naturale astfel încât $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \geq N_1$ şi $|x_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \geq N_2$. Luând $N = \max(N_1, N_2)$, rezultă că pentru orice $n \geq N$ avem $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|x_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Aşadar, $(\forall)\varepsilon > 0$ real, avem

$$|a - b| = |(a - x_N) + (x_N - b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

şi aplicând corolarul teoremei 1.1, rezultă $|a-b|=0$, deci $a=b$.

Exemple. a) Avem $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+7}=2$, deoarece, notând $x_n=\frac{2n+1}{n+7}$ rezultă $|x_n-2|=\frac{13}{n+7}$ şi ca atare, pentru orice $\varepsilon>0$, luând N natural şi $N>-7+\frac{13}{\varepsilon}$, se obţine $|x_n-2|<\varepsilon$, pentru orice $n\geq N$.

b) Similar se arată că $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3}{5^n+2}=1$.

c) Dacă $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ sunt trei şiruri de numere reale astfel încât $x_n\leq y_n\leq z_n$, $(\forall)n\geq 0$ şi $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ sunt convergente având aceeaşi limită l, atunci rezultă că $y_n\to l$. Într-adevăr, avem $0\leq y_n-x_n\leq z_n-x_n$ şi deoarece $z_n-x_n\to 0$, rezultă $y_n-x_n\to 0$, adică $\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}x_n=l$. Ca aplicaţie să arătăm că $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Pentru aceasta, este suficient de notat $a_n=\sqrt[n]{n}-1$, $n\geq 2$ şi de observat pe de o parte, că $a_n\geq 0$ şi pe de alta că $n=(a_n+1)^n\geq C_n^2\cdot a_n^2$, de unde se obţine $0\leq a_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}}$. De aici rezultă că $a_n\to 0$, deci $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

d) orice număr real α este limita unui şir de numere raţionale. Într-adevăr, avem $|\alpha-\alpha^{(k)}|\leq\frac{1}{10^k}$, $(\forall)k\geq 0$, deci $\alpha^{(k)}\to\alpha$ pentru $k\to\infty$, iar trunchierile $\alpha^{(k)}$ aparţin lui $\mathbb{Q}$.

De asemenea, α este şi limita unui şir de numere iraţionale. Într-adevăr, pentru orice $n\geq 1$, în fiecare interval $\left(\alpha-\frac{1}{n},\alpha+\frac{1}{n}\right)$ putem fixa câte un numar iraţional β_n (în orice interval există numere iraţionale, deoarece intervalul este mulţime nenumărabilă, iar $\mathbb{Q}$ este mulţime numărabilă). Aşadar $|\alpha-\beta_n|<\frac{1}{n}$, deci $\beta_n\to\alpha$ pentru $n\to\infty$.

În exemplele anterioare, limita a putut fi calculată efectiv. Există situaţii în care se pun în evidenţă şiruri despre care se poate demonstra doar teoretic convergenţa lor; astfel de situaţii apar în determinarea soluţiilor unor ecuaţii, în determinarea extremelor unor funcţii, în metoda aproximaţiilor succesive etc. Noţiunea de şir Cauchy (A. CAUCHY, 1789 - 1857, profesor la Şcoala Politehnică din Paris), definită mai jos, este legată tocmai de posibilitatea de a demonstra convergenţa unui şir comparând termenii acelui şir între ei şi nu în raport cu un element exterior şirului (aşa cum este în general limita unui şir convergent).

Definiţia 1.4. *Un şir* $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *de numere reale se numeşte* **şir Cauchy** *(sau în altă terminologie,* **şir fundamental***) dacă şirul dublu de numere pozitive* $\{|x_m-x_n|\}_{m,n\geq 0}$ *converge către 0 pentru* $m\to\infty$, $n\to\infty$, *adică este îndeplinită condiţia:*

$$(\forall)\varepsilon>0\ (\exists)N(\varepsilon)\ \textit{natural astfel încât}\ (\forall)m,n\geq N(\varepsilon)\ \textit{avem}\ |x_m-x_n|<\varepsilon. \quad (4)$$

Dacă $m=n$, această condiţie este automat satisfăcută; dacă $m>n$, atunci notând $p=m-n$, rezultă $p\geq 1$ şi $m=n+p$ (cazul $m<n$ este similar); în acest mod, condiţia (4) poate fi rescrisă astfel:

$$(\forall)\varepsilon>0(\exists)N(\varepsilon)\text{ astfel încât }(\forall)n\geq N(\varepsilon)\text{ şi }(\forall)p\geq 1,\ |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon. \quad (4')$$

În liceu au fost date proprietăţile principale de calcul cu şiruri convergente de numere reale; astfel, dacă $a_n\to a$ şi $b_n\to b$ (pentru $n\to\infty$), atunci $|a_n|\to|a|$, $a_n+b_n\to a+b$, $a_n-b_n\to a-b$, $a_nb_n\to ab$, $\frac{a_n}{b_n}\to\frac{a}{b}$ (în ipoteza că $b_n\neq 0$, $b\neq 0$, $(\forall)n\geq 0$), $\lambda a_n\to\lambda a$ ($(\forall)\lambda$ real constant); dacă în plus $a_n<b_n$ (respectiv $a_n>b_n$) pentru orice n de la un rang încolo, atunci $a\leq b$ (respectiv $a\geq b$). De asemenea, este evident că dacă la un şir mărginit (respectiv convergent, Cauchy) în $\mathbb{R}$ se elimină sau se adaugă un număr finit de termeni, atunci şirul nou obţinut are aceleaşi proprietăţi.

În continuare vom aprofunda proprietăţile şirurilor de numere reale. Reamintim mai întâi că dacă $s = \{x_n\}_{n\geq 0}$ este un şir în $\mathbb{R}$ şi dacă se fixează un şir strict crescător de numere naturale $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ atunci şirul $\{x_{k_n}\}_{n\geq 0}$ este numit un *şubsir al lui s*. Trebuie remarcat că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n \leq k_n$. De exemplu, se pot considera subşirurile $\{x_{2n}\}_{n\geq 0}$, $\{x_{2n+1}\}_{n\geq 0}$ ale termenilor de rang par, respectiv impar, care corespund şirurilor strict crescătoare de numere naturale $0 < 2 < 4 < 6 < \ldots$ şi respectiv $1 < 3 < 5 < 7 < \ldots$.

Teorema 1.4. (a) *Dacă un şir în $\mathbb{R}$ este convergent, atunci orice subşir al acestuia este convergent, cu aceeaşi limită.*

(b) *Dacă un şir Cauchy $\{x_n\}_{n\geq 0}$ în $\mathbb{R}$ are un subşir convergent către l, atunci $x_n \to l$ pentru $n \to \infty$.*

Demonstraţie. (a) Fie $x_n \to a$ pentru $n \to \infty$ şi $\{x_{k_n}\}$ un subşir al şirului $\{x_n\}$, unde $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$. Fie $(\forall)\varepsilon > 0$ real. Atunci aplicând (3) rezultă că există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât $(\forall)n \geq N(\varepsilon)$, $|x_n - a| < \varepsilon$. Deoarece $k_n \geq n$ pentru orice $n \geq 0$, rezultă $|x_{k_n} - a| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$, adică $x_{k_n} \to a$.

(b) Fie $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$ numere naturale şi $x_{k_n} \to l$. Fie $\varepsilon > 0$ real arbitrar, fixat. Atunci există un număr natural N_1 astfel încât $(\forall)n \geq N$, $|x_{k_n} - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Apoi deoarece $\{x_n\}_{n\geq 0}$ este şir Cauchy, rezultă că există N_2 natural astfel încât $|x_m - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $m, n \geq N_2$. Fie $N = \max(N_1, N_2)$ şi $n \geq N$. Atunci luând $m = k_n$, rezultă $m \geq N$ (deoarece $k_n \geq n$), deci $|x_{k_m} - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, deci

$$|x_n - l| = |(x_n - x_{k_n}) + (x_{k_n} - l)| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq N$, adică $x_n \to l$.

Teorema 1.5 (*lema lui* E. CESARO, 1859 - 1906). *Orice şir mărginit de numere reale are un şir convergent.*

Demonstraţie. Fie $\{x_n\}_{n\geq 0}$ un şir mărginit. Aşadar toţi termenii şirului, în număr infinit, aparţin unui interval închis $I_0 = [a_0, b_0]$, $a_0 < b_0$. Fie $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$; atunci unul cel puţin din intervalele închise $[a_0, c_0]$, $[c_0, b_0]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului $\{x_n\}_{n\geq 0}$ şi îl notăm $I_1 = [a_1, b_1]$. Similar, considerând $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$, unul din intervalele $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$ va conţine o infinitate de termeni ai şirului iniţial şi îl notăm $I_2 = [a_2, b_2]$ etc. Se obţine astfel un şir descrescător $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \ldots$ de intervale închise şi conform teoremei 1.3, există $\xi \in \bigcap\limits_{n\geq 0} I_n$. Alegem k_0 astfel încât $x_{k_0} \in I_0$, apoi $k_1 > k_0$ astfel încât $x_{k_1} \in I_1$, apoi $k_2 > k_1$ cu condiţia $x_{k_2} \in I_2$ etc. (Acest lucru este posibil deoarece fiecare interval I_p conţine o infinitate de termeni ai şirului initial). Aşadar $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$ şi $x_{k_n} \in I_n$; cum $\xi \in I_n$, $(\forall)n \geq 0$ rezultă

$$|x_{k_n} - \xi| \leq \text{lungimea lui } I_n.$$

Dar lungimea lui I_n, este egală cu $\dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$ (căci fiecare interval I_p, $p \geq 1$ are ca lungime jumătate din lungimea intervalului I_{p-1}, iar I_0 are lungimea $b_0 - a_0$). Aşadar, $0 \leq |x_{k_n} - \xi| \leq \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$ pentru orice $n \geq 0$ şi făcând $n \to \infty$, rezultă $x_{k_n} \to \xi$.

Teorema 1.6 (*criteriul general al lui Cauchy*). *Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă el este un şir Cauchy.*

Demonstraţie. Fie $\{x_n\}$ un şir convergent în $\mathbb{R}$, $x_n \to l$. Fixăm $(\forall)\varepsilon > 0$; atunci există $N(\varepsilon)$ astfel încât $|x_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$. Dacă

$m, n \geq N(\varepsilon)$, atunci avem $|x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$, deci

$$|x_m - x_n| = |(x_m - l) + (l - x_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Aşadar, şirul $\{x_n\}$ este şir Cauchy.

Reciproc, fie $\{x_n\}$ un şir Cauchy în $\mathbb{R}$. Atunci el este un şir mărginit; într-adevăr, luând $\varepsilon = 1$, există N astfel încât $(\forall)m, n \geq N$, $|x_n - x_m| < 1$. În particular, pentru $m = n$, $n \geq N$, rezultă că

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leq 1 + |x_N|.$$

Aşadar, termenii şirului $\{x_n\}$ de rang mai mare decât N sunt cuprinşi în intervalul $(-1 - |x_N|, 1 + |x_N|)$ şi ca atare, şirul $\{x_n\}$ este mărginit. Conform teoremei 1.5 el va conţine atunci un subşir convergent şi aplicând teorema 1.4, (b), rezultă că şirul $\{x_n\}$ însuşi, presupus iniţial şir Cauchy, va fi convergent.

Exemplu. Arătăm că şirul $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ nu este Cauchy, deci nici convergent. Să observăm mai întâi că $(\forall)n \geq 1$ avem

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n\ ori} = \frac{1}{2}$$

Presupunem prin absurd că $\{x_n\}$ ar fi şir Cauchy; luând $\varepsilon = \frac{1}{3}$, ar exista N natural astfel încât $(\forall)m, n \geq N$, $|x_m - x_n| < \frac{1}{3}$. Pentru $m = 2N$, $n = N$, rezultă $|x_{2N} - x_N| < \frac{1}{3}$, şi cum $x_{2N} - x_N \geq \frac{1}{2}$, ar rezulta că $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$, absurd.

Teorema 1.7. *Orice şir mărginit şi monoton crescător (sau descrescător) este convergent.*

Demonstraţie. Fie $\{x_n\}_{n\geq 0}$ un şir monoton crescător $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots$, presupus mărginit. Conform axiomei (III) există $M = \sup_n x_n$. Vom arăta că $x_n \to M$ pentru $n \to \infty$. Pentru aceasta, fie $(\forall)\varepsilon > 0$ fixat. Deoarece $M - \varepsilon$ nu este majorant al şirului, fiindcă $M - \varepsilon < M$ şi M este cel mai mic majorant, rezultă că există un termen al şirului x_n depinzând de ε, adică un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât $x_N > M - \varepsilon$. Aşadar $M - \varepsilon < x_N \leq M$. Dar şirul fiind crescător şi mărginit superior de M, rezultă că $(\forall)n \geq N$ avem, $x_N \leq x_n \leq M$. În concluzie, pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$, avem $M - \varepsilon < x_n \leq M < M + \varepsilon$, adică $|x_n - M| < \varepsilon$, deci $x_n \to M$. Demonstraţia se face în mod similar dacă şirul este mărginit şi descrescător; în acest caz, $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n$.

Exemple. 1) Fie $\{x_n\}_{n\geq 0}$ un şir mărginit în $\mathbb{R}$, cu toţi termenii situaţi într-un interval fixat $[\alpha, \beta]$. Notăm $y_0 = \sup\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, $y_1 = \sup\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, $y_2 = \sup\{x_2, x_3, \ldots\}$ etc. şi în mod similar $z_0 = \inf\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, $z_1 = \inf\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, $z_2 = \inf\{x_2, x_3, \ldots\}$ etc. Conform axiomei (III) a lui Cantor-Dedekind, y_i, z_j sunt numere reale bine determinate $(i, j \geq 0)$. Este evident că şirul $\{y_n\}_{n\geq 0}$ este descrescător, iar şirul $\{z_n\}_{n\geq 0}$ este crescător, ambele mărginite, cu toţi termenii situaţi în intervalul $[\alpha, \beta]$. Aşadar, conform teoremei 1.7, acestei şiruri sunt convergente în $\mathbb{R}$; se notează

$$\underline{\lim} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n, \quad \overline{\lim} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Aşadar, $\underline{\lim} x_n = \sup_n z_n = \sup_n \left(\inf_{k\geq n} x_k\right)$ şi $\overline{\lim} x_n = \inf_n y_n = \inf_n \left(\sup_{k\geq n} x_k\right)$.

Este evident că $\underline{\lim} x_n = -\overline{\lim}(-x_n)$. Deoarece $z_p \leq y_q$ pentru orice $p, q \geq 0$ rezultă $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$. De exemplu, pentru şirul mărginit $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$, avem $\underline{\lim} x_n = -1$, $\overline{\lim} x_n = 1$. Se poate arăta că un şir mărginit $\{x_n\}$ este convergent în $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$.

2) În liceu s-a demonstrat că şirul $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$ este monoton crescător şi mărginit ($2 \leq x_n \leq 3$, $(\forall)n \geq 1$). Aşadar, acest şir este convergent (fără a şti dinainte limita) şi limita sa este prin definiţie numărul e (în onoarea marelui matematician elveţian L. EULER, 1707 - 1783). Cu ajutorul unui minicalculator se poate verifica uşor că $x_2 = 2,25$, $x_4 = 2,441\ldots$, $x_{16} = 2,638\ldots$, $x_{256} = 2,712\ldots$, etc. Numărul e cu primele 9 zecimale exacte este $e \simeq 2,718281828\ldots$, e este iraţional (deci scrierea zecimală nu admite repetare periodică a vreunei grupe de cifre).

2.1.4 Legătura între numerele reale şi măsurarea mărimilor

O mulţime G se numeşte *grup ordonat* dacă pe acea mulţime sunt definite o operaţie algebrică "+" (numită adunare) şi o relaţie de ordine totală "$\leq$", astfel încât $(G, +, 0)$ să fie grup abelian avand 0 ca element neutru şi în plus, ori de câte ori $\alpha \leq \beta$ în G, să rezulte că $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$, pentru orice $\gamma \in G$.

Dacă $\alpha \in G$ şi $n \in \mathbb{Z}$ sunt fixate se poate defini $n\alpha$ astfel: dacă $n \geq 1$, atunci $n\alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \ldots + \alpha}_{n\ ori}$, $0\alpha = 0$ şi $(-n)\alpha = -(n\alpha)$. Dacă $n \geq 0$ în $\mathbb{Z}$ şi $\alpha \geq 0$ în G, atunci $n\alpha \geq 0$ în G.

Evident, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sunt grupuri ordonate relativ la adunarea şi ordinea uzuale.

Un grup ordonat G se numeşte *arhimedian* dacă pentru orice $x \in G$, $x > 0$, este verificată condiţia:

$$(\forall)y \in G\ (\exists)n \geq 1 \quad \text{natural astfel încât} \quad nx \geq y. \tag{5}$$

Exemple. Evident, $\mathbb{R}$ este grup arhimedian (conform teoremei 1.1). Mulţimea tuturor temperaturilor (presupuse în mod ideal nelimitate) formează un grup arhimedian; într-adevăr, ştim să definim $0, T_1 + T_2, T_1 \leq T_2$, pentru orice două temperaturi fixate T_1, T_2 iar dacă $U > 0$ este o temperatură fixată, atunci pentru orice temperatură T există $n \geq 1$ întreg astfel încât $nU \geq T$.

În mod similar, mulţimile presiunilor, lungimilor, volumelor, vitezelor, maselor etc. (imaginând presiuni, lungimi etc. negative) pot fi înzestrate cu structuri de grupuri arhimediene. Se poate spune că mărimile fizice, chimice, indicatorii economici etc. pot fi modelate matematic prin grupuri arhimediene, deci prin mulţimi de elemente, care pot fi adunate şi care se pot compara, cu respectarea proprietăţilor admise. Teorema care urmează sintetizează intuiţia noastră asupra utilizării numerelor reale în legătură cu măsurarea mărimilor fizice sau cu introducerea diverşilor indicatori cantitativi. În esenţă, această teoremă redă schema după care la "valori abstracte" ale acestor mărimi li se asociază numere reale bine determinate; pe plan istoric, această legătură a fost marcată pentru prima oară în "Elementele" lui Euclid (EUCLID, sec. III i.e.n.), constituind suportul intuitiv şi sursa de dezvoltare a noţiunii de număr real.

Lemă. *Fie G un grup arhimedian şi $U \in G$, $U > 0$, un element fixat, pe care îl numim unitate de măsură.*

a) *Fie $p, q \in \mathbb{Z}$; avem $p < q$ dacă şi numai dacă $pU < qU$.*

b) *Pentru orice element $x \in G$ există şi este unic un şir $\{p_n\}_{n \geq 0}$ de numere întregi astfel încât*

$$10\, p_n \leq p_{n+1} < 10(1 + p_n) \text{ şi } p_n U \leq 10^n x < (1 + p_n)U, \quad (\forall)n \geq 0 \tag{6}$$

Demonstraţie. a) Dacă $p < q$, atunci $q - p - 1 \geq 0$ deci $(q - p - 1)U \geq 0$, adică $qU \geq (p + 1)U > pU$. Reciproc, dacă $pU < qU$, atunci $p < q$ (căci altfel, rezultă $q \leq p$, deci $p - q \geq 0$ şi cum $U > 0$, ar rezulta $(p - q)U \geq 0$ în G, adică $qU \leq pU$, ceea ce este absurd).

b) Fie $x \in G$ fixat. Fixăm apoi un întreg $n \geq 0$ arbitrar. Conform (5) există $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$aU > 10^n x \quad \text{şi} \quad bU > -10^n x.$$

Mulţimea de numere întregi $C = \{p \in \mathbb{Z} | pU \leq 10^n x\}$ este nevidă deoarece $-b \in C$. Apoi, C este majorată de a, deoarece $(\forall) p \in C$ avem $pU \leq 10^n x < aU$, deci aplicând (a), rezultă $p < a$. Aşadar, C fiind o submulţime majorată a lui $\mathbb{Z}$, ea are un cel mai mare element, care este unic şi pe care îl notăm cu p_n.

Acest număr întreg $p_n \in C$ este deci bine determinat prin relaţiile

$$p_n U \leq 10^n x; \tag{7}$$

$$10^n x < (1 + p_n) U. \tag{8}$$

Înmulţind cu 10 ambii membri ai relaţiei (7), rezultă $10 p_n U \leq 10^{n+1} x$ şi din relaţia (8) scrisă pentru $n+1$, rezultă $10^{n+1} x < (1 + p_{n+1}) U$, deci $10 p_n U < (1 + p_{n+1}) U$ şi aplicând a), rezultă $10 p_n < 1 + p_{n+1}$, adică $10 p_n \leq p_{n+1}$. Pe de altă parte, din (7) se obţine $p_{n+1} U \leq 10^{n+1} x$ şi înmulţind cu 10 relaţia (8), $10^{n+1} x < 10(1 + p_n) U$, de unde $p_{n+1} < 10(1 + p_n)$.

Teorema 1.8. *Fie G un grup arhimedian şi un element $U \in G$, $U > 0$ fixat (unitate de masură). Atunci există şi este o unică aplicaţie*

$$\mu : G \to \mathbb{R}, \tag{9}$$

având proprietăţile următoare:

(a) $\mu(U) = 1$, $\mu(0) = 0$;

(b) *μ este aditivă: pentru orice $x, x' \in G$, avem $\mu(x + x') = \mu(x) + \mu(x')$ şi $\mu(nx) = n\mu(x)$, $(\forall) n \in \mathbb{Z}$;*

(c) *μ este strict crescătoare: dacă $x < x'$ în G, atunci $\mu(x) < \mu(x')$.*

Nu dăm demonstraţia.

Observaţii. Aşadar, dacă G este un grup arhimedian şi $U > 0$ o unitate de măsură fixată, atunci oricărui element $x \in G$ îi corespunde un număr real unic $\mu(x)$ astfel încât lui $0 \in G$ să îi corespundă 0, iar lui U să-i corespundă 1. Numărul $\mu(x)$ se mai numeşte **măsura lui x relativ la unitatea de măsură** U. Asocierea μ este evident injectivă (fiind strict crescătoare).

Dacă $V \in G$, $V > 0$ este o altă unitate de măsură în G şi dacă notăm μ_U, μ_V aplicaţiile $G \to \mathbb{R}$ asociate, atunci funcţia $\varphi : G \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\mu_U(V)} \mu_U(x)$ este aditivă, strict crescătoare, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(V) = 1$. Deci φ verifică proprietăţile a, b, c pe care le verifică μ_V, deci din unicitate, rezultă $\varphi = \mu_V$, adică $\mu_U(x) = \mu_U(V) \cdot \mu_V(x)$ pentru orice $x \in G$. Notând $k = \mu_U(V)$, rezultă $k > 0$ (căci $0 < V$ şi μ_U este strict crescătoare) şi în plus, $\mu_U = k \cdot \mu_V$, adică prin schimbarea unităţii de măsură, funcţiile de măsură sunt proporţionale; în particular, dacă $x, y \in G$ sunt elemente nenule, atunci $\dfrac{\mu_U(x)}{\mu_U(y)} = \dfrac{\mu_V(x)}{\mu_V(y)}$, un rezultat aşteptat, indicând independenţa de unitatea de măsură a raportului măsurilor a două mărimi nenule din G.

2.1.5 Dreapta reală, bijecţia lui Descartes

Considerăm o axă, adică o dreaptă pe care sunt fixate originea, unitatea de măsură şi sensul; aşadar, este fixat un segment orientat pe axă, având capete notate A_0, A_1 şi fie $\bar{\imath} = \overline{A_0 A_1}$ versorul asociat (fig. II.1a).

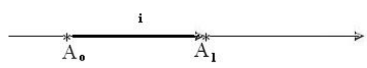


Fig. II.1a

Pentru orice două puncte M, N de pe axă se poate defini suma lor $P = M + N$, prin relaţia vectorială $\overline{A_0 P} = \overline{A_0 M} + \overline{A_0 N}$; apoi se defineşte relaţia de ordine: $M \leq N \leftrightarrow$ vectorii $\overline{MN}$ şi $\bar{\imath}$ au acelaşi sens.

Se admite că mulţimea G a punctelor axei este un grup ordonat arhimedian, în care orice submulţime nevidă majorată are margine superioară. Conform teoremei 1.8 rezultă atunci că există o aplicaţie unică

$$\mu : G \to \mathbb{R}$$

astfel încât $\mu(A_0) = 0$, $\mu(A_1) = 1$, $\mu(M + N) = \mu(M) + \mu(N)$ pentru orice $M, N \in G$; iar dacă $M < N$, atunci $\mu(M) < \mu(N)$.

Teorema 1.9. *Aplicaţia $\mu : G \to \mathbb{R}$ este bijectivă.*

Demonstraţie. Faptul că μ este injectivă este imediat: dacă $M, N \in G$ şi $M \neq N$, atunci avem $M < N$ sau $N < M$ şi de aici rezultă $\mu(M) < \mu(N)$ sau $\mu(N) < \mu(M)$ deci $\mu(M) \neq \mu(N)$. Probăm acum surjectivitatea lui μ. Fie $(\forall)x \in \mathbb{R}$ fixat şi scrierea sa zecimală $x = \alpha, a_0 a_1 a_2 \ldots$, unde $\alpha = [x]$. Presupunem $x > 0$ (cazul $x < 0$ se deduce imediat prin simetrie faţă de origine) şi considerăm şirul de puncte $P_0, P_1, P_2, \ldots$ din G astfel încât

$$\overline{OP_0} = \alpha\bar{\imath},\ \overline{OP_1} = \overline{OP_0} + \frac{a_0}{10}\bar{\imath},\ \overline{OP_2} = \overline{OP_1} + \frac{a_1}{100}\bar{\imath} \quad \text{etc.}$$

Am notat $O = A_0$. Atunci mulţimea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ este majorată şi notând $P = \sup\limits_n P_n$, rezultă $\mu(P) = x$.

Aplicaţia μ este numită *bijecţia lui Descartes* (R. DESCARTES, 1596 - 1650) şi are o importanţă crucială pentru analiză, pentru geometrie şi pentru cunoaştere, în general. Ea stabileşte o corespondenţă biunivocă între două mulţimi de natură diferită, pe de-o parte o mulţime de obiecte geometrice (punctele unei axe) şi pe de-alta, o mulţime de obiecte algebrice (numere reale). Aşadar, punctele se pot identifica prin numere şi invers. Aici se află punctul de plecare al Geometriei analitice, deci al unor raţionamente geometrice efectuate cu ajutorul calculelor cu numere. Cu alte cuvinte, acesta este punctul esenţial al programării pe calculator a geometriei, ca şi al adoptării unui limbaj geometric în prezentarea analizei.

Pentru orice punct $M \in G$ al axei, numărul real $x_M = \mu(M)$ se numeşte *abscisa lui M* pe axa respectivă. Reciproc, pentru orice număr real x, există un singur punct $M \in G$ astfel încât $\mu(M) = x_M = x$ şi se defineşte *produsul între* x şi $\bar{\imath}$ ca fiind vectorul $x\bar{\imath} \triangleq \overline{OM}$; mai general, dacă $\bar{v}$ este un vector oarecare al axei şi dacă λ este un număr real, atunci se alege acel $M \in G$ unic astfel încât $\bar{v} = \overline{OM}$, adică $\bar{v} = x_M\bar{\imath}$ şi se defineşte produsul $\lambda\bar{v}$ între numărul real λ şi vectorul $\bar{v}$ ca fiind acel unic vector $\overline{OS}$ cu proprietatea că $\overline{OS} = (\lambda x_M)\bar{\imath}$.

Evident, mulţimea vectorilor de pe axă formează un spaţiu vectorial real, având o bază formată dintr-un singur vector (de exemplu, $\{\bar{\imath}\}$).

Prin bijecţia lui Descartes, se poate identifica mulţimea $\mathbb{R}$ cu mulţimea punctelor unei axe şi aici se află o justificare pentru faptul că mulţimea $\mathbb{R}$ este numită uneori **dreapta reală**.

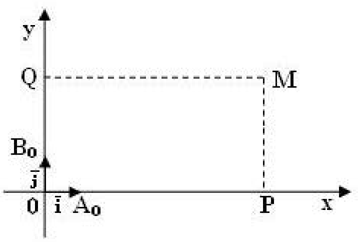


Fig. II.1b

Considerând un plan (π) şi un sistem ortogonal de axe Ox, Oy în (π) având originea comună, cu versori $\bar{\imath} = \overline{OA_0}$, $\bar{\jmath} = \overline{OB_0}$, atunci se poate stabili bijecţia lui Descartes $\mu : (\pi) \to \mathbb{R}^2$ între punctele planului (π) şi perechile ordonate de numere reale, în modul urmator: pentru orice, punct $M \in (\pi)$, fie P şi Q proiecţiile ortogonale ale lui M pe axele Ox, Oy respectiv; atunci există numere reale unice x_M, y_M astfel încât $\overline{OP} = x_M\bar{\imath}$, $\overline{OQ} = y_M\bar{\jmath}$, adică $\overline{OM} = x_M\bar{\imath} + y_M\bar{\jmath}$. Se defineşte atunci $\mu(M) = (x_M, y_M)$. Mulţimea $V_2(\pi)$ a vectorilor din planul (π) este un spaţiu vectorial real şi sistemul de vectori $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}\}$ constituie o bază, deci $\dim_{\mathbb{R}} V_2(\pi) = 2$.

În mod similar, dacă se consideră spaţiul fizic uzual S (raportat la un sistem ortogonal de axe $Oxyz$ cu originea comună, cu versori $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$), atunci se poate stabili şi în acest caz bijecţia lui Descartes $\mu : S \to \mathbb{R}^3$, studiată în cadrul Geometriei analitice.

Este evident că limbajul geometric permite o vizualizare dinamică a proprietăţilor diverselor configuraţii de puncte, ca şi a funcţiilor definite pe astfel de configuraţii. De exemplu, pentru o funcţie reală $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, este binecunoscut că graficul ei, $\text{Gr}\, f = \{(x, f(x)) | x \in A\}$, ca submulţime a lui $\mathbb{R}^2$, constituie o modalitate excepţională de a concentra informaţii despre funcţia respectivă (monotonie, inversare, paritate, valori extreme etc.).

2.1.6 Infinitul în analiza reală

Pentru orice număr real fixat α există $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha < x$ şi $y < \alpha$). Există situaţii în care trebuie descris matematic ce se întâmplă "dincolo" (sau "dincoace") de orice număr real fixat; de exemplu, asimptotele funcţiilor reale, şiruri nemărginite de numere reale etc.

Se face convenţia de a adjuncţiona la mulţimea $\mathbb{R}$ două obiecte, notate $-\infty, +\infty$, şi de a considera astfel dreapta reală încheiată (sau compactificată) $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Se scrie uneori ∞ în loc de $+\infty$. Convenind că $-\infty < x$, $x < +\infty$, $-\infty < \infty$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi păstrând ordinea de pe $\mathbb{R}$, rezultă că mulţimea $\bar{\mathbb{R}}$ este total ordonată. În ceea ce priveşte structura algebrică a lui $\bar{\mathbb{R}}$, se pot extinde operaţiile algebrice din $\mathbb{R}$, fără a fi peste tot definite. Astfel, se definesc

$$\infty + a = \infty \text{ (pentru orice } a \in \bar{\mathbb{R}},\ a \neq -\infty),$$

$$-\infty + a = -\infty \text{ (pentru orice } a \in \bar{\mathbb{R}},\ a \neq \infty),$$

$$\infty \cdot a = \begin{cases} \infty & \text{dacă} \quad a > 0 \text{ în } \bar{\mathbb{R}} \\ -\infty & \text{dacă} \quad a < 0 \text{ în } \bar{\mathbb{R}}. \end{cases}$$

Nu se pot defini $\infty + (-\infty)$, $0 \cdot \infty$, $0 \cdot (-\infty)$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ etc., astfel încât să fie respectate proprietăţile uzuale de calcul. De exemplu, dacă $\infty - \infty$ ar fi un element $c \in \bar{\mathbb{R}}$, ar rezulta că $c + 1 = (\infty - \infty) + 1 = (\infty + 1) - \infty = \infty - \infty = c$, absurd.

În matematică şi în filozofie, conceptul de infinit apare în două ipostaze: *infinitul actual* şi *infinitul potenţial*. A considera infinitul actual înseamnă a presupune existenţa ca atare a elementelor $-\infty, +\infty$, privite ca elemente ca oricare altele, neprivilegiate, în mulţimea $\bar{\mathbb{R}}$.

Infinitul potenţial este definit exclusiv cu ajutorul numerelor reale (finite), fără a apela la mulţimea $\bar{\mathbb{R}}$ şi apare ca o economie de notaţie. Astfel, dacă $\{x_n\}_{n \geq 0}$ este un şir de numere reale, se spune că x_n *converge către* $+\infty$ $(x_n \to \infty) \overset{\Delta}{\longleftrightarrow} (\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)N(\varepsilon)$ natural astfel încât pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$, $x_n > \varepsilon$; similar, $x_n \to -\infty \overset{\Delta}{\longleftrightarrow} (\forall)\varepsilon > 0$ $(\exists)N(\varepsilon) : (\forall)n \geq N(\varepsilon)$, $x_n < -\varepsilon$. Recunoaştem aici că notaţiile ∞ şi $-\infty$ sunt folosite ca o economie de scriere, pentru că în membrii din dreapta ai definiţiilor anterioare sunt angajate numai numere reale.

Operaţiile anterioare, cu participarea lui $+\infty$, $-\infty$ capătă o semnificaţie în cadrul infinitului potenţial care arată în esenţă echivalenţa celor două accepţiuni ale infinitului. Astfel, dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to a$, $a \neq -\infty$, atunci $x_n + y_n \to \infty$, iar dacă $x_n \to -\infty$ şi $y_n \to a$, $a \neq +\infty$, atunci $x_n + y_n \to -\infty$. În mod similar, dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to a$, $a > 0$, atunci $x_n y_n \to \infty$ etc. Verificarea acestor afirmaţii în limbaj ε este imediată. Faptul că $\infty - \infty$ nu se poate defini este reflectat prin aceea că dacă $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$, nu se poate spune nimic despre şirul $x_n - y_n$ (de exemplu $n^2 - n \to \infty$, $n - n^2 \to -\infty$, $\sqrt{n^2 + 1} - n \to 0$) etc.

Teorema 1.10. (a) *În mulţimea* $\bar{\mathbb{R}}$ *orice şir este mărginit*;

(b) *Orice şir monoton de numere reale are limită în* $\bar{\mathbb{R}}$;

(c) *Orice submulţime nevidă* $A \subset \bar{\mathbb{R}}$ *are margine superioară şi margine inferioară (relativ la ordinea definită anterior).*

Demonstraţie. (a) Pentru orice şir $\{x_n\}_{n \geq 0}$ în $\bar{\mathbb{R}}$ avem $-\infty \leq x_n \leq \infty$ deci şirul este mărginit în $\bar{\mathbb{R}}$.

(b) Fie $\{x_n\}_{n \geq 0}$ un şir monoton crescător de numere reale. Dacă el este mărginit în $\mathbb{R}$, atunci el are limită în $\mathbb{R}$ (cf. teoremei 1.7), deci şi în $\bar{\mathbb{R}}$. Dacă şirul $\{x_n\}$ este nemărginit, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un termen $x_N > \varepsilon$ şi ca atare $x_n > \varepsilon$, $(\forall)n \geq N$, deci $x_n \to \infty$. Dacă şirul este descrescător, atunci se raţionează similar.

(c) Daca A este majorată (sau minorată în $\mathbb{R}$), atunci are margine superioară (sau inferioară) în $\mathbb{R}$, care rămâne valabilă şi în $\bar{\mathbb{R}}$. Dacă A nu este majorată în $\mathbb{R}$, atunci $\sup A = +\infty$, iar dacă A nu este minorată, $\inf A = -\infty$.

Ca o consecinţă, pentru orice funcţie numerică $f : X \to \mathbb{R}$, definită pe o mulţime oarecare X, se pot defini extremele ei globale pe X, anume $M = \sup\limits_{x \in X} f(x)$, $m = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ ca fiind marginile superioară şi respectiv inferioară ale mulţimii $f(X)$, calculate în $\bar{\mathbb{R}}$.

2.1.7 Exerciţii

1. Să se arate că numărul $0,363636\ldots$ este raţional, iar $0,3060030006\ldots$ este iraţional.

2. Să se determine n natural minim satisfăcând fiecare din inegalităţile

$$\text{a) } \left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-3}; \quad \text{b) } \frac{4^n}{n!} < 10^{-4}; \quad \text{c) } \frac{\pi^n}{6^n \cdot n!} < 10^{-8}.$$

3. Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Să se arate că pentru orice întreg $q \geq 1$ există $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $|a - p/q| < 1/q$ şi folosind acest lucru, să se arate că orice număr real este limita unui şir de numere raţionale.

Indicaţie. Intervalele de forma $\left[\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q}\right)$, $p \in \mathbb{Z}$ (q fiind fixat) determină o partiţie a lui $\mathbb{R}$ şi se poate alege p astfel încât $\frac{p}{q} \leq a < \frac{p+1}{q}$. Apoi luând $q = n$, $n \geq 1$ şi $\frac{p}{q} = r_n$, rezultă $|a - r_n| < \frac{1}{n}$ etc.

4. Să se arate că mulţimea R_3 verifică proprietatea III.

Indicaţie. Fie $M = m_{-k} \ldots m_0, m_1 m_2 m_3 \ldots$ un majorant al unei submulţimi nevide $A \subset R_3$. Pentru orice $\alpha \in A$ avem $\alpha \leq M$, deci partea întreagă $[\alpha]$ are cel mult $k+1$ cifre semnificative şi fie b_{-k} cea mai mare dintre cifrele de pe locul $-k$ ale tuturor elementelor din A. Fie A_{-k} mulţimea elementelor din A care încep cu b_{-k}. Pentru elementele lui A_{-k}, fie b_{-k+1} cea mai mare dintre cifrele de pe locul $-k+1$. Apoi pentru elementele lui A care încep cu $b_{-k}b_{-k+1}$ alegem cifra maximă b_{-k+2} de pe locul $-k+2$ etc. Elementul $\beta = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ cu $b_n = 0$, $n < -k$, este cel mai mic majorant al lui $A, \beta = \sup A$.

5. Să se determine marginile inferioară şi superioară ale următoarelor submulţimi ale dreptei reale:

$$A_1 = \left\{\frac{3^n+1}{3^n+2}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad A_2 = \left\{(-1)^n \cos\frac{n\pi}{3}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad A_3 = \left\{\sin\frac{n}{n+5}\right\}_{n\in\mathbb{N}},$$

$$A_4 = \left\{\frac{n+(-1)^n n}{3n+2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad A_5 = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x^2 \leq 3,\ x \text{ raţional}\}.$$

6. Pentru orice funcţie numerică $f : A \to \mathbb{R}$, A mulţime oarecare, se notează $Z_f = \{x \in A | f(x) = 0\}$ (numită *mulţimea zerourilor lui f în A*).

a) Să se arate că pentru orice două funcţii $f, g : A \to \mathbb{R}$, avem $Z_f \cup Z_g = Z_{fg}$, $Z_f \cap Z_g = Z_{f^2+g^2}$ şi că pentru orice submulţime $C \subset A$ există o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ astfel încât $C = Z_f$.

b) Să se dea exemplu de o funcţie nenulă, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care mulţimea zerourilor este $\mathbb{Q}$; este posibil acest lucru dacă funcţia ar fi continuă ?

7. Un număr real $\alpha \in \mathbb{R}$ se numeşte *algebric* dacă există numere întregi $c_0, c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{Z}$, $c_0 \neq 0$ astfel încât $c_0\alpha^p + c_1\alpha^{p-1} + \ldots + c_p = 0$; numerele reale care nu sunt algebrice se numesc *transcendente*. Să se arate că mulţimea numerelor algebrice este numărabilă, iar mulţimea numerelor transcendente este nenumărabilă.

Indicaţie. Multimea $\mathbb{Z}[X]$ a polinoamelor cu coeficienţi întregi este numărabilă, deoarece există o aplicaţie injectivă $\mathbb{Z}[X] \to \bigcup\limits_{p\geq 1} \mathbb{Z}_P$. Pentru orice polinom P nenul, mulţimea $\mathbb{Z}_P$ a rădăcinilor sale este finită, iar mulţimea $\mathcal{A}$ a numerelor algebrice este tocmai $\bigcup\limits_{\substack{P\in\mathbb{Z}[X]\\ P\neq 0}} \mathbb{Z}_P$, adică o reuniune numărabilă de mulţimi finite. Mulţimea $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ este nenumărabilă (deoarece în caz contrar ar rezulta că $\mathbb{R}$ este reuniunea a două mulţimi numărabile).

Aşadar, există "mai multe" numere transcendente decât algebrice. Evident, orice număr raţional $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ este algebric (ca soluţie a ecuaţiei $qx - p = 0$), $\sqrt{2}$ este algebric (ca soluţie a ecuaţiei $x^2 - 2 = 0$) etc; un succes remarcabil al matematicii secolului XIX a fost demonstrarea transcendentei lui e (CH.

HERMITE, 1822 - 1901) şi a lui π (F. LINDEMANN, 1852 - 1939). Celebra problemă a "cuadraturii cercului" a primit astfel un răspuns negativ definitiv.

8. Fie şirul $a_n = \dfrac{2n-1}{4n+3}$, $n \geq 0$. Să se arate că este monoton şi mărginit şi să se determine $\inf a_n$, $\sup a_n$. Câţi termeni ai şirului sunt în afara intervalului $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{10^3}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10^3}\right)$?

9. Fie $\{x_n\}_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.

a) Să se arate că dacă subşirurile $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$ sunt convergente şi au aceeaşi limita l, atunci $x_n \to l$.

b) Ce se poate spune despre convergenţa şirului $\{x_n\}$ dacă şirul $\{x_n^3\}_{n\geq 0}$ este convergent? Dar dacă $\{x_n^2\}$ este convergent?

10. Să se arate că şirurile $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}_{n\geq 1}$, $\left\{n \sin \dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ sunt convergente, dar şirul $\{\sin n\}_{n\geq 1}$ este divergent.

11. Fie $\{x_n\}_{n\geq 0}$ un şir mărginit de numere reale. Să se arate că acest şir este convergent dacă şi numai dacă $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$. Să se calculeze $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$ pentru $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $n \geq 1$.

12. Fie $\{x_n\}_{n\geq 0}$, $\{y_n\}_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale.

a) Dacă $x_n \to 0$ şi $\{y_n\}$ este un şir mărginit să se arate că $x_n y_n \to 0$.

b) Presupunem că $|x_n| \leq |y_n|$, $(\forall) n \geq 0$. Dacă $y_n \to 0$, să se arate că $x_n \to 0$. Dar dacă $y_n \to l$, $l \neq 0$, rezultă că $x_n \to l$?

13. Fie $\{x_n\}_{n\geq 0}$ un şir de numere reale strict pozitive.

a) Dacă $x_n \to 0$, să se arate că $\dfrac{1}{x_n} \to \infty$; reciproca este adevărată?

b) Presupunem că $y_n \to \infty$. Să se arate că $x_n + y_n \to \infty$; rezultă sau nu că $x_n y_n \to \infty$?

14. Pentru două şiruri în $\mathbb{R}$, $x = \{x_n\}_{n\geq 0}$, $y = \{y_n\}_{n\geq 0}$ definim convoluţia $z = x \star y = \{z_n\}_{n\geq 0}$ punând $z_n = \sum_{i=0}^{n} x_j y_{n-j}$. Pentru $(\forall) k \in \mathbb{N}$ notăm δ_k şirul cu toţi termenii nuli, exceptând termenul de rang k, egal cu 1. Să se calculeze $x \star \delta_k$ şi să se arate că $x \star \delta_0 = \delta_0 \star x = x$. Dacă şirurile x, y sunt mărginite (respectiv monotone, convergente) rezultă aceeaşi proprietate pentru şirul $x \star y$?

2.2 Teoria generală a aproximaţiilor succesive

2.2.1 Spaţii metrice; exemple, utilitatea noţiunii

Spaţiile metrice constituie cadrul firesc pentru studiul convergenţei şirurilor şi permit studiul conceptului de continuitate. Teoria spaţiilor metrice este bazată esenţial pe disponibilităţile numerelor reale. Se poate afirma că toate mulţimile care apar în studiul funcţiilor au o structură de spaţiu metric; de exemplu, dreapta reală $\mathbb{R}$, planul complex $\mathbb{C}$, spaţiile cu mai multe dimensiuni $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, anumite clase de funcţii etc., ca şi submulţimi ale acestora, sunt spaţii metrice. În loc de a face o teorie separată a fiecărui caz în parte, este mult mai util să dăm o serie de proprietăţi generale, valabile în orice spaţiu metric şi apoi să adăugăm proprietăţi specifice diverselor situaţii particulare. Acest mod de prezentare, de la general la particular, este de obicei legat de dificultăţi, dar aici el aduce o economie de gândire, cu respectarea deplină a accesibilităţii.

Degajarea, datorată matematicianului francez R.M. FRECHET, 1878 - 1973, a unei noţiuni de distanţă între obiecte matematice de acelaşi tip, nu neapărat de natură geometrică, a constituit un moment important în matematica modernă. Vom vorbi de distanţa între numere reale, distanţa între numere complexe, distanţa între matrici, între funcţii, etc.

Definiţia 2.1. *Fie X o mulţime nevidă.* **A defini o distanţă** d *pe X înseamnă a asocia oricărei perechi de puncte din X, $(x,y) \in X \times X$, un număr real determinat, notat* $\mathrm{d}(x,y)$ *(numit* **distanţa între** *x* **şi** *y) astfel încât să fie verificate următoarele proprietăţi (numite* **axiomele distanţei***):*

D_1. $(\forall)x, y \in X$, $\mathrm{d}(x,y) \geq 0$ *şi* $\mathrm{d}(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$ (**pozitivitate**);
D_2. $(\forall)x, y \in X$ *avem* $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$ (**simetrie**);
D_3. $(\forall)x, y, z \in X$ *avem* $\mathrm{d}(x,z) \leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$ (*inegalitatea triunghiului*).

În acest mod, este definită o funcţie numerică $\mathrm{d} : X^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \mathrm{d}(x,y)$, numită **funcţie - distanţă pe** X. Se numeşte **spaţiu metric** orice pereche (X, d) alcătuită dintr-o mulţime nevidă X şi o funcţie - distanţă d pe X (verificând proprietăţile D_1, D_2, D_3). Pe aceeaşi mulţime X pot fi definite mai multe distanţe, deci mai multe structuri de spaţiu metric. Evident, dacă (X, d) este spaţiu metric şi dacă $A \subset X$ este submulţime a lui X, atunci (A, d) este de asemenea un spaţiu metric.

Elementele unui spaţiu metric se numesc **puncte**. Vom accepta ulterior ca anumite funcţii, matrici, numere, să fie asimilate cu puncte ale unui spaţiu metric.

Cea mai importantă calitate a unui spaţiu metric este posibilitatea de a defini convergenţa şirurilor de puncte din acel spaţiu.

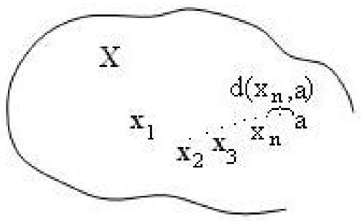


Fig. II.1

Definiţia 2.2. *Fie (X, d) un spaţiu metric fixat şi $a \in X$ un punct. Se spune că un şir $\{x_n\}_{n \geq 0}$ de puncte din X* **converge către** *a (şi se scrie $x_n \overset{\text{în } X}{\longrightarrow} a$ sau echivalent, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$), dacă şirul de numere reale $\{d(x_n, a)\}_{n \geq 0}$ converge către 0.* (fig. II.1).

Această definiţie corespunde intuiţiei noastre despre convergenţa lui x_n către limita $a \in X$ prin "apropierea" lui x_n de a pe măsura creşterii lui n, prin tinderea la zero a distanţelor $\mathrm{d}(x_n, a)$ pentru $n \to \infty$. Aşadar, conform definiţiei 1.2, faptul că $x_n \overset{\text{în } X}{\longrightarrow} a$ revine la îndeplinirea următoarei condiţii:

$$(\forall)\varepsilon > 0 (\exists) N(\varepsilon) \text{ natural astfel încât pentru orice} \tag{10}$$

pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$, $\mathrm{d}(x_n, a) < \varepsilon$.

Definiţia 2.3. *Fie (X, d) un spaţiu metric fixat şi $a \in X$. Pentru orice număr real $r > 0$, se numeşte* **bila deschisă de centru** *a* **şi rază** *r, mulţimea $B(a, r) \triangleq \{x \in X | d(x, a) < r\}$.*

Evident, faptul că $x_n \overset{\text{în } X}{\longrightarrow} a$, revine conform condiţiei (10), la aceea că $(\forall)\varepsilon > 0 (\exists) N(\varepsilon)$ astfel ca $x_n \in B(a, \varepsilon)$ pentru orice $n \geq N$; cu alte cuvinte, oricare ar fi bila deschisă centrată în a, toţi termenii şirului x_n, aparţin acestei bile de la un rang încolo.

Se numeşte **vecinătate a unui punct** $x_0 \in X$ orice submulţime $V \subset X$ care conţine o bilă deschisă centrată în x_0, adică $(\exists) r > 0$ astfel încât $B(x_0, r) \subset V$. Dacă $a \in X$, $r > 0$, atunci se defineşte *bila închisă de centru a şi rază r*, ca fiind submulţimea $B'(a, r) \triangleq \{x \in X | \mathrm{d}(x, a) \leq r\}$ a spaţiului X.

În absenţa unei terminologii unanim acceptate, am adoptat termenul de "bilă" (şi nu pe cel de bulă sau sferă sau sferoid, propus de alţi autori). Noţiunea de bilă nu este absolută ci depinde esenţial de semnificaţia concretă a lui X şi d, aşa cum vom vedea în cadrul exemplelor. De asemenea, o vecinătate a unui punct x_0 nu înseamnă neapărat "o mulţime mică în jurul lui x_0". Evident, $(\forall)\varepsilon > 0$ real, $B(x_0, \varepsilon)$ şi spaţiul X însuşi sunt vecinătăţi ale lui x_0.

Teorema 2.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric.*
(a) *Fie $x \neq y$ în X; atunci există $r_1, r_2 > 0$ astfel încât $B(x, r_1) \cap B(x, r_2) \neq \emptyset$ (se mai spune că orice două puncte distincte pot fi separate prin bile disjuncte).*
(b) *Orice şir convergent în X are limita unică.*

Demonstraţie. (a) Deoarece $x \neq y$, rezultă $\mathrm{d}(x, y) > 0$ conform D_1. Luăm $r_1 = r_2 = \dfrac{1}{3}\Delta(x, y)$ şi arătăm că $B(x, r_1)$, $B(y, r_2)$ sunt disjuncte. Dacă, prin absurd, ele ar conţine un punct comun z, atunci ar rezulta $\mathrm{d}(z,x) < r_1$, $\mathrm{d}(z,y) < r_2$, de unde conform D_2, D_3, $\mathrm{d}(x,y) \le \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(y,z) < r_1 + r_2 = \frac{2}{3}\mathrm{d}(x,y)$, de unde rezultă $\mathrm{d}(x,y) \le 0$ şi cum $\mathrm{d}(x,y) \ge 0$, se obţine $\mathrm{d}(x,y) = 0$, adică $x = y$, ceea ce contravine ipotezei.

b) Fie $\{x_n\}_{n\ge 0}$ un şir convergent în X şi $(\forall)\varepsilon > 0$ fixat; dacă $x_n \to a$, $x_n \to b$ şi dacă am avea $a \ne b$, atunci alegând bile disjuncte centrate în a şi b, ar rezulta că de la un rang încolo, termenii x_n ar aparţine ambelor bile, ceea ce este absurd. Aşadar, $a = b$.

Exemple de spaţii metrice

1. Dreapta reală. Pe mulţimea $X = \mathbb{R}$, distanţa tipică (numită *euclidiană*) este dată prin $\mathrm{d}(x,y) = |x-y|$, $(\forall)x, y \in \mathbb{R}$. Evident, sunt verificate proprietăţile D_1, D_2, D_3, aşa cum am văzut în §1. Dacă $a \in \mathbb{R}$ şi $r > 0$, bila deschisă de centru a şi de rază r este în acest caz $B(a,r) = \{x \in R \,|\, |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$; aşadar, bilele deschise pe dreapta reală sunt intervale deschise. Vecinătate a unui punct $x_0 \in \mathbb{R}$ este orice mulţime $V \subset \mathbb{R}$ astfel încât $(\exists)r > 0$ cu proprietatea că $V \supset (x_0 - r, x_0 + r)$. Convergenţa şirurilor în $\mathbb{R}$ înseamnă convergenţa în sensul definit în §1 (ca în liceu).

2. Spaţiul n-dimensional. Fie $X = \mathbb{R}^n \triangleq \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, \ldots, x_n$ reale$\}$. Două puncte $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ se consideră *egale* în $\mathbb{R}^n$ dacă $x_i = y_i$, $1 \le i \le n$. Mulţimea $\mathbb{R}^n$ se numeşte **spaţiul aritmetic n-dimensional real**. Am văzut la punctul 5 din §1 că $\mathbb{R}^2$ se identifică prin mulţimea vectorilor dintr-un plan, iar $\mathbb{R}^3$ cu mulţimea vectorilor din spaţiul fizic uzual (relativ la sisteme de axe fixate). Spaţiul $\mathbb{R}^4$ este numit uneori **spaţiul-timp** al lui Einstein-Minkowski, utilizat în teoria relativităţii (H. MINKOWSKI, 1864 - 1909; A. EINSTEIN, 1879 -1955). Utilitatea considerării spaţiilor $\mathbb{R}^n$ constă, pe de-o parte în evitarea paralelismelor în studiul separat al lui $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \ldots$ şi pe de altă parte, în faptul că orice funcţie de n variabile reale $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, (mai corect, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$), poate fi asimilată cu o funcţie $f(x)$ de *o singură* variabilă, mai complicată, anume $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, aparţinând lui $\mathbb{R}^n$. Dacă elementele lui $\mathbb{R}^n$, $n \ge 4$ sunt ficţiuni în raport cu intuiţia noastră ca observatori spaţiali, în schimb funcţiile de n variabile sunt o realitate manifestă (de exemplu, dacă la bordul unui avion se găsesc 150 de instrumente utile de măsură, se poate considera că zborul acelui avion este funcţie de 150 de parametri reali!; în mod similar, dinamica unui sistem fizic depinde de modul în care variază parametri de stare ai sistemului, iar aceştia pot fi în număr foarte mare).

Teorema 2.2. *Mulţimea $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$ este spaţiu metric relativ la distanţa euclidiană, definită prin*

$$\mathrm{d}(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}, \quad \text{pentru orice}$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Demonstraţie. Proprietăţile D_1, D_2 sunt evidente. Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$ trei puncte oarecare; avem de arătat că $\mathrm{d}(x,z) \le \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$, adică

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

pentru $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Notând $x_k - y_k = a_k$, $y_k - z_k = b_k$, rezultă $x_k - z_k = a_k + b_k$, $1 \le k \le n$ şi avem de arătat că

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

sau echivalent, după ridicarea la pătrat,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right). \tag{11}$$

Pentru aceasta, utilizăm un artificiu: observăm că pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ avem $\sum_{k=1}^{n}(a_k+\lambda b_k)^2 \geq 0$, adică $\lambda^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2\lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geq 0$, $(\forall)\lambda \in \mathbb{R}$. Atunci discriminantul trinomului de gradul II în λ este negativ şi se obţine tocmai inegalitatea (11). (Această inegalitate este un caz particular al **inegalităţii** lui H.A. SCHWARTZ., 1843 - 1921, care va fi dată în capitolul VI).

Teorema 2.2 este probată. Pentru $n = 1$ se obţine desigur distanţa din exemplul 1). Remarcăm de asemenea că pe mulţimea $\mathbb{R}^n$ se mai pot defini şi alte distanţe; de exemplu, punând $(\forall)x, y \in \mathbb{R}^n$, $\delta(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$.

Fie $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punct fixat şi $r > 0$ un număr real. Bila $B(a, r)$ din $\mathbb{R}^n$ relativ la distanţa euclidiană este

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x, a) < r\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 < r^2\right\}.$$

Pentru $n = 1$ regăsim intervalele deschise; pentru $n = 2$, bilele în $\mathbb{R}^2$ sunt discuri, iar bilele în $\mathbb{R}^3$ sunt sfere pline. O submulţime $M \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte **mărginită** dacă M este conţinută într-o bilă deschisă. Printre mulţimile mărginite din $\mathbb{R}^n$ se găsesc paralelipipedele. Se numeşte **paralelipiped închis** în $\mathbb{R}^n$ (paralel cu axele), orice mulţime de forma unui produs cartezian de n intervale închise:

$$P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | a_1 \leq x_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq x_n \leq b_n\}.$$

În cazul $n = 2$ se obţin dreptunghiuri paralele cu axele, iar în cazul $n = 3$, paralelipipede uzuale.

Rămânând încă puţin la cazul spaţiului $\mathbb{R}^n$, remarcăm că acesta are o structură naturală de spaţiu vectorial real, definind *suma* $x + y \triangleq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ şi *multiplicarea* cu orice numar real λ, $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ din $\mathbb{R}^n$. Vectorul nul din $\mathbb{R}^n$ este $0 = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n\ ori}$.

În ipostaza de multiplicatori de vectori, numerele reale se mai numesc *scalari.* Este comodă următoarea notaţie: pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, distanţa între x şi 0 se notează $||x||$ şi se numeşte **norma euclidiană a lui** x. Aşadar, dacă $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, atunci $||x|| = \mathrm{d}(0, x) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Trebuie observat de asemenea că $\mathrm{d}(x, y) = ||x - y||$, $(\forall)x, y \in \mathbb{R}^n$. Evident, au loc proprietăţile:

N_1, $(\forall)x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| \geq 0$ şi $||x|| = 0 \leftrightarrow x = 0$;

N_2, $(\forall)\lambda \in \mathbb{R}$, $(\forall)x \in \mathbb{R}^n$, $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;

N_3, $(\forall)x, y \in \mathbb{R}^n$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Proprietăţile N_1, N_2 sunt imediate, iar N_3 decurge direct din inegalitatea (11).

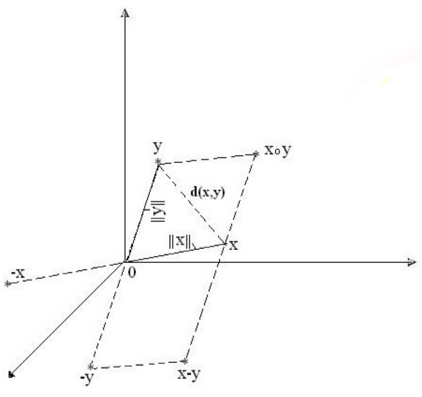


Fig. II.2

Este utilă următoarea reprezentare (fig. II. 2). De remarcat că orice punct $x \in \mathbb{R}^n$ poate fi identificat cu vectorul său de poziţie $\overrightarrow{Ox}$.

Reamintim că funcţiile definite pe o mulţime oarecare A cu valori reale au fost numite *funcţii numerice sau reale.* Funcţiile $F : A \to \mathbb{R}^p$ se numesc funcţii cu valori vectoriale; în acest caz, pentru orice $x \in A$, avem $F(x) \in \mathbb{R}^p$, deci $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x))$, unde $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sunt functţi $A \to \mathbb{R}$, numite *funcţiile componente ale lui* F. Aşadar, a defini o funcţie cu valori în $\mathbb{R}^p$ este echivalent cu a defini p funçtii numerice, cu valori scalare. În particular, a da un şir de puncte din $\mathbb{R}^p$ (adică o funcţie $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^p$) revine la a da p şiruri de puncte din $\mathbb{R}$ (p funcţii $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Mai precis, dacă $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_p^n)$, $n \geq 0$ este un şir în $\mathbb{R}^p$, şirurile componente sunt $\{x_n^1\}_{n\geq 0}$, $\{x_n^2\}_{n\geq 0}, \ldots, \{x_n^p\}_{n\geq 0}$.

Funcţiile $F : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^3$ se numesc *câmpuri scalare*, iar funcţiile $A \to \mathbb{R}^3$, $A \subset \mathbb{R}^3$ se mai numesc *câmpuri vectoriale definite pe A*. Conform celor spuse mai sus, pentru $p = 3$, rezultă ca a defini un câmp vectorial este echivalent cu a defini trei câmpuri scalare, numite componente. De exemplu, funcţia f definită prin $f(x, y, z) = x^2 + yz$ este un câmp scalar definit pe mulţimea $A = \mathbb{R}^3$, iar funcţia $g(x, y, z) = x + \ln(yz)$ defineşte un câmp scalar pe mulţimea $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | yz > 0\}$.

3. Planul complex. Deşi analiza matematică se ocupă în principal cu studiul funcţiilor reale, sunt utile unele legături cu numerele complexe. De regulă, datele unor probleme inginereşti sunt exprimate prin numere reale, însă în cursul rezolvării lor pot fi utilizate ca auxiliar de calcul, numerele complexe. Există de asemenea probleme specific inginereşti, aşa cum se întâlnesc la studiul bazelor electrotehnicii, mecanicii fluidelor, teoriei sistemelor etc. care sunt formulate şi rezolvate în cadrul analizei complexe. A existat şi mai există încă opinia greşită că analiza complexă (calculul diferenţial şi integral în planul complex) este un domeniu de matematică distinct de analiză reală. De fapt, noţiunile de bază, teoria şirurilor şi seriilor, elementele de topologie etc. sunt esenţialmente aceleaşi, pentru că mulţimea $\mathbb{C}$ nu este altceva decât mulţimea $\mathbb{R}^2$, înzestrată cu o structură multiplicativă internă (alături de cea de spaţiu vectorial real).

Reamintim că un număr complex este o pereche ordonată de numere reale, deci $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (de aici provine şi denumirea de plan complex). Două numere complexe $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ se consideră *egale* dacă $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Se ştie că mulţimea $\mathbb{C}$ este corp comutativ relativ la adunarea şi înmulţirea uzuală: $z_1+z_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2)$, $z_1z_2 = (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$, în care $0_{\mathbb{C}} = (0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$, $1_{\mathbb{C}} = (1_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$. Notând cu $\mathbb{R}^c$ mulţimea numerelor complexe de forma $x^c = (x, 0)$ cu $x \in \mathbb{R}$, se observă că $\mathbb{R}^c$ este un subcorp al lui $\mathbb{C}$; în plus, asocierea $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^c$, $x \mapsto x^c$ este un izomorfism de corpuri (verificările sunt imediate), deci din punctul de vedere al operaţiilor algebrice, cu elemente de forma x^c se operează la fel cum se operează cu numerele reale x şi de aceea se face identificarea $(x, 0) = x$. Atunci $\mathbb{R}$ se identifică cu $\mathbb{R}^c$, deci $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Notând ca de obicei $i = (0, 1)$, se observă că $i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$, $i^2 = -1$; apoi pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $z = (x, y)$, avem $z = (x, 0) + (0, y) = (x, 0)+(0, 1)(y, 0) = x^c+iy^c = x+iy$, cu evitarea misterelor de tipul $\sqrt{-1}$. Am obţinut astfel forma clasică de reprezentare a numerelor complexe. Operaţiile definite anterior se scriu astfel acum

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \text{ şi pentru } z = x + iy \neq 0,\ z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Se pot considera trei asocieri remarcabile

Re $: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z = x + iy \mapsto x$ (*luarea părţii reale*)
Im $: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z = x + iy \mapsto y$ (*luarea părţii imaginare*)
$\mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$, $z = x + iy \mapsto |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (*luarea modulului*).

Se verifică imediat că $\mathrm{Re}(z_1+z_2) = \mathrm{Re}z_1+\mathrm{Re}z_2$, $\mathrm{Im}(z_1+z_2) = \mathrm{Im}z_1+\mathrm{Im}z_2$, $\mathrm{Re}\,(-z) = -\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,(-z) = -\mathrm{Im}\,z$, $\mathrm{Re}\,z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\,z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2$ etc.

Corpul $\mathbb{C}$ nu este total ordonat (adică nu satisface axioma II din definiţia 1.1; într-adevăr, în caz contrar, ar rezulta că $(\forall)x \in \mathbb{C}$, avem $x^2 \geq 0$ şi în particular, pentru $x = 1$ şi pentru $x = i$, am obţine $1 \geq 0$, $-1 \geq 0$, deci $1 = 0$, ceea ce este absurd). Din acest motiv, *nu* se consideră inegalităţi între numere complexe, ci numai între numere reale asociate convenabil numerelor complexe; în particular, pentru funcţii $f : A \to \mathbb{C}$ cu valori complexe nu se definesc marginea superioară sau inferioară pentru f, ci numai pentru $|f|$, Ref, Im f.

Luând $X = \mathbb{C}$ şi notând $\mathrm{d}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $(\forall)z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se verifică imediat proprietăţile D_1, D_2, D_3, deci se obţine o distanţă d pe mulţimea $\mathbb{C}$, numită *distanţa euclidiană*, iar $\mathbb{C}$ este spaţiu metric. Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ este fixat şi $\varepsilon > 0$ este real, bila deschisă $B(\alpha, \varepsilon)$ este în acest caz $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{d}(z, \alpha) < \varepsilon\} = \{z \in \mathbb{C} |\ |z - \alpha| < \varepsilon\}$, deci coincide cu discul centrat în α de rază ε. Bila $B(0, 1) = \{|z| < 1\}$ se numeşte *discul unitate* în planul complex. Fie $z_n = x_n + iy_n$, $n \geq 0$ un şir de numere complexe şi $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Avem $z_n \overset{\text{în } \mathbb{C}}{\longrightarrow} \alpha \leftrightarrow x_n \overset{\text{în } \mathbb{R}}{\longrightarrow} a$ şi $y_n \overset{\text{în } \mathbb{R}}{\longrightarrow} b$; pentru aceasta, este suficient să observăm că $|z_n - \alpha| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$ şi că $|x_n - a| \leq |z_n - \alpha|$, $|y_n - b| \leq |z_n - \alpha|$, pentru orice $n \geq 0$ şi să facem $n \to \infty$.

În mulţimea $\mathbb{R}^p$ $(p \geq 2)$ se poate vorbi de infinit pe o anumită direcţie; în unele situaţii, se spune că un şir $\{x_n\}_{n \geq 0}$ de puncte este "împrăştiat spre infinit" dacă $\lim\limits_{n \to \infty} ||x_n|| = \infty$ în $\bar{\mathbb{R}}$. Am văzut că mulţimea $\mathbb{R}$ se poate include în mulţimi mai bogate; trecerea de la $\mathbb{R}$ la $\bar{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{R}}$) se face cu păstrarea structurii de ordine, pierzând structura algebrică, iar trecerea de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) are loc cu conservarea structurii de corp comutativ şi pierderea structurii de ordine compatibilă cu structura algebrică. În mulţimea $\mathbb{C}$ nu există "stânga" şi "dreapta" ca în cazul dreptei reale, deci nu se introduc două puncte la infinit. Se face convenţia de a adauga la $\mathbb{C}$ un singur punct la infinit notat ∞ şi a considera $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ (planul complex compatificat). Prin convenţie, $\infty + z = \infty$, $(\forall)z \in \mathbb{C}$, $\infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty$, $(\forall)z \in \bar{\mathbb{C}}$, $z \neq 0$; $\dfrac{z}{0} = \infty$, $(\forall)z \neq 0$, $\dfrac{z}{\infty} = 0$, $(\forall)z \in \mathbb{C}$ (nu se definesc $\infty + \infty$, $\infty \cdot 0$, $\dfrac{\infty}{\infty}$); de asemenea, se spune că un şir $\{z_n\}_{n \geq 0}$ de puncte din $\mathbb{C}$ converge către ∞ în $\bar{\mathbb{C}}$ dacă $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = +\infty$ în $\bar{\mathbb{R}}$. De exemplu, dacă $a \in \mathbb{C}$ şi $|a| > 1$, atunci $a^n \to \infty$ în $\bar{\mathbb{C}}$.

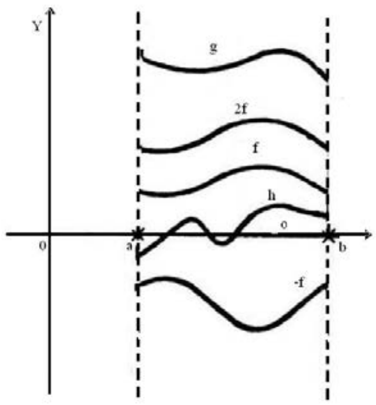


Fig. II.3

4. Spaţiul funcţiilor mărginite $\mathcal{M}_A$. Fie A o mulţime oarecare. Reamintim că o funcţie numerică $f : A \to \mathbb{R}$ este **mărginită** dacă $(\exists)M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$ pentru orice $x \in A$; această condiţie este echivalentă cu faptul că mulţimea $f(A) \subset \mathbb{R}$ este mărginită. Notăm cu $\mathcal{M}_A$ mulţimea tuturor funcţiilor mărginite $A \to \mathbb{R}$; este clar că $\mathcal{M}_A$ formează spaţiu vectorial real, relativ la operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire cu scalari. Dealtfel, dacă $f, g \in \mathcal{M}_A$, atunci $f + g$, $f - g$, λf, $|f|$, fg ($\lambda \in \mathbb{R}$) aparţin de asemenea lui $\mathcal{M}_A$.

În cazul când $A = [a, b]$, mulţimea $\mathcal{M}_A$ este identificată cu mulţimea tuturor funcţiilor mărginite având graficele situate în banda $\{a \leq x \leq b\}$ din $\mathbb{R}^2$ (fig. II.3).

Pentru orice functie $f \in \mathcal{M}_A$ se poate defini *norma uniformă a lui* f (numită uneori *norma-sup*) ca fiind numărul real şi pozitiv

$$||f|| = \sup_{x \in A} |f(x)| \tag{12}$$

(acesta are sens deoarece submulţimea $f(A)$ a lui $\mathbb{R}$ este mărginită şi se aplică proprietatea III a lui Cantor-Dedekind). Pentru orice două funcţii $f, g \in \mathcal{M}_A$ se defineşte **distanţa uniformă între** f **şi** g ca fiind

$$\mathrm{d}(f, g) = ||f - g|| = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|. \tag{13}$$

Exemple. a) Fie $A = [0, 4]$, $f(x) = x$, $g(x) = 2x + 1$ şi $h(x) = x^2$.

Evident, $f, g, h \in \mathcal{M}_A$ şi $\mathrm{d}(f, g) = \sup\limits_{x \in A} |x + 1| = \sup\limits_{0 \leq x \leq 4} (x + 1) = 5$, iar $\mathrm{d}(f, g) = \sup\limits_{x \in [0,4]} |x^2 - x| = 12$.

b) Fie $A = \mathbb{R}$, $f = \sin$, $g = \cos$. Atunci

$$d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin x - \cos x| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{2} \left| \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right| = \sqrt{2}.$$

c) Fie $A = [-4, 1] \times [0, 2]$, $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = 2x + 2y$. Atunci $f, g \in \mathcal{M}_A$ şi $\mathrm{d}(f, g) = \sup\limits_{(x,y)\in A} |f(x, y) - g(x, y)| = \sup\limits_{-4\le x\le 1, 0\le y\le 2} |x + y| = 4$.

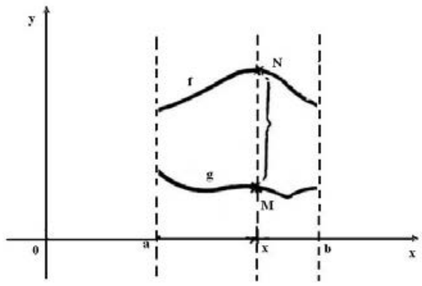


Fig. II.4

Observaţie. În general, pentru orice $x \in A$ şi pentru $f, g \in \mathcal{M}_A$, avem conform (13), $|f(x)-g(x)| \le \mathrm{d}(f, g)$; în cazul când $A = [a, b]$, se observă că $\mathrm{d}(f, g)$ reprezintă marginea superioară a lungimilor tuturor segmentelor MN când x parcurge A (N, M fiind punctele unde paralela la axa Oy dusă prin punctul $x \in A$ intersectează graficele lui f şi g respectiv). Aceasta este interpretarea geometrică a distanţei uniforme.

Teorema 2.3. *Fie A o mulţime oarecare fixată. Atunci mulţimea $\mathcal{M}_A$ este un spaţiu metric relativ la distanţa uniformă.*

Demonstraţie. Avem de probat că distanţa uniformă este o distanţă în sensul definiţiei 2.1, adică sunt verificate D_1, D_2, D_3. Probăm mai întâi D_1: dacă $f, g \in \mathcal{M}_A$, atunci $\mathrm{d}(f, g) = \sup\limits_{x\in A} |f(x) - g(x)| \ge 0$ şi $\mathrm{d}(f, f) = 0$; iar dacă $\mathrm{d}(f, g) = 0$, atunci $|f(x) - g(x)| = 0$, $(\forall)x \in A$, deci $f(x) = g(x)$, $(\forall)x \in A$, adică $f = g$ în $\mathcal{M}_A$.

Proprietatea D_2 este evidentă. Verificăm D_3 şi pentru aceasta, fie $(\forall)f, g, h \in \mathcal{M}_A$. Atunci, $(\forall)x \in A$ avem $|f(x) - h(x)| \le |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \le \sup\limits_{x\in A} |f(x) - g(x)| + \sup\limits_{x\in A} |g(x) - h(x)|$, adică $|f(x) - h(x)| \le \mathrm{d}(f, g) + \mathrm{d}(g, h)$, pentru orice $x \in A$. Atunci $\sup\limits_{x\in A} |f(x) - h(x)| \le \mathrm{d}(f, g) + \mathrm{d}(g, h)$, adică $\mathrm{d}(f, h) \le \mathrm{d}(f, g) + \mathrm{d}(g, h)$, şi inegalitatea triunghiului este verificată în $\mathcal{M}_A$.

Fixăm $f \in \mathcal{M}_A$ şi un număr real $r > 0$. În acest caz, bila deschisă de centru f şi rază r în spaţiul metric $X = \mathcal{M}_A$ este o mulţime de funcţii (elemente din X), anume

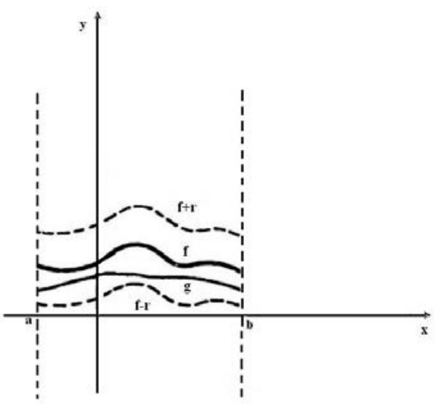


Fig. II.5

$$B(f, r) = \{g \in \mathcal{M}_A | \mathrm{d}(f, g) < r\} = \{g \in \mathcal{M}_A | \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)| < r\}.$$

Aşadar, dacă $g \in B(f, r)$, atunci $|f(x) - g(x)| < r$, adică $f(x) - r < g(x) < f(x) + r$, pentru orice $x \in A$; în cazul când $A = [a, b]$, considerând graficul funcţiei f, bila $B(f, r)$ este identificată cu mulţimea funcţiilor g având graficul situat în "tubul de funcţii" limitat de graficele lui $f - r$, $f + r$ (fig. II. 5).

Alte exemple de spaţii metrice vor fi considerate în continuare; în cazul spaţiilor $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ $(n \ge 2)$, $\mathcal{M}_A$, vor fi utilizate în mod tacit numai distanţele definite anterior.

Dăm un ultim exemplu de spaţiu metric, folosit în teoria codificării.

Fie $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ codul binar şi $X = \mathbb{B}^n$, $n \ge 1$. Definim în $\mathbb{B}$ adunarea modulo 2 (adică $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$) şi o extindem la elementele din X; anume, pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ din X notăm $x \oplus y = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \dots, x_n \oplus y_n)$.

Pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in X$ vom considera suma în $\mathbb{N}$, $||x|| = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$; deoarece $x_i = 0$ sau 1, rezultă că $||x||$ coincide cu numărul de componente ale lui x, egale cu 1. Pentru orice $x, y \in X$ se defineşte distanţa HAMMING între x, y prin formula $\mathrm{d}(x, y) = ||x \oplus y||$. Evident, componenta k, $1 \le k \le n$, a lui $x \oplus y$ este egală cu 0 dacă şi numai dacă $x_k = y_k$ în $\mathbb{B}$, deci distanţa $\mathrm{d}(x, y)$ este egală cu numărul de componente ale lui x, y care nu coincid. Se verifică uşor proprietăţile D_1, D_2, D_3, deci X este un spaţiu metric.

De fapt mulţimea X este tocmai mulţimea cuvintelor binare de lungime n. De exemplu, dacă $n = 6$ şi $x = 100110$, $y = 011100$, atunci $x \oplus y = 111010$, $||x|| = 3$, $||y|| = 3$, $\mathrm{d}(x, y) = ||x \oplus y|| = 4$.

Mulţimea $X = \mathbb{B}^n$ are încă o interpretare remarcabilă: anume ea este echipotentă cu mulţimea celor 2^n numere naturale $A_n = \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$. Orice număr $x \in A_n$, are o reprezentare unică sub forma $x = \sum\limits_{p=1}^{n} a_p \cdot 2^{p-1}$ cu $a_p \in \mathbb{B}$ şi x poate fi identificat cu punctul $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ din $\mathbb{B}^n$.

2.2.2 Proprietăţi generale ale şirurilor; spaţii metrice complete

Fie (X, d) un spaţiu metric. Am dat definiţia şirurilor convergente de puncte din X (definiţia 2.2). Reamintim că un şir $\{x_n\}_{n\geq 0}$ de puncte din X converge către $a \in X$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{d}(x_n, a) = 0$. În acest caz se mai spune că termenii şirului constituie **aproximaţii succesive ale lui** a; elementul x_0 este prima aproximaţie, x_1, a doua aproximaţie etc. În general, se mai spune că a este aproximat prin x_n-uri şi se scrie $a \simeq x_n$; eroarea absolută făcută în această aproximare este $\mathrm{d}(a, x_n)$, $n \geq 0$.

Definiţia 2.4. *Un şir de puncte $\{x_n\}_{n\geq 0}$ din X se numeşte un* **şir Cauchy** *dacă $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ $(\exists)N(\varepsilon)$ natural cu proprietatea că dacă $m, n \geq N(\varepsilon)$, atunci $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. (Aşadar, de la un rang încolo orice doi termeni ai şirului sunt oricât de apropiaţi între ei, în sensul distanţei d).*

În definiţia convergenţei unui şir este explicitată limita şirului, iar în definiţia unui şir Cauchy intervin *numai* termeni ai şirului, deci aceasta din urmă este o definiţie intrinsecă.

Un şir de puncte din X se numeşte mărginit dacă toate punctele şirului sunt conţinute într-o aceeaşi bilă deschisă din X.

Proprietatea unui şir de a fi mărginit (convergent sau Cauchy) nu se modifică adăugând sau renunţând la un număr finit de termeni ai şirului.

Reamintim că a *defini un subşir* al unui şir $\{x_n\}_{n\geq 0}$ din X revine la a fixa un şir strict crescător de numere naturale $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$ şi a considera şirul $\{y_n\}_{n\geq 0}$, unde $y_n = x_{k_n}$, $(\forall)n \geq 0$. Aşadar, se face o "selecţie ordonată" a termenilor şirului iniţial; desigur, $k_n \geq n$, $(\forall)n \geq 0$.

Teorema care urmează concentrează câteva proprietăţi ale şirurilor, valabile în orice spaţiu metric fixat. În diverse cazuri particulare, apar aspecte specifice; de exemplu în $\mathbb{R}$, şirurile de numere reale au proprietăţi specifice legate de monotonie, de produse etc., care nu au loc pentru şiruri din $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Teorema 2.4. *Fie (X, d) un spaţiu metric fixat.*
(a) *Orice şir convergent de puncte din X este şir Cauchy*;
(b) *Orice şir Cauchy din X este mărginit*;
(c) Dacă $x_n \overset{\text{în } \mathbb{X}}{\longrightarrow} a$, atunci orice subşir al şirului $\{x_n\}_{n\geq 0}$ converge către a.

Demonstraţie. (a) Fie $x_n \to a$; arătăm că şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ este Cauchy şi pentru aceasta fixăm $(\forall)\varepsilon > 0$. Atunci există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât $\mathrm{d}(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$. Aşadar, pentru orice $m, n \geq N$ avem $\mathrm{d}(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\mathrm{d}(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ şi folosind D_3 şi D_2 rezultă

$$\mathrm{d}(x_m, x_n) \leq \mathrm{d}(x_m, a) + \mathrm{d}(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) Fie $\{x_n\}_{n\geq 0}$ un şir Cauchy; pentru $\varepsilon = 1$ există atunci un număr natural P astfel încât $\mathrm{d}(x_m, x_n) < 1$ pentru orice $m, n \geq P$. Aşadar, luând $n = P$, rezultă că $\mathrm{d}(x_m, x_P) < 1$, adică $x_m \in B(x_P, 1)$, $(\forall)m \geq P$. Notând $r = \max\{1, \mathrm{d}(x_0, x_P), \mathrm{d}(x_1, x_P), \ldots, \mathrm{d}(x_{P-1}, x_P)\}$, rezultă atunci că $x_m \in B(x_P, r)$, $(\forall)m \geq 0$, deci toţi termenii şirului $\{x_n\}_{n\geq 0}$ aparţin unei aceleiaşi bile, adică şirul respectiv este mărginit.

(c) Fie $(\forall)\varepsilon > 0$ fixat; atunci există $N = N(\varepsilon)$ astfel ca $\mathrm{d}(x_n, a) < \varepsilon$, pentru orice $n \geq N$. Cum $k_n \geq n$, rezultă $\mathrm{d}(x_{k_n}, a) < a$ pentru orice $n \geq N$, deci $x_{k_n} \overset{\text{în } \mathbb{X}}{\longrightarrow} a$ pentru $n \to \infty$.

Aşadar, în orice spaţiu metric, un şir convergent este şir Cauchy; reciproca este falsă. De exemplu, fie $X = \mathbb{Q}$ cu distanţa euclidiană $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$, $(\forall)x, y \in \mathbb{Q}$ şi considerăm şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ al trunchierilor numărului iraţional $\sqrt{2}$. Deoarece $x_n \overset{\text{în } \mathbb{R}}{\longrightarrow} \sqrt{2}$, rezultă că şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ este Cauchy în $\mathbb{R}$ (conform teoremei 2.4. (a)), deci şi în $\mathbb{Q}$ (deoarece toţi termenii sunt numere raţionale).

Dacă şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ ar fi convergent în $\mathbb{Q}$, ar exista $\beta \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x_n \xrightarrow{\text{în } \mathbb{Q}} \beta$, deci $x_n \xrightarrow{\text{în } \mathbb{R}} \beta$. Din unicitatea limitei unui şir convergent, rezultă $\beta = \sqrt{2}$, ceea ce este absurd deoarece β este raţional, iar $\sqrt{2}$ este iraţional. Aşadar, în spaţiul metric $\mathbb{Q}$ am dat un exemplu de şir Cauchy care nu este convergent.

Este util de introdus o clasă extrem de importantă de spaţii metrice prin definiţia care urmează.

Definiţia 2.5. *Un spaţiu metric se numeşte* **complet** *dacă orice şir Cauchy din acest spaţiu este convergent.*

Cu alte cuvinte, într-un spaţiu metric complet, conceptele de şir Cauchy şi cel de şir convergent coincid, deci pentru testarea convergenţei unui şir este suficient de verificat condiţia intrinsecă de a fi şir Cauchy. Evident, $\mathbb{R}$ (cu distanţa euclidiană) este spaţiu metric complet, conform teoremei 1.6. Se mai spune că spaţiile metrice complete sunt cele în care are loc criteriul general al lui Cauchy.

Lemă. *Fie $X = \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$ cu distanţa euclidiană (definită în teorema 2.2.). Un şir $\{x_n\}_{n\geq 0}$, $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p)$ de puncte din $\mathbb{R}^p$ este mărginit (respectiv Cauchy, convergent) dacă şi numai dacă cele p şiruri componente $\{x_n^1\}_{n\geq 0}$, $\{x_n^2\}_{n\geq 0}, \ldots, \{x_n^p\}_{n\geq 0}$ au simultan această proprietate, ca şiruri în $\mathbb{R}$.*

Demonstraţie. Mai întâi să observăm că pentru orice două puncte $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$ din $\mathbb{R}^p$, au loc inegalităţile

$$|x_k - y_k| \leq \mathrm{d}(x,y) \text{ şi } |x_k| \leq ||x||, \quad 1 \leq l \leq p; \tag{14}$$

$$\mathrm{d}(x,y) \leq \sum_{k=1}^{p} |x_k - y_k| \text{ şi } ||x|| \leq \sum_{k=1}^{p} |x_k|, \tag{15}$$

unde $\mathrm{d}(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{p}(x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ este distanţa euclidiană între x şi y, iar $||x|| = \mathrm{d}(x,0) = \left(\sum_{k=1}^{p} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ este norma euclidiană a lui x în $\mathbb{R}^p$.

Dacă şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ este mărginit, atunci $(\exists) M > 0$ astfel încât $||x_n|| \leq M$, $(\forall) n \geq 0$, deci $|x_n^k| \leq ||x_n|| \leq M$, adică şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ este mărginit pentru orice k, $1 \leq k \leq p$. Apoi, dacă şirurile $\{x_n^k\}_{n\geq 0}$ sunt mărginite în $\mathbb{R}$, atunci există $M_k \geq 0$ astfel ca $(\forall) n \geq 0$, deci conform (15), $||x_n|| \leq \sum_{k=1}^{p} |x_n^k| \leq \sum_{k=1}^{p} M_k$ şi ca atare, $x_n \in B(0, M)$, $n \geq 0$ unde $M = \sum_{k=1}^{p} M_k$, deci şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ este mărginit în $\mathbb{R}^p$.

Afirmaţia relativ la şiruri Cauchy rezultă direct din definiţia şirului Cauchy şi din inegalităţile

$$|x_m^k - x_n^k| \leq \mathrm{d}(x_m, x_n) \leq \sum_{k=1}^{p} |x_m^k - x_n^k|, \ m, n \geq 0, \ 1 \leq k \leq p$$

iar afirmaţia relativ la convergenţă, rezultă din inegalităţile

$$|x_n^k - a_k| \leq \mathrm{d}(x_n, a) \leq \sum_{k=1}^{p} |x_n^k - a_k|,$$

unde $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$, $n \geq 0$, $1 \leq k \leq p$. Toate aceste inegalităţi decurg din (14) şi (15).

Reţinem din această lemă că limita unui şir convergent din $\mathbb{R}^n$ se calculează pe componente şi în general, studiul şirurilor de puncte din $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$

fixat) se reduce la studiul a n şiruri de numere reale. De exemplu, şirul $\left\{\left(\sqrt[n]{n}, \frac{1}{n}, 3^{-n}\right)\right\}_{n\geq 1}$ de puncte din $\mathbb{R}^3$ converge către punctul $(1,0,0)$; şirul $\left\{\left((-1)^n, \frac{n+1}{n+2}\right)\right\}$ este mărginit în $\mathbb{R}^2$, fără a fi convergent. Desigur, în $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ nu se pot defini convenabil şiruri monotone de puncte, ca în cazul dreptei reale.

Teorema 2.5. *Spaţiul metric $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$ este complet*

Demonstraţie. Fie $\{x_n\}_{n\geq 0}$ un şir Cauchy de puncte din $\mathbb{R}^p$; atunci conform lemei anterioare, cele p şiruri componente sunt şiruri Cauchy în $\mathbb{R}$, deci ele sunt convergente în $\mathbb{R}$ (conform teoremei 1.6) şi aplicând din nou lema, rezultă că şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ este convergent în $\mathbb{R}^p$.

Considerăm acum spaţiul metric $X = \mathbb{C}$ (planul complex), cu distanţa euclidiană $\mathrm{d}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Fie $\{z_n\}_{n\geq 0}$, $z_n = x_n + iy_n$ un şir de numere complexe; atunci şirul $\{z_n\}_{n\geq 0}$ este mărginit (respectiv Cauchy, convergent) dacă şi numai dacă şirurile de numere reale $\{x_n\}_{n\geq 0}$, $\{y_n\}_{n\geq 0}$ au simultan aceeaşi proprietate. Dacă $z_n \overset{\text{în } \mathbb{C}}{\longrightarrow} z$, $z'_c \overset{\text{în } \mathbb{C}}{\longrightarrow} z'$, se arată imediat că $z_n + z'_n \overset{\text{în } \mathbb{C}}{\longrightarrow} z + z'$, $z_n z'_n \overset{\text{în } \mathbb{C}}{\longrightarrow} zz'$ iar dacă toţi $z_n \neq 0$ şi $z \neq 0$, atunci $\frac{1}{z_n} \overset{\text{în } \mathbb{C}}{\longrightarrow} \frac{1}{z}$.

Deoarece nu se consideră inegalităţi între numere complexe, nu există un concept de şir monoton în $\mathbb{C}$.

Teorema 2.6. *Spaţiul metric $\mathbb{C}$ este complet.*

Demonstraţie. Fie $z_n = x_n + iy_n$, $n \geq 0$ un şir Cauchy de numere complexe; deoarece $|x_m - x_n| \leq |z_m - z_n|$ şi $|y_m - y_n| \leq |z_m - z_n|$, $(\forall) m, n \geq 0$, rezultă că şirurile $\{x_n\}_{n\geq 0}$, $\{y_n\}_{n\geq 0}$ sunt şiruri Cauchy în $\mathbb{R}$ şi ca atare ele sunt convergente în $\mathbb{R}$, $x_n \overset{\text{în } \mathbb{R}}{\longrightarrow} a$, $y_n \overset{\text{în } \mathbb{R}}{\longrightarrow} b$. Considerând numărul complex $c = a + ib$, rezultă

$$|z_n - c| = |(x_n + iy_n)| - (a + ib)| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

şi pentru $n \to \infty$, va rezulta că $\mathrm{d}(z_n, c) \to 0$, deci şirul $\{z_n\}_{n\geq 0}$ este convergent.

Desigur, teorema 2.6 se poate deduce şi din teorema 2.5 pentru $p = 2$, deoarece spaţiile metrice $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{R}^2$ coincid ca mulţimi de puncte, iar distanţele euclidiene sunt aceleaşi în amândouă; într-adevăr, dacă $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, atunci

$$\mathrm{d}_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

şi aceasta din urmă este distanţa dintre punctele (x_1, y_1), (x_2, y_2) din $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.7. *Pentru orice mulţime A, spaţiul metric $\mathcal{M}_A$ este complet (relativ la distanţa uniformă d).*

Fie $\{f_n\}_{n\geq 0}$ un şir Cauchy de elemente din $\mathcal{M}_A$, deci un şir de funcţii mărginite $f_n : A \to \mathbb{R}$, astfel încât $\mathrm{d}(f_m, f_n) \to 0$ pentru $m, n \to \infty$. Deoarece $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \mathrm{d}(f_m, f_n)$ pentru orice $x \in A$, rezultă că oricare ar fi $x \in A$, şirul de numere reale $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ este şir Cauchy. Conform teoremei 1.6 acest şir va converge către un număr real bine determinat depinzând de x, pe care îl notăm cu $g(x)$. În acest mod, este definită o funcţie $g : A \to \mathbb{R}$.

Vom arăta că g este funcţie mărginită, adică $g \in \mathcal{M}_A$ şi că $f_n \overset{\text{în } \mathcal{M}_A}{\longrightarrow} g$ pentru $n \to \infty$. Fie $(\forall) \varepsilon > 0$ fixat. Deoarece $\{f_n\}_{n\geq 0}$ este şir Cauchy, rezultă că există un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât $(\forall) n \geq N$, $(\forall) p \geq 1$ să avem $\mathrm{d}(f_{n+p}, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$; în particular, pentru $n = N$, $\mathrm{d}(f_{N+p}, f_N) < \frac{\varepsilon}{2}$, adică $|f_{N+p}(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $p \geq 1$ şi pentru orice $x \in A$. Făcând $p \to \infty$ şi ţinând cont că $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$, rezultă $|g(x) - f_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, deci $|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |f_N(x)|$, $(\forall) x \in A$. Cum f_N este funcţie mărginită, rezultă de aici că g este de asemenea funcţie mărginită.

În sfârşit, din relaţia $\mathrm{d}(f_{n+p}, f_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)n \geq N$, $(\forall)p \geq 1$, rezultă $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $x \in A$. Făcând aici $p \to \infty$, rezultă că $|g(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $x \in A$ şi orice $n \geq N$. Atunci $\mathrm{d}(f_n, g) = \sup\limits_{\alpha\in A} |g(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N$, adică $f_n \overset{\text{în } \mathcal{M}_A}{\longrightarrow} g$. Am demonstrat astfel că şirul $\{f_n\}_{n\geq 0}$ din $\mathcal{M}_A$, presupus Cauchy, este convergent şi spaţiul $\mathcal{M}_A$ rezultă complet.

Am dat mai sus câteva exemple de spaţii metrice complete $(\mathbb{R}^p, p \geq 1; \mathbb{C}, \mathcal{M}_A)$; ceea ce arată consistenţa noţiunii. Remarcăm de asemenea că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, intervalele $(-\infty, a], [a, b], [a, \infty)$ sunt spaţii metrice complete. De exemplu, fie $X = (-\infty, a]$ şi $\{x_n\}_{n\geq 0}$ un şir Cauchy de puncte în X; privind acest şir în $\mathbb{R}$, el este de asemenea Cauchy şi ca atare rezultă convergent, $x_n \overset{\text{în } \mathbb{R}}{\longrightarrow} l$. Deoarece $x_n \leq a$, rezultă $l \leq a$, adică $l \in X$ şi ca atare, $x_n \overset{\text{în } \mathbb{X}}{\longrightarrow} l$ deci $\{x_n\}_{n\geq 0}$ este şir convergent în X. Demonstraţia este similară în cazul intervalelor $[a, b]$, $[a, \infty)$. Se poate observa totodată că intervalele deschise sau semideschise sunt spaţii metrice necomplete.

2.2.3 Principiul contracţiei; metoda aproximaţiilor succesive

Teorema care urmează (numită şi principiul contracţiei) stă la baza obţinerii multor altor teoreme de existenţă şi unicitate din Analiza matematică (de exemplu, teorema funcţiilor implicite, existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy pentru ecuaţii şi sisteme diferenţiale, existenţa şi unicitatea soluţiei unor ecuaţii integrale etc.). Principiul contracţiei este o abstragere a metodei aproximaţiilor succesive, datorată lui E. PICARD (1856 - 1941); în forma prezentată mai jos, el a fost formulat de matematicianul polonez ST. BANACH (1892 - 1945), unul din creatorii analizei moderne. Mai întâi este necesară o definiţie.

Definiţia 2.6. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Se numeşte* **contracţie a lui** *X orice aplicaţie $\varphi : X \to X$ a lui X în el însuşi, cu proprietatea că există un număr real C (numit* **coeficient de contracţie***) astfel încât $0 \leq C < 1$ şi să fie îndeplinită următoarea condiţie*:

$$\mathrm{d}(\varphi(x), \varphi(y)) \leq C \cdot \mathrm{d}(x, y), \quad \text{pentru orice} \quad x, y \in X. \tag{16}$$

Exemplu. Aplicaţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = Cx$, $0 \leq C < 1$ este o contracţie a dreptei reale, de coeficient C, deoarece $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |Cx - Cy| = C|x - y|$, $(\forall)x, y \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.8. (principiul contracţiei): *Fie (X, d) un spaţiu metric complet. Pentru orice contracţie $\varphi : X \to X$ există şi este unic un punct $\xi \in X$ astfel încât $\varphi(\xi) = \xi$.*

Demonstraţie. Unicitatea unui astfel de punct este imediată: dacă ar mai exista $\xi' \in X$ astfel încât $\varphi(\xi') = \xi$, atunci rezultă cf. (16), $\mathrm{d}(\xi, \xi') = \mathrm{d}(\varphi(\xi), \varphi(\xi')) \leq C\, \mathrm{d}(\xi, \xi')$; aşadar, $\mathrm{d}(\xi, \xi')(1 - C) \leq 0$ şi cum $C < 1$, rezultă $\mathrm{d}(\xi, \xi') \leq 0$, deci $\mathrm{d}(\xi, \xi') = 0$, adică $\xi = \xi'$, conform D_1.

Pentru demonstrarea existenţei unui punct $x \in X$ astfel încât $\varphi(\xi) = \xi$, fixăm un punct $x_0 \in X$ şi definim succesiv $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1), \ldots, x_n = \varphi(x_{n-1})$, $(\forall)n \geq 1$. Vom proba mai întâi că şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ astfel definit este un şir Cauchy în X. Notăm $\delta = \mathrm{d}(x_0, x_1)$ şi observăm că $\mathrm{d}(x_1, x_2) = \mathrm{d}(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq C\ \mathrm{d}(x_0, x_1) = C \cdot \delta$, $\mathrm{d}(x_2, x_3) = \mathrm{d}(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq C\ \mathrm{d}(x_1, x_2) \leq C^2 \cdot \delta$; se verifică prin inducţie că în general, $\mathrm{d}(x_n, x_{n+1}) \leq C^n \cdot \delta$, $(\forall)n \geq 0$. Atunci, pentru orice $n \geq 0$, $p \geq 1$, avem $\mathrm{d}(x_n, x_{n+p}) \leq \mathrm{d}(x_n, x_{n+1}) + \mathrm{d}(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \mathrm{d}(x_{n+p+1}, x_{n+p}) \leq C^n\delta + C^{n+1}\delta + \ldots + C^{n+p-1}\delta =$

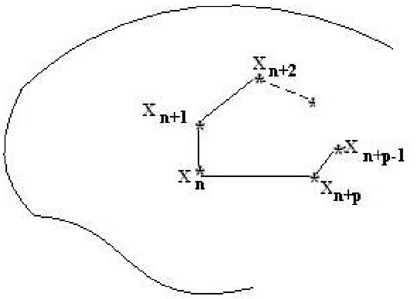


Fig. II.6

$C^n\delta\dfrac{1-C^p}{1-C}$; Am demonstrat astfel inegalitatea

$$\mathrm{d}(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\delta}{1-C}C^n, \quad (\forall)n \geq 0,\ (\forall)p \geq 1. \tag{17}$$

Dacă $\delta = 0$, atunci $x_1 = x_0$, deci $\varphi(x_0) = x_0$ şi teorema este probată luând $\xi = x_0$; putem presupune $\delta \neq 0$. Din condiţia $0 \leq C < 1$, rezultă că $C^n \to 0$ pentru $n \to \infty$ şi ca atare, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât $(\forall)n \geq N(\varepsilon)$, să avem $C^n < \dfrac{\varepsilon\cdot(1-C)}{\delta}$. Atunci din relaţia (17) se deduce că $\mathrm{d}(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$, pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $p \geq 1$. Aşadar, şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ este Cauchy, deci este convergent (căci X a fost presupus complet). Fie $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X$. Din relaţia (16) rezultă $0 \leq \mathrm{d}(\varphi(x_n), \varphi(\xi)) \leq C\mathrm{d}(x_n, \xi)$ şi făcând $n \to \infty$, se obţine atunci că $\mathrm{d}(x_n, \xi) \to 0$ şi deci $\varphi(x_n) \to \varphi(\xi)$, adică $x_{n+1} \to \varphi(\xi)$ pentru $n \to \infty$. Dar $x_{n+1} \to \xi$ (căci $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$) şi din unicitatea limitei unui şir convergent, rezultă $\varphi(\xi) = \xi$. Teorema este demonstrată.

Observaţii. 1) Un punct $\xi \in X$ se numeşte *punct fix* al unei aplicaţii $\varphi : X \to X$ dacă $\varphi(\xi) = \xi$. Teorema 2.8 se mai enunţă atunci: *orice contracţie a unui spaţiu metric complet are un punct fix, unic* sau echivalent, *pentru orice contracţie* φ *a unui spaţiu metric complex* X, *ecuaţia* $x = \varphi(x)$ *are soluţie unică,* ξ *în* X. De aceea teorema 2.8 este numită uneori "teoremă de punct fix".

2) Trebuie reţinut modul de construcţie al lui ξ; prima aproximaţie x_0 este aleasă arbitrar, iar aproximaţiile $x_1, x_2, \ldots$ sunt determinate succesiv folosind φ; indiferent de alegerea lui x_0, şirul de aproximaţii succesive tinde, se "stabilizează", spre aceeaşi limită ξ. În aplicarea practică a teoremei 2.8 este necesar de evidenţiat o pereche (X, φ), care uneori este sugerată de enunţ dar alteori apare ca un auxiliar eficace în cursul unui raţionament.

Din relaţia (17), pentru n fixat şi făcând $p \to \infty$, rezultă

$$\mathrm{d}(x_n, \xi) \leq \frac{\mathrm{d}(x_0, x_1)}{1-C}\cdot C^n. \tag{18}$$

Aşadar, în aproximarea $\xi \simeq x_n$, avem o evaluare a erorii absolute. De exemplu, dacă vrem să calculăm ξ cu aproximare mai mică decât ε ($\varepsilon > 0$ prescris), este suficient să găsim N minim astfel încât $\dfrac{\mathrm{d}(x_0, x_1)}{1-C}\cdot C^N < \varepsilon$ şi va rezulta $\mathrm{d}(x_N, \xi) < \varepsilon$.

Exemple. a) **Metoda clasică a aproximaţiilor succesive** (sau **metoda iteraţiei**). Fie $X = \mathbb{R}$ sau oricare din intervalele $(-\infty, a]$, $[a, b]$, $[a, \infty)$; fie o ecuaţie $x = \varphi(x)$, unde $\varphi : X \to X$ este o funcţie derivabilă astfel încât $C = \sup\limits_{x\in X} |\varphi'(x)| < 1$. Atunci φ este o contracţie, deoarece $(\forall)x, y \in X$ există un punct v situat între x şi y, astfel încât $\varphi(x) - \varphi(y) = (x - y)\varphi'(v)$, conform formulei lui Lagrange a creşterilor finite; atunci $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(v)|\cdot|x - y| \leq C|x - y|$, deci φ este o contracţie. În aceste condiţii, ecuaţia $x = \varphi(x)$ are soluţie unică $\xi \in X$ şi pentru a determina acea soluţie se aplică metoda indicată în demonstraţia teoremei 2.8: alegem $x_0 \in X$ arbitrar şi se calculează $x_1 = \varphi(x_0)$; apoi din formula (18) se determină n convenabil şi atunci $\xi \simeq x_n$. Desigur, formula precisă la modul absolut, $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, este mai puţin utilizată în practică.

Pentru a lua un exemplu concret, calculăm cu precizie $\leq 10^{-4}$ unica rădăcină reală a ecuaţiei algebrice $x^3 + 12x - 1 = 0$. Evident, utilizând şirul lui Rolle rezultă că ecuaţia are o singură rădăcină reală, situată în intervalul $X = [0, 1]$; în plus, ecuaţia se scrie echivalent $x = \varphi(x)$, unde $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2 + 12}$. În acest caz, $C = \sup\limits_{x\in[0,1]} |\varphi'(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \dfrac{2x}{(x^2 + 12)^2} = \dfrac{2}{169}$; luăm $x_0 = 0$, deci

$x_1 = \varphi(0) = \dfrac{1}{12}$ şi ca atare $\delta = \mathrm{d}(x_0, x_1) = \dfrac{1}{12}$. Aplicând formula (18) determinăm n minim astfel încât $\dfrac{\mathrm{d}(x_0,x_1)}{1-C} \cdot C^n < 10^{-4}$ adică $\dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{169}{167} \cdot C^n < 10^{-4}$, $\left(\dfrac{2}{169}\right)^n < \dfrac{167 \cdot 12}{169 \cdot 10^4}$ şi se găseşte $n = 2$, deci $\xi \simeq \varphi(x_1) = \dfrac{1}{x_1^2 + 12} = \dfrac{144}{1729} \simeq 0,08328$.

b) Fie $A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$ o matrice pătratică de ordin n cu coeficienţi reali astfel încât $C = \left(\sum\limits_{1 \le i,j \le n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} < 1$, şi $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ o matrice coloană cu coeficienţi reali. Ecuaţia matriceală $X = AX + B$, unde $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ se poate rezolva aplicând principiul contracţiei aşa cum urmează.

Considerăm aplicaţia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{X} \mapsto \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B}$ (identificând un punct din $\mathbb{R}^n$ cu o matrice-coloană) şi arătăm că φ este o contracţie: avem

$$\mathrm{d}(\varphi(\mathbb{X}), \varphi(\mathbb{Y})) = ||\varphi(\mathbb{X}) - \varphi(\mathbb{Y})|| = ||(\mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B}) - (\mathbb{A}\mathbb{Y} + \mathbb{B})|| = ||(\mathbb{A}(\mathbb{X} - \mathbb{Y})||.$$

În general, dacă $\mathbb{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$, atunci

$$||\mathbb{A}\mathbb{Z}|| = \sqrt{(a_{11}z_1 + \ldots + a_{1n}z_n)^2 + (a_{21}z_1 + \ldots)^2 + \ldots + (a_{n1}z_1 + \ldots + a_{nn}z_n)^2}$$

$$\le \sqrt{(a_{11}^2 + \ldots + a_{1n}^2) \cdot ||\mathbb{Z}||^2 + (a_{21}^2 + \ldots) \cdot ||\mathbb{Z}||^2 + \ldots + (a_{n1}^2 + \ldots + a_{nn}^2) \cdot ||\mathbb{Z}||^2}$$

$$= \sqrt{||\mathbb{Z}||^2 \cdot \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}^2} = C \cdot ||\mathbb{Z}||.$$

Atunci rezultă că $\mathrm{d}(\varphi(\mathbb{X}), \varphi(\mathbb{Y}) = ||\mathbb{A} \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{Y})|| \le C \cdot ||\mathbb{X} - \mathbb{Y}|| = C \cdot \mathrm{d}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, deci aplicaţia φ este o contracţie. Rezultă că ecuaţia $\mathbb{X} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B}$ are o soluţie unică şi aceasta se poate determina prin metoda aproximaţiilor succesive: se ia $\mathbb{X}_0 = 0$, $\mathbb{X}_1 = \varphi(\mathbb{X}_0) = \mathbb{B}$, $\mathbb{X}_2 = \varphi(\mathbb{X}_1) = \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}$, $\mathbb{X}_3 = \varphi(\mathbb{X}_2) = \mathbb{A}\mathbb{X}_2 + \mathbb{B} = \mathbb{A}^2\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}$ etc. Acest calcul se poate prezenta fără dificultate sub forma unui program.

Fiind dat un sistem liniar $\mathbb{P}\mathbb{X} = \mathbb{Q}$ oarecare cu n ecuaţii şi n necunoscute, cu coeficienţi reali şi $\mathbb{P}$ matrice nesingulară, acest sistem poate fi adus la forma precedentă $\mathbb{X} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B}$, prin transformări convenabile; ca un exemplu concret, considerăm sistemul

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 + 20x_3 = -2 \end{cases} \tag{19}$$

pe care îl scriem sub forma echivalentă

$$\begin{cases} x_1 = -0,1x_2 + 0,1x_3 \\ x_2 = -0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,4 \\ x_3 = -0,05x_1 - 0,1 \end{cases}$$

adică $\mathbb{X} = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B}$, unde

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,2 \\ -0,05 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4 \\ -0,1 \end{bmatrix}.$$

Soluţia ξ a acestui sistem poate fi determinată aproximativ considerând aplicaţia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{X} \mapsto \mathbb{A}\mathbb{X}+\mathbb{B}$; luând $\mathbb{X}_0 = 0$, avem $\mathbb{X}_1 = \varphi(\mathbb{X}_0), \ldots, \mathbb{X}_k = \varphi(\mathbb{X}_{k-1})$ şi alegând k convenabil, rezultă $\xi \simeq \mathbb{X}_k$. Desigur, soluţia sistemului (19) poate fi dată direct, nesofisticat; totuşi metoda anterioară are o deosebită importanţă principială.

2.2.4 Exerciţii

1. Fie (X, d) un spaţiu metric şi n puncte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din X. Să se arate că $\mathrm{d}(x_1, x_n) \leq \mathrm{d}(x_1, x_2) + \mathrm{d}(x_2, x_3) + \ldots + \mathrm{d}(x_{n-1}, x_n)$. Să se arate că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt vectori din $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, atunci

$$||x_1 + x_2 + \ldots + x_n|| \leq ||x_1|| + ||x_2|| + \ldots + ||x_n||.$$

2. Să se probeze că $(\forall)x \in \mathbb{R}$ avem $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{dacă } n \text{ este par} \\ x & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$, $n \geq 1$ natural. Este adevărată această relaţie pentru $x \in C$?

3. Fie $\{a_n\}$ un şir de numere reale pozitive şi $\{z_n\}$ un şir de numere complexe.

a) Dacă $|z_n| \leq a_n$, $n \geq 0$ şi dacă $a_n \to 0$, să se arate că $z_n \xrightarrow{\text{în } \mathbb{C}} 0$.

b) Dacă $|z_n| \geq a_n$, $n \geq 0$ şi dacă $a_n \to \infty$, să se arate că $z_n \xrightarrow{\text{în } \mathbb{C}} \infty$.

4. Să se calculeze limitele următoarelor şiruri din $\mathbb{R}^3$:

$$x_n = \left(\frac{n}{2n+1}, \frac{n^2}{n^2+1}, \frac{1}{n}\right), \quad y_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 3^{-n}, \cos\frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1$$

precum şi limitele următoarelor şiruri de numere complexe $z_n = \dfrac{1+in^2}{4+n^2}$, $w_n = \dfrac{i^n}{n}$, $z'_n = \alpha^n$ ($\alpha \in \mathbb{C}$ fixat), $w'_n = \dfrac{(1+i)^n}{n}$, $n \geq 1$.

5. Fie $x_n = \left(\left(1 + \dfrac{\lambda}{n}\right)^n, \sqrt[n]{n}, n \sin\dfrac{\pi}{n}\right)$, $n \geq 1$. Să se determine parametrul real λ astfel încât limita şirului x_n să fie la distanţă minimıa în $\mathbb{R}^3$ faţă de punctul $a = (1, e^{-\lambda}, \pi)$,

Indicaţie. Notând $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, avem $l = (e^\lambda, 1, \pi)$ şi trebuie aflat λ astfel încât expresia $\mathrm{d}(a, l) = \sqrt{(1-e^\lambda)^2 + (1-e^{-\lambda})^2}$ să fie minimă, ceea ce revine la a afla minimul funcţiei reale $\psi(\lambda) = e^{2\lambda} + e^{-2\lambda} - 2e^\lambda - 2e^{-\lambda}$.

6. Să se arate că pe mulţimea $X = (0, \infty)$, punând $\mathrm{d}(x, y) = \left|\ln\dfrac{x}{y}\right|$, $(\forall)x, y \in X$ se defineşte o distanţă. Să se dea exemplu de un şir convergent şi neconstant în aceasta distanţă.

7. Mulţimile $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ au structuri de corp comutativ. Este adevărat că în $\mathbb{R}^2$, cu adunarea pe componente, singura înmulţire posibilă astfel încât $\mathbb{R}^2$ să devina corp comutativ este cea de numere complexe?

O întrebare naturală este: dacă $p \geq 4$, există o structură de corp pe mulţimea $\mathbb{R}^p$ (cu adunarea pe componente)? Pentru $p = 4$ s-a arătat că există o astfel de structura de corp necomutativ pe $\mathbb{R}^4$, corpul cuaternionilor construit de W. HAMILTON, 1805 - 1865. De curând J. MILNOR (n. 1931) a arătat că pentru $p \geq 5$ răspunsul este negativ (pentru $p = 3$ răspunsul este de asemenea negativ; încercaţi o justificare).

8. Două distanţe $\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2$ pe aceeaşi mulţime X se numesc *echivalente* dacă există constante reale $\alpha, \beta > 0$ astfel încât $\mathrm{d}_1 \leq \alpha \mathrm{d}_2$ şi $\mathrm{d}_2 \leq \beta \mathrm{d}_1$. Pentru $X = \mathbb{R}^n$ şi pentru orice două puncte $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ din $\mathbb{R}^n$ se notează

$$\mathrm{d}(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}, \ \delta(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|, \ \Delta'(x, y) = \max_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k|.$$

Să se arate că d, δ, Δ' sunt distanţe echivalente pe $\mathbb{R}^n$ şi pentru $n = 2, 3$ să se descrie bilele $B(0, r)$, $r > 0$ respective.

Indicaţie. Se poate arăta că $\Delta' \leq \delta \leq \sqrt{n} \cdot d \leq n\Delta'$ etc.

9. Considerând mulţimea $\mathbb{R}$, pentru orice două fracţii zecimale reduse $x = x_0,\ x_1x_2 \ldots x_n \ldots$; $y = y_0,\ y_1y_2 \ldots y_n \ldots$, unde $x_0 = [x]$, $y_0 = [y]$, asociem numărul natural $p(x, y) = \inf\{n \in \mathbb{N} | x_n \neq y_n\}$. Să se arate că $(\forall)x, y, z \in \mathbb{R}$ avem $p(x, z) \geq \min(p(x, y), p(y, z))$ şi că punând $\delta(x, y) = 10^{-p(x,y)}$ se obţine o distanţă pe $\mathbb{R}$, care nu este echivalentă cu distanţa euclidiană $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$, $(\forall)x, y \in \mathbb{R}$.

10. Se consideră intervalul $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Să se determine distanţa dintre funcţiile $f : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ şi $g : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$, ca şi distanţa dintre $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ definite prin $f_1(x) = x^2$ şi $f_2(x) = 2x + 1$.

11. a) Două spaţii metrice (X, d), (Y, δ) se numesc *izometrice* dacă există o bijecţie $f : X \to Y$ astfel ca $\mathrm{d}(x, y) = \delta(f(x), f(y))$, $(\forall)x, y \in X$. Să se arate în acest caz că dacă $a \in X$ şi dacă $\{x_n\}_{n\geq 0}$ este un şir de puncte în X, avem $\{x_n \overset{\text{în } \mathbb{X}}{\longrightarrow} a\} \longleftrightarrow \{f(x_n) \overset{\text{în } \mathbb{Y}}{\longrightarrow} f(a)\}$.

b) Fie $X \xrightarrow{f} Y$ o bijecţie şi (Y, δ) un spaţiu metric. Să se arate că punând $\mathrm{d}(x, y) = \delta(f(x), f(y))$, $(\forall)x, y \in X$, se defineşte o distanţă pe X. Ca aplicaţie, explicitaţi distanţa pe mulţimea $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ a matricilor pătratice de ordin n cu coeficienţi reali obţinută cu ajutorul bijecţiei $f : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$,

$$[a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \mapsto (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{n1}, a_{n_2}, \ldots, a_{nn}).$$

12. Fie D o dreaptă fixată dintr-un plan P; se consideră aplicaţia $\varphi : P \to P$, care asociază oricărui punct $a \in P$, proiecţia ortogonală a lui a pe D. Să se determine punctele fixe ale acestei aplicaţii. Este φ o contracţie?

13. Daţi exemplu de contracţii nebanale ale spaţiilor $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^3$.

14. Fie $a \geq 2$ real dat. A calcula $\sqrt{a}$ revine la a rezolva ecuaţia $x^2 = a$ în mulţimea $X = \left[\sqrt{\frac{a}{2}}, \infty\right)$ sau echivalent, ecuaţia $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Notând $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, să se arate că φ este o contracţie cu coeficient $\frac{1}{2}$. Calculaţi pe această cale $\sqrt{10}$ cu aproximaţie 10^{-4}.

15. Fie $a > 0$ real dat. Să se indice un mod de calcul al lui $\sqrt[3]{a}$ folosind ecuaţia $x = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{a}{x^2}\right)$ în $X = [0, \infty)$ şi similar, calculul lui $\frac{1}{a}$, folosind ecuaţia $x = 2x - ax^2$ pe mulţimea $X = \left[\frac{3}{4a}, \frac{1}{a}\right]$.

16. Folosind principiul contracţiei (eventual şi minicalculatorul), să se rezolve cu aproximaţie 10^{-3} ecuaţiile $x^3 + 4x - 1 = 0$, $10x - 1 = \sin x$, $x = \frac{1}{3}(1 - e^{-x})$, $x^5 + x^3 - 1,16 = 0$.

17. Să se arate că mulţimea $\bar{\mathbb{R}}$ este spaţiu metric relativ la distanţa

$$\mathrm{d}(x, y) = \left|\frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|}\right|, \quad (\forall)x, y \in \bar{\mathbb{R}}$$

cu convenţia $\frac{x}{1 + |x|} = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad x = \infty \\ -1 & \text{dacă} \quad x = -\infty \end{cases}$ şi că $\bar{\mathbb{R}}$ este izometric cu segmentul $[-1, 1]$. Să se arate că bila $B(\infty, r)$, $0 < r < 1$ este tocmai intervalul $\left(\frac{1 - r}{r}, \infty\right]$. Determinaţi bilele $B(\infty, 1)$, $B\left(\infty, \frac{3}{2}\right)$, $B(\infty, 2)$ şi arătaţi că vecinătate a lui ∞ în $\bar{\mathbb{R}}$ este orice mulţime care conţine un interval de forma $(a, \infty]$ din $\bar{\mathbb{R}}$.

2.3 Serii numerice

2.3.1 Convergenţă, divergenţă

Există cazuri când unui şir infinit $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de numere reale i se poate atribui o sumă, astfel încât să fie extinsă noţiunea de sumă a unui şir finit de numere reale. Teoria seriilor precizează astfel de cazuri şi constituie cadrul natural pentru studiul aproximărilor, în conjugare cu tehnicile moderne de calcul.

Definiţia 3.1. *Pentru orice şir* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *de numere reale se poate considera un nou şir din* $\mathbb{R}$, *anume* $\{s_n\}_{n\geq 0}$, *unde* $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1, \ldots, s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ *etc., numit* **şirul sumelor parţiale asociat şirului iniţial**. *Perechea formată din şirurile* $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $\{s_n\}_{n\geq 0}$ *se numeşte* **serie de termen general** a_n *şi se notează* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *(sau* $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ *punând simbolic semnul + între termenii şirului* $\{a_n\}$*).*

O serie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *se numeşte* **convergentă** *(şi asociem notaţia C) dacă şirul* $\{s_n\}_{n\geq 0}$ *al sumelor parţiale este convergent în* $\mathbb{R}$. *O serie care nu este convergentă se numeşte* **divergentă** *(D).*

Aşadar, seriile sunt fie convergente, fie divergente. În cazul când o serie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ este convergentă (şi numai atunci) se defineşte **suma seriei** ca fiind numărul real $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$. Adeseori acest număr este notat cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sau $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$, ceea ce poate crea confuzii. În funcţie de context, o astfel de confuzie dispare pentru că este evidentă distincţia între serie (ca pereche de şiruri) şi suma seriei (ca număr real asociat seriei în caz de convergenţă).

În studiul unei serii, rolul principal este jucat de şirul sumelor parţiale şi de aceea se poate afirma că teoria seriilor este o "combinaţie" între studiul sumelor finite şi cel al limitelor de şiruri. Este greşită definirea seriilor sau sumelor de serii ca "sume infinite", pentru că în $\mathbb{R}$ au apriori sens exclusiv sume **finite** de elemente. Seriile au unele proprietăţi distincte de cele ale sumelor finite (nu avem comutativitate, asociativitate, seriile nu pot fi în general înmulţite etc.).

Evident, dacă se renunţă la un număr finit de termeni ai unei serii, seria nou obţinută va avea aceeaşi natură ca şi seria iniţială (acelaşi lucru are loc dacă se adaugă un număr finit de termeni). Desigur, în caz de convergenţă, suma se modifică scazând (sau adaugând) suma finită a termenilor la care se renunţă (respectiv care se adaugă).

Se poate afirma că problema principală în studiul unei serii este determinarea naturii (C sau D) şi în caz de convergenţă, evaluarea exactă sau măcar aproximativă a sumei seriei respective.

Exemple. a) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 - n} = a_2 + a_3 + \ldots$ are termenul general $a_n = \frac{1}{n^2 - n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, $n \geq 2$ şi sumele ei parţiale sunt $s_0 = a_2$, $s_1 = a_2 + a_3, \ldots$; Evident,

$$s_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+2} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \ldots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$$

şi ca atare, seria iniţială este C, având suma $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.

b) Fie $\rho \in \mathbb{R}$ un număr real fixat; seria $\sum\limits_{n\geq 0} \rho^n = 1 + \rho + \rho^2 + \ldots$ se numeşte **seria geometrică de raţie** ρ. Sumele parţiale asociate sunt $s_0 = 1$,

$s_1 = 1+\rho, \ldots, s_n = 1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^n$; se verifică imediat prin inducţie că

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} & \text{dacă} \quad \rho \neq 1 \\ n+1 & \text{dacă} \quad \rho = 1. \end{cases}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \rho^n = 0$ dacă $-1 < \rho < 1$, se observă că limita $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ există dacă şi numai dacă $-1 < \rho < 1$; am probat astfel

Teorema 3.1. Seria geometrică $\sum\limits_{n\geq 0} \rho^n = 1+\rho+\rho^2+\ldots$ este convergentă dacă şi numai dacă $|\rho| < 1$ şi în acest caz, suma seriei este egală cu $\dfrac{1}{1-\rho}$. În mod similar, seria $\sum\limits_{n\geq 0} a\,\rho^n$ este $C \leftrightarrow |\rho| < 1$ şi are atunci suma $\dfrac{a}{1-\rho}$ ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ dat).

În exemplele anterioare am putut decide natura şi chiar suma seriilor considerate, deoarece am reuşit să exprimăm convenabil termenul general al şirului sumelor parţiale. O astfel de şansă nu există decât în puţine cazuri şi este necesara dezvoltarea unei teorii calitative a seriilor, indicând criterii de convergenţă care ţin cont de forma termenului general al seriilor studiate.

c) Iată cum se construieşte o serie convergentă, cu suma prescrisă S. Alegem un şir de numere reale $\{b_n\}_{n\geq 0}$, $b_0 = 0$ convergent către S şi considerăm şirul $\{a_n\}_{n\geq 1}$ unde $a_n = b_n - b_{n-1}$. Atunci seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ este evident C şi are suma S.

Un alt exemplu ilustrând definiţiile anterioare este legat de *reprezentarea q-adică a numerelor reale.*

Teorema 3.2. *Fie $q \geq 2$ un întreg fixat (bază de numeraţie). Atunci pentru orice număr real $x \geq 0$ există un întreg m şi un şir unic $\{a_n\}_{n\geq -m}$ de cifre în baza q (adică întregii a_n au ca valori posibile $0, 1, \ldots, q-1$) astfel încât seria* $\sum\limits_{n\geq -m}$ *să fie convergentă, cu suma x.*

Demonstraţie. Alegem m întregul cel mai mic astfel încât $x < q^{m+1}$ şi definim şirurile $\{y_n\}_{n\geq -m}$, $\{a_n\}_{n\geq -m}$ punând

$$y_{-m} = x \cdot q^{-m}, \quad a_{-m} = [y_{-m}]. \tag{20}$$

Dacă $n \geq -m$ şi y_n, $a_n = [y_n]$ au fost definite, punem

$$y_{n+1} = (y_n - a_n)q \quad \text{şi} \quad a_{n+1} = [y_{n+1}]. \tag{21}$$

Evident $y_n \geq 0$ şi $a_n \geq 0$ pentru orice $n \geq -m$.

Prin inducţie după n verificăm că

$$y_n < q \text{ şi } a_n \leq q-1 \text{ pentru orice } n \geq -m. \tag{22}$$

Într-adevăr, pentru $n = -m$ avem $y_{-m} = xq^{-m} < q$ (căci $x < q^{m+1}$) şi atunci $a_{-m} = [y_{-m}] \leq q-1$. Apoi dacă $n > -m$, $y_n < q$ şi $a_n \leq q-1$, atunci $y_n - a_n = y_n - [y_n] < 1$, deci $y_{n+1} = (y_n - a_n)q < 1 \cdot q = q$ şi deci $a_{n+1} = [y_{n+1}] \leq q-1$.

Vom proba acum prin inducţie după n relaţia

$$y_{n+1}q^{-(n+1)} = x - \sum_{k=-m}^{n} a_k q^{-k}, \quad \text{pentru orice } n \geq -m. \tag{23}$$

Pentru $n = -m$ avem de arătat că $y_{-m+1} \cdot q^{m-1} = x - a_{-m}q^m$ adică folosind (21), $(y_{-m} - a_{-m})q^m = x - a_{-m}q^m$, ceea ce este evident, conform (20). Presupunem acum relaţia (23) adevărată pentru n şi o probăm pentru $n+1$.

Dar $y_{n+2}q^{-(n+2)} \stackrel{cf.(21)}{=} (y_{n+1} - a_{n+1})q^{-(n+1)} = y_{n+1}q^{-(n+1)} - a_{n+1}q^{-(n+1)} = x - \sum_{k=-m}^{n} a_k q^{-k} - a_{n+1}q^{-(n+1)}$, ultima egalitate fiind o consecinţă a ipotezei de inducţie. Aşadar $y_{n+2}q^{-(n+2)} = x - \sum_{k=-m}^{n+1} a_k q^{-k}$.

Din relaţiile (22), (23) rezultă imediat teorema 3.2; anume, observăm că

$$0 \le \left| x - \sum_{k=-m}^{n} a_k q^{-k} \right| \stackrel{cf.(23)}{=} |y_{n+1}q^{-(n+1)}| = y_{n+1}q^{-(n+1)} \stackrel{cf.(23)}{\le} q^{-n}$$

şi făcând $n \to \infty$, rezultă că $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-m}^{n} a_k q^{-k}$, adică $x = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k q^{-k}$.

Observaţie. Cazurile cele mai importante se obţin pentru $q = 10$ (în care regăsim scrierea zecimală uzuală a numerelor reale, incluzând sensul semantic al acesteia; de exemplu numărul real $27,438\ldots$ este suma seriei $2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + \ldots$) şi pentru $q = 2$ (cazul *scrierii binare* sau *diadice* a numerelor reale; de exemplu, scrierea binară a lui $\pi = 3,14159\ldots$ este $\pi = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + \ldots$ adică $(\pi)_2 = 11,001001\ldots$, fără nici o periodicitate). În unele situaţii se utilizează baza $q = 8$.

2.3.2 Câteva proprietăţi generale ale seriilor de numere reale

Teorema 3.3 (*criteriul necesar de convergenţă*). *Fie o serie* $\sum_{n\ge0} a_n$ *de numere reale*;

(a) *Dacă seria* $\sum_{n\ge0} a_n$ *este* C, *atunci limita* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *există şi este nulă. Reciproca este falsă.*

(b) *Dacă limita* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *nu există sau dacă există şi este nenulă, atunci seria* $\sum_{n\ge0} a_n$ *este* D.

Demonstraţie. (a) Fie $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, deci $a_n = s_n - s_{n-1}$ pentru orice $n \ge 1$. Conform ipotezei că seria $\sum_{n\ge0} a_n$ este C, rezultă că există $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$. Reciproca este falsă; de exemplu, pentru seria $\sum_{n\ge0}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ avem $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $s_n = \sqrt{n+1}$ şi deci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ iar $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, adică seria este D, deşi limita termenului general este nulă. Similar, seria armonică $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ este D, deoarece şirul $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ este D (conform exemplului care succede teorema 1.6).

(b) Aplicăm (a) ţinând cont de echivalenţa logică $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$ aplicată pentru propoziţiile $p =$ "seria $\sum_{n\ge0} a_n$ este C" şi $q =$ "limita $\lim_{n\to\infty} a_n$ există şi este nulă".

Teorema 3.4. *Fie* $\{a_n\}_{n\ge0}$, $\{b_n\}_{n\ge0}$ *şiruri de numere reale având sumele parţiale* $\{s_n\}_{n\ge0}$ *şi respectiv* $\{t_n\}_{n\ge0}$. *Atunci sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

(a) *Fie* λ *un număr real nenul. Seria* $\sum_{n\ge0} \lambda a_n$ *are aceeaşi natură cu* $\sum_{n\ge0} a_n$;

(b) *Dacă seriile* $\sum_{n\geq 0} a_n$, $\sum_{n\geq 0} b_n$ *sunt convergente cu sumele* s, t *respectiv, atunci seriile* $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)$, $\sum_{n\geq 0}(a_n - b_n)$ *sunt convergente cu sumele* $s + t$, *respectiv* $s - t$.

Demonstraţie. (a) Sumele parţiale ale seriei $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n$ sunt λs_n, $n \geq 0$ şi acest şir are aceeaşi natură cu a şirului $\{s_n\}$.

(b) Conform ipotezei, $s_n \to s$, $t_n \to t$, deci $s_n \pm t_n \to s \pm t$. Dar $s_n \pm t_n$ este şirul sumelor parţiale pentru seria $\sum_{n\geq 0}(a_n \pm b_n)$.

Trebuie remarcat că suma a două serii D poate să fie C.

Teorema 3.5 (criteriul general a lui Cauchy pentru serii). *O serie* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *de numere reale este* $C \leftrightarrow (\forall)\varepsilon > 0$ *real* $(\exists)N(\varepsilon)$ *natural astfel încât* $(\forall)n \geq N(\varepsilon)$ *şi* $(\forall)p \geq 1$, *să avem* $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

Demonstraţie. Fie $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, $n \geq 0$, deci $s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}$. Teorema rezultă atunci din şirul de echivalenţe logice: seria $\sum_{n\geq 0} a_n$ este $C \overset{\Delta}{\longleftrightarrow}$ şirul $\{s_n\}_{n\geq 0}$ este convergent $\overset{teor.1.6.}{\longleftrightarrow}$ şirul $\{s_n\}_{n\geq 0}$ este Cauchy $\longleftrightarrow (\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)N(\varepsilon)$ astfel încât $(\forall)n \geq N(\varepsilon)$ şi $(\forall)p \geq 1$ avem $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$.

2.3.3 Noţiunea de spaţiu Banach; serii de elemente dintr-un spaţiu Banach

Definiţia 3.2. *Fie E un spaţiu vectorial real fixat; presupunem că oricărui vector $x \in E$ i se asociază un număr real bine determinat $||x||$ (numit* **norma** *lui x) astfel încât să fie verificate următoarele proprietăţi*:

$N_1 \cdot (\forall)x \in E$, $\quad ||x|| \geq 0$ *şi* $||x|| = 0 \longleftrightarrow x = 0$;

$N_2 \cdot (\forall)\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad (\forall)x \in E$, $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$;

$N_3 \cdot (\forall)x, y \in E$, $\quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

În aceste condiţii, aplicaţia $E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ||x||$ *se numeşte* **normă** *pe E. Orice spaţiu vectorial real E pe care este fixată o normă se numeşte* **spaţiu vectorial normat (SVN)**.

Această noţiune a fost introdusă de către N. WIENER (1894 - 1970). Evident, $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ sunt SVN relativ la norma definită de funcţia - modul. De asemenea $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ este un SVN relativ la norma euclidiană şi $\mathcal{M}_A$ este un SVN relativ la norma uniformă ($||f|| = \sup_{n\in A} |f(x)|$, $(\forall)f \in \mathcal{M}_A$). Orice SVN E este în mod natural un spaţiu metric, definind

$$\mathrm{d}(x, y) = ||x - y||, \quad (\forall)x, y \in E. \tag{24}$$

(24) Verificarea axiomelor D_1, D_2, D_3 este imediată. Afirmaţia reciprocă este falsă (de exemplu, $\mathbb{Q}$ este spaţiu metric cu distanţa $\mathrm{d}(x, y) = |x-y|$, $(\forall)x, y \in \mathbb{Q}$, dar $\mathbb{Q}$ nu este SVN nefiind spaţiu vectorial real).

În orice SVN se găseşte un punct remarcabil - originea (ceea ce nu se întâmplă în orice spaţiu metric) şi norma oricărui vector x este tocmai distanţa de la origine la x, anume $||x|| = ||x - 0|| = \mathrm{d}(x, 0) = \mathrm{d}(0, x)$. Remarcăm de asemenea că se poate defini noţiunea de spaţiu vectorial complex prin considerarea scalarilor din $\mathbb{C}$ şi noţiunea de SVN complex. De exemplu, $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ este SVN complex relativ la norma $||z|| = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}$, $(\forall)z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Definiţia 3.3. *Se numeşte spaţiu Banach orice SVN care este spaţiu metric complet (relativ la distanţa dată de (24)).*

Teorema care urmează furnizează exemple de spaţii Banach.

Teorema 3.6. $\mathbb{R}^n$ *(*$n \geq 1$*),* $\mathbb{C}$*, şi* $\mathcal{M}_A$ *(A fiind o mulţime oarecare) sunt spaţii Banach.*

Demonstraţie. $\mathbb{R}^n$ este SVN relativ la norma euclidiană, $||x|| = \sqrt{x_1^2, \ldots, x_n^2}$, $(\forall)x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi distanţa indusă conform (24) este tocmai distanţa euclidiană. Aplicând teorema 2.5 rezultă că $\mathbb{R}^n$ este spaţiu metric complet relativ la această distanţă, deci este spaţiu Banach. Planul complex $\mathbb{C}$ este SVN relativ la modulul uzual $|z|$, $(\forall)z \in \mathbb{C}$ şi distanţa indusă este distanţa euclidiană, relativ la care $\mathbb{C}$ este spaţiu metric complet (teorema 2.6). Pentru $\mathcal{M}_A$ se raţionează similar, aplicând teorema 2.7.

Fixăm un spaţiu Banach real E şi fie $\{a_n\}_{n\geq 0}$ un şir de elemente din E. Se poate defini şirul sumelor parţiale $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, $n \geq 0$. Seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ se numeşte **convergentă cu suma** s ($s \in E$) dacă $s_n \overset{\text{în } \mathbb{E}}{\longrightarrow} s$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} ||s_n - s|| = 0$. O serie care nu este C se numeşte **divergentă** (D). Toate proprietăţile stabilite la punctul 2 au loc pentru serii de elemente din E; de exemplu, criteriul general al lui Cauchy (teorema 3.5) se enunţă astfel: o serie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ este $C \leftrightarrows (\forall)\varepsilon > 0$ real $(\exists)N(\varepsilon)$ natural astfel încât $(\forall)n \geq N(\varepsilon)$ şi $(\forall)p \geq 1$, să avem $||a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}|| < \varepsilon$, iar demonstraţia este aceeaşi, înlocuind modulul prin normă.

Dacă $E = \mathbb{R}$ (respectiv $E = \mathbb{C}$, $E = \mathcal{M}_A$), se obţin serii de numere reale (respectiv serii de numere complexe, serii de funcţii mărginite $A \to R$). Se poate spune că spaţiile Banach constituie cadrul natural al teoriei seriilor, deoarece în astfel de spaţii se definesc sume finite, ca şi limite de şiruri.

O clasă foarte importantă de serii o constituie seriile absolut convergente.

Definiţia 3.4. *O serie* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *de elemente din E se numeşte* **absolut convergentă** *(pe scurt AC) dacă seria de numere reale şi pozitive* $\sum\limits_{n\geq 0} ||a_n||$ *este* C.

Exemple. 1) Seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \dfrac{(-1)^n}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \ldots$ este AC (aici $E = \mathbb{R}$) deoarece seria corespunzătoare a modulelor $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{2^n}$ este C, ca serie geometrică cu raţia $\dfrac{1}{2}$. Dar seria $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \ldots$ nu este AC.

2) Fie q un număr complex fixat, $|q| < 1$. Atunci seria de numere complexe $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ este AC, conform teoremei 3.1.

3) Pentru şirul de funcţii $\left\{\dfrac{\sin nx}{2^n}\right\}_{n\geq 0}$, privite ca funcţii $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avem $\left\|\dfrac{\sin nx}{2^n}\right\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{|\sin nx|}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$, deci seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{\sin nx}{2^n}$ este AC în $E = \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$.

Teorema care urmează este foarte importantă şi în ciuda aparenţelor, nu este banală.

Teorema 3.7. *Într-un spaţiu Banach E, orice serie AC de elemente din E este C.*

Demonstraţie. Fie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$, $a_n \in E$ o serie AC, deci seria numerică $\sum\limits_{n\geq 0} ||a_n||$ este C. Fie $(\forall)\varepsilon > 0$ fixat; aplicând teorema 3.5, rezultă că există $N(\varepsilon)$ natural astfel încât $(\forall)n \geq N$, $(\forall)p \geq 1$, $||a_{n+1}|| + \ldots + ||a_{n+p}|| \leq \varepsilon$. Dar atunci rezultă $||a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}|| \leq \varepsilon$, $(\forall)n \geq N(\varepsilon)$, $(\forall)p \geq 1$; notând $s_n = a_0 + a_1 + \ldots +$

a_n, $n \geq 0$, rezultă mai departe că $||s_{n+p} - s_n|| < \varepsilon$. Aşadar, şirul $\{s_n\}_{n\geq 0}$ este Cauchy în E şi cum E este spaţiu Banach, rezultă că $\{s_n\}_{n\geq 0}$ este şir convergent în E, adică seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ este C.

Vom vedea puţin mai târziu că există serii convergente, dar nu AC (de exemplu, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, ca serie în $E = \mathbb{R}$).

2.3.4 Serii de numere reale şi pozitive

Ne situăm în cazul cel mai important, cazul dreptei reale $E = \mathbb{R}$. La proprietăţile generale date anterior, se adaugă unele noi, conform disponibilităţilor mulţimii $\mathbb{R}$; în primul rând, se pot formula teste de convergenţă, criterii suficiente pentru a decide natura seriilor de numere reale.

Teorema 3.8. *O serie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ de numere reale şi pozitive este C dacă şi numai dacă şirul $\{s_n\}_{n\geq 0}$ al sumelor ei parţiale este mărginit.*

Demonstraţie. Daca seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ este C, atunci şirul $\{s_n\}_{n\geq 0}$ este convergent, deci mărginit; reciproc, dacă şirul $\{s_n\}_{n\geq 0}$ este mărginit, atunci el fiind monoton crescător (căci $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$, $(\forall)n \geq 0$), rezultă conform teoremei 1.7 că şirul $\{s_n\}_{n\geq 0}$ este convergent, deci seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ este C.

Teorema 3.9 (criteriul de comparaţie cu inegalităţi). *Fie $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ două serii de numere reale pozitive şi presupunem că există un rang N astfel încât $u_n \leq v_n$ pentru orice $n \geq N$.*

(a) *Dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} v_n C$, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n C$;*

(b) *Dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n D$, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} v_n D$.*

Demonstraţie. Deoarece renunţarea la un număr finit de termeni dintr-o serie nu modifică natura acesteia, eliminând primii N termeni din ambele serii în discuţie, se poate presupune că $u_n \leq v_n$ pentru orice $n \geq 0$. Fie $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, $t_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$, deci $s_n \leq t_n$ pentru orice $n \geq 0$.

(a) Dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ este C, atunci şirul $\{t_n\}$ este mărginit şi cum $0 \leq s_n \leq t_n$, $(\forall)n \geq 0$, rezultă că şirul $\{s_n\}$ este mărginit. Aplicând teorema 3.8, rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este C.

(b) Rezultă din (a) folosind echivalenţa logică $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

Corolar. *Fie E un spaţiu Banach şi $\{x_n\}_{n\geq 0}$ un şir de elemente din E, cu proprietatea că există un şir de numere reale pozitive $\{a_n\}_{n\geq 0}$ astfel încât $||x_n|| \leq a_n$, $(\forall)n \geq 0$ iar seria numerică $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ să fie C. Atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ este AC şi C în E.*

Demonstraţie. Deoarece seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ este C, rezultă conform teoremei 3.9, (a) că seria $\sum\limits_{n\geq 0} ||x_n||$ este C, deci seria $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ este AC şi ca atare, această serie este şi convergentă.

Corolarul precedent se mai enunţă: o serie de elemente $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ din E dominată de o serie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ numerică C, este AC.

Teorema 3.10 (criteriul de comparaţie la limită). *Fie* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *două serii de numere reale pozitive astfel încât limita* $l = \lim\limits_{n\geq 0} \dfrac{u_n}{v_n}$ *să existe şi să fie finită nenulă. Atunci seriile* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *au aceeaşi natură.*

Demonstraţie. Aşadar $l > 0$. Deoarece $\dfrac{u_n}{v_n} \to l$, există un rang N astfel încât

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| \leq \frac{l}{2}, \text{ adică } \frac{l}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3l}{2}, \text{ pentru orice } n \geq N. \tag{25}$$

Presupunem seria $\sum\limits_{n\geq 0} v_n C$, deci seria $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{3l}{2} v_n$ este C; din inegalitatea $u_n < \dfrac{3l}{2} v_n$, $(\forall) n \geq N$ (conform (25)), prin utilizarea teoremei 3.9 (a), rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este C. Similar, dacă $\sum\limits_{n\geq 0} u_n C$, atunci $v_n < \dfrac{2}{l} u_n$, $(\forall) n \geq N$ şi aplicând din nou criteriul de comparaţie cu inegalităţi, rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ este C.

Aşadar, seriile $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sunt simultan C (deci sunt şi simultan D).

Exemple. Seria numerică $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{2^n + 3^n}$ este C, deoarece $\dfrac{1}{2^n + 3^n} < \dfrac{1}{2^n}$, $(\forall) n \geq 0$ şi aplicăm teorema 3.9, (a). Seria $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{3n+1}{n^2+4}$ este D căci are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{n}$, deoarece notând $u_n = \dfrac{3n+1}{n^2+4}$, $v_n = \dfrac{1}{n}$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 3$ şi aplicăm criteriul de comparaţie la limită. Acelaşi criteriu se aplică pentru seria $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{7n+4} \cdot |\sin n|$, care va avea aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n\geq 0} |\sin n|$, deci D (căci termenul general *nu* tinde către zero).

2.3.5 Serii de numere complexe

Presupunem $E = \mathbb{C}$. Cele spuse mai jos pentru serii de numere complexe vor fi desigur valabile şi pentru serii de numere reale. Dealtfel, direct din definiţii, rezultă că o serie $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$, $z_n = x_n + iy_n$ de numere complexe este convergentă dacă şi numai dacă seriile de numere reale $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} y_n$ sunt convergente şi în acest caz, $\sum\limits_{n\geq 0} z_n = \sum\limits_{n\geq 0} x_n + i \sum\limits_{n\geq 0} y_n$.

Teorema 3.11 (criteriul raportului, al lui J. d'ALEMBERT, 1717 - 1783). *Fie* $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ *o serie de numere complexe nenule, astfel încât să existe*

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|.$$

(a) *Dacă* $l < 1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ *este AC (deci C)*;

(b) *Dacă* $l > 1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ *este D.*

Demonstraţie. (a) Fie $l < 1$; alegem $\varepsilon > 0$ real astfel încât $l + \varepsilon < 1$. Cum $\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| \to l$, există un rang N astfel încât $l - \varepsilon < \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| < l + \varepsilon$ pentru

$n \geq N$; în particular $|z_{n+1}| < (l+\varepsilon)|z_n|$, $(\forall)n \geq N$. Renunţând la primii N termeni ai seriei (ceea ce nu modifică natura acesteia), putem presupune că $|z_{n+1}| < (l+\varepsilon)|z_n|$, $(\forall)n \geq 0$. În particular, făcând $n = 0$, $n = 1$ etc. rezultă că $|z_1| \leq (l+\varepsilon)|z_0|$, $|z_2| \leq (l+\varepsilon)|z_1| \leq (l+\varepsilon)^2|z_0|$ şi prin inducţie, că $|z_n| \leq (l+\varepsilon)^n|z_0|$, $(\forall)n \geq 0$. Dar seria $\sum\limits_{n\geq 0}(l+\varepsilon)^n|z_0|$ este o serie geometrică de numere reale pozitive, cu raţia $\rho = l+\varepsilon < 1$, deci este convergentă; atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0}|z_n|$ rezultă C, adică seria $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ este AC.

(b) Presupunem că $l > 1$ şi alegem $\varepsilon_1 > 0$ astfel încât $l - \varepsilon_1 > 1$. De la rang încolo avem $\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| > l - \varepsilon_1$, deci $|z_{n+1}| > (l-\varepsilon_1)|z_n|$ şi raţionând ca mai sus, rezultă $|z_n| > (l-\varepsilon_1)^n|z_0|$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}(l-\varepsilon_1)^n|z_0| = \infty$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ nu poate fi egală cu zero, deci seria $\sum\limits_{n\geq 0} z_n D$ (conform teoremei 3.3, (b)).

Teorema 3.12 (criteriul rădăcinii al lui Cauchy). *Fie $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ o serie de numere complexe, astfel încât să existe $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$.*

(a) *Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ este AC (deci C);*

(b) *Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ este D.*

Demonstraţie. (a) Fie $l < 1$ şi fixăm ρ astfel încât $l < \rho < 1$. Cum $\sqrt[n]{|z_n|} \to l$, există N astfel încât $(\forall)n \geq N$, să avem $\sqrt[n]{|z_n|} < \rho$, deci $|z_n| < \rho^n$. Utilizând criteriul de comparaţie cu inegalităţi, rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ este AC.

(b) Dacă $l > 1$ şi fixăm r astfel încât $l > r > 1$, rezultă, de la un rang încolo, că $|z_n| > r^n$; dar $r^n \to \infty$ şi atunci z_n nu tinde către 0 şi ca atare, seria $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ este D.

Dacă $l = 1$ în teorema 3.11 (sau 3.12), nu se poate trage nici o concluzie asupra naturii seriei.

Teorema 3.13 (criteriul lui N. ABEL, 1802 - 1829). *Fie $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ o serie de numere complexe având şirul sumelor parţiale mărginit. Atunci pentru orice şir $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ de numere reale, monoton descrescător şi convergent către 0 (se mai scrie $\alpha_n \searrow 0$), seria $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n z_n$ este C.*

Demonstraţie. Notăm $S_n = z_0 + z_1 + \ldots + z_n \geq 0$; conform ipotezei, există $M > 0$ astfel ca $|S_n| \leq M$, $(\forall)n \geq 0$. Avem $|\alpha_{n+1}z_{n+1} + \alpha_{n+2}z_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p}z_{n+p}| = |\alpha_{n+1}(S_{n+1} - S_n) + \alpha_{n+2}(S_{n+2} - S_{n+1}) + \ldots + \alpha_{n+p}(S_{n+p} - S_{n+p-1})| = |-\alpha_{n+1}S_n + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})S_{n+1} + \ldots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})S_{n+p-1} + \alpha_{n+p}S_{n+p}| \leq M(|-\alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}| + \ldots + |\alpha_{n+p+1} - \alpha_{n+p}| + |\alpha_{n+p}|)$.

Deoarece $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ este un şir monoton descrescător de numere reale pozitive, $\alpha_k - \alpha_{k+1} \geq 0$, $k \geq 0$, şi rezultă că $|\alpha_{n+1}z_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p}z_{n+p}| \leq M(\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p} + \alpha_{n+p}) = 2M\alpha_{n+1}$.

Fie $(\forall)\varepsilon > 0$ fixat. Deoarece $\alpha_{n+1} \to 0$, există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât $\alpha_{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $(\forall)n \geq N(\varepsilon)$, deci $|\alpha_{n+1}z_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p}z_{n+p}| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ şi $(\forall)p \geq 1$. Conform criteriului general al lui Cauchy pentru serii, rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n z_n$ este C.

Corolar (criteriul lui G. LEIBNIZ, 1646 - 1716, pentru serii alternate). *Fie $\alpha_n \searrow 0$ un şir monoton descrescător de numere reale şi pozitive, convergent către zero. Atunci seria alternată $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots$ este C.*

Demonstraţie. Considerăm seria $\sum_{n\geq 0} z_n$, unde $z_n = (-1)^n$, ale cărei sume parţiale sunt 0 şi 1, deci sunt mărginite de 1. Aplicând criteriul lui Abel (teorema 3.13), rezultă că seria $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\alpha_n$ este C.

Exemple. Conform acestui corolar, rezultă că seria armonică alternată $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ este C (fără a fi AC). Similar, seria $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$ este C (dar este şi AC).

Definiţia 3.5. *Dacă* $u = \{u_n\}_{n\geq 0}$, $v = \{v_n\}_{n\geq 0}$ *sunt două şiruri de numere reale (sau complexe), se numeşte* **convoluţie a lui** u *şi* v *şirul* $w = \{w_k\}_{k\geq 0}$, *unde* $w_k = \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j=k}} u_iv_j = u_0v_k + u_1v_{k-1} + \ldots + u_kv_0$ *(se mai notează* $w = u * v$*). Dacă* $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ *sunt două serii de numere complexe, se numeşte* **serie-produs a lor** *seria*

$$\sum_{k\geq 0} w_k = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \ldots$$

În general seria-produs a două serii C nu este C. Vom proba totuşi:

Teorema 3.14. *Dacă seriile* $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ *de numere complexe sunt AC, având sumele respectiv s, t, atunci seria-produs a lor* $\sum_{k\geq 0} w_k$ *este AC, având suma st.*

Demonstraţie. Fie $(\forall)N$ natural fixat. Notăm $P = \sum_{\substack{0\leq i,j\leq N\\ i+j>N}} |u_iv_j|$. În general, dacă $i+j > N$, atunci cel puţin unul din numerele i, j este $> \frac{N}{2}$; aplicând această observaţie, avem

$$0 \leq P \leq \sum_{\frac{N}{2}<i\leq N} |u_i| \cdot \sum_{j=0}^{n} |v_j| + \sum_{i=0}^{N} |u_i| \cdot \sum_{\frac{N}{2}<j\leq N} |v_j| \leq \sum_{i>\frac{N}{2}} |u_i| \cdot \sum_{j\geq 0} |v_j| +$$

$$+ \sum_{j>\frac{N}{2}} |v_j| \cdot \sum_{i\geq 0} |u_i| = s \sum_{j>\frac{N}{2}} |v_j| + t \sum_{i>\frac{N}{2}} |u_i|.$$

Făcând $N \to \infty$, rezultă de-aici că $P \to 0$.

Pe de altă parte, pentru orice N avem

$$\left|\sum_{k=0}^{N} w_k - \sum_{i=0}^{N} u_i \cdot \sum_{j=0}^{N} v_j\right| = \left|\sum_{\substack{i+j>N\\ 0\leq i,j\leq N}} u_iv_j\right| \leq \sum_{\substack{i+j>N\\ 0\leq i,j\leq N}} |u_iv_j| = P$$

şi

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} w_k = \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} u_i\right)\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} v_j\right) = st.$$

Deci seria $\sum_{k\geq 0} w_k$ este C, având suma st. Mai mult, această serie este chiar AC; într-adevăr, notăm $\alpha_k = \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j=k}} |u_i|\cdot|v_j|$, deci $\alpha_k \geq 0$. Din demonstraţia anterioară pentru seriile $\sum_{n\geq 0} |u_n|$, $\sum_{n\geq 0} |v_n|$, rezultă că seria $\sum_{k\geq 0} \alpha_k$ este convergentă şi deoarece $|w_k| \leq \alpha_k$, $(\forall)k \geq 0$, deducem că seria este C.

Exemplu. Seria $\sum_{n\geq 0} x^n = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ este AC pentru $|x|<1$ şi are suma $\frac{1}{1-x}$; atunci $\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$

Seriile AC au şi alte proprietăţi care le apropie de sumele finite (comutativitate, asociativitate etc).

2.3.6 Exerciţii

1. Să se arate că seriile $\sum_{n\geq 1} \ln \frac{n+2}{n}$, $\sum_{n\geq 1} (\sqrt[5]{n+1} - \sqrt[5]{n})$, $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{n}$ sunt D.

2. Să se dea exemple de o serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ de numere reale care este D, dar $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ este C şi de o serie $\sum_{n\geq 1} b_n$ în $\mathbb{R}$ care este C, dar $\sum_{n\geq 1} b_n^2$ este D.

Indicaţie. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. Se cere natura seriilor $\sum_{n\geq 1} a_n$, unde $a_n = 5^{-\sqrt{4n^2+3}}$, $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{9n^2+n}}$, $a_n = \frac{a^n}{2^n+3^n}$, $a>0$.

4. Se cere natura seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{4n^2-1}$ (discuţie dupa $a \in \mathbb{R}$) şi suma seriei pentru $a=1$.

5. Să se afle suma seriilor $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^2-2n}$, $\sum_{n\geq 3} \frac{4n-3}{n^3-4n}$, $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

6. Să se indice primele 10 cifre ale scrierii binare a numerelor π şi e.

b) Să se scrie în baza 8 numerele 100, $\frac{1}{\pi}$ şi 42,237 (primele 10 cifre).

7. Fie $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 2$. Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, totuşi seriile $\sum_{n\geq 2} a_n$, $\sum_{n\geq 2} b_n$ nu au aceeaşi natură. Cum se explică?

Indicaţie. Seria $\sum_{n\geq 2} b_n$ este C. Seria $\sum_{n\geq 2} a_n$ este D, deoarece seria $\sum_{n\geq 2} (b_n - a_n)$ este D. Cele două serii nu au toţi termenii pozitivi.

8. Fie $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $n \geq 2$. Să se arate că $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ şi totuşi seria $a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots$ este D. Este contrazis criteriul lui Leibniz?

9. Fie $\{a_n\}_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive astfel încât să existe $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l$. Dacă $l > 1$ să se arate că seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este C, iar dacă $l < 1$, atunci seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este D (criteriul Raabe-Duhamel). Studiaţi natura seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}$.

10. Fie $a_{mn} = \frac{1}{m+1}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n - \frac{1}{m+2}\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2$, $m,n \geq 1$. Să se arate că $\sum_m \left(\sum_n a_{mn}\right) \neq \sum_n \left(\sum_m a_{mn}\right)$.

Indicaţie. Pentru orice $m \geq 1$ fixat avem $\sum_{n\geq 1} a_{mn} = \frac{m}{m+1} - \frac{m+1}{m+2}$ deci

$\sum_m \left(\sum_n a_{mn} \right) = \sum_{m \geq 1} \left(\frac{m}{m+1} - \frac{m+1}{m+2} \right) = -\frac{1}{2}$. Pe de altă parte, pentru orice $n \geq 1$ fixat, notând $b_m = \frac{m}{m+1} \cdot \left(\frac{m}{m+1} \right)^n$, avem $\sum_{m \geq 1} a_{mn} = \sum_{m \geq 1} (b_m - b_{m+1}) = b_1 = \frac{1}{2^{n+1}}$, deci $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{m \geq 1} a_{mn} \right) = \frac{1}{2}$. În general, pentru un şir dublu *finit* de numere reale sau complexe $\{a_{mn}\}_{m,n}$ avem $\sum_m \left(\sum_n a_{mn} \right) = \sum_n \left(\sum_m a_{mn} \right)$, dar această regula de intervertire a ordinii de însumare nu se extinde fără precauţii la serii duble. Se poate arăta că regula are loc pentru serii duble absolut convergente.

11. a) Să se determine vectorii x, y din $\mathbb{R}^2$ cu proprietatea că $||x + y|| = ||x|| + ||y||$;

b) Fie $A = [0, 1]$ şi $E = \mathcal{M}_A$; să se indice o pereche de funcţii nenule $f, g \in E$ astfel încât $||f + g|| = ||f|| + ||g||$.

12. Fie E spaţiul vectorial al funcţiilor continue $[a, b] \to \mathbb{R}$. Să se arate că în E se pot defini două norme punând $||f|| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ şi $||f||_1 = \int_a^b |f(x)|dx$, $(\forall) f \in E$. Daţi exemplu de o serie $\sum_{n \geq 0} f_n$ de elemente din E convergentă într-una din norme, dar nu şi în cealaltă.

2.4 Şiruri şi serii de funcţii reale

2.4.1 Derivabilitate, integrabilitate; Calcul de primitive

Fixăm un interval $[a, b]$, $a < b$ închis şi mărginit, pe dreapta reală. Reamintim că o funcţie reală $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numeşte *continuă într-un punct* $u \in [a, b]$ dacă pentru orice şir $x_n \to u$, $x_n \in [a, b]$, $n \geq 1$ şirul $\{f(x_n)\}$ converge către $f(u)$. Funcţia f se numeşte *continuă pe intervalul* $[a, b]$ dacă ea este continuă în fiecare punct din $[a, b]$. Funcţiile continue pe $[a, b]$ se mai numesc de clasă C^0 şi mulţimea lor se notează $C^0_{[a,b]}$. Reamintim de asemenea că o funcţie reală $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numeşte *derivabilă într-un punct* $x_0 \in (a, b)$ dacă limita

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

există în $\mathbb{R}$ (notată atunci $f'(x_0)$ şi numită *derivata lui* f *în punctul* x_0).

Funcţia f este derivabilă în punctul a (respectiv în b) dacă există $f'_d(a)$ (respectiv $f'_s(b)$).

Se spune că o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este de clasă C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ dacă f este de k ori derivabilă pe $[a, b]$ adică în orice punct al intervalului, cu toate derivatele continui; mulţimea acestor funcţii se notează $C^k_{[a,b]}$.

În multe formulări matematice ale unor teorii fizice (mecanică, teoria circuitelor electrice, teoria căldurii, studiul vibraţiilor şi semnalelor, optică, etc) derivatele sunt folosite în mod esenţial, pentru descrierea "vitezelor de variaţie" a unor mărimi fizice.

Proprietăţi de bază ale funcţiilor reale (*legate de continuitate şi derivabilitate*).

1. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, *o funcţie dată.*

a) *Funcţia* f *este continuă într-un punct* $u \in (a, b)$ *dacă şi numai dacă* f *are limite laterale în* u *şi în plus,* $f(u - 0) = f(u + 0) = f(u)$.

b) *Dacă f este derivabilă într-un punct $u \in (a,b)$, atunci ea este continuă în acel punct.*

2. *Orice funcţie elementară este continuă şi chiar indefinit derivabilă pe orice interval deschis conţinut în domeniul ei de definiţie.*

3. *Orice funcţie continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este mărginită şi îşi atinge marginile* (*deci* $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ *sunt numere reale şi în plus, acestea coincid cu valori ale funcţiei f pe intervalul $[a,b]$*).

4. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.*

a) *Dacă $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există un cel puţin un punct $\xi \in (a,b)$ astfel încât $f(\xi) = 0$;*

b) *O dată cu orice două valori, funcţia f ia toate valorile intermediare* (*teorema Bolzono-Darboux a valorilor intermediare*: B. BOLZANO, 1781-1848; G. DARBOUX 1842-1917).

5. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a funcţie continuă şi $x_0 \in (a,b)$ un punct astfel încât $f(x_0) > 0$* (*respectiv $f(x_0) < 0$*). *Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f este pozitivă* (*respectiv negativă*) (păstrarea semnului unei funcţii continue într-o vecinătate).

Proprietăţile 3, 4, 5 vor fi demonstrate într-un context mai general în capitolul III.

6. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) şi astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci există cel puţin un punct $\xi \in (a,b)$ astfel încât $f'(\xi) = 0$* (teorema lui M. ROLLE, 1652-1719).

7. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe (a,b). Atunci*

a) *există cel puţin un punct $\xi \in (a,b)$ astfel încât $f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$;*

b) *f este constantă pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă derivata f' este nulă în fiecare punct din (a,b);*

c) *dacă $f' > 0$* (*respectiv $f' < 0$*) *în punctele intervalului (a,b), atunci f este strict crescătoare* (*respectiv strict descrescătoare*) *pe $[a,b]$* (teorema lui J. LAGRANGE, 1736-1813).

În liceu s-a definit conceptul de funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann (B. RIEMANN, 1826-1866) şi s-a asociat unei astfel de funcţii un număr real bine determinat, notat $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (sau $\int_a^b f$).

Mai precis, dacă f este o funcţie mărginită şi dacă

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

este o diviziune a intervalului $[a,b]$, atunci se notează

$$m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x),\ 0 \le i \le n-1$$

şi

$$s_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i), \quad S_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Se spune că f este *integrabilă Riemann pe intervalul* $[a,b]$ dacă $\sup\limits_\Delta s_\Delta = \inf\limits_\Delta S_\Delta$ şi în acest caz, valoarea comună este *integrala* $\int_a^b d(x)\mathrm{d}x$.

Se ştie că orice funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ care este continuă sau monotonă pe intervalul $[a,b]$ este integrabilă Riemann.

Proprietăţi de bază ale funcţiilor reale (*legate de integrabilitate*).

1. *Dacă $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii integrabile Riemann şi α,β sunt constante reale, atunci funcţia $\alpha f + \beta g$ este integrabilă şi în plus*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \quad \text{(proprietatea de LINIARITATE).}$$

2. *Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ şi dacă $a < c < b$, atunci f este integrabilă Riemann pe fiecare din intervalele $[a,c]$, $[c,b]$ şi în plus*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \text{(proprietatea de ADITIVITATE).}$$

3. *Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii integrabile Riemann şi dacă $f \leq g$ (adică $f(x) \leq g(x)$, $(\forall)x \in [a,b]$), atunci*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \quad \text{(proprietatea de MONOTONIE).}$$

4. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci există un punct $\xi \in (a,b)$ astfel încât*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi) \quad \text{(proprietatea de MEDIE).}$$

Dacă $f \geq 0$ şi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, atunci rezultă $f = 0$.

5. *Orice funcţia continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ are primitivă; anume, definind funcţia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ prin*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}\,t, \quad (\forall)x \in [a,b], \tag{26}$$

funcţia F este derivabilă pe $[a,b]$ şi în plus, $F'(x) = f(x)$, $(\forall)x \in [a,b]$ (teorema lui I. BARROW, 1630-1677).

6. *Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi dacă Φ este o primitivă a lui f (adică Φ este o funcţie derivabilă pe $[a,b]$ şi $\Phi' = f$), atunci*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{27}$$

(formula Leibniz-Newton, după numele celor doi ctitori ai edificiului analizei matematice: G.W. LEIBNIZ, 1646-1716; I. NEWTON, 1643-1727). Această formulă justifică interesul pentru indicarea unor metode de calcul al primitivelor.

7. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ o funcţie de clasă C^1 astfel încât $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\varphi(\beta) = b$. Atunci*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t$$

(formula de calcul prin SCHIMBAREA DE VARIABILĂ $x = \varphi(t)$).

8. *Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1. Atunci*

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g \quad \text{(formula de INTEGRARE PRIN PĂRŢI).}$$

În capitolul IV vom da diverse extinderi ale conceptului de integrală simplă.

În continuare revedem câteva clase de primitive exprimabile prin funcţii elementare.

Fie $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$ o funcţie polinomială cu coeficienţi reali. Conform teoremei fundamentale a algebrei, $Q(x)$ se scrie (unic, exceptând ordinea factorilor şi constantele multiplicative) ca un produs de funcţii polinomiale de gradul I sau II

$$Q(x) = a_0 \prod_{i=1}^{r} (x - x_i)^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^{s} [(x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2]^{l_j}$$

cu $x_1, \ldots, x_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s$ numere reale, $\beta_j \neq 0$, iar $k_1, \ldots, k_r, l_1, \ldots, l_s$ sunt întregi ≥ 1 astfel încât $k_1 + \ldots + k_r + 2l_1 + \ldots 2l_s = n$. De exemplu, dacă $Q(x) = x^7 + 2x^4 + x$, atunci

$$Q(x) = x(x^3+1)^2 = x(x+1)^2(x^2-x+1)^2 = x(x+1)^2 \cdot \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2.$$

Folosind o astfel de descompunere, se poate arăta că dacă P este un alt polinom cu coeficienţi reale şi gr $P <$ gr Q, atunci există şi sunt unice numere reale A_{ij}, C_{ik}, D_{ik} astfel încât pentru orice x cu $Q(x) \neq 0$ să aibă loc relaţia următoare, numită descompunerea funcţiei raţionale $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ în fracţii simple:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{(x-x_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)} + \frac{A_{21}}{(x-x_1)^{k_2}} + \ldots + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_{r1}}{(x-x_r)^{k_r}} + \ldots + \frac{A_{rk_r}}{(x-x_r)} + \frac{C_{11}x + D_{11}}{[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{l_1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{C_{1l_1}x + D_{1l_1}}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \ldots + \frac{C_{s1}x + D_{s1}}{[(x-\alpha_s)^2 + \beta_s^2]^{l_s}} + \ldots + \frac{C_{sl_s}x + D_{sl_s}}{[(x-\alpha_s)^2 + \beta_s^2]}.$$

Coeficienţii $A_{11}, \ldots, D_{s_{l_s}}$ ai acestei dezvoltări se pot afla, după aducerea la acelaşi numitor, prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi care conduce la sisteme liniare. Dacă gr$P \geq$ gr$Q$, se face împărţirea $P = Q \cdot C + R$, gr$R <$ gr$Q$, deci $\dfrac{P}{Q} = C + \dfrac{R}{Q}$ şi fracţiei raţionale $\dfrac{R}{Q}$ i se aplică procedeul anterior.

De exemplu,

$$\frac{x^4+1}{x^4 - x^3 - x + 1} = 1 + \frac{x^3 + x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} =$$

$$= 1 + \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$$

şi se află fără dificultate coeficienţii $A = \dfrac{2}{3}$, $B = \dfrac{2}{3}$, $C = \dfrac{1}{3}$, $D = 0$. În mod similar,

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1}, \ \frac{x^2+x+1}{x^2(x^2+4)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2} +$$

$$+ \frac{Ex+F}{x^2+4}, \ \frac{x^2+7x}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \text{ etc.}$$

Pentru orice fracţie raţională $\dfrac{P}{Q}$ în care se cunoaşte descompunerea lui Q în factori de gardul I sau II, primitiva ei se exprimă efectiv prin funcţii elementare; reamintim că

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \ln|x+a| + C, \ \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2} = -\frac{1}{x+a} + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n} = \frac{(x+a)^{-n+1}}{-n+1} + C, \ n \neq 1,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2 + b^2} = \frac{1}{b}\mathrm{arctg}\, \frac{x+a}{b} + C, \ b \neq 0, \ \int \frac{P'(x)}{P(x)}\mathrm{d}x = \ln|P(x)| + C.$$

Reamintim forma canonică a unui trinom de gradul II:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right],\ a\neq 0$$

utilă în calculul integralelor de forma $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$, via schimbarea de variabilă $x+\frac{b}{2a}=t$ etc.

Printre integralele reductibile la calculul primitivelor de fracţii raţionale, remarcăm următoarele tipuri:

a) $\int_\alpha^\beta R(e^{ax})\mathrm{d}x$, $a\neq 0$ unde $R(u)$ este o funcţie raţională; se recomandă schimbarea de variabilă $e^{ax}=t$.

Exemplu. Calculăm $I=\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x$, făcând schimbarea $e^{2x}=t$; atunci

$$I=\int_1^{e^2}\frac{t-1}{t+1}\frac{\mathrm{d}t}{2t}=\frac{1}{2}\int_1^{e^2}\frac{t-1}{t(t+1)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^{e^2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{2}{t+1}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{2}[-\ln|t|+2\ln|t+1|]\Big|_1^{e^2}=\ln(e^2+1)-\ln 2-1.$$

b) $\int_\alpha^\beta R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$, $a\neq 0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, unde $R(u,v)$ este o funcţie raţională (cât de polinoame în variabilele u,v). Dacă $a>0$ se recomandă schimbarea $x\mapsto t$ definită prin $\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+t$; dacă $c>0$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}+tx$ şi în fine, dacă $b^2-4ac>0$, se pune $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$, x_1 fiind una din rădăcinile trinomului ax^2+bx+c. S-a presupus $ax^2+bx+c\geq 0$ pe intervalul $[\alpha,\beta]$.

Exemplu. Calculăm integrala $I=\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+3}}$; se recomandă schimbarea de variabilă $\sqrt{x^2+x+3}=x+t$, $x^2+x+3=x^2+2xt+t^2$, $x=\frac{t^2-3}{1-2t}$, deci $\mathrm{d}x=\frac{-2t^2+2t-6}{(1-2t)^2}\mathrm{d}t$; se obţine $I=\int_{\sqrt{3}}^1\frac{-2t^2+2t-6}{(1-2t)(t-6)}\mathrm{d}t$.

c) $\int_\alpha^\beta R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$, unde $R(u,v)$ este un cât de polinoame în u,v. În acest caz se recomandă schimbarea $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$, cu precauţii în eventualitatea că intervalul de integrare cuprinde puncte de discontinuitate ale funcţiei $x\mapsto\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

Atunci $\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Exemplu. Calculăm

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}=\int_0^1\frac{2\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}=$$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Cu programe tip MATLAB, calculul primitivelor a devenit banal.

Integrale improprii

În liceu s-au considerat numai integralele $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ în care funcţia reală f este presupusă definită şi mărginită pe in interval închis şi mărginit $[a,b]$. Există situaţii în care se poate extinde conceptul de integrală pentru funcţii care nu satisfac condiţiile anterioare, ajungându-se la integrale improprii (sau generalizate).

a). *Cazul intervalului nemărginit.* Fie $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, o funcţie integrabilă Riemann pe orice interval închis şi mărginit $[\alpha,\beta]$ conţinut în $[a,\infty)$; de exemplu, f este continuă. Se spune că f este *integrabilă impropriu* $[a,\infty)$ sau echivalent, că *integrala improprie* $\int_a^\infty f$ *este convergentă* (scriind $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x <$ ∞ dacă limita

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ există în } \mathbb{R} \left(\text{notată tot cu} \int_a^\infty f\right).$$

Integralele improprii care nu sunt convergente se numesc *divergente*. Evident, integrala improprie $\int_a^\infty f$ este convergentă dacă şi numai dacă există $a' \geq a$ astfel încât integrala $\int_{a'}^\infty f$ să fie convergentă.

Se poate remarca o analogie cu cazul seriilor, în care notaţia $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ este folosită atât pentru seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, cât şi pentru suma ei (în caz de convergenţă); de asemenea "renunţarea" la un interval $[a,a')$ nu modifică natura unei integrale improprii $\int_a^\infty f$.

Cele mai sus se refac fără dificultate în cazul intervalelor de forma $(-\infty,a]$.

Presupunem acum că se consideră o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabilă pe orice interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Se spune că f este *integrabilă* pe $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ sau că *integrala improprie* $\int_{-\infty}^\infty f$ *este convergentă* dacă există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât integralele $\int_{-\infty}^c f$ şi $\int_c^\infty f$ să fie ambele convergente; în acest caz se defineşte numărul real

$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^c f + \int_c^\infty f, \text{ numit } \textit{valoarea integralei improprii} \int_{-\infty}^\infty f.$$

Convergenţa şi valoarea integralei (presupusă convergentă) $\int_{-\infty}^\infty f$ sunt independente de alegerea lui c; căci dacă $c_1 \in \mathbb{R}$ ar fi alt punct, atunci

$$\int_{-\infty}^{c_1} f + \int_{c_1}^\infty f = \int_{-\infty}^c f + \int_c^{c_1} f + \int_{c_1}^c f + \int_c^\infty f = \int_{-\infty}^c f + \int_c^\infty f.$$

Exemple. 1) Integrala improprie $\int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$ este convergentă, cu valoarea $\frac{1}{e}$, dar integralele $\int_1^\infty e^x\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \cos x\mathrm{d}x$ sunt divergente.

2) Integrala $\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$ este convergentă (deoarece $\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$, $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$ sunt convergente) şi are valoarea $\frac{\pi}{2}$.

3) Integrala $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ constant) este convergentă dacă şi numai dacă limita $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}\lim\limits_{b\to\infty}(1-b^{-\alpha+1})$ există în $\mathbb{R}$, adică $\alpha > 1$.

Ne menţinem în ipoteza că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe orice interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$; se spune că f *este integrabilă în sensul valorii principale Cauchy* dacă există şi este finită limita

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A}, \quad \text{notată v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f.$$

Dacă integrala improprie $\int_{-\infty}^{\infty} f$ este convergentă, atunci există $\lim\limits_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to\infty}} \int_{\alpha}^{\beta} f$ şi ca atare există şi

$$\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to\infty, \alpha+\beta=0}} \int_{\alpha}^{\beta} f = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f.$$

Reciproca nu are loc; de exemplu

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} \mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{2x}{x^2+1} \mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \ln(x^1+1)\Big|_{-A}^{A} = 0$$

şi totuşi integrala improprie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} \mathrm{d}x$ este divergentă (deoarece $\int_{c}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} \mathrm{d}x$ este divergentă pentru orice $c \in \mathbb{R}$).

b). *Cazul funcţiei nemărginite.* Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe orice interval $[\alpha,\beta] \subset [a,b)$, astfel încât limita $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$ să fie egală cu $-\infty$ sau ∞ (se mai spune că b este *punct singular* al lui f). Se spune că f *este integrabilă impropriu pe intervalul* $[a,b)$ sau că integrala improprie $\int_a^b f$ *este convergentă* dacă limita

$$\lim_{\substack{B\to b\\ B<b}} \int_a^B f \text{ există în } \mathbb{R} \left(\text{notată tot cu } \int_a^b f\right).$$

Similar se tratează cazul intervalelor de integrare de forma $(a,b]$ cu a punct singular. De exemplu, integrala $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ este convergentă dacă şi numai dacă există în $\mathbb{R}$ limita

$$\lim_{\substack{B\to 0\\ B>0}} \int_B^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{\substack{B\to 0\\ B>0}} \frac{1}{1-\alpha}(1-B^{1-\alpha}), \quad \text{adică } \alpha < 1.$$

Dacă $f : [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ este o funcţie integrabilă pe orice interval $[\alpha,\beta]$ conţinut în $[a,c) \cup (c,b]$, având c punct singular, se spune că f *este integrabilă impropriu pe* $[a,b]$ dacă integralele improprii $\int_a^c f$, $\int_c^b f$ sunt convergente.

În aceleaşi condiţii, se spune că integrala improprie $\int_a^b f$ *este convergentă în sensul valorii principale Cauchy* dacă în $\mathbb{R}$ există limita

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f\right), \quad \text{notată v.p.} \int_a^b f.$$

De exemplu,

$$\text{v.p.} \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-2|}} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_1^{2-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x}} + \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}\right) =$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (-2\sqrt{2-x}\Big|_1^{2-\varepsilon} + 2\sqrt{x-2}\Big|_{2+\varepsilon}^3) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (-2\sqrt{\varepsilon} + 4 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 4.$$

Dacă a, b sunt puncte singulare pentru o funcţie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ integrabilă pe orice subinterval $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, atunci $\int_a^b f$ *este convergentă* dacă există $c \in (a, b)$ astfel încât integralele $\int_a^c f$, $\int_c^b f$ să fie convergente; se pune atunci $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (independent de alegerea lui c).

Se întâlnesc uneori integrale improprii mixte, în care intervalul de integrare este nemărginit iar integrantul are singularităţi. De exemplu $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$, $\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \mathrm{d}x$ etc; în acest caz, integrala se numeşte *convergentă* dacă, alegând un punct $c \in (0, \infty)$, cele două integrale improprii puse în evidenţă vor fi convergente.

În general, se poate spune că studiul integralelor improprii se afă la confluenţa studiului integralelor uzuale cu noţiunea de limită; se reformulează fără dificultate proprietăţile de liniaritate, monotonie, formula Leibniz-Newton, schimbare de variabilă, integrare prin părţi etc. De exemplu, dacă $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi F o primitivă a lui f, atunci integrala improprie $\int_a^b f$ este convergentă dacă şi numai dacă în $\mathbb{R}$ există $F(b-0) \overset{\triangle}{=} \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} F(x)$ şi în acest caz, $\int_a^b f = F(b-0) - F(a)$.

Ale proprietăţi ale integralelor improprii (teoreme de convergenţă, criteriul comparaţiei etc.) vor fi date în capitolul IV, în cadrul teoriei generale a integralei.

Legătura dintre integrale improprii şi serii este subliniată încă o dată în cadrul teoremei care urmează, care constituie un nou criteriu de convergenţă a seriilor de numere reale şi pozitive.

Teorema 4.1. (criteriul integral).*Fie $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie monoton descrescătoare şi $f \geq 0$. Sunt atunci echivalente afirmaţiile următoare*:

(a) *seria numerică* $\sum\limits_{n \geq 1} f(n)$ *este* $\mathbb{C}$;

b) *şirul* $\left\{ \int_1^n f(x) dx \right\}_{n \geq 1}$ *este convergent*;

c) *integrala improprie* $\int_1^\infty f(x) dx$ *este convergentă.*

Demonstraţie. Fie $v_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, $u_n = \int_1^n f(x) \mathrm{d}x$. Deoarece f este monotonă, ea este integrabilă Riemann pe orice interval $[\alpha, \beta] \subset [1, \infty)$. Din proprietatea de monotonie a integralei rezultă inegalităţile

$$f(2) \leq \int_1^2 f \leq f(1),\ f(3) \leq \int_2^3 f \leq f(2), \ldots, f(n) \leq \int_{n-1}^n f \leq f(n-1);$$

adunând aceste inegalităţi, rezultă relaţiile

$$v_n - f(1) \leq u_n, \quad (\forall) n \geq 1; \tag{28}$$

$$u_n \leq v_{n-1}, \quad (\forall) n \geq 2. \tag{29}$$

Trecem acum la demonstraţia propriu-zisă.

$a \Rightarrow b$. Dacă seria $\sum\limits_{n \geq 1} f(n)$ este C, atunci şirul $\{v_n\}_{n \geq 1}$ al sumelor ei parţiale este convergent, deci mărginit. Conform (29), şirul $\{u_n\}_{n \geq 1}$ rezultă mărginit şi fiind monoton crescător, el va fi convergent.

$b \Rightarrow a$. Dacă şirul $\{u_n\}_{n\geq 1}$ este convergent, atunci el este mărginit şi conform (28) rezultă că şirul $\{v_n\}_{n\geq 1}$ este mărginit. Fiind crescător (căci $f \geq 0$), rezultă că şirul $\{v_n\}_{n\geq 1}$ este convergent, deci seria $\sum\limits_{n\geq 1} f(n)$ este C.

$b \Rightarrow c$. Notăm $F(c) = \displaystyle\int_1^c f(x)\mathrm{d}x$, $c \geq 1$ şi $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Pentru orice $c \geq 1$ fixat există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $c < n$, deci $F(c) \leq F(n) = u_n \leq l$; pe de altă parte, pentru orice $\varepsilon > 0$, există N astfel încât $|u_N - l| < \varepsilon$. Fie acum $c_n \to \infty$. Atunci de la un rang încolo avem $c_n \geq N$, deci $F(c_n) \geq F(N) = u_N > l - \varepsilon$ şi cum $F(c_n) \leq l$, rezultă $l - \varepsilon < F(c_n) \leq l$. Atunci $|F(c_n) - l| < \varepsilon$ pentru orice n suficient de mare. Aşadar, $F(c_n) \to l$, adică $\lim\limits_{c\to\infty} F(c)$ există deci $\displaystyle\int_1^\infty f = l$.

Implicaţia $c \Rightarrow b$ este evidentă.

Corolar. *Fie $\alpha > 0$ un număr real fixat. Seria armonică generalizată (numită şi seria lui Riemann)*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots$$

este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.

Demonstraţie. Se consideră funcţia descrescătoare şi pozitivă

$$f : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

Atunci seria $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ este C dacă şi numai dacă integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ este convergentă, adică $\alpha > 1$.

Exemplu. Seria $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ este C (luând $\alpha = 2$); mai general, dacă P şi Q sunt polinoame şi $\mathrm{gr}Q - \mathrm{gr}P \geq 2$, atunci seria $\sum\limits_{n\geq N} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ este C (N fiind ales astfel încât $Q(n) \neq 0$ şi $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \geq 0$ sau ≤ 0 pentru orice $n \geq N$). Într-adevăr, conform teoremei 3.10, această serie are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n\geq N} v_n$, unde $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ şi $\alpha = \mathrm{gr}Q - \mathrm{gr}P$. Dar seria $\sum\limits_{n\geq N} v_n$ este C conform corolarului anterior.

2.4.2 Convergenţa uniformă şi convergenţa punctuală a şirurilor de funcţii

Fie A o mulţime oarecare fixată şi $\{f_n\}_{n\geq 0}$ un şir de funcţii $A \to \mathbb{R}$. Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o altă funcţie.

Definiţia 4.1. *Se spune că şirul $\{f_n\}_{n\geq 0}$ este* **punctual convergent pe** A **către** f *pentru $n \to \infty$ (şi se scrie $f_n \xrightarrow{PC} f$) dacă $f_n(x_0) \xrightarrow{in\ \mathbb{R}} f(x_0)$ pentru orice $x_0 \in A$.*

Aşadar, fiind un şir de funcţii $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$, limita sa punctuală pe A (dacă există !) este funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $(\forall)x \in A$.

Definiţia 4.2. *Un şir $\{f_n\}_{n\geq 0}$ de funcţii $f_n : A \to \mathbb{R}$ se numeşte* **uniform convergent pe** A **către o funcţie** $f : A \to \mathbb{R}$ *(şi se scrie $f_n \xrightarrow{UC} f$) dacă* *este îndeplinită următoarea condiţie*:

$$\begin{array}{l}(\forall)\varepsilon > 0 \text{ real } (\exists)N(\varepsilon) \text{ natural astfel încât } (\forall)n \geq N(\varepsilon), \text{ să avem} \\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ pentu orice } x \in A.\end{array} \tag{30}$$

Teorema 4.2. (a) *Un şir* $\{f_n\}_{n\geq 0}$ *de funcţii mărginite* $A \to \mathbb{R}$ *(adică* $f_n \in \mathcal{M}_A$, $(\forall)n \geq 0$*) este uniform convergent către o funcţie* $f \in \mathcal{M}_A$ *dacă şi numai dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$.

(b) *Orice şir de funcţii* $A \to \mathbb{R}$ *uniform convergent pe* A *este punctual convergent pe* A*; reciproca este falsă.*

Demonstraţie. (a) Condiţia (30) se scrie echivalent: $(\forall)\varepsilon > 0$ real $(\exists)N(\varepsilon)$ natural astfel încât $(\forall)n \geq N(\varepsilon)$, $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, adică $||f_n - f|| \leq \varepsilon$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$.

(b) Presupunem că $f_n \stackrel{UC}{\longrightarrow} f$ pe A, deci are loc condiţia (30).

În particular pentru orice punct $x_0 \in A$, avem următoarea condiţie îndeplinită: $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)N(\varepsilon)$ natural astfel încât $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, adică $f_n \stackrel{PC}{\longrightarrow} f$ pe A.

Luăm $A = [0, 1]$ şi $f_n(x) = x^n$, $n \geq 1$. Evident, $(\forall)x \in A$ avem

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x \in [0, 1) \\ 1 & \text{dacă} \quad x = 1, \end{cases}$$

adică $f_n \stackrel{PC}{\longrightarrow} f$, unde $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x \in [0, 1) \\ 1 & \text{dacă} \quad x = 1, \end{cases}$. Dar

$$||f_n - f|| = \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| =$$

$$\max\left(\sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)|, |f_n(1) - f(1)|\right) = \max\left(\sup_{x\in[0,1)} x^n, 0\right) =$$

$$= \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 1 \neq 0.$$

Aşadar, şirul f_n este PC, dar nu UC pe intervalul $[0, 1]$.

Reţinem deci că $f_n \stackrel{UC}{\longrightarrow} f$ pe $A \leftrightarrows$

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0 \leftrightarrows \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(f_n, f) = 0 \leftrightarrows f_n \stackrel{in\ \mathcal{M}_A}{\longrightarrow} f;$$

aceasta justifică de ce norma sup din $\mathcal{M}_A$ este numită şi *normă uniformă*.

Observaţie. În cazul când $A = [a, b]$, $a < b$, se poate da o interpretare geometrică sugestivă convergenţei punctuale şi celei uniforme. Faptul că un şir $\{f_n\}_{n\geq 0}$ converge uniform către f pe $[a, b]$ revine la aceea că $(\forall)\varepsilon > 0$, în tubul delimitat de graficele funcţiilor $f - \varepsilon, f + \varepsilon$, de la un rang încolo (depinzând de ε), se află toate graficele funcţiilor f_n. Faptul că $f_n \stackrel{PC}{\longrightarrow} f$ pe A revine la aceea că $(\forall)\varepsilon > 0$ şi $(\forall)x_0 \in A$, toate graficele funcţiilor f_n de la un rang încolo depinzând de ε şi de x_0, intersectează porţiunea din paralela prin x_0 la axa Oy situată în tubul definit de graficele funcţiilor $f - \varepsilon, f + \varepsilon$.

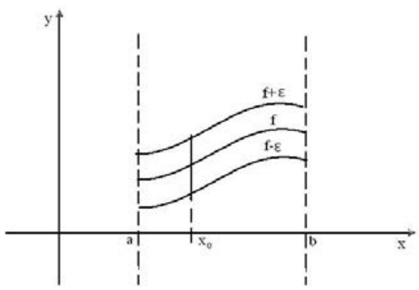


Fig. II.7

Teorema 4.3. *Fie* $\{f_n\}_{n\geq 0}$ *un şir convergent de funcţii continue* $[a, b] \to \mathbb{R}$. *Atunci limita* $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *este o funcţie continuă pe* $[a, b]$. *În plus,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \text{ adică } \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \tag{31}$$

(se mai spune că *integrala comută cu limitele uniforme*).

Demonstraţie. Fie $(\forall)u \in [a,b]$ fixat. Vom arăta că funcţia f este continuă în punctul u şi pentru aceasta fie $x_n \to u$ un şir arbitrar de puncte din $[a,b]$; avem de arătat că $f(x_n) \to f(u)$ şi pentru aceasta, fixăm $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece $f_p \xrightarrow{UC} f$ pe $[a,b]$ pentru $p \to \infty$, există un rang $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $(\forall)p \geq N$ să avem $|f_p(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $(\forall)x \in [a,b]$; aşadar, $|f_N(x_n) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|f_N(u) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{3}$. În fine, deoarece funcţia f_N este continuă în u, rezultă că $f_N(x_n) \to f_N(u)$, deci pentru orice n suficient de mare, avem $|f_N(x_n) - f_N(u)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Atunci pentru orice n suficient de mare, scriind că

$$f(x_n) - f(u) = [f(x_n) - f_N(x_n)] + [f_N(x_n) - f_N(u)] + [f_N(u) - f(u)],$$

rezultă

$$|f(x_n) - f(u)| \leq |f(x_n) - f_N(x_n)| +$$
$$+ |f_N(x_n) - f_N(u)| + |f_N(u) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(u)$ şi ca atare, funcţia f este continuă în orice punct u din $[a,b]$.

Partea secundă a teoremei este imediată; este suficient să observăm că

$$0 \leq \left| \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b ||f_n - f||\mathrm{d}x = (b-a) \cdot ||f_n - f||;$$

făcând $n \to \infty$ şi ţinând cont că $f_n \xrightarrow{UC} f$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$, rezultă (31), adică

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Această parte a teoremei are loc în condiţii mai generale, anume este suficient să presupunem că f_n sunt integrabile Riemann şi că $f_n \xrightarrow{UC} f$.

Teorema 4.3 arată că proprietatea de continuitate a funcţiilor unui şir uniform convergent de funcţii reale $[a,b] \to \mathbb{R}$ se transferă limitei. Teorema care urmează dă un răspuns relativ la transferul proprietăţii de derivabilitate.

Teorema 4.4. *Fie $\{f_n\}_{n\geq 0}$ un şir de funcţii din $C^1_{[a,b]}$ şi f, g funcţii mărginite $[a,b] \to \mathbb{R}$. Dacă $f_n \xrightarrow{PC} f$ şi $f'_n \xrightarrow{UC} g$ pe $[a,b]$, atunci f este derivabilă pe $[a,b]$ şi $f' = g$ (adică $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} (f'_n)$).*

Demonstraţie. Fie x un punct fixat arbitrar din intervalul $[a,b]$. Conform formulei Leibniz-Newton (27) avem $(\forall)n \geq 0$, $(\forall)x \in [a,b]$,

$$\int_a^x f'_n(t)\mathrm{d}t = f_n(t)\Big|_a^x = f_n(x) - f_n(a).$$

Făcând $n \to \infty$ şi ţinând cont că $f_n \xrightarrow{PC} f$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f'_n(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a).$$

Dar $f'_n \xrightarrow{UC} g$ şi aplicând teorema 4.3, rezultă de aici că $(\forall)x \in [a,b]$,

$$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a).$$

În plus, cum $f_n \in C^1_{[a,b]}$, rezultă că $f'_n \in C^0_{[a,b]}$, deci funcţia g rezultă continuă. Ca atare, aplicând teorema lui Barrow (cf. 2.4.1), rezultă că f este derivabilă şi $f'(x) = g(x)$, $(\forall)x \in [a,b]$.

2.4.3 Derivarea şi integrarea termen cu termen a seriilor de funcţii reale

Definiţia 4.3. *Fie A o mulţime oarecare şi $E = \mathcal{M}_A$ spaţiul vectorial normat al funcţiilor mărginite $A \to \mathbb{R}$. Fie $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ o serie de funcţii din $\mathcal{M}_A$ şi $s_n(x) = f_0(x) + g_1(x) + \ldots + f_n(x)$, $x \in A$, $n \geq 0$. Se numeşte* **mulţime de convergenţă** *a acestei serii, mulţimea*

$$\{x_0 \in A | \text{seria numerică} \sum_{n\geq 0} f_n(x_0) \text{ este } C\}.$$

Seria $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ se numeşte **punctual convergentă pe** *A (şi notăm pe scurt PC) dacă şirul de funcţii $\{s_n\}_{n\geq 0}$ este punctual convergent pe A în sensul definiţiei 4.1, adică mulţimea de convergenţă a seriei este întreg A. În acest caz, se defineşte* **suma** *$s(x) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$, $x \in A$ a seriei, care va fi o funcţie $s : A \to \mathbb{R}$.*

Seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ se numeşte **uniform convergentă UC pe** *A dacă ea este punctual convergentă (cu suma s) şi şirul $\{s_n\}_{n\geq 0}$ converge uniform către s pe A.*

Evident, orice serie UC este PC; reciproca nu are loc în general (de exemplu, seria $\sum\limits_{n\geq 1}(x^{n+1} - x^n)$ este PC dar nu este UC pe intervalul [0,1]).

O problemă principală în studiul seriilor de funcţii este următoarea: ce proprietăţi comune funcţiilor f_n (termenii seriei) se transferă sumei seriei ? Se ştie că o sumă finită de funcţii continue (respectiv derivabile, integrabile Riemann etc.) păstrează această proprietate şi vrem să extindem acest lucru la serii; de regulă, condiţia de convergenţă punctuală este insuficientă.

Teorema 4.5. (transfer de continuitate). *Fie $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ o serie uniform convergentă de funcţii continue $[a, b] \to \mathbb{R}$ şi s suma acestei serii. Atunci s este o funcţie continuă pe $[a, b]$. În plus,*

$$\int_a^b s(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{32}$$

Demonstraţie. Conform ipotezei, şirul s_n al sumelor parţiale are proprietatea că $s_n \xrightarrow{UC} s$ pe $[a, b]$ şi aplicând teorema 4.3, rezultă că $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ este funcţie continuă. În plus, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b s(x)\mathrm{d}x$, adică

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b f_0(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \ldots + \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right] = \int_a^b s(x)\mathrm{d}x,$$

deci seria $\sum\limits_{n\geq 0} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ este C, cu suma $\int_a^b s(x)\mathrm{d}x$, deci tocmai relaţia (32).

Relaţia (32) se poate scrie echivalent

$$\int_a^b \left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$$

şi se mai spune atunci că orice serie UC de funcţii continue pe un interval $[a, b]$ poate fi "integrată termen cu termen" pe acel interval. Acest rezultat va fi extins la funcţii integrabile mai generale.

Teorema 4.6. (transfer de derivabilitate). *Fie* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *o serie de PC de funcţii din* $C^1_{[a,b]}$, *cu suma s pe un interval* $[a, b]$ *şi astfel încât seria derivatelor* $\sum\limits_{n\geq 0} f'_n$ *să fie UC. Atunci funcţia s este derivabilă pe* $[a, b]$ *şi în plus,* $s' = \sum\limits_{n\geq 0} f'_n$ *(adică* $\left(\sum\limits_{n\geq 0} f_n\right)' = \sum\limits_{n\geq 0}(f'_n)$, *deci seria* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *poate fi "derivată termen cu termen").*

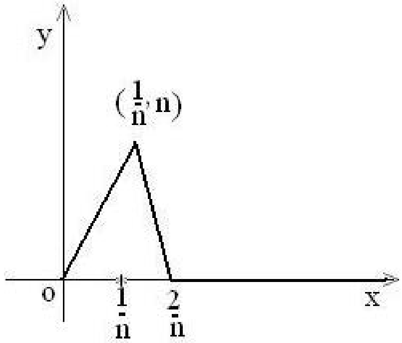


Fig. II.8

Demonstraţie. Funcţiile $s_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$, $n \geq 0$ sunt evident de clasă C^1 pe $[a, b]$ şi în plus, $s_n \xrightarrow{PC} s$. Pentru seria $\sum\limits_{n\geq 0} f'_n$ şirul sumelor parţiale va fi tocmai s'_n şi prin ipoteză acest şir este uniform convergent către o funcţie g. Aplicând teorema 4.4, rezultă că funcţia s este derivabilă şi $s' = g$, adică $s' = \sum\limits_{n\geq 0} f'_n$.

Exemple. 1) Considerăm şirul de funcţii $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, având graficul indicat în figura II.8.

Evident,

$$\int_0^2 f_n = \int_0^{\frac{2}{n}} f_n(x)\mathrm{d}x, \quad \text{pentru orice } n \geq 1,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^2 f_n = 1$. Pe de altă parte, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ (deoarece $(\forall)x \in [0, 2]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$), deci

$$\int_0^2 \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = 0.$$

Aşadar, relaţia (31) nu este aici verificată (motivul este că $f_n \overset{UC}{\not\to} 0$ pe $[0, 2]$).

Totodată, rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 2}[f_n(x) - f_{n-1}(x)]$ nu poate fi integrată termen cu termen pe intervalul $[0, 2]$.

2) Seria $\sum\limits_{n\geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$ poate fi derivată termen cu termen pe intervalul $[0, r]$, $0 < r < 1$, aşa cum rezultă din teorema 4.6. În schimb, seria de funcţii

$$\sum_{n\geq 1} \left[\frac{\sin(n + 1)x}{\sqrt{n + 1}} - \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right]$$

nu poate fi derivată termen cu termen pe intervalul $[-\pi, \pi]$; într-adevăr, notând cu $f_n(x)$ termenul ei general, avem

$$s_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) = \frac{\sin(n + 1)x}{\sqrt{n + 1}} - \sin x,$$

deci $s_n \xrightarrow{UC} -\sin x$, deoarece

$$|| \sin_n(x) + \sin x|| = \left\|\frac{\sin(n + 1)x}{\sqrt{n + 1}}\right\| = \frac{1}{\sqrt{n - 1}} \to 0$$

pentru $n \to \infty$. Totuşi şirul $\{s'_n(x)\}_{n\geq 1}$ nu converge către $-\cos x$, nici măcar punctual, deoarece $s'_n(0) = \sqrt{n + 1} - 1 \to \infty$.

Din cele de mai sus, rezultă utilitatea unor criterii de convergenţă uniformă a seriilor de funcţii; în acest sens dăm

Teorema 4.7. (criteriul lui K.WEIERSTRASS, 1815-1897), de convergenţă uniformă). *Fie* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *o serie de funcţii* $A \to \mathbb{R}$ *(A mulţime oarecare) şi* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$

o serie C de numere reale pozitive. Dacă $|f_n(x)| \le a_n$ pentru orice $x \in A$ şi pentru orice $n \ge N$, N fiind fixat, atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n\ge 0} f_n$ este UC pe A.

Demonstraţie. Pentru norma uniformă, rezultă $(\forall) n \ge N$,

$$||f_n|| = \sup_{x\in A} |f_n(x)| \le a_n$$

şi conform teoremei 3.9, seria $\sum\limits_{n\ge 0} ||f_n||$ va fi convergentă, adică seria $\sum\limits_{n\ge 0} f_n$ este AC (ca serie de elemente din spaţiul Banach $\mathcal{M}_A$). Aplicând teorema 3.7 rezultă că seria $\sum\limits_{n\ge 0} f_n$ este convergentă în $\mathcal{M}_A$, adică şirul sumelor ei parţiale este convergent în $\mathcal{M}_A$; însă convergenţa în $\mathcal{M}_A$ revine la convergenţa uniformă pe A (teorema 4.2, (a)) deci seria $\sum\limits_{n\ge 0} f_n$ este UC pe A.

Exemplu. Seria $\sum\limits_{n\ge 1} \frac{\sin nx}{n^2}$ de funţii $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este UC pe $\mathbb{R}$, deoarece $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $n \ge 1$.

2.4.4 Formula lui Taylor

Vom demonstra acum una din ele cele mai importante formule din întreaga matematică, utilizată în special în aproximarea (controlabilă) a funcţiilor reale prin polinoame.

Teorema 4.8. (formula lui B. Taylor, 1685-1731). *Fie $I = [\alpha, \beta]$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^n_{(I)}$, $n \ge 1$ fiind fixat. Atunci pentru orice punct fixat $a \in (\alpha, \beta)$ şi pentru orice $x \in I$, are loc formula*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_{n-1}(x), \end{aligned} \tag{33}$$

unde

$$R_{n-1}(x) = \int_a^x f^{(n)}(t) \cdot \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{d}t \tag{34}$$

(*Se fac convenţiile*: $0! = 1$, $f^{(0)} = f$).

Demonstraţie. Se procedează prin inducţie după n. Pentru $n = 1$ trebuie probat că $f(x) = f(a) + R_0(x)$, unde

$$R_0(x) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

ceea ce rezultă direct din formula Leibniz-Newton (27).

Presupunem formula adevărată pentru n şi o probăm pentru $n+1$. Aceasta revine la a arăta că $R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$, adică

$$\int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t - \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

sau echivalent,

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{n!}[nf^{(n)}(t) - (x-t)f^{(n+1)}(t)]\mathrm{d}t = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{35}$$

Primul membru al acestei relaţii este egal cu

$$-\frac{1}{n!}\int_a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(x-t)^n f^{(n)}(t)]\mathrm{d}t$$

şi aplicând din nou (27), această integrală este egală cu

$$-\frac{1}{n!}[(x-t)^n f^{(n)}(t)]\Big|_{i=a}^{t=x} = \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)$$

şi formula (35) este verificată.

Observaţie. Pentru f, a, n fixate se poate defini *polinomul Taylor*:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

şi atunci formula (33) se mai scrie $f(x) = T(x) + R_{n-1}(x)$; expresia $R_{n-1}(x)$ este numită **rest integral de ordin** $n-1$ (asociat lui f şi punctului a). Faptul remarcabil, care stă la baza formulei (33), este acela că funcţia f şi polinomul T au primele $n-1$ derivate egale în punctul a, adică $f(a) = T(a)$, $f'(a) = T'(a), \ldots, f^{(n-1)}(a) = T^{(n-1)}(a)$ ceea ce justifică formula aproximativă $f(x) \simeq T(x)$, în care eroarea uniformă absolută este $\sup\limits_{x\in I}|f(x)-T(x)| = ||R_{n-1}||$.

Corolar 1. *Pentru orice polinom P cu coeficienţi reali de grad n şi pentru orice $a \in \mathbb{R}$ fixat are loc formula*

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Demonstraţie. Este suficient să se scrie formula (33), înlocuind n cu $n+1$ şi observând că în acest caz restul

$$R_n(x) = \int_a^x P^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t$$

este nul, deoarece derivata de ordin $n+1$ a unui polinom de grad n este funcţia nulă.

În aplicaţii este utilizată o expresie mai convenabilă a restului; este mai întâi necesară o extindere a formulei de medie:

Lemă (formula generalizată de medie). *Fie $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue, ψ având semn constant pe $[a,b]$. Atunci există $\xi \in [a,b]$ astfel încât*

$$\int_a^b \varphi\cdot\psi = \varphi(\xi)\cdot\int_a^b \psi.$$

Demonstraţie. Presupunem mai întâi că $\psi \geq 0$ (adică $\psi(x) \geq 0$, $(\forall)x \in [a,b]$). Funcţia φ este mărginită pe intervalul $[a,b]$ şi fie $m = \inf\limits_{x\in[a,b]}\varphi(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]}\varphi(x)$ marginile lui φ. Aşadar, $m \leq \varphi \leq M$, deci $m\psi \leq \varphi\psi \leq M\psi$ şi aplicând proprietatea de monotonie a integralei, rezultă

$$m\int_a^b \psi \leq \int_a^b \varphi\psi \leq M\int_a^b \psi,$$

adică $m\lambda \leq \int_a^b \varphi\psi \leq M\lambda$, unde am notat $\lambda = \int_a^b \psi$. Considerăm funcţia continuă $\lambda\varphi$, care are marginile λm, λM. Vom aplica acum proprietăţile 3, 4b reamintite în 2.4.1. Aceste margini sunt atinse şi aplicând teorema valorilor intermediare Bolzano-Darboux, rezultă că valoarea $\int_a^b \varphi\psi$ este luată de funcţia $\lambda\varphi$, adică există un punct $\xi \in [a,b]$ astfel încât

$$\int_a^b \varphi\psi = (\lambda\varphi)(\xi) = \lambda \cdot \varphi(\xi)$$

şi lema este demonstrată.

Cazul când $\psi \leq 0$ se tratează similar, sau se reduce la cel precedent aplicat funcţiilor φ şi $-\psi$.

Corolar 2 (formula lui Taylor cu restul în sens Lagrange). *Fie $I = [\alpha, \beta]$, $a \in (\alpha, \beta)$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^{n+1} pe I $(n \geq 0)$. Atunci pentru orice $x \in I$ există cel puţin un punct ξ (depinzând de x), situat între a şi x astfel încât*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned} \tag{36}$$

Demonstraţie. Aplicând formula (33) rezultă

$$f(x) = \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t.$$

Presupunem $a < x$; atunci pentru orice $t \in [a,x]$ avem $x - t \geq 0$ şi putem aplica lema precedentă funcţiilor

$$\varphi(t) = f^{(n+1)}(t),\ \psi(t) = \frac{(x-t)^n}{n!},\ \text{pe intervalul } [a,x].$$

Aşadar, există $\xi \in [a,x]$ astfel încât

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_a^x \varphi(t)\cdot\psi(t)\mathrm{d}t = \varphi(\xi)\cdot\int_a^x \psi(t)\mathrm{d}t = f^{(n+1)}(\xi)\cdot\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]\Bigg|_{t=a}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

cazul $x < a$ se tratează similar, iar pentru $x = a$ formula (36) este evidentă.

Corolar 3. (formula lui K. Mac Laurin, 1698-1746). *Fie $f : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, o funcţie de clasă C^{n+1}. Atunci pentru orice $x \in (-\alpha, \alpha)$ există un punct ξ între 0 şi x astfel încât*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{37}$$

Deoarece orice punct între 0 şi x se scrie sub forma θx cu $0 \leq \theta \leq 1$, formula (37) se mai scrie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + f^{(n+1)}(\theta x)\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Remarcăm de asemenea că formulele (33), (36), (37) se pot scrie în diverse alte forme echivalente, cu notaţii schimbate. De exemplu, formula (36) se mai scrie

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h) \tag{38}$$

cu $0 \leq \theta \leq 1$, în condiţii uşor de descris. În acest mod, este dată o reprezentare a creşterii $f(x+h)-f(x)$ a funcţiei f în punctul curent x, cunoscând "creşterea" h a argumentului x, utilizată în multe consideraţii fizice.

Definiţia 4.4 (simbolurile lui E. LANDAU, 1877-1938). *Dacă f, g sunt două funcţii reale definite într-o vecinătate V a unui punct fixat $x_0 \in \mathbb{R}$, cu excepţia eventual a lui x_0, se scrie*

$$f = 0(g) \text{ în } x_0 \text{ ori de câte ori } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

şi $f = \mathcal{O}(g)$ în x_0 ori de câte ori există o constantă $M > 0$ astfel încât $|f| \leq M|g|$ pe V (eventual pe $V \setminus \{x_0\}$).

De exemplu $\sin^2 x = 0(x)$ şi $\cos x = \mathcal{O}(1)$ în $x_0 = 0$. Relaţia $f_1 = f_2 + 0(g)$ înseamnă $f_1 - f_2 = 0(g)$ etc. Definiţiile anterioare se extind şi pentru cazul când $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$; de exemplu $x + 1 = 0(x^2)$ în $x_0 = +\infty$.

Cu aceste notaţii, formula (36) se mai scrie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + 0((x-a)^n),$$

iar formula (38) se mai scrie

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(x) + 0(h^n).$$

Exemple. 1) Aplicând formula (37) pentru funcţiile elementare exp, sin, cos, ln, rezultă pentru orice $n \geq 1$, formulele

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+1}),\ x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n}),\ x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + 0(x^n),\ x \in (-1, 1).$$

2) Ne propunem să calculăm $\sin 33°$ cu aproximaţia $\leq 10^{-6}$. Folosind formula (38) rezultă în acest caz că pentru orice $x, h \in \mathbb{R}$ avem

$$\sin(x+h) = \sin x + \frac{h}{1!} \cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + \frac{h^4}{4!} \sin(x + \theta h).$$

Luăm $x = 30° = \dfrac{\pi}{6}$, $h = 3° = \dfrac{\pi}{60}$ (se subînţelege că în analiză unghiurile se exprimă în radiani, pentru că numai astfel funcţiile trigonometrice sunt funcţii reale). Observăm atunci că

$$\left| \frac{h^4}{4!} \sin(x + \theta h) \right| \leq \frac{h^4}{4!} = \frac{\pi^4}{60^4 4!} \leq \frac{1}{10^6},$$

deci

$$\sin 33° \simeq \frac{1}{2} + \frac{\pi}{60} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi^2}{2 \cdot 60^2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\pi^3}{6 \cdot 60^3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,54464.$$

Acest exemplu arată utilitatea formulei Taylor în calcule aproximative; dealtfel alcătuirea tabelelor uzuale trigonometrice, de logaritmi, etc a fost posibilă numai prin astfel de consideraţii.

Formula lui Taylor permite unele precizări în studiul funcţiilor reale, iniţiate în liceu.

a) O funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 se numeşte **convexă pe intervalul** $[a,b]$, $a < b$ dacă pentru orice $x, x_0 \in [a,b]$, are loc inegalitatea $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, adică graficul lui f este situat deasupra tangentei în oricare punct al graficului. Presupunând că f este de clasă C^2 pe $[a,b]$, atunci are loc $(\forall) x, x_0 \in [a,b]$ relaţia

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

cu ξ situat între x, x_0 (dedusă din formula (36) pentru $n = 1$). Rezultă imediat că *dacă* $f'' \geq 0$ *pe* $[a,b]$, *atunci funcţia* f *este convexă şi reciproc*. Funcţiile convexe se mai numesc "funcţii cu concavitatea în sus", fig. II.9.

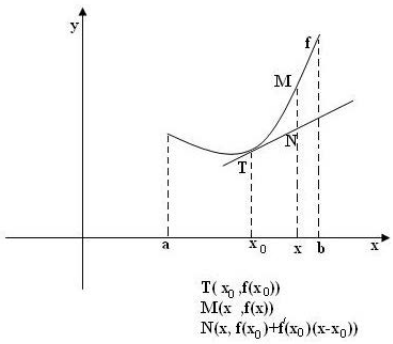


Fig. II.9

Se definesc în mod similar funcţii concave (f concavă $\overset{\triangle}{\leftrightarrows}$ $-f$ convexă) şi dacă f este o funcţie de clasă C^2 pe un interval $[a,b]$, un criteriu de concavitate constă în negativitatea derivatei secunde a lui f pe acel interval.

b) Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^{n+1} şi $x_0 \in (a,b)$. Se spune că f şi g *au contact de ordin* n *în punctul* x_0 dacă $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, $f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$. Astfel, $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = x$ au contact de ordin 2 în $x_0 = 0$. Funcţiile f şi g au contact de ordin cel puţin 1 în $x_0 \leftrightarrow$ garficele lor trec prin acelaşi punct de abscisă x_0 şi au aceeaşi tangentă acolo. Dacă f, g au contact de ordin cel puţin 2, în x_0, se mai spune că ele *au aceeaşi curbură în punctul* x_0. Fiind dată o funcţie f de clasă C^2 în vecinătatea unui punct x_0 astfel încât $f''(x_0) \neq 0$, atunci există şi este unic un cerc remarcabil trecând prin punctul $(x_0, f(x_0))$ şi având contact de ordin ≥ 2 cu f în x_0 (*cercul osculator al lui* f *în* x_0); se poate arăta că raza acestui cerc este egală cu $[1 + f'(x_0)^2]^{3/2} / |f''(x_0)|$ (numită *raza de curbură a lui* f *în* x_0).

c) Fie X un spaţiu metric şi $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie cu valori reale. Am definit în §1, punctul 6, valorile extreme globale ale lui f pe X. Reamintim aici conceptul de extrem local. Un punct $x_0 \in X$ se numeşte **punct de extrem local al lui** f dacă există $r > 0$ real astfel încât diferenţa $f(x) - f(x_0)$ să aibă un semn constant în bila $B(x_0, r)$. Mai precis, dacă $f(x) - f(x_0) \geq 0$, adică $f(x) \geq f(x_0)$, $(\forall) x \in B(x_0, r)$, atunci x_0 este punct de **minim local** şi similar, dacă $f(x) - f(x_0) \leq 0$ în punctele unei bile deschise centrate în x_0, atunci x_0 este punct de **maxim local** al lui f (astfel de puncte nu sunt unice). Se ştie că în cazul când X este un interval deschis în $\mathbb{R}$ iar funcţia $f : X \to \mathbb{R}$ este derivabilă într-un punct de extrem local $x_0 \in X$, atunci $f'(x_0) = 0$ (teorema lui P. FERMAT, 1601-1655).

Exemplu. Fie funcţia reală f prin $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$. Indicăm extremele lui f pe intervalele $X_1 = (0,3)$, $X_2 = [1,3]$, $X_3 = [-3,3]$. Deoarece derivata $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$ are rădăcinile 1, $-\dfrac{5}{3}$ se observă că $x = 1$ este minim local pentru f pe X_1 şi că f nu are maxim local pe X_1. Apoi extremele lui f pe X_2 sunt atinse la capetele intervalului, iar pe X_3, funcţia are atât un minim local cât şi un maxim local. Această discuţie poate fi uşor vizualizată pe graficul lui f (fig. II. 10).

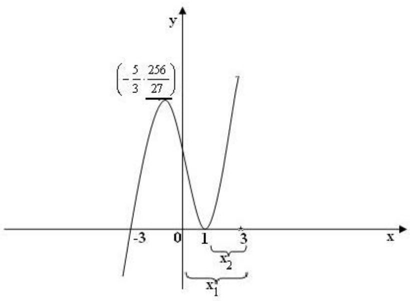


Fig. II.10

Folosind formula lui Taylor, se pot aduce precizări, indicând condiţii suficiente de extrem. Anume are loc

Teorema 4.9. *Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie reală de clasă* C^n, $n \geq 2$ *şi* $x_0 \in (a,b)$ *un punct astfel încât*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \tag{39}$$

Dacă n *este par, atunci* x_0 *este punct de extrem local al lui* f *(minim local dacă* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *şi maxim local dacă* $f^{(n)}(x_0) < 0$*). Dacă* n *este impar, atunci* x_0 *nu este punct de extrem local al lui* f (*punct de inflexiune*).

Demonstraţie. Folosind formula (36) în care înlocuim a cu x_0, rezultă

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

şi ţinând cont de relaţiile (39) din ipoteză, se obţine

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{40}$$

unde ξ este un punct situat între x, x_0.

Dacă n este impar, atunci din relaţia (40) rezultă că diferenţa $f(x)-f(x_0)$ are semn variabil în orice vecinătate a lui x_0, deci x_0 nu este punct de extrem local.

Dacă n este par şi $f^{(n)}(x_0)<0$, atunci funcţia $f^{(n)}$ fiind continuă, se deduce că această inegalitate are loc într-o vecinătate V a lui x_0 şi atunci din relaţia (40) rezultă că $f(x)-f(x_0)\le 0$ pentru orice $x\in V$, adică x_0 este un punct de maxim local pentru f. Se raţionează similar dacă n este par şi $f^{(n)}(x_0)>0$.

Exemple. Fie $f(x)=(2x-\pi)^3\cos x$ şi $x_0=\dfrac{\pi}{2}$. Evident, $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$; $f^{(iv)}(x_0)=-192$, deci $n=4$ şi x_0 este punct de maxim local. În mod similar, pentru $f(x)=x^3e^x$ şi $x_0=0$ avem $f'(0)=f''(0)=0$, $f'''(0)=6\neq 0$, deci $n=3$ şi originea este în acest caz punct de inflexiune.

2.4.5 Serii de puteri

O clasă extrem de importantă de serii de funcţii o constituie seriile de puteri, numite şi serii întregi. Avantajul deosebit al acestora constă în faptul că sumele lor parţiale sunt polinoame, adică funcţii reale de cea mai simplă formă, ceea ce face ca seriile de puteri să aibă proprietăţi bune de calcul. Seriile de puteri permit definiţia riguroasă a funcţiilor elementare şi totodată, considerarea unor entităţi matematice noi aşa cum sunt funcţiile de matrici. Multe din definiţiile care urmează pot fi extinse la cazul complex, însă ne mărginim la serii de puteri reale.

Definiţia 4.5. *Fie $\{a_n\}_{n\ge 0}$ un şir de numere reale. Se numeşte* **serie de puteri** *(sau* **serie întreagă în variabila** *x) având coeficienţii a_n, $n\ge 0$, seria de funcţii*

$$\sum_{n\ge 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x + \dots \tag{41}$$

Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ fixat se obţine o serie numerică. Evident, orice serie de forma (41) se poate considera ca serie de funcţii $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde $f_n(x)= = a_n x^n$, $n\ge 0$. Se mai spune că o serie de puteri $\sum\limits_{n\ge b} a_n x^n$ este *centrată în punctul* $x=0$. În mod similar, o serie de forma $\sum\limits_{n\ge b} a_n(x-x_0)^n$ este *centrată în punctul* $x=x_0$; este evident că printr-o translaţie $x-x_0=y$, se obţine o serie de puteri centrată în origine, astfel că teoria generală poate fi restrînsă la cazul seriilor de puteri centrate în origine.

Exemple. Seriile $\sum\limits_{n\ge 0} x^n$, $\sum\limits_{n\ge 1}\dfrac{x^n}{n!}$, $\sum\limits_{n\ge 1} n^n x^n$, $\sum\limits_{n\ge 0}\dfrac{(x-1)^n}{n+1}$ sunt serii de puteri; dar seriile de funcţii $\sum\limits_{n\ge 1}\dfrac{\sin nx}{n^2}$, $\sum\limits_{n\ge 1}(n\ln x+1)^n$ nu sunt serii de puteri. Seria $\sum\limits_{n\ge 0}\left(\dfrac{1-x}{2+x}\right)^n$ poate fi asimilată cu o serie de puteri, notând $\dfrac{1-x}{2+x}=y$.

În cele ce urmează, dăm proprietăţile principale ale seriilor de puteri.

Teorema 4.10 (lema lui ABEL). *Fie o serie de puteri $\sum\limits_{n\ge 0} a_n x^n$ şi $x_0\in\mathbb{R}$, $x_0\neq 0$ un punct astfel încât şirul $\{a_n x_0^n\}_{n\ge 0}$ să fie mărginit (ceea ce are loc, conform teoremei 3.3, a) dacă seria numerică $\sum\limits_{n\ge 0} a_n x_0^n$ este C). Atunci*

(a) *seria numerică* $\sum_{n\geq 0} a_n\alpha^n$ *este AC pentru orice* $\alpha \in (-|x_0|, |x_0|)$.

(b) *pentru orice număr real* r, $0 < r < |x_0|$, *seria de funcţii* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *este uniform convergentă (UC) în intervalul* $[-r, r]$.

Demonstraţie. (a) Conform ipotezei, există $M > 0$ astfel încât

$$|a_n x_0^n| \leq M, \text{ adică } |a_n| \leq \frac{M}{|x_0|^n}, \quad (\forall) n \geq 0. \tag{42}$$

Atunci

$$|a_n\alpha^n| = |a_n| \cdot |\alpha|^n \leq \frac{M}{|x_0|^n} \cdot |\alpha|^n = M \left|\frac{\alpha}{x_0}\right|^n, \quad (\forall) n \geq 0.$$

Dacă $\alpha \in (-|x_0|, |x_0|)$ este fixat, atunci $|\alpha| < |x_0|$, deci $\left|\frac{\alpha}{x_0}\right| < 1$. Ca atare, seria geometrică $\sum_{n\geq 0} M \left|\frac{\alpha}{x_0}\right|^n$ va fi convergentă şi aplicând criteriul de comparaţie cu inegalităţi (teorema 3.9), rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} |a_n\alpha^n|$ este C, adică seria $\sum_{n\geq 0} a_n\alpha^n$ este AC.

b) Notăm $f_n(x) = a_n x^n$, $n \geq 0$. Conform (42), avem pentru orice $x \in [-r, r]$, $|f_n(x)| = |a_n|\,|x^n| \leq |a_n| r^n \leq M \cdot \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n$, $n \geq 0$. Aplicând criteriul lui Weierstrass (teorema 4.7), rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ este UC pe intervalul $[-r, r]$, deoarece seria numerică $\sum_{n\geq 0} M \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n$ este o serie geometrică cu raţia $\frac{r}{|x_0|} < 1$ şi este convergentă.

Definiţia 4.6. *Fie* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *o serie de puteri şi mulţimea*

$$A^* = \{r \in \mathbb{R} | r \geq 0 \text{ şi şirul } \{|a_n| r^n\}_{n\geq 0} \text{ este mărginit în } \mathbb{R}\}.$$

Raza de convergenţă a seriei $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *este prin definiţie* $R = \sup A^*$ *(calculat în* $\overline{\mathbb{R}}$*), deci* $0 \leq R \leq \infty$. *Se numeşte* **domeniu de convergenţă al seriei** $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *mulţimea*

$$\mathcal{D}_c = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă} \quad R = 0 \\ \mathbb{R} & \text{dacă} \quad R = \infty \\ \text{intervalul}(-R, R) & \text{dacă} \quad 0 < R < \infty. \end{cases}$$

Mulţimea de convergenţă a acestei serii conţine $\mathcal{D}_c$ (de fapt, vom vedea că $\mathcal{D}_c$ este interiorul mulţimii de convergenţă).

Teorema 4.11. *Cu notaţiile de mai sus, avem*

(a) *dacă* $R = 0$, *atunci seria* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge punctual numai în* $x = 0$;

(b) *dacă* $R = \infty$, *atunci seria numerică* $\sum_{n\geq 0} a_n\alpha^n$ *este AC pentru orice* $\alpha \in \mathbb{R}$, *iar seria de funcţii* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *este UC pe orice interval* $[-r, r]$, $r > 0$;

(c) *dacă* $0 < R < \infty$, *atunci seria numerică* $\sum_{n\geq 0} a_n\alpha^n$ *este AC pentru orice punct* $\alpha \in (-R, R)$ *şi este D pentru orice* $\alpha \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$, *iar seria de funcţii* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *este UC în orice interval* $[-r, r]$, $0 < r < R$.

Demonstraţie. (a) Dacă $R = 0$, atunci $A^* = \{0\}$. Dacă ar exista un punct $x_0 \neq 0$ astfel încât $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n C$, atunci şirul $\{a_n|x_0|^n\}_{n\geq 0}$ ar fi mărginit deci $|x_0| \in A^*$, ceea ce este absurd.

(b) Rezultă direct din lema lui Abel.

(c) Fie $\alpha \in (-R, R)$ şi $r \in A^*$ ales astfel încât $|\alpha| < r < R$ (ceea ce se poate, deoarece $R = \sup A^*$). Atunci şirul $\{a_n r^n\}_{n\geq 0}$ este mărginit şi aplicând lema lui Abel, rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} a_n\alpha^n$ este AC (fiind AC chiar pe întreg intervalul $(-r, r)$).

Dacă $|\alpha| > R$, atunci seria $\sum_{n\geq 0} a_n\alpha^n$ este D; în caz contrar, ar rezulta că şirul $\{a_n\alpha^n\}_{n\geq 0}$ este mărginit, adică $|\alpha| \in A^*$, deci $|\alpha| \leq R$, ceea ce este absurd.

Afirmaţiile referitoare la convergenţa uniformă rezultă din teorema 4.10 b).

Observaţie. Pe scurt, teorema 4.11 afirmă că în domeniul ei de convergenţă $\mathcal{D}_c$, o serie de puteri este AC, în afara lui $\mathcal{D}_c$ este D şi în plus, seria este UC pe orice interval închis şi mărginit conţinut în $\mathcal{D}_c$ (nu şi pe întreg $\mathcal{D}_c$). Despre punctele α cu $|\alpha| = R$, adică $\alpha = \pm R$ nu am făcut nici o afirmaţie. Se poate totuşi demonstra că dacă $0 < R < \infty$ şi dacă seria $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ este C, atunci suma acestei serii este egală cu $\lim\limits_{\substack{x\to R\\ x<R}} \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)$.

Exemple. Seria $\sum_{n\geq 1} n^n x^n$ are raza de convergenţă $R = 0$ (se aplică criteriul rădăcinii). Pentru seria $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ avem $R = \infty$, deoarece pentru orice $r \geq 0$, seria $\sum_{n\geq 0} \frac{r^n}{n!}$ este C (se aplică criteriul raportului), deci $r \in A^*$. Seria $\sum_{n\geq 0} x^n$ are raza de convergenţă 1, este AC pentru $|x| < 1$, D pentru $|x| \geq 1$ şi UC pe orice interval $[-r, r]$, $0 < r < 1$, fără a fi UC şi pe întreg domeniul de convergenţă $\mathcal{D}_c = (-1, 1)$.

Pentru calculul razei de convergenţă a unei serii de puteri se poate da

Teorema 4.12. *Fie* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *o serie de puteri, cu raza de convergenţă* R.

(a) *Presupunem că există* $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *în* $\overline{\mathbb{R}}$; $R = \frac{1}{l}$ *cu convenţia ad-hoc* $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$.

(b) *Presupunem că există* $l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$; *atunci* $R = l_1$.

Demonstraţie. (a) Aplicăm criteriul rădăcinii (teorema 3.12) pentru seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \cdot |x|.$$

Dacă $l \cdot |x| < 1$, atunci seria C şi dacă $l \cdot |x| > 1$, seria este D; comparând cu teorema 4.11, rezultă că $R = \frac{1}{l}$.

(b) se probează similar, aplicând criteriul raportului (teorema 3.11).

Proprietăţi ale sumelor seriilor de puteri

Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenţă $R > 0$. Se poate atunci considera *funcţia-sumă*

$$f : (-R, R) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Teorema care urmează are o mare însemnătate în calculele cu serii de puteri.

Teorema 4.13. *Fie* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ *ca mai sus. Funcţia* f *este de clasă* C^∞ *(adică indefinit derivabilă) şi în plus, relaţia* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *poate fi derivată termen cu termen de oricâte ori în intervalul* $(-R, R)$*; de asemenea, ea poate fi integrată termen cu termen pe orice interval* $[a, b]$ *conţinut în* $(-R, R)$.

Demonstraţie. Arătăm mai întâi că f este funcţie continuă în intervalul $(-R, R)$; fixăm un punct oarecare x_0 în acest interval şi alegem r astfel încât $|x_0| < r < R$. Conform teoremei 4.11, seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este UC în intervalul $[-r, r]$ şi fiind o serie de funcţii continue, suma ei $f(x)$ rezultă funcţie continuă pe $[-r, r]$, aplicând teorema 4.5; în particular, funcţia f este continuă în punctul x_0, deci în întreg domeniul ei de convergenţă $(-R, R)$.

Pentru a putea continua demonstraţia este necesară următoarea

Lemă. *Fie* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale; seriile de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ *au aceeaşi rază de convergenţă.*

Demonstraţie. Fie R, R' razele de convergenţă ale celor două serii. Dacă ar exista $l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, atunci am avea $R = l$, şi

$$R' = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n a_n}{(n+1)a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = l,$$

deci $R = R'$.

Tratăm însă cazul general şi arătăm mai întâi că $R \geq R'$. Într-adevăr, dacă $|x| < R'$, atunci seria $\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$ este AC şi din inegalitatea $|a_n x^n| \leq |n a_n x^{n-1}| \cdot |x|$, valabilă pentru orice $n \geq 1$, rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este AC, deci neapărat $R \geq R'$.

Pe de altă parte, dacă $|x| < R$ şi dacă alegem r astfel ca $|x| < r < R$, atunci şirul $\{a_n r^n\}_{n\geq 0}$ este majorat de un număr real $M > 0$, de unde

$$|n a_n x^{n-1}| = n|a_n| \cdot |x^{n-1}| \leq n\frac{M}{r^n} \cdot |x|^{n-1} = \frac{nM}{r}\left(\frac{|x|}{r}\right)^{n-1}.$$

În general, dacă $0 < c < 1$, atunci seria numerică $\sum_{n\geq 1} n c^{n-1}$ este C, deci seria $\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{|x|}{r}\right)^{n-1}$ este C; aplicând criteriul comparaţiei cu inegalităţi rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ este C pentru orice $|x| < R$. Aşadar, avem $R' \geq R$ şi în concluzie, $R' = R$. Lema este demonstrată.

Arătăm că funcţia f este derivabilă; observăm că $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este PC cu suma $f(x)$ în orice interval $[-r,r]$, $r < R$, iar lema anterioară arată că seria derivatelor $\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$ are tot raza de comvergenţă R, deci conform teoremei 4.11 aceasta este UC pe intervalul $[-r,r]$. Aplicând acum teorema 4.6, va rezulta că f este derivabilă şi în plus, $f'(x) = \sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$, $(\forall)x \in [-r,r]$. Raţionând ca la începutul demonstraţiei acestei teoreme va rezulta că funcţia f' este continuă, apoi f' este derivabilă, că f'' este continuă etc.

Faptul că relaţia $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ poate fi integrată termen cu termen pe orice interval $[a,b] \subset (-R,R)$ rezultă astfel: alegem $0 < r < R$ astfel încât $[a,b] \subset (-r,r)$ şi aplicăm relaţia (32) seriei $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cu suma f, care este uniform convergentă pe $[-r,r]$ deci şi pe $[a,b]$.

Corolar. *Fie $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, cu raza de convergenţă strict pozitivă.*

Atunci coeficienţii a_n, $n \geq 0$ sunt unic determinaţi, anume au loc relaţiile

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \geq 0. \tag{43}$$

În mod similar, dacă avem dezvoltarea $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$, valabilă într-un interval $(x_0 - R, x_0 + R)$, $R > 0$, atunci $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $(\forall)n \geq 0$.

Demonstraţie. Derivând succesiv relaţia $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, obţinem $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots$, $f''(x) = 2!a_2 + 6a_3 x + \ldots$, $f'''(x) = 3!a_3 + \ldots$, deci $f'(0) = a_1$, $f''(0) = 2!a_2$, $f'''(0) = 3!a_3$ etc. şi se obţin relaţiile (43).

O funcţie reală f definită în jurul originii este *dezvoltabilă în serie de puteri centrată în origine* dacă $(\exists)a > 0$ şi un şir $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de numere reale astfel încât seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ să fie convergentă pentru orice $x \in (-a,a)$, având suma $f(x)$. Corolarul precedent arată unicitatea unei astfel de dezvoltări $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ şi că $f \in C^\infty_{(-a,a)}$. Trebuie remarcat că nu orice funcţie $C^\infty_{(-a,a)}$ este dezvoltabilă în serie de puteri; de exemplu, funcţia $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{dacă } x \in (0,a) \\ 0 & \text{dacă } x \in (-a,0] \end{cases}$ (având graficul indicat în fig. II. 11), are proprietatea ă $f^{(n)}(0) = 0$, $(\forall)n \geq 0$.

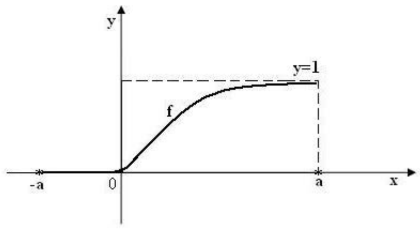


Fig. II.11

Această funcţie nu este dezvoltabilă în origine $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, căci ar rezulta că $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$, $(\forall)x \geq 0$, deci am avea $f(x) = 0$ pentru orice $|x|$ mic, ceea ce este absurd.

Rezultate similare au loc înlocuind originea cu orice alt punct.

Seria Taylor a unei funcţii de clase C^∞

Definiţia 4.7. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^∞ pe $[a,b]$, $a < b$ şi fie $x_0 \in (a,b)$ un punct fixat. Acestei perechi (f, x_0) i se poate asocia o serie de puteri centrată în punctul x_0, anume $\sum_{n\geq 0} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, numită* **seria Taylor a lui f în jurul punctului** x_0.

În general, raza de convergenţă a acestei serii nu este strict pozitivă şi chiar dacă seria respectivă ar fi PC pe $[a,b]$, ea poate să nu aibă ca sumă funcţia

f iniţială. De exemplu, pentru $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{dacă} \quad x \in (0,1) \\ 0 & \text{dacă} \quad x \in [-1,0] \end{cases}$ şi pentru $x_0 = 0$, seria Taylor asociată are toţi termenii nuli, deci este convergentă, cu suma identic nulă pe $[-1,1]$.

Totuşi se poate demonstra următoarea

Teorema 4.14 (teorema de reprezentare a funcţiilor de clasă C^∞ prin serii Taylor). *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, o funcţie de clasă C^∞, astfel încât să existe $M > 0$ cu proprietatea că $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $(\forall)n \geq 0$, $(\forall)x \in [a,b]$. Fie $x_0 \in (a,b)$ un punct fixat. Atunci seria Taylor a lui f în jurul punctului x_0 este UC pe $[a,b]$, având ca sumă $f(x)$, adică*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad (\forall)x \in [a,b]. \tag{44}$$

Demonstraţie. Fie $s_n(x)$, $n \geq 0$, şirul sumelor parţiale ale seriei Taylor respective, adică $s_n(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, $n \geq 0$.

Atunci conform formulei lui Taylor cu restul în sens Lagrange (36), rezultă $s_n(x) = f(x) - \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, deci $f(x) - s_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $(\forall)x_0, x \in [a,b]$, ξ fiind situat între x_0 şi x.

De aici rezultă că

$$|f(x) - s_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \ (\forall)x \in [a,b],$$

deci pentru norma uniformă pe $[a,b]$, avem

$$0 \leq ||f - s_n|| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (\forall)n \geq 0. \tag{45}$$

Făcând $n \to \infty$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$; într-adevăr, seria numerică $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ este C (aplicând criteriul raportului) şi ca atare, termenul ei general tinde către zero. Din relaţia (45) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} ||f - s_n|| = 0$, adică $s_n \xrightarrow{UC} f$ (conform teoremei 4.2 (a)).

Aşadar, seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ este UC pe $[a,b]$ şi are suma $f(x)$, $(\forall)x \in [a,b]$.

În continuare, vor fi date mai multe exemple de aplicare a teoremei 4.14.

2.4.6 Dezvoltări în serie ale unor funcţii elementare

1. Seria binomială

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat; pentru orice $n \geq 0$ natural, notăm

$$C_\alpha^n = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} & \text{dacă} \quad n \geq 1 \\ 1 & \text{dacă} \quad n = 0. \end{cases}$$

Evident, dacă α este natural, atunci $C_\alpha^n = 0$ pentru orice $n > \alpha$. Seria de puteri

$$\sum_{n\geq 0} C_\alpha^n x^n = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

se numeşte *seria binomială de exponent* α.

Teorema 4.15. *Seria binomială* $\sum\limits_{n\geq 0} C_\alpha^n x^n$ *de exponent* α, $\alpha \notin \mathbb{N}$ *are raza de convergenţă* $R = 1$ *şi suma ei este egală cu* $(1+x)^\alpha$ *pentru orice* $x \in (-1, 1)$.
Aşadar,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots, \ (\forall) x \in (-1,1) \tag{46}$$

(dacă α este natural se regăseşte *formula binomului lui Newton*).

Demonstraţie. Conform teoremei 4.12 (b), avem

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_\alpha^n}{C_\alpha^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{\alpha - n} \right| = 1.$$

Fie $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} C_\alpha^n x^n = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \ (\forall) x \in (-1,1)$ şi atunci

$$(1+x)f'(x) = (1+x)\left[\alpha + \alpha(\alpha-1)x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \ldots\right]$$

şi dezvoltând, rezultă că $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$, $(\forall) x \in (-1,1)$. Din această relaţie rezultă că $\left[\frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}\right]' = 0$, $(\forall) x \in (-1,1)$, deci $\frac{f(x)}{(1+x)^\alpha} = c$, constant, adică $f(x) = c(1+x)^\alpha$, $(\forall) x \in (-1,1)$. Pentru $x = 0$, avem $f(0) = c$; dar $f(0) = \sum\limits_{n\geq 0} C_\alpha^n$, $0^n = 1$. Rezultă că $c = 1$ şi în concluzie, $f(x) = (1+x)^\alpha$, de unde relaţia (46).

În particular, din relaţia (46) se deduc dezvoltările remarcabile:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \\ \frac{1}{1-x} &= [1 + (-x)]^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ şi} \\ \sqrt{1+x} &= (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots \end{aligned} \tag{47}$$

valabile pentru orice $x \in (-1,1)$.

De asemenea avem, conform teoremei 4.13,

$$\text{arctg}x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots)\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t - \int_0^x t^2\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_0^x t^4\mathrm{d}t - \int_0^x t^6\mathrm{d}t + \ldots = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \ (\forall) x \in (-1,1).$$

Pentru $x \to 1$, seria din dreapta fiind convergentă, rezultă că

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \tag{48}$$

Similar,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots)\mathrm{d}t =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \ (\forall) x \in (-1,1)$$

şi pentru $x \to 1$, rezultă că $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$.

Aplicaţie în fizică. Pentru o particulă cu masa m, masa de repaus m_0 şi viteza v, are loc relaţia $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, unde c este viteza luminii. Energia cinetică a particulei este

$$E_{cin} \stackrel{\triangle}{=} mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right) =$$

$$= m_0c^2 \cdot \left[-1 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right] \stackrel{cf.(46)}{=} m_0c^2 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ldots\right],$$

deci $E_{cin} = \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \ldots$. Aceste calcule sunt corecte în ipoteza $v < c$; dacă v este "mic" în raport cu c (se mai scrie atunci prin convenţie $v \ll c$), se neglijează termenii dezvoltării cu excepţia primului şi se obţine într-o aproximare $E_{cin} \simeq \frac{1}{2}m_0v^2$, ca în cazul mecanicii newtoniene. Pentru viteze v "mari", această formulă este grosieră şi trebuie consideraţi şi alţi termeni ai dezvoltării anterioare.

2. Exponenţiala reală

Teorema 4.16. *Există o singură funcţie reală $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă, astfel încât*

$$f' = f,\ f > 0,\ f(0) = 1. \tag{49}$$

Demonstraţie. Presupunem că ar exista două funcţii reale $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f' = f$, $f > 0$, $f(0) = 1$, $g' = g$, $g > 0$, $g(0) = 1$. Atunci $\left(\dfrac{g}{f}\right)' = \dfrac{g'f - gf'}{f^2} = 0$, deci $\dfrac{g}{f} = C$, constant, pe întreg $\mathbb{R}$. Pentru $x = 0$ se obţine $C = \dfrac{g(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$ şi în concluzie, $g = f$.

O funcţie f verificând condiţiile (49) este exponenţială, $f(x) = e^x$. Pe de altă parte, observăm că seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots$ are raza de convergenţă $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{n!} / \dfrac{1}{(n+1)!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty$ şi suma ei $g(x)$ este o funcţie satisfăcând de asemenea condiţiile (49); faptul că g este derivabilă şi egalităţile $g' = g$, $g(0) = 1$ sunt evidente. Apoi

$$g(x) \cdot g(y) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \ldots = g(x+y),\ (\forall)x, y \in \mathbb{R},$$

conform teoremei 3.14, deci $g(x)g(-x) = g(0) = 1$. Deoarece $g(x) > 0$ pentru $x > 0$; deci $g > 0$ pe $\mathbb{R}$. Conform teoremei 4.16 rezultă că $f = g$, adică

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!},\quad (\forall)x \in \mathbb{R}. \tag{50}$$

Această relaţie se putea deduce şi aplicând teorema 4.14 punctului $x_0 = 0$ şi funcţiei $x \mapsto e^x$, considerată pe un interval $[-a, a]$ arbitrar.

Seria de numere complexe $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$ este convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ (folosind criteriul raportului) şi suma ei se notează e^z sau $\exp(z)$. Se defineşte astfel *funcţia exponenţială complexă*

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

şi se verifică imediat că $e^0 = 1$, $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $(\forall)z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Conform (50) rezultă că exponenţiala complexă este o prelungire la $\mathbb{C}$ a exponenţialei reale.

Aplicaţie

Ne propunem să determinăm trunchierea de ordin 9 a lui e. Conform (50), pentru orice $q \geq 1$, avem $e = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = \sum\limits_{n\geq 0}^{q} \frac{1}{n!} + R$, unde $R = \sum\limits_{n\geq q+1} \frac{1}{n!} =$

$$= \frac{1}{(q+1)!}\left[1 + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)(q+3)} + \frac{1}{(q+1)(q+3)(q+4)} + \ldots\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{(q+1)!}\left[1 + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)^2} + \frac{1}{(q+2)^3} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{(q+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{q+2}} = \frac{q+2}{(q+1)(q+1)!}.$$

Luând $q = 13$, se observă că $R < 10^{-10}$ deci $e \simeq \sum\limits_{n=0}^{13} \frac{1}{n!} = 2,718281828$.

Să înmulţim acum relaţia $e = \sum\limits_{n\geq 0}^{q} \frac{1}{n!} + R$ cu $q!$; se obţine $e \cdot q! = \sum\limits_{n\geq 0}^{q} \frac{q!}{n!} + R \cdot q!$ şi cum $0 < R \cdot q! \leq \frac{q+2}{(q+1)(q+1)!} q! = \frac{q+2}{(q+1)^2} < 1$, rezultă că pentru orice $q \geq 1$, $e \cdot q!$ este suma unui număr întreg cu unul subunitar, deci $e \cdot q!$ nu poate fi un număr întreg (pentru orice $q \geq 1$ întreg) şi ca atare, e este iraţional.

3. Funcţia logaritmică.

În analogie cu teorema 4.16, se arată uşor că există o singură funcţie reală $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ derivabilă, strict crescătoare, astfel încât $f(1) = 0$, $f(xy) = f(x) + f(y)$ şi $f'(x) = \frac{1}{x}$, $(\forall)x, y > 0$ şi anume *logaritmul natural* $f = \ln$. Pentru orice $a > 0$, $a \neq 1$ se defineşte *logaritmul în baza a*, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, $(\forall)x > 0$ şi *exponenţiala în baza a*, $a^x = e^{x \ln a}$, cu proprietăţile uzuale; de asemenea, pentru orice α real şi pentru orice $x > 0$ se pune $x^\alpha \stackrel{\triangle}{=} e^{\alpha \ln x}$, definind astfel *funcţia putere* $x \mapsto x^\alpha$. În ultimul timp există tendinţa de a utiliza notaţia "log" în locul notaţiei "ln", atunci când baza e este subînţeleasă.

Aplicaţie

O noţiune importantă în teoria informaţiei este cea de cantitate de informaţie I. Într-o primă accepţiune, se poate considera că informaţia $I(p)$ cuprinsă în producerea unui eveniment cu probabilitatea $p(0 < p \leq 1)$ depinde numai de p şi că funcţia $I(p)$ verifică următoarele proprietăţi:

a) I este funcţie monoton descrecătoare;

b) $I(1) = 0$ şi $\lim\limits_{\substack{p\to 0\\ p>0}} I(p) = \infty$;

c) $I(pq) = I(p) + I(q)$, $(\forall)p, q \in (0, 1]$.

Proprietăţile a), b) decurg din faptul că informaţia $I(p)$ este cu atât mai bogată, mai interesantă, cu cât probabilitatea p este mai mică, adică evenimentul care a generat acea informaţie este mai rar. Proprietatea c) exprimă faptul că dacă două evenimente cu probabilităţi p şi q sunt independente, atunci informaţia cuprinsă în producerea lor simultană (a cărei probabilitate este pq) este suma informaţiilor cuprinse în producerile separate ale celor evenimente.

Presupunând în plus că funcţia I se poate prelungi la o funcţie derivabilă $I : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, astfel încât $I(p^\alpha) = \alpha I(p)$, $p > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, rezultă că în mod necesar avem $I(p) = k \ln p$, cu k constantă reală, oricare ar fi $p > 0$. Într-adevăr, avem $I'(p) = \frac{1}{p} I(e)$ deci $I(p) = I(e)\ln p$ şi notăm $k = I(e) < 0$.

Din aceste consideraţii intuitive, apare ca naturală definiţia dată de C. SHANNON (n. 1916) pentru cantitatea de informaţie ca fiind $I(p) = -\log_2 p$, luând prin convenţie $k = -\frac{1}{\ln 2}$; unitatea de măsură este bitul (1 bit fiind prin definiţie $I\left(\frac{1}{2}\right)$, tocmai cantitatea de informaţie dintr-un eveniment cu probabilitatea $\frac{1}{2}$). Considerând o experienţă în care pot apărea n evenimente, probabilităţile $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ($0 < p_i \le 1$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$), C. Shannon a definit *cantitatea medie de informaţie* sau *entropia* asociată experienţei, ca fiind

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) \stackrel{\triangle}{=} p_1 I(p_1) + \ldots + p_n I(p_n) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \log_2 p_j.$$

Evident, $H(p_1, p_2, \ldots, p_n) \ge 0$, pentru orice $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Presupunem $n = 2$ şi notăm $p_1 = p$; atunci $p_2 = 1 - p$ şi entropia va fi

$$H(p) = -p \log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) = -\frac{1}{\ln 2}[p \ln p + (1-p)\ln(1-p)].$$

Se observă că

$$H'(p) = -\frac{1}{\ln 2}[\ln p - \ln(1-p)] \text{ şi } H''(p) = -\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right) < 0,$$

prin urmare valoarea maximă a lui $H(p)$ este atinsă pentru $p = \frac{1}{2}$, deci pentru $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. Aşadar cantitatea medie de informaţie într-o experienţă cu două evenimente posibile este maximă atunci când evenimentele sunt egal probabile. Acest fapt poate fi extins la cazul experienţelor cu $n \ge 2$ evenimente posibile.

4. Funcţii trigonometrice

De obicei se spune că trigonometria este utilizată în măsurători de teren şi în navigaţie; în realitate importanţa funcţiilor trigonometrice constă mai ales în descrierea matematică a fenomenelor periodice, în studiul semnalelor şi vibraţiilor.

Am definit anterior $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$; în particular, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \quad \text{şi} \quad e^{-ix} = 1 - \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

şi notăm

$$c(x) \stackrel{\triangle}{=} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ ;$$

$$s(x) \stackrel{\triangle}{=} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Funcţiile reale $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt derivabile şi evident $c' = -s$, $s' = c$, $c(0) = 1$, $s(0) = 0$. Folosind un fapt binecunoscut (*dacă* $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sunt funcţii derivabile,* $u' = v'$ *şi* $u(0) = v(0)$, *atunci* $u = v$, se verifică imediat că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ au loc relaţiile:

a) $c(x)\sin x - s(x)\cos x = 0$;

b) $c(x)\cos x + s(x)\sin x = 1$;

c) $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$,

presupunând, cum este normal, cunoscute din liceu funcţiile reale sin, cos.

Înmulţind relaţia (a) cu $c(x)$ şi (b) cu $s(x)$ şi adunând relaţiile obţinute, va rezulta că $s(x) = \sin x$; înmulţind apoi (a) cu $-s(x)$ cu $c(x)$, obţinem prin adunare $c(x) = \cos x$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Aşadar, $c = \cos$, $s = \sin$. Reţinem aşadar formulele, valabile pentru orice $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{51}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{52}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{53}$$

Formula (53) poartă numele de **formula lui Euler**; ca un fapt remarcabil, avem $e^{i\pi} = -1$, iar π poate fi definit (negeometric !) ca unica soluţie a ecuaţiei $e^{ix} = -1$, situată în intervalul (0,4). Folosind formulele (51), (52), se rededuc cu uşurinţă proprietăţile uzuale ale funcţiilor trigonometrice, astfel că se poate afirma că trigonometria este un mic capitol de analiză, care poate fi dezvoltat fără utilizarea geometriei cercului trigonometric.

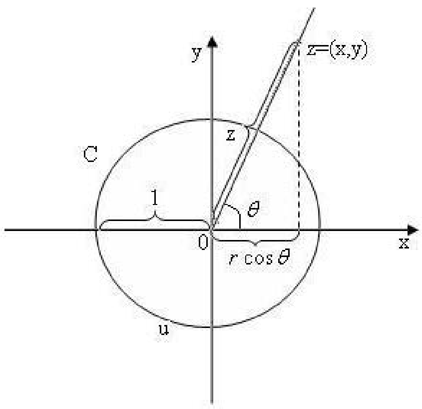


Fig. II.12

Aplicaţie

Notăm cu $\mathbb{T}$ mulţimea numerelor reale modulo 2π (adică $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) şi cu $U = \{|z| = 1\}$ circumferinţa unitate din planul complex; aşadar, un element $\hat{\alpha} \in \mathbb{T}$ este o clasă de numere reale şi $\hat{\alpha} = \hat{\beta} \leftrightarrow \alpha - \beta$ este multiplu întreg de 2π. Aplicaţia $\Phi : \mathbb{T} \to U$, $\hat{\alpha} \mapsto e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$ este evident bijectivă.

Pentru orice $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, avem $\frac{z}{|z|} \in U$, deci există $\hat{\theta} \in \mathbb{T}$ astfel încât $\Phi(\hat{\theta}) = \frac{z}{|z|}$, deci $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, adică $z = |z|e^{i\theta}$ (*forma exponenţială a numărului complex* $z \neq 0$); notând $|z| = r$, regăsim astfel forma trigonometrică $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, fig. II.12.

Orice punct $z = (x, y) = x + iy$ din $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ este bine determinat cunoscând numerele reale r şi θ, numite *coordonatele polare ale acelui punct*. Din relaţia $x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ rezultă $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$ şi $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; dacă se cunosc coordonatele carteziene x, y, atunci modulul r este unic determinat, $r > 0$, dar θ este determinat modulo 2π. Funcţia $\arg : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{T}$, $z \mapsto \hat{\theta}$ se numeşte *funcţia argument*; evident, $\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$ (modulo 2π) $\arg\frac{1}{z_1} = -\arg z_1$ (modulo 2π).

De exemplu, luând $z = 1 + i\sqrt{3}$, avem $r = 2$, $\arg z = \widehat{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ deci $1 + i\sqrt{3} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$; similar, luând $z = -5i$ avem $r = 5$, $\arg z = \widehat{\frac{3\pi}{2}} = -\widehat{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ şi $-5i = 5 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

5. Funcţii hiperbolice.

Se pot defini următoarele funcţii numite *hiperbolice*, ch, sh, th : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, punând pentru orice $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}. \tag{54}$$

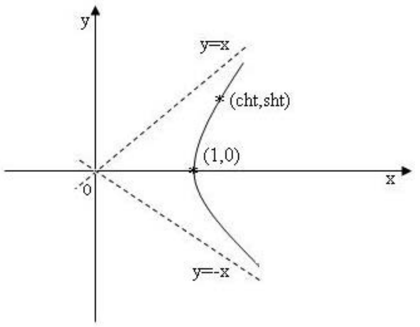


Fig. II.13

Acestea sunt funcţii de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}$ şi au loc relaţiile $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} \cdot \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ etc $(\forall)x \in \mathbb{R}$.

Denumirea provine de la faptul că punctul $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$, $t \in \mathbb{R}$ descrie o ramură a hiperbolei echilaterale $x^2 - y^2 = 1$ (fig. II. 13).

2.4.7 Numere reale constructiviste

Multe rezultate matematice sunt bazate pe teoreme de existenţă (de exemplu, teorema Bolzano-Darboux, teorema lui Rolle, teorema de medie a calculului integral, formula creşterilor finite, principiul contracţiei etc). Astfel, teorema Bolzano-Darboux afirmă că pentru o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă, având valori de semn contrar la capetele intervalului, *există* cel puţin un punct $\xi \in [a, b]$ astfel ca $f(\xi) = 0$; dar nu se indică un procedeu efectiv de determinare a lui ξ. În ultimul timp, a apărut ideea de a considera ca obiecte matematice numai obiecte constructibile prin procedee algoritmice, ajungându-se la un domeniu nou al matematicii numit Analiza constructivistă, strâns legat de calculatoristică şi de teoria funcţiilor recursive. În cele de mai jos, prezentăm succint conceptul de număr real constructivist, care apare ca "limită" a unui şir de numere raţionale, definite cu ajutorul unor funcţii aritmetice recursive. De îndată ce sunt definite numerele reale constructiviste, se pot considera funcţii reale constructiviste şi se pot degaja concepte specifice de limită, continuitate, derivabilitate, integrabilitate.

Definiţia 4.8. *Un număr real $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ se numeşte* **constructivist** *dacă există două funcţii recursive $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq 1$ natural să avem*

$$g(n) \neq 0 \quad \text{şi} \quad \left| a - \frac{f(n)}{g(n)} \right| < \frac{1}{n}.$$

Un număr real negativ $a < 0$ se numeşte **constructivist** *dacă $-a$ are această proprietate.*

Exemple. 1) Orice număr raţional este constructivist (luăm f, g constante). Mulţimea $\mathcal{R}$ a numerelor reale constructiviste este subcorp al lui $\mathbb{R}$.

2) Conform formulei (50), avem

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n$$

unde

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots \right] = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+2}} =$$

$$= \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} < \frac{1}{n}, \quad (\forall) n \geq 1.$$

Aşadar,

$$\left| e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{n!} \right| = |R_n| < \frac{1}{n}.$$

Notăm

$$f(n) = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{n!}{n!}, \; g(n) = n!$$

(funcţii evident recursive) şi rezultă $\left| e - \dfrac{f(n)}{g(n)} \right| < \dfrac{1}{n}$, $(\forall) n \geq 1$. Aşadar, numărul e este constructivist.

3) Arătăm că π este de asemenea un număr real constructivist; pentru aceasta folosim reprezentarea (48), anume $\pi = 4 \left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots \right)$. Notând $s_n = \displaystyle\sum_{h=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, avem

$$\left| \frac{\pi}{4} - s_n \right| = \left| \frac{1}{2n+3} - \left(\frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n+7} \right) - \ldots \right| \leq \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{n}, \; (\forall) n \geq 1.$$

Dar s_n se poate pune sub forma $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ cu f, g recursive, deci $\dfrac{\pi}{4}$ este constructivist. Ca atare, $\pi = 4 \cdot \dfrac{\pi}{4}$ este constructivist.

4) Fie $a \geq 0$ un număr real pozitiv şi $a = [a], a_1 a_2 a_3 \ldots$ scrierea lui zecimală. Se poate arăta că a este constructivist dacă şi numai dacă funcţia aritmetică $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definită prin $\varphi(0) = [a]$, $\varphi(1) = a_1$, $\varphi_2 = a_2, \ldots$ este recursivă. Folosind acest fapt se pot construi cu uşurinţă numere reale care nu sunt constructiviste.

Mulţimea $\mathcal{R}$ este total ordonată (relativ la ordinea uzuală) şi se poate defini o convergenţă specifică în $\mathcal{R}$ care ţine cont de limitele utilizării de obiecte construite algoritmic. Din această cauză, nu sunt acceptate raţionamente "tip ε" şi unele din teoremele analizei clasice nu au loc în analiza constructivistă; de exemplu, un şir monoton şi mărginit nu este neapărat convergent.

2.4.8 Exerciţii

1) a) Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue. Să se probeze inegalităţile:

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\cdot\left(\int_a^b g^2\right);\left(\int_a^b (f+g)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

b) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 astfel încât $f'(a) = f'(b) = 0$. Să se arate că $\displaystyle\int_a^b f(x) \cdot f'(x) dx \leq 0$; în ce caz avem egalitate ?

Indicaţie. a) Pentru prima inegalitate se porneşte de la faptul că trinomul de gradul II în λ $\displaystyle\int_a^b (f + \lambda g)^2$ este pozitiv pentru orice λ real; b) se integrează prin părţi.

2) Să se calculeze:

$$\int_1^2 \frac{x+1}{x^3+x}\mathrm{d}x,\ \int_2^3 \frac{6x-5}{x^2-2x+0,9375}\mathrm{d}x,;\ \int_1^e \frac{e^x-1}{e^x+2}\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3\frac{x}{2}\mathrm{d}x,\ \int_0^{\pi} \sin^2\frac{x}{3}\mathrm{d}x,\ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x},\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}},$$

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+3}\mathrm{d}x,\ \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}\mathrm{d}x,\ \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$$

3) Fie $I_n(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$, $n \geq 1$ natural. Să se arate că $I_1(x) = \operatorname{arctg} x + C$, $I_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2n}\dfrac{x}{(1+x^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n + C$, $(\forall) n \geq 1$.

4) Să se arate că dacă α, β sunt constante reale, $|\beta| < \alpha < 1$, atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha + \beta\cos x} = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha + \beta\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}.$$

b) Să se arate că $\displaystyle\int_{-1}^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$ pentru orice $n \geq 1$ natural.

c) Funcţia $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ nu are primitivă exprimabilă prin funcţii elementare pe intervalul $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$; să se arate totuşi că $\displaystyle\int_{1/2}^2 f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Indicaţie. c) Se foloseşte schimbarea de variabilă $x = \dfrac{1}{t}$.

5) Dacă $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$ este o funcţie integrabilă Riemann, să se arate că

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x.$$

Ce se deduce dacă f este pară ? Dar dacă f este impară ?

6) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Pentru orice $u \in \mathbb{R}$, considerăm funcţia f_u definită prin $f_u(x) = f(x + u)$. Să se arate că pentru orice $a < b$, avem $\displaystyle\int_{a-u}^{b-u} f_u = \int_a^b f$, iar dacă funcţia f este periodică de perioadă $T > 0$, atunci

$$\int_{a+T}^{b+T} f = \int_a^b f.$$

7) Fie funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}$$

Să se arate că f are derivată nemărginită pe $[-1, 1]$ şi că funcţia f' are primitivă fără a fi integrabilă Riemann pe intervalul $[-1, 1]$. Să se dea de asemenea exemplu de o funcţie integrabilă Riemann care nu admite primitivă.

Indicaţie. Pentru partea secundă se poate lua **funcţia-semn** sg$n$,

$$\mathrm{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x = 0, \\ 1 & \text{dacă} \quad x > 0 \end{cases} \text{ restrânsă la un interval de forma } [-a, a], a > 0,$$

8) Folosind criteriul integral, să se determine natura seriilor $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^\alpha}$, $\displaystyle\int_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ (discuţie după α).

9) a) Să se arate că integrala improprie $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \mathrm{ctg}\, x \, \mathrm{d}x$ este divergentă, deşi converge în sensul valorii principale Cauchy;

b) Să se studieze şi în caz de convergenţă, să se determine valoarea pentru integralele improprii

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{1,03}}, \int_0^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^{0,95}}, \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}(x+8)}, \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-t^2}}, \int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t,$$

$$\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^2 x}, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\mathrm{d}x, \int_e^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x;$$

c) Să se calculeze $v.p. \cdot \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+9}$, $v.p. \displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x-2}$, $v.p. \displaystyle\int_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-3|}}$.

10) Fie $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^n, $n \geq 1$. Să se arate că

$$\int_a^b u \cdot v^{(n)} = [uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v]\Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}v.$$

(formula de integrare prin părţi generalizată)

Indicaţie. Se raţionează prin inducţie după n.

11) a) Se cer dezvoltările Taylor până la ordinul 3 inclusiv pentru funcţiile $f_1(x) = \cos 2x - \cos 4x$, $f_2(x) = \sin x + \dfrac{1}{2} \sin 2x$, $f_3(x) = \ln(x^2+1)$, $f_4(x) = e^{\sin x}$ în jurul punctului $x = 0$.

b) Să se dezvolate până la ordinul 2 inclusiv funcţiile indicate în punctele indicate:
1. $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, $x_0 = 0$;
2. $g(x) = x^3 + x\ln(x-1)$, $x_0 = 2$;
3. $h(x) = \sin x + \cos 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

12) Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ fixat şi f o funcţie într-o vecinătate a lui x_0. Se spune că f are dezvoltare limitată de ordin n $(n \geq 1)$ în jurul lui x_0 dacă există un polimon P de grad $\leq n$ astfel încât $f(x_0) = P(x_0)$ şi $f(x) = P(x) + 0((x-x_0)^n)$, adică $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. Să se arate că dacă f are dezvoltare limitată de ordin 1 în jurul lui x_0, atunci există $f'(x_0)$; dar dacă f are dezvoltare limitată de ordin 2 în jurul lui x_0, nu rezultă în general că există $f''(x_0)$.

Indicaţie. Pentru partea secundă se poate considera $f(x) = \cos x + x^3 \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 1$ şi $x_0 = 0$. Atunci $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + 0(x^2)$, dar $f''(0)$ nu există.

13) Folosind dezvoltări limitate obţinute din formula lui Taylor, să se calculeze

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\cos x - \cos 3x},\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x},\ \lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1},\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{2x}.$$

14) a) Fie $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$. Să se calculeze $\ln 1{,}11 = f\left(\dfrac{1}{10}\right)$ cu aproximarea 10^{-3}, folosind formula lui Mac Laurin cu rest Lagrange de ordin suficient de mare.

b) Să se calculeze $\cos 50°$ cu aproximaţia 10^{-3}.

15) a) Să se determine constanta reală $R > 0$ astfel încât curbele $y = \ln(x^2+1)$, $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$ să aibă contact de ordin doi în origine. Idem pentru curbele $y = \cos x - 1$, $x^2 + y^2 + 2Ry = 0$.

b) Să se arate că funcţiile

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x = 0, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} \cdot e^{-1/x^2} & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x = 0, \end{cases}$$

sunt de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}$, cu toate derivatele nule în origine, f are minim în origine, iar g nu are extrem în origine.

16) Să se studieze convergenţa punctuală şi convergenţa uniformă a şirurilor de funcţii indicate, pe mulţimile indicate:
a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$, $n \geq 0$ pe $[0, \infty)$ şi apoi pe $[1, 3]$;
b) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $g_n(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $x \geq 0$ pe mulţimea $[1, \infty)$.

17) a) Să se determine raza de convergenţă a următoarelor serii de puteri:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(n!)^2},\quad \sum_{n\geq 1} n^n x^n,\quad \sum_{n\geq 1} n^2 x^n,\quad \sum_{n\geq 1} (\ln n) x^n.$$

b) Să se calculeze suma seriilor $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n}$, $\sum\limits_{n\geq 1} n x^{n-1}$ pentru $|x| < 1$.

18) Fie $a \in (0, \pi)$ fixat. Să se arate că seria $\sin^2 x(1 + \cos x + \cos^2 x + \ldots)$ este PC pe $\mathbb{R}$ având suma $f(x)$ şi este UC pe intervalul $[a, 2\pi - a]$. Să se compare $f(0)$ şi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

19) Să se dezvolte în serii de puteri centrate în origine, funcţiile
a) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$;

b) $f(x) = \ln(1 - x^2)$;
c) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$;
d) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2kx + x^2}$ (k parametru real).

Să se determine totodată în fiecare caz mulţimea de convergenţă.

2.5 Aplicaţii

În acest paragraf schiţăm câteva aplicaţii directe ale faptelor teoretice expuse în prezentul capitol, care vor fi dezvoltate în cadrul studiului metodelor numerice.

2.5.1 Procedeul Newton pentru rezolvarea unor ecuaţii de forma $\varphi(x) = 0$

Fie $I = [a, b]$ un interval şi $\varphi : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2, cu $\varphi'(x) \neq 0$, $(\forall)x \in I$. Se numeşte *procedeu iterativ Newton definit de φ şi de un punct* $x_0 \in I$ şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ presupus în I şi dat prin relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}, \quad n \geq 0. \tag{55}$$

Teorema 5.1. *Dacă $\xi \in (a, b)$ este un zero simplu al lui φ (adică $\varphi(\xi) = 0$, $\varphi'(\xi) \neq 0$), atunci există o vecinătate V a lui ξ astfel încât pentru orice $x_0 \in V$, procedeul iterativ definit φ şi x_0 să fie convergent către ξ.*

Demonstraţie. Deoarece funcţiile φ' şi φ'' sunt continue pe I, ele îşi ating marginile şi ca atare există $m > 0$, $M > 0$, astfel încât $|\varphi'(x)| \geq m$, $|\varphi''(x)| \leq M$, $(\forall)x \in I$.

Pe de altă parte, din formula Taylor cu rest integral (teorema 4.8), rezultă

$$\varphi(x) = \varphi(x_n) + \varphi'(x_n)(x - x_n) + \int_{x_n}^{x} (x - t)\varphi''(t)\mathrm{d}t, \ (\forall)x \in I, \ (\forall)n \geq 0.$$

Pentru $x = \xi$ se obţine

$$0 = \varphi(x_n) + (\xi - x_n)\varphi'(x_n) + \int_{x_n}^{\xi} (\xi - t)\varphi''(t), \mathrm{d}t, \ (\forall)n \geq 0. \tag{56}$$

Apoi din relaţia (55) se deduce

$$\varphi(x_n) + (\xi - x_n)\varphi'(x_n) = (\xi - x_{n+1})\varphi'(x_n). \tag{57}$$

Din relaţiile (56), (57) rezultă

$$\xi - x_{n+1} = -\frac{1}{\varphi'(x_n)} \int_{x_n}^{\xi} (\xi - t)\varphi''(t)\mathrm{d}t, \ (\forall)n \geq 0,$$

deci

$$|\xi - x_{n+1}| = \frac{1}{|\varphi'(x_n)|} \left| \int_{x_n}^{\xi} (\xi - t)\varphi''(t)\mathrm{d}t \right| \leq \frac{M}{2m}(\xi - x_n)^2,$$

deoarece $\left| \displaystyle\int_{x_n}^{\xi} |\xi - t|\mathrm{d}t \right| \leq \dfrac{1}{2}(\xi - x_n)^2$. Notăm $\delta = \dfrac{2m}{M}$ şi rezultă $|\xi - x_{n+1}| \leq \dfrac{1}{\delta}|\xi - x_n|^2$, $(\forall)n \geq 0$; luând $V = \left(\xi - \dfrac{\delta}{2}, \xi + \dfrac{\delta}{2}\right)$ şi $x_0 \in V$, rezultă succesiv $|\xi - x_1| \leq \dfrac{1}{\delta}|\xi - x_0|^2 < \dfrac{\delta}{4}$, $|\xi - x_2| \leq \dfrac{1}{\delta}|\xi - x_1|^2 < \dfrac{\delta}{16}, \ldots |\xi - x_n| < \dfrac{\delta}{4^n}$ deci $x_n \to \xi$.

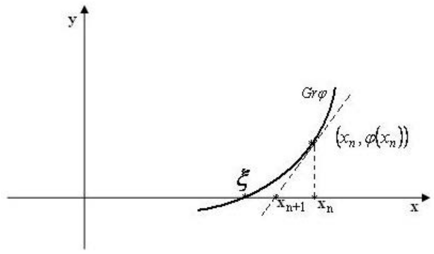


Fig. II.14

Observaţii. Aşadar, în condiţiile teoremei, $\xi \simeq x_n$ cu n convenabil; se poate da şi o evaluare a erorii absolute în această formulă aproximativă. Relaţia de recurenţă (55) se obţine astfel: se consideră punctul $(x_n, \varphi(x_n))$ pe graficul funcţiei φ; tangenta la grafic în acest punct are ecuaţia $y - \varphi(x_n) = \varphi'(x_n)(x - x_n)$ şi intersectează axa Ox tocmai în punctul de abscisă x_{n+1}, deci $-\varphi(x_n) = \varphi'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$, de unde rezultă (55). Se justifică astfel de ce procedeul Newton este numit şi "metoda tangentei"; fig. II. 14. Vom vedea că acest procedeu se extinde la sisteme de ecuaţii adică la ecuaţii vectoriale. Schema (55) se traduce uşor într-un program.

Exemplu. Se consideră ecuaţia $x^3 - 2 = 0$, a cărei rădăcină reală este $\xi = \sqrt[3]{2}$, situată în intervalul $I = [1, 2]$. Notând $\varphi(x) = x^3 - 2$, $x_0 = 2$, rezultă $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 - 2}{3x_n^2} = \dfrac{2x_n^3 + 2}{3x_n^2}$, $n \geq 0$ şi se obţin aproximaţiile $x_1 = 1,5$; $x_2 = 1,296$; $x_3 = 1,2609$; $x_4 = 1,25994$; $x_5 = 1,259921$ etc. şi se poate lua $\xi \simeq 1,125992$.

2.5.2 Interpolare

Multe metode numerice se referă la calculul unor funcţii prin elaborări de tabele de valori discrete sau prin rezolvări aproximative ale unor ecuaţii funcţionale, prin algoritmi adaptaţi convenabil, în care un rol deosebit îl au controlul propagării erorilor, viteza de convergenţă, ca şi stabilitatea algoritmilor respectivi. În multe astfel de probleme se folosesc instrumente matematice profunde, chiar dacă acestea se traduc în ultimă instanţă în programe de efectuare succesivă a câtorva operaţii fundamentale aritmetice sau logice. Un loc aparte în cadrul metodelor numerice îl au interpolările de funcţii, utilizate curent în diverse tipuri de măsurători şi prelucrări de date.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval fixat şi $x_0 < x_1 < \ldots < x_p$ puncte din I, numite *noduri de interpolare*. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie teoretic definită pe I, ale cărei valori y_i sunt cunoscute *numai* în nodurile $x_i, y_i = f(x_i)$, $0 \leq i \leq p$ (de exemplu, I poate fi un interval de timp, x_i momente fixate din I, iar f o mărime fizică luând valorile y_i la momentele x_i, $0 \leq i \leq p$). Orice funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ astfel încât $F(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq p$ se numeşte *funcţie de interpolare a lui* f, sau echivalent, *funcţie de interpolare asociată tabelei de* $p+1$ *valori*

$$\begin{array}{|cccc} x_0 & x_1 & \ldots & x_p \\ \hline y_0 & y_1 & \ldots & y_p \end{array} \tag{58}$$

Evident o astfel de funcţie nu este unică, iar graficul ei trece prin punctele (x_i, y_i), $0 \leq i \leq p$. De exemplu, în cazul interpolării liniare, graficul lui F este linia poligonală cu vârfurile (x_i, y_i), $0 \leq i \leq p$. O altă funcţie de interpolare asociată tabelei (58) este indicată în cele ce urmează.

Definiţia 5.1. *Se numeşte* **polinom Lagrange de interpolare** *asociat tabelei (58) un polinom P de grad $\leq p$, cu coeficienţi reali, astfel încât $P(x_i) = y$, $0 \leq i \leq p$. În plus, are loc formula aproximativă*

$$f(x) \simeq P(x), \quad (\forall) x \in I. \tag{59}$$

Teorema 5.2. *Polinomul Lagrange de interpolare asociat unei tabele de valori există şi este unic.*

Demonstraţie. Probăm mai întâi unicitatea unui polinom Lagrange de interpolare pentru tabela (58). Dacă P_1, P_2 ar fi două astfel de polinoame, atunci $P_1(x_i) = P_2(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq p$, deci polinomul $P_1 - P_2$ are gradul $\leq p$ şi posedă $p+1$ rădăcini, anume nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_p$. Aşadar, $P_1 - P_2$ este polinomul nul, adică $P_1 = P_2$. Existenţa unui polinom Lagrange se demonstrează astfel: pentru orice j, $0 \leq j \leq p$, se notează cu L_j polinomul

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \ldots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \ldots (x_j - x_n)}$$

şi se observă că $L_j(x_i) = \delta_{ij}$ pentru orice $0 \le i, j \le p$. Atunci pentru polinomul

$$P(x) = \sum_{j=0}^{p} y_j L_j(x) \tag{60}$$

avem $P(x_i) = \sum_{j=0}^{p} y_j L_j(x_i) = \sum_{j=0}^{p} y_j \delta_{ij} = y_i$, $0 \le i \le p$, deci P este polinomul Lagrange de interpolare asociat tabelei (58). Formula (59) este sugerată de faptul că $f(x_i) = P(x_i) = y_i$, $0 \le i \le p$, adică f şi P au aceleaşi valori în nodurile fixate.

Un avantaj al reprezentării (60) constă în faptul că polinoamele L_j depind numai de alegerea nodurilor de interpolare; dar la adăugarea unor noi noduri, calculul lui L_j trebuie făcut de la capăt, ceea ce este un defect. Cele de mai sus înlesnesc scrierea unui program eficient pentru calculul valorilor lui $P(x)$ în puncte x distincte de x_i, deci "între noduri" (ceea ce justifică termenul de interpolare).

Presupunând că f este o funcţie de $p+1$ ori derivabilă (derivabilitatea fiind postulată în practică din considerente fizice), se poate da o evaluare a erorii absolute în formula aproximativă (59). Mai precis, fie $M = \sup_{x \in I} |f^{(p+1)}(x)|$; demonstrăm atunci inegalitatea:

$$||f - P|| \le \frac{M \cdot \sup_{x \in I} |(x - x_0) \dots (x - x_p)|}{(p + 1)!} \tag{61}$$

Într-adevăr, pentru $x \in I$, $x \ne x_i$, $0 \le i \le p$, notăm

$$R(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_p)}$$

şi

$$\varphi(u) = f(u) - P(u) - R(x) \cdot (u - x_0) \cdot (u - x_1) \dots (u - x_p).$$

Funcţia φ se anulează în $p + 2$ puncte distincte, anume $x_0, x_1, \dots, x_p, x$, deci conform teoremei lui Rolle aplicată succesiv, derivata $\varphi^{(p+1)}$ se va anula într-un punct $\xi \in I$, de unde va rezulta că $0 = f^{(p+1)}(\xi) - R(x) \cdot (p+1)!$, adică $R(x) = \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!}$. Se obţine atunci

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{(p + 1)!}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_p),$$

pentru orice $x \in I$, inclusiv pentru $x = x_i$, $0 \le i \le p$ şi ca atare

$$||f - P|| = \sup_{x \in I} |f(x) - P(x)| \le \frac{M}{(p + 1)!} \sup_{x \in I} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_p)|,$$

adică tocmai (61).

Evaluarea (61) este îngreunată de dificultatea cunoaşterii lui $M = ||f^{(p+1)}||$; dealtfel interpolarea Lagrange reflectă defectuos proprietăţile diferenţiabile ale funcţiei f. Reţinem totodată din cele mai sus formula

$$f(x) = P(x) + [f(x) - P(x)] = P(x) + \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{(p + 1)!}(x - x_0) \dots (x - x_p). \tag{62}$$

Exemplu. Determinăm polinomul Lagrange de interpolare asociat tabelei

	0	1	2	4
	1	0	0	-3

În acest caz, avem $p = 3$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = -3$,

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(-1)(-2)(-4)} = -\frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{8}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_2-x_3)} = \frac{x(x-2)(x-4)}{3},$$

$$L_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-4)}{4}, \quad L_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{24}$$

şi aplicând formula (60), rezultă că

$$P(x) = \sum_{j=0}^{3} y_j L_j(x) = L_0(x) - 3L_3(x) = -\frac{1}{4}(x^3 - 5x^2 + 8x - 4).$$

Observaţie. În ultimii ani s-a degajat o noţiune nouă, strâns legată de interpolarea polinomială, anume cea de funcţie "spline", polinomială pe porţiuni şi suficient de netedă. Mai precis, dacă $I = [a, b]$ este un interval şi $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = b$ este o diviziune cu n noduri interioare, o funcţie $s : I \to \mathbb{R}$ se numeşte **"spline" de ordin** k $(k \geq 1)$ **relativ la** Δ dacă s este de clasă $C^{k-1}(I)$ şi în orice interval $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n$, s coincide cu un polinom (funcţie polinomială) cu coeficienţi reali de grad k.

Aşadar, orice polinom este funcţie "spline", nu şi reciproc; de exemplu, pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat, funcţia

$$(x-\alpha)_+^k \triangleq \begin{cases} (x-a)^k & \text{dacă} \quad x > \alpha \\ 0 & \text{dacă} \quad x \leq \alpha \end{cases}$$

este "spline" de ordin k şi nu este polinom (pentru că are o infinitate de zerouri, fără a fi funcţia nulă). Se verifică fără dificultate că mulţimea funcţiilor "spline" de ordin k relativ la o diviziune $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = b$ este un spaţiu vectorial real de dimensiune $n + k + 1$, pentru care funcţiile $1, x, x^2, \ldots, x^k$, $(x-x_1)_+^k, (x-x_2)_+^k, \ldots, (x-x_n)_+^k$ constituie o bază. Aşadar, pentru determinarea unei funcţii "spline" se impun $n+k+1$ condiţii. Aplicând aceasta, rezultă că $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă $C^{k-1}(I)$, atunci există o funcţie "spline" unică s de ordin $2k-1$ astfel încât să fie verificate următoarele $n + 2k$ condiţii

$$\begin{cases} s(x_1) = f(x_1), \ldots, s(x_n) = f(x_n) \\ s(a) = f(a),\ s'(a) = f'(a), \ldots, s^{(k-1)}(a) = f^{(k-1)}(a); \\ s(b) = f(b),\ s'(b) = f'(b), \ldots, s^{(k-1)}(b) = f^{(k-1)}(b). \end{cases} \tag{63}$$

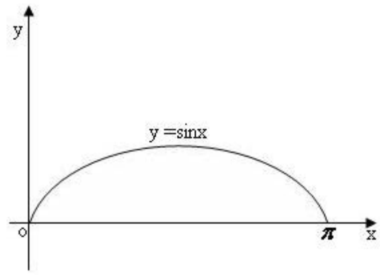


Fig. II.15a

Are loc aproximarea $f(x) \simeq s(x)$, $(\forall)x \in I$, mult mai precisă decât (59).

Exemplu. Determinăm funcţia "spline" de ordin 1 pe intervalul $[0, \pi]$ asociată funcţiei $f(x) = \sin x$ şi nodurilor $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$. În acest caz, $1, x, \left(x - \frac{\pi}{4}\right)_+, \left(x - \frac{\pi}{2}\right)_+$ constituie o bază şi deci

$$s(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)_+ + C_4 \left(x - \frac{\pi}{2}\right)_+ ,$$

unde coeficienţii reali C_1, C_2, C_3, C_4 se determină punând condiţiile (63), anume $s\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $s(0) = \sin 0 = 0$, $s(\pi) = \sin\pi = 0$, adică

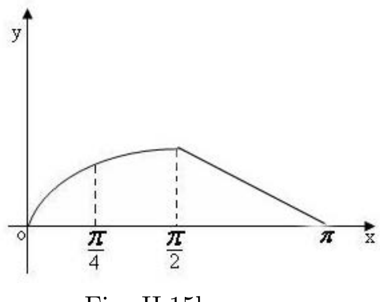


Fig. II.15b

$$C_1 + C_2\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ C_1 + C_2\frac{\pi}{2} + C_3\frac{\pi}{4} = 1,\ C_1 = 0,\ C_1 + C_2\pi + C_3\frac{3\pi}{4} + C_4\frac{\pi}{2} = 0,$$

etc., fig. II. 15a şi II. 15b.

2.5.3 Derivare şi integrare numerică

a) Fie $f \in C^2_{[a,b]}$ şi u, h alese astfel încât $a < u - h < v < u + h < b$. Atunci au loc formulele aproximative.

$$f'(u) \simeq \frac{f(u+h) - f(u)}{h}, \quad f'(u) \simeq \frac{f(u) - f(u-h)}{h} \tag{64}$$

$$f'(u) \simeq \frac{f(u+h) - f(u-h)}{2h} \tag{65}$$

$$f''(u) \simeq \frac{f(u+h) - 2f(u) + f(u-h)}{h^2} \tag{66}$$

Dacă f este de clasă C^4 pe intervalul $[a, b]$ şi dacă se notează cu $m_3 = ||f'''||$, $m_4 = ||f^{(iv)}||$ normele uniforme pe intervalul $[u - h, u + h]$, se poate arăta că erorile absolute în uniforme în formulele aproximative (65), (66) sunt majorate respectiv prin $\frac{h^2}{6} m_3$ şi $\frac{h^2}{12} m_4$.

În practică, dacă f este o funcţie reală de clasă C^2 pe un interval şi dacă $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ sunt puncte echidistante din acel interval, $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$, atunci notând $y_k = f(x_k)$, $0 \le k \le n + 1$ rezultă conform (65), (66),

$$f'(x_k) \simeq \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}, \; f''(x_k) \simeq \frac{y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k}{h^2}, \; 1 \le k \le n \tag{67}$$

Exemplu. Presupunem că trebuie determinată o funcţie de clasă $C^2(\mathbb{R})$ astfel încât $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$ şi $(\forall)x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - f'(x) = 0$. Dacă intervalul de studiu este [0,1] şi luăm o diviziune a acestuia în 10 subintervale egale, $h = \frac{1}{10}$, atunci valorile aproximative $y_k \simeq f(kh)$, $0 \le k \le 10$, pot fi deduse din relaţiile

$$y_0 = 1, \; \frac{y_1 - y_0}{h} = -1, \; \frac{y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k}{h^2} = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}, \; 1 \le k \le 9.$$

Desigur, din condiţiile iniţiale rezultă $f(x) = 2 - e^x$, dar adeseori se pot aplica numai metode aproximative.

b) Referitor la calculul aproximativ al integralelor definite, care suplineşte imposibilitatea aplicării formulei Leibniz-Newton, ne mărginim la cazul când $f : [0, p] \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, este o funcţie continuă şi fie

$$I = \int_0^p f(x) \mathrm{d}\, x.$$

(Orice integrală definită de forma $\int_a^b g(t) \mathrm{d}t$ se reduce la o integrală ca mai sus prin schimbarea de variabilă $t = a + \frac{b-a}{p} x$).

Notăm $y_i = f(i)$, $0 \le i \le p$; conform (60), polinomul Lagrange corespunzător este $P(x) = \sum_{i=0}^{p} y_i L_i(x)$ şi cum $f \simeq P$, avem

$$I = \int_0^p f(x) f(t) \mathrm{d}x \simeq \int_0^p P(x) \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{p} y_i \int_0^p L_i(x) \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{p} c_i^{(p)} y_i.$$

Pentru fiecare $p \ge 1$, cele $p + 1$ numere reale

$$c_i^{(p)} = \int_a^b L_i(x) \mathrm{d}x, \quad 0 \le i \le p$$

pot fi tabelate; evident, ele sunt independente de funcţia f. Se poate evalua eroarea absolută a formulei

$$I \simeq \sum_{i=0}^{p} c_i^{(p)} y_i. \tag{68}$$

(numită formula lui R. CÔTES, 1682-1716). Anume, folosind (61), rezultă

$$\left| I - \sum_{i=0}^{p} c_i^{(p)} y_i \right| = \left| \int_0^p f(x)\mathrm{d}x - \int_0^p P(x)\mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\leq \frac{M}{(p+1)!} \int_0^p |x(x-1)\dots(x-p)|\mathrm{d}x,$$

unde $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f^{(p+1)}(x)|$, în ipoteza că f este de clasă C^{p+1}.

În practică se utilizează formule de cuadratură (calcul de integrale) mai rapid convergente decât formula (68). Dar există câteva cazuri particulare des utilizate, obţinute după o prealabilă divizare a intervalului de integrare, prin aplicarea formulei (68) fiecărui subinterval al diviziunii. Pentru $p = 1$ se obţine formula trapezelor (care corespunde interpolării liniare), pe intervalul [0,1], iar pentru $p = 2$ se obţine formula lui R. SIMPSON, 1687-1768 (care corespunde interpolării pătratice) pe intervalul [0,2]. Fără detalii de demonstraţie, explicităm aceste două formule pentru un interval $[a, b]$ oarecare.

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2, $h = \dfrac{b-a}{n}$ şi $x_j = a + jh$, $0 \leq j \leq n$. Atunci are loc formula aproximativă

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right]$$

(*formula trapezelor*) cu eroarea absolută $\leq \dfrac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot ||f''||$. Dacă f este o funcţie de clasă C^4 atunci pentru $n = 2m$ avem

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{h}{6}\{f(x_0) + f(x_{2m}) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2m-1})] +$$

$$+2[f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2m-2})]\} \quad \text{(formula lui Simpson)},$$

cu eroarea absolută $\leq \dfrac{(b-a)^5}{180 \cdot n^4} \cdot ||f^{(iv)}||$.

Aşadar în primul caz se împarte intervalul $[a, b]$ de integrare în n părţi egale, iar în cazul secund în $n = 2m$ părţi egale.

Exemplu. Pentru a calcula integrala

$$I = \int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x$$

cu eroare $\leq 10^{-2}$, trebuie luat $n = 12$ în cazul formulei trapezelor şi $n = 4$ în cazul formulei lui Simpson.

Vom vedea în capitolul următor motivaţia faptului că integrala este mai maniabilă în calcule aproximative decât derivata; anume, luarea integralei este o funcţională continuă, în schimb derivarea este un operator discontinuu.

2.5.4 Calculul aproximativ al sumelor unor serii

Ilustrăm succint posibilitatea însumării cu aproximaţie a unor serii convergente, folosind sumele parţiale.

a) Fie $\sum_{n\geq b} a_n$ o serie AC de numere reale cu suma s astfel încât să existe N natural şi $0 < k < 1$ cu proprietatea că

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq k < 1 \quad \text{pentru orice} \quad n \geq N.$$

Atunci $(\forall)n \geq N$, avem $|a_{n+1}| \leq k \cdot |a_n|$, $|a_{n+2}| \leq k \cdot |a_{n+1}| \leq k^2|a_n|$ etc., deci notând $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$, rezultă $|R_n| \leq |a_n| \cdot (k + k^2 + \ldots) = \dfrac{|a_n| \cdot k}{1-k}$. În acest mod, avem o evaluare a erorii absolute făcute în formula aproximativă $s \simeq s_n$, deoarece $|s - s_n| = |R_n|$.

Exemplu. Calculăm cu aproximaţie 10^{-4} suma seriei $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2 \cdot n!}$. În acest caz, $a_n = \dfrac{1}{n^2 \cdot n!}$, deci $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n^2}{(n+1)^3} < \dfrac{1}{n+1}$. Dacă $n \geq 5$, rezultă $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{1}{6} < 1$ şi luând $k = \dfrac{1}{6}$, rezultă evaluarea $|R_n| \leq \dfrac{|a_5| \cdot k}{1-k} = \dfrac{1}{5}a_5 = \dfrac{1}{5^3 \cdot 5!} < 10^{-4}$. Aşadar, $S \simeq S_5 = 1 + \dfrac{1}{2^2 \cdot 2!} + \dfrac{1}{3^2 \cdot 3!} + \dfrac{1}{4^2 \cdot 4!} + \dfrac{1}{5^2 \cdot 5!} \simeq 1,14646$.

b) Fie acum $\{a_n\}_{n\geq 0}$ un şir monoton descrescător de numere reale pozitive astfel încât $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Atunci conform criteriului lui Leibniz, seria alternată $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$ este C. Fie $R_n = \sum_{k\geq n+1} (-1)^k a_k$; ne propuneau să arătăm că $|R_n| \leq a_{n+1}$, $(\forall)n \geq 0$. Este suficient să observăm că $(\forall)k \geq 1$, $(\forall)n \geq 0$, avem

$$a_{n+1} - a_{n+2} \leq a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots + (-1)^{k+1}a_{n+k} \leq a_{n+1}\ ,$$

deci pentru $k \to \infty$, $a_{n+1} - a_{n+2} \leq (-1)^{n+1}R_n \leq a_{n+1}$. Aşadar, $|R_n| \leq a_{n+1}$, adică restul $R_n = s - s_n$ este majorat de primul termen neglijat şi este evaluată eroarea absolută în formula aproximativă $s \simeq s_n$.

Exemplu. Ne propunem să arătăm că $0,94 \leq \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^4} \leq 0,96$. Alegem n natural minim astfel încât $\dfrac{1}{(n+1)^4} \leq \dfrac{1}{2} \cdot 10^{-2}$, deci $n = 3$. Atunci conform celor de mai sus, notând cu s suma seriei propuse, avem $|s - s_n| = |R_n| < \dfrac{1}{(n+1)^4}$, deci $|s - s_n| \leq \dfrac{1}{2} \cdot 10^{-2}$; cum $s_3 = 1 - \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} = 0,9498$, rezultă $0,9498 - \dfrac{1}{200} \leq s \leq 0,9498 + \dfrac{1}{200}$, deci $0,94 \leq s \leq 0,96$.

2.5.5 Exerciţii

1. Să se calculeze cu aproximaţie $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[7]{70}$, folosind procedeul Newton (şi eventual un minicalculator !).

2. Să se rezolve cu aproximaţie ecuaţiile $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$, $x + 2\ln x = 2$.

3. Să se determine polinomul Lagrange de interpolare asociat tabelelor de valori

x	0	1/4	1	2
y	1	0	-1	2

x	1	2	3	4	5
y	1	0	0	-5	2

4. Pentru orice tabelă de valori reale de forma

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_p
y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_p
z_0	z_1	z_2	$\ldots$	z_p

$(x_i \neq x_j$ pentru $i \neq j)$

se poate arăta (încercaţi !) că există şi este unic un polinom $H(x)$ de grad $\leq 2p + 1$ astfel încât $H(x_i) = y_i$, $H'(x_i) = z_i$, $0 \leq i \leq p$ (adică graficul lui H trece prin punctele (x_i, y_i) şi are panta tangentei z_i în aceste puncte, $0 \le i \le p$). Polinomul H poartă numele de *polinomul de interpolare al lui Hermite*, asociat tabelei respective.

Să se determine polinomul lui Hermite asociat tabelelor

	1	2	3
	1	0	2
	-1	1	3

	0	1/3	2/3	2
	2	0	0	-1
	0	1	1	0

5. Să se determine (cu aproximaţie !) 10 eşantioane pe intervalul $[0,1]$ ale unui semnal $x(t)$ de clasă C^1, ştiind că $x'(t) = x^2 + t^2$, $(\forall)t \in [0,1]$, $x(0) = 4$.

Idem $x''(t) = x'(t) + tx$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

Indicaţie. Împărţim intervalul $[0,1]$ în 10 părţi egale prin punctele $t_0 = 0$, $t_1 = \dfrac{1}{10}, \ldots, t_{10} = 1$ şi notăm $x_k = x(t_k)$; se afă $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ din relaţia de recurenţă

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{1/10} = x_k^2 + t_k^2, \quad x_0 = 4,\ 0 \le k \le 9 \text{ etc.}$$

6. Să se calculeze cu aproximaţie integralele

$$\int_0^2 e^{-x^2} \mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^8+1}.$$

7. Să se calculeze suma seriilor: $\displaystyle\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^n}$, $\displaystyle\sum_{n\ge1} \frac{1}{10^n \cdot n!}$, $\displaystyle\sum_{n\ge1} \frac{1}{(n!)^2}$, $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} - \dfrac{1}{4^4} + \ldots$ cu aproximaţie $\le 10^{-6}$.

8. Seria armonică $\displaystyle\sum_{n\ge1} \frac{1}{n}$ este D, dar şirul $c_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$, este C (să se arate acest fapt). Să se completeze, folosind un minicalculator, tabloul următor

n	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	$\ln n$	c_n
1	1	0	1
2	3/2	0,69	0,81
10	2,93	2,30	0,63
20	...	...	...
50	...	...	...

şi să se determine n astfel încât $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 10^4$ (limita şirului c_n se numeşte *constanta lui Euler*, $c \simeq 0,57$; cu toate eforturile făcute de matematicieni, încă nu se ştie dacă c este sau nu un număr raţional).

9. Să se calculeze, folosind formulele (64), (65):

a) $f'(3)$ pentru $f(x) = x^2$, $h = \dfrac{1}{100}$;

b) $f'(-1)$ pentru $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $h = \dfrac{1}{10}$;

c) $f'(1)$ pentru $f(x) = e^{-x}$, $h = \dfrac{1}{10}$.

Evaluaţi erorile absolute corespunzătoare.

Particulele întâlnite în natură sunt de două tipuri: fermioni şi bozoni; în descrierea lor, se utilizează operatori în spaţii finit şi respectiv infinit dimensionale. Analiza matematică dispune de elementele necesare pentru descrierea fundamentală a naturii.

(P. DIRAC)

Capitolul 3

Analiză reală multidimensională

Introducere

În acest capitol, vom studia mai întâi conceptul matematic de continuitate, legat de diverse configuraţii de puncte (deschişi, închişi, mulţimi compacte, mulţimi conexe etc.). Celebrul aforism al lui Leibniz după care ”natura nu face salturi” îşi are desigur limitele lui, pentru că alături de fenomene cu desfăşurare continuă în timp sau în dependenţă continuă de alte mărimi, există numeroase situaţii de discontinuitate, de salt şi ne gândim aici la scurtcircuite, dezintegrări, descărcări, ruperi etc. De asemenea, continuitatea se foloseşte tacit în multe calcule aproximative; dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie reală, $A \subset \mathbb{R}$ atunci pentru orice $x \in A$ este definit $f(x)$. Dar în calcule efective, x se aproximează cu o trunchiere $\tilde{x}$ a sa şi este natural de considerat că $f(x)$ se aproximează prin $f(\tilde{x})$; totuşi acest fapt are loc doar pentru o funcţie f continuă.

Vom dezvolta apoi calculul diferenţial pentru funcţii de mai multe variabile reale, studiind noţiunile de derivată parţială, derivată după un versor, diferenţială, matrice jacobiană etc. Toate acestea sunt legate de ”principiul liniarizării”, atât de utilizat în matematică şi în aplicaţiile ei. În formularea elegantă şi concisă a rezultatelor vom folosi unele elemente de algebră liniară, după cum geometria ne va înlesni unele interpretări intuitive.

3.1 Clase remarcabile de submulţimi în spaţii metrice

3.1.1 Mulţimi deschise, mulţimi închise, mulţimi dense

Fie (X, d) un spaţiu metric fixat.

Definiţia 1.1. *O submulţime D a lui X se numeşte* **deschisă** *(sau* **deschis al lui** *X) dacă pentru orice punct $a \in D$ există $r > 0$ real astfel încât $B(a, r) \subset D$. O submulţime $I \subset X$ astfel încât mulţimea $X \setminus I = \complement I$ să fie deschisă se numeşte* **închisă** *(sau* **închis al lui** *X).*

Reţinem că o submulţime D a unui spaţiu metric este deschisă dacă odată cu orice punct al ei, o întreagă bilă centrată în acel punct este inclusă în D. Mulţimea X însăşi este evident deschisă, iar mulţimea vidă $\emptyset$ este şi ea deschisă, deoarece definiţia 1.1 se consideră verificată (pentru că ”falsul implică orice”). Aşadar, mulţimile X şi $\emptyset$ sunt deschise şi închise; pot însă exista submulţimi care nu sunt nici deschise, nici închise.

Exemple. 1) Fie $X = \mathbb{R}$, dreapta reală. Evident, intervalele (a, b), (a, ∞), $(-\infty, a)$ sunt mulţimi deschise în $\mathbb{R}$, pentru orice $a < b$. Intervalul închis $[a, b]$, $a \leq b$ este o mulţime închisă deoarece complementara lui în $\mathbb{R}$, adică $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$, este o mulţime deschisă. Intervalul semideschis $[a, b)$ nu este nici mulţime deschisă şi nici închisă. În sfârşit, submulţimea $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ este închisă, iar $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nu este nici deschisă, nici închisă.

Se poate arăta că o submulţime a lui $\mathbb{R}$ este deschisă dacă şi numai dacă ea este o reuniune cel mult numărabilă de intervale deschise.

2) Fie $X = \mathbb{R}^2$ cu distanţa euclidiană (teorema II. 2.2). Discurile deschise $\{x^2 + y^2 < r^2\}$, $r > 0$ sunt mulţimi deschise, ca şi exterioarele acestora $\{x^2 + y^2 > r^2\}$. De asemenea, pentru $0 < r < R$ fixate, coroana circulară $\{u \in \mathbb{R}^2 | r < ||u|| < R\} = \{r^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$ este o mulţime deschisă. Mulţimea $\{(0, 0)\}$ redusă la origine este închisă, ca şi orice dreptunghi $[a, b] \times [c, d]$.

3) În spaţiul metric $X = \mathbb{R}^3$ cu distanţa euclidiană, sfera plină $\{x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}$, $r > 0$ este deschisă, iar suprafaţa sferică $\{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, ca şi sfera închisă $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ sunt mulţimi închise.

Se poate arăta că o submulţime $D \subset \mathbb{R}^p$ este deschisă dacă şi numai dacă D este o reuniune cel mult numărabilă de mulţimi de forma $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_p$, cu D_i, $1 \leq i \leq p$ deschişi din $\mathbf{R}$.

Revenim la cazul unui spaţiu metric (X, d) oarecare şi dăm câteva proprietăţi generale relativ la mulţimile deschise sau închise din X.

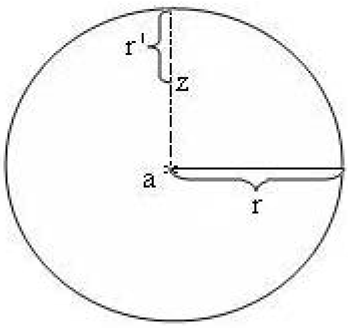


Fig. III.1

Teorema 1.1. (a) *Orice bilă deschisă din X este un deschis al lui X şi orice bilă închisă este o mulţime închisă.*

(b) *O reuniune oarecare de deschişi din X este un deschis; orice intersecţie finită de deschişi din X este un deschis.*

(b$'$) *O intersecţie oarecare de închişi din X este un închis: orice reuniune finită de închişi din X este un închis.*

Demonstraţie. (a) Fie $a \in X$, $r > 0$ şi $D = B(a, r)$; D este o submulţime deschisă a lui X, căci fie $(\forall) z \in D$ şi $r' = r - \mathrm{d}(z, a)$. Se verifică imediat, folosind inegalitatea triunghiului, că $B(z, r') \subset D$; figura III.1.

Fie $I = B'(a, r) = \{x \in X | \ \mathrm{d}(a, x) \leq r\}$ o bilă închisă oarecare din X. Complementara ei este $\{x \in X | \mathrm{d}(a, x) > r\}$ şi este deschisă, deci I este mulţime închisă.

(b) Fie $D = \bigcup_{i \in J} D_i$ o reuniune oarecare de deschişi din X; arătăm că D este un deschis şi pentru aceasta, fixăm $(\forall) a \in D$. Atunci există $i \in J$ astfel ca $a \in D_i$ şi cum D_i este deschis, există $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset D_i \subset D$. Aşadar între punctul a şi D este "intercalată" o bilă şi ca atare, D este mulţime deschisă.

Fie apoi $\Delta = \bigcap_{k=1}^{p} D_k$ o intersecţie finită de deschişi din X şi $(\forall) a \in \Delta$ fixat. Atunci $a \in D_k$ şi există $r_k > 0$ astfel încât $B(a, r_k) \subset D_k$, $1 \leq k \leq p$. Notând $r = \min_{1 \leq k \leq p} r_k$, avem $r > 0$ şi $B(a, r) \subset D_k$ pentru orice k, $1 \leq k \leq p$, deci $B(a, r) \subset \Delta$. În concluzie, Δ este mulţime deschisă.

(b$'$) Rezultă imediat din (b) trecând la complementară şi aplicând formulele lui de Morgan.

Observaţii. O intersecţie infinită de deschişi poate să nu mai fie un deschis; de exemplu, luând $X = \mathbb{R}$, $D_k = \left(-\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}\right)$, $k \geq 1$, mulţimile D_k sunt deschise în $\mathbb{R}$, dar intersecţia lor $\bigcap_{k \geq 1} D_k$ este redusă la origine iar mulţimile reduse la un singur punct sunt închise.

Dacă X este o mulţime nevidă astfel încât să poată fi evidenţiată o colecţie $\mathcal{F}$ de submulţimi ale lui X, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, cu proprietăţile:

a) $\emptyset, X$ aparţin lui $\mathcal{F}$;

b) orice reuniune de mulţimi din colecţia $\mathcal{F}$ aparţine colecţiei $\mathcal{F}$;

c) orice intersecţie finită de mulţimi din $\mathcal{F}$ aparţine lui $\mathcal{F}$, atunci se spune că pe X este definită o topologie $\mathcal{F}$, iar perechea $(X, \mathcal{F})$ se numeşte *spaţiu topologic*. Pe aceeaşi mulţime pot coexista mai multe topologii. Conform teoremei 1.1 (b) mulţimile deschise dintr-un spaţiu metric formează o topologie, deci orice spaţiu metric este în mod natural un spaţiu topologic.

Definiţia 1.2. *Fie* $A \subset X$ *o submulţime a unui spaţiu metric fixat* (X, d). *Se numeşte* **interiorul lui** A *mulţimea*

$$\overset{\circ}{A} \triangleq \{x \in X | (\exists) r > 0,\ B(x,r) \subset A\}$$

şi **închiderea** *(sau* **aderenţa***) lui* A, *mulţimea*

$$\bar{A} \triangleq \{x \in X | (\forall) r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Mulţimea $\mathrm{Fr}\, A \triangleq \bar{A} \cap \overline{\complement A}$ *se numeşte* **frontiera lui** A.

Aşadar, $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$, căci dacă $x \in \overset{\circ}{A}$, atunci există o bilă $B(x,r)$ conţinută în A; bila conţine x şi dacă $y \in A$, atunci $y \in \bar{A}$. Din definiţia frontierei, rezultă că

$$\mathrm{Fr}\, A = \{x \in X | \text{orice bilă centrată în } x \text{ intersectează } A \text{ şi } \complement A\}.$$

Exemple. 1) Fie $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$. Atunci $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, $\bar{A} = \mathbb{R}$, $\mathrm{Fr}\, A = \mathbb{R}$.

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă mărginită superior. Atunci $\sup A \in \bar{A}$ căci pentru orice $\varepsilon > 0$, în intervalul $(\sup A - \varepsilon, \sup A]$ există puncte din A ($\sup A$ fiind cel mai mic majorant); ca atare, orice interval centrat în punctul $\sup A$ intersectează mulţimea A, deci $\sup A \in \bar{A}$. Similar, se arată că $\inf A \in \bar{A}$ pentru orice mulţime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ mărginită inferior.

2) Fie $X = \mathbb{R}^2$ şi $A = \{x^2 + y^2 < 1\}$. Atunci $\overset{\circ}{A} = A$, $\bar{A} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ şi Fr $= \{x^2 + y^2 = 1\}$.

3) Fie $X = \mathcal{M}_{[a,b]}$ cu distanţa uniformă (teorema II.2.3) şi $\mathcal{P} \subset X$ mulţimea tuturor polinoamelor, considerate ca funcţii $[a,b] \to \mathbb{R}$. În acest caz închiderea $\bar{\mathcal{P}}$ este evident mulţimea funcţiilor mărginite $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $(\forall)\varepsilon > 0$ există un polinom $Q \in \mathcal{P}$ astfel încât $\mathrm{d}(f, Q) \leq \varepsilon$, adică $|f(x) - Q(x)| \leq \varepsilon$, $(\forall) x \in [a,b]$. O teoremă celebră a lui K. WEIERSTRASS (1815-1897) afirmă că $\bar{\mathcal{P}}$ coincide cu mulţimea tuturor funcţiilor continue $[a,b] \to \mathbb{R}$, cu alte cuvinte orice funcţie continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se poate aproxima uniform oricât de bine printr-un polinom [$(\forall)\varepsilon > 0$, în tubul de funcţii $(f - \varepsilon, f + \varepsilon)$ se află graficul unui polinom; acest fapt va fi enunţat în capitolul VI (teorema VI 2.5)].

4) Fie X un spaţiu metric oarecare. Dacă $A \subset B \subset X$, atunci este evident că $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$, $\bar{A} \subset \bar{B}$. Dar se poate întâmpla ca $\mathrm{Fr}\, A \not\subset \mathrm{Fr}\, B$; de exemplu, luăm $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ şi $B = \mathbb{Q} \cup [0,1]$, în care caz avem $A \subset B$, $\mathrm{Fr}\, A = \mathbb{R}$ şi $\mathrm{Fr}\, B = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

Teorema 1.2. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric fixat şi* $A \subset X$ *o submulţime oarecare. Atunci*:

(a) $\complement \overset{\circ}{A} = \overline{\complement A}$ şi $\complement \bar{A} = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$;

(b) $\overset{\circ}{A}$ *este o mulţime deschisă, iar* $\bar{A}$ *este o mulţime închisă în* X;

(c) $\mathrm{Fr}\, A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ şi $\mathrm{Fr}\, A$ *este o mulţime închisă în* X.

Demonstraţie. (a) Se aplică dubla incluziune ţinând cont de definiţii.

(b) Fie $(\forall) a \in \overset{\circ}{A}$ fixat, deci există $r > 0$ astfel încât $B(a,r) \subset A$. Atunci $\overset{\circ}{\widehat{B(a,r)}} \subset \overset{\circ}{A}$ şi cum $\overset{\circ}{\widehat{B(a,r)}} = B(a,r)$, rezultă că $(\forall) a \in \overset{\circ}{A}$ am găsit $r > 0$ astfel încât $B(a,r) \subset \overset{\circ}{A}$, deci $\overset{\circ}{A}$ este o mulţime deschisă. În particular, $\overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$ este deschisă şi conform (a), rezultă că mulţimea $\complement \bar{A}$ este deschisă, deci $\bar{A}$ este închisă.

(c) Avem conform (a) $\mathrm{Fr}\, A = \bar{A} \cap \overline{\complement A} = \bar{A} \cap C \overset{\circ}{A} = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Faptul că $\mathrm{Fr}\, A$ este mulţime închisă, rezultă observând că ea este intersecţia a doi închişi.

Corolar. (a) *A este deschisă dacă şi numai dacă* $A = \overset{\circ}{A}$;
(b) *A este închisă dacă şi numai dacă* $A = \bar{A}$.

Demonstraţie. (a) $A = \overset{\circ}{A}$, atunci conform teoremei 1.2 (b) rezultă că A este deschisă. Reciproc, presupunem că A este deschisă; atunci $A \subset \overset{\circ}{A}$ căci $(\forall)x \in A$, $(\exists)r > 0$ astfel încât $B(x, r) \subset A$, deci $x \in \overset{\circ}{A}$; cum are loc incluziunea $\overset{\circ}{A} \subset A$, rezultă că $A = \overset{\circ}{A}$.

(b) A este închisă $\leftrightarrow \complement A$ este deschisă $\overset{cf.(a)}{\longleftrightarrow} \complement A = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}} = \complement \bar{A} \leftrightarrow A = \bar{A}$.

Teorema următoare dă caracterizarea mulţimilor închise cu ajutorul şirurilor.

Teorema 1.3. *Fie X un spaţiu metric şi $A \subset X$ o submulţime.*

(a) *Un punct $x \in X$ aparţine lui $\bar{A}$ dacă şi numai dacă există un şir $\{x_n\}$ de puncte din A astfel încât $x_n \overset{\hat{\imath}n\ X}{\longrightarrow} x$.*

(b) *Mulţimea A este închisă dacă şi numai dacă limita oricărui şir convergent de puncte din A aparţine lui A.*

Demonstraţie. (a) Fie $x \in \bar{A}$; atunci pentru $n \geq 1$ întreg, bila $B\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$ intersectează A şi alegem $x_n \in A \cap B\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$. Se obţine un şir $\{x_n\}$ de puncte din A astfel încât $d(x_n, x) < \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{d}(x_n, x) = 0$, adică $x_n \overset{\text{în } X}{\longrightarrow} x$. Reciproc, dacă $\{x_n\}$ este un şir de puncte din A şi $x_n \overset{\text{în } X}{\longrightarrow} x$, atunci în orice bilă centrată în x se află puncte ale şirului, deci puncte din A, adică $x \in \bar{A}$.

(b) Presupunem A închisă şi $x_n \overset{\text{în } X}{\longrightarrow} x$, $x_n \in A$. Atunci $x \in \bar{A}$. Dar A fiind închisă, rezultă că $\bar{A} = A$, deci $x \in A$. Reciproc, dacă limita oricărui şir convergent de puncte din A aparţine lui A, atunci conform (a) rezultă că $\bar{A} \subset A$. Incluziunea $A \subset \bar{A}$ fiind evidentă, rezultă că $\bar{A} = A$, adică A este mulţime închisă.

Definiţia 1.3. *O submulţime $A \subset X$ se numeşte* **densă** *dacă orice punct din spaţiul întreg X este limita unui şir convergent de puncte din A.*

Corolar. *O submulţime $A \subset X$ este densă dacă şi numai dacă $\bar{A} = X$.*

Demonstraţie. A este densă $\leftrightarrow$ orice punct $x \in X$ este limita unui şir de puncte din $A \leftrightarrow$ orice punct $x \in X$ aparţine lui $\bar{A} \leftrightarrow X \subset \bar{A} \leftrightarrow X = \bar{A}$.

Exemplu. 1) Pe dreapta reală $X = \mathbb{R}$ submulţimile $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sunt dense (căci orice număr real este limita unui şir convergent de numere raţionale, ca şi limita unui şir de numere iraţionale). Similar, mulţimea $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ a punctelor de coordonate raţionale din $\mathbb{R}^2$ este densă.

2) Conform teoremei enunţate anterior (teorema lui Weierstrass), rezultă că funcţiile polinomiale formează o mulţime densă în spaţiul funcţiilor continue $[a, b] \to \mathbb{R}$, pentru orice interval închis şi mărginit fixat $[a, b]$.

3.1.2 Mulţimi compacte

Definiţia 1.4. *O submulţime $K \subset X$ a unui spaţiu metric (X, d) se numeşte* **compactă** *(sau un* **compact***) dacă ori de câte ori $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} D_i$, D_i deschişi din X, rezultă că există o submulţime finită J a lui I astfel încât $K \subset \bigcup\limits_{i\in J} D_i$.*

Aşadar, mulţimile compacte au proprietatea definitorie că din orice acoperire deschisă a lor se poate extrage o subacoperire finită. (Incluziunea $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} D_i$ se citeşte astfel: mulţimea K admite acoperirea $\{D_i\}_{i\in I}$ sau familia $\{D_i\}_{i\in I}$ formează o acoperire a lui K).

Lema 1. *Orice mulţime compactă K dintr-un spaţiu metric X este închisă şi mărginită în X.*

Demonstraţie. Probăm mai întâi incluziunea $\bar{K} \subset K$. Fie $(\forall) x \in \bar{K}$ fixat. Dacă prin absurd am avea $x \notin K$, atunci pentru orice $y \in K$ se pot alege bile centrate în x, y disjuncte, adică există $r_y > 0$, $r'_y > 0$ astfel încât $B(x, r_y) \cap B(y, r'_y) = \emptyset$. Bilele $\{B(y, r'_y)\}_{y \in K}$ formează o acoperire deschisă a lui K, deci există o subacoperire finită a lui K, adică există un număr finit de puncte $y_1, \ldots, y_s \in K$ şi numere reale strict pozitive $r_1, \ldots r_s$, $r'_1, \ldots, r'_s$ astfel încât $B(x, r_i) \cap B(y_i, r'_i) = \emptyset$, $1 \leq i \leq s$. Luăm $r = \min(r_1, \ldots r_s)$. Atunci bila $B(x, r)$ nu intersectează nici una din bilele $B(y_i, r'_i)$, deci nu intersectează K, ceea ce contravine ipotezei că $x \in \bar{K}$. Am probat deci incluziunea $\bar{K} \subset K$, deci $K = \bar{K}$ şi ca atare, mulţimea K este închisă (conform corolarului teoremei 1.2).

Pentru a arăta că mulţimea K este mărginită, fixăm un punct $a \in X$. Are loc incluziunea $K \subset \bigcup_{n \geq 1} B(a, n)$, deoarece $(\forall) z \in K$, alegem n natural astfel încât $n > \mathrm{d}(z, a)$, deci $z \in B(a, n)$. Cum K este compactă, din această acoperire deschisă se extrage o subacoperire finită, deci K este conţinută într-o bilă $B(a, N)$, adică mulţimea K este mărginită.

Teorema dificilă care urmează arată că în spaţii metrice compacitatea "cu acoperiri deschise" revine la compacitatea "cu şiruri".

Teorema 1.4. *Fie X un spaţiu metric; o submulţime $K \subset X$ este compactă dacă şi numai dacă orice şir de puncte din K are un subşir convergent în K.*

Demonstraţie. Presupunem K compactă şi fie $\{x_n\}_{n \geq 0}$ un şir de puncte din K. Dacă acest şir nu are nici un subşir convergent în K (deci nici în X, conform lemei anterioare şi teoremei 1.3 (b)), atunci mulţimile $D_0 = X \setminus \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, $D_1 = X \setminus \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, $D_2 = X \setminus \{x_2, x_3, \ldots\}$ etc. sunt deschise în X şi acoperă K. Atunci există un număr finit de mulţimi D_i, $i \geq 0$ acoperind K şi cum $D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \ldots$, rezultă că există N astfel încât $K \subset D_N$, ceea ce este absurd, deoarece $x_N \in K$ şi $x_N \notin D_N$.

Probăm acum afirmaţia reciprocă. Observăm mai întâi că are loc următoarea aserţiune:

$(\forall)\ \varepsilon > 0$ *există o acoperire finită a lui K cu bile de rază ε.* (1)

Într-adevăr, presupunând că acest fapt nu ar avea loc, fixăm un punct $x_0 \in K$. Deoarece $K \not\subset B(x_0, \varepsilon)$, există $x_1 \in K$ astfel încât $x_1 \notin B(x_0, \varepsilon)$; apoi există $x_2 \in K$ astfel încât $x_2 \notin B(x_0, \varepsilon)$, $x_2 \notin B(x_1, \varepsilon)$, deoarece $K \not\subset B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon)$ etc. Şirul $\{x_n\}_{n \geq 0}$ astfel construit are proprietatea că $\mathrm{d}(x_m, x_n) \geq \varepsilon$, $(\forall) m, n \geq 0$, deci nu poate avea subşiruri convergente, ceea ce contravine ipotezei.

Trecem la demonstrarea faptului că mulţimea K este compactă; fie $K \subset \bigcup_{i \in I} D_i$, D_i deschişi din X. Vom proba în prealabil următoarea afirmaţie:

există $\varepsilon > 0$ *astfel încât* $(\forall) x \in K$, *există* $i \in I$ *cu* $B(x, \varepsilon) \subset D_i$. (2)

Într-adevăr, în caz contrar, luăm $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ şi există $x_n \in K$ astfel încât $(\forall) i \in I$, $B\left(x_n, \dfrac{1}{n}\right) \not\subset D_i$. Conform ipotezei, şirul $\{x_n\}_{n \geq 1}$ are un subşir convergent $x_{k_n} \xrightarrow{\text{în } K} a$ şi cum deschişii D_i acoperă K, există $i_0 \in I$ astfel încât $a \in D_{i_0}$. Cum D_{i_0} este deschis, există $r > 0$ real cu $B(a, r) \subset D_{i_0}$. Pentru n suficient de mare avem atunci $\mathrm{d}(a, x_{k_n}) < \dfrac{r}{2}$, $\dfrac{1}{k_n} < \dfrac{r}{2}$, deci $B\left(x_{k_n}, \dfrac{1}{k_n}\right) \subset B(a, r) \subset D_{i_0}$, ceea ce conduce la o contradicţie. Pentru acoperirea deschisă $\{D_i\}_{i \in I}$ a lui K alegem $\varepsilon > 0$ astfel încât să aibă loc aformaţia (2). Conform aserţiunii (1), pentru acest ε există o acoperire finită a lui K cu bile de rază ε. Cum fiecare din aceste bile este conţinută în câte un deschis D_i cel puţin, rezultă că aceste D_i (în număr finit !) acoperă de asemenea K.

Corolar 1. *Un spaţiu metric X este compact dacă şi numai dacă orice şir de puncte din X are un subşir convergent.*

Corolar 2. *Dacă X şi Y sunt spaţii metrice compacte, atunci $X \times Y$ este spaţiu metric compact. (Pe mulţimea $X \times Y$ se introduce distanţa d punând $d(z_1, z_2) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$, $(\forall) z_1 = (x_1, y_1) \in X \times Y$, $(\forall) z_2 = (x_2, y_2) \in X \times Y$. Convergenţa în $X \times Y$ revine la convergenţa pe componente, ca în cazul $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).*

Demonstraţie. Pentru a arăta că $X \times Y$ ete spaţiu compact se aplică corolarul 1; fie $z_n = (x_n, y_n)$, $n \geq 0$ un şir de puncte din $X \times Y$. Cum X este compact, şirul $\{x_n\}_{n \geq 0}$ are un subşir convergent $x_{k_n} \xrightarrow{\text{în } X} a$; şirul $\{y_{k_n}\}_{n \geq 0}$ are la rândul lui un subşir convergent (căci Y este compact) $y_{l_{k_n}} \xrightarrow{\text{în } Y} b$ şi evident $x_{l_k} \xrightarrow{\text{în } X} a$. Aşadar, şirul $\{z_n\}_{n \geq 0}$ are un subşir convergent în $X \times Y$, anume $(x_{l_{k_n}}, y_{l_{k_n}}) \to (a, b)$.

Corolarul 2 se extinde imediat la cazul unui număr finit de spaţii metrice compacte.

Corolar 3. *Orice paralelipiped închis $P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p]$ din $\mathbb{R}^p$ este compact.*

Demonstraţie. Observăm mai întâi că orice interval închis şi mărginit $[a, b]$ de pe dreapta reală este mulţime compactă. Acest fapt rezultă din teorema 1.4 în modul următor: fie $\{x_n\}_{n \geq 0}$ un şir de puncte din $[a, b]$; acest şir este mărginit şi conform lemei lui Cesaró, va avea un subşir convergent către un punct din $\overline{[a, b]} = [a, b]$.

Aşadar, paralelipipedul P rezultă compact, ca produs cartezian finit de mulţimi compacte.

Exemple. Intervalul [0,1], dreptunghiul $[0, 1] \times [3, 5]$ sunt mulţimi compacte; dar intervalul $[0, 1)$, ca şi spaţiile $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ nu sunt compacte.

Teorema care urmează dă caracterizarea mulţimilor comapcte din $\mathbb{R}^p$ cu $p \geq 1$ fixat arbitrar. Ea permite obţinerea de multe alte exemple de mulţimi compacte.

Teorema 1.5. *O submulţime $K \subset \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită.*

Demonstraţie. Dacă K este mulţime compactă, atunci K este închisă şi mărginită, conform lemei 1. Reciproc, fie K închisă şi mărginită. Atunci există un paralelipiped compact P ca în corolarul 3 al teoremei 1.4 astfel încât $K \subset P$. Pentru a proba compacitatea lui K aplicăm teorema 4.1: fie $\{x_n\}_{n \geq 0}$ un şir de puncte din K; acest şir aparţine lui P şi cum P este compact, şirul $\{x_n\}_{n \geq 0}$ are un subşir convergent $x_{k_n} \xrightarrow{\text{în } P} a$. Cum $x_{k_n} \in K$, rezultă $a \in \bar{K} = K$ (aplicând teorema 1.3, (a)); aşadar $x_{k_n} \xrightarrow{\text{în } K} a$.

3.1.3 Mulţimi convexe, mulţimi stelate

Presupunem $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ fiind fixat. Pentru orice două puncte, $a, b \in \mathbb{R}^n$ se numeşte **segment închis de capete** a, b, submulţimea

$$[a, b] = \{z_\lambda = (1 - \lambda)a + \lambda b | \lambda \in [0, 1]\} \text{ din } \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

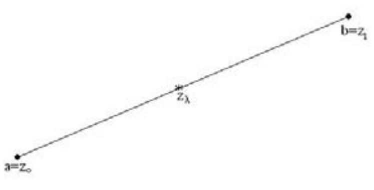


Fig. III.2

Pentru $n = 1, 2, 3$, regăsim noţiunea uzuală de segment (fig. III. 2).

Definiţia 1.5. *O mulţime $S \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte* **stelată** *dacă există un punct $a \in S$, nu neapărat unic, astfel încât pentru orice $x \in S$, să avem $[a, x] \subset S$; aşadar, acel punct a poate fi unit cu orice ale punct din S printr-un segment închis conţinut în S.*

O mulţime $C \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte **convexă** *dacă pentru orice $a, b \in C$ avem $[a, b] \subset C$; aşadar, pentru orice două puncte din C, segmentul închis care le uneşte este conţinut în C.*

Exemple. 1) Orice bilă deschisă (sau închisă) şi orice paralelipiped în $\mathbb{R}^n$ sunt mulţimi convexe. În $\mathbb{R}$ mulţimile convexe sunt exact intervalele.

2) Orice mulţime convexă este stelată. Reciproca este falsă; mulţimea $\mathbb{R}^2 \setminus T$, $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0,\ y = 0\}$ este stelată, fără a fi convexă. Mulţimea $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ nu este stelată, deci nici convexă.

3) Intersecţia oricărei familii de mulţimi convexe din $\mathbb{R}^n$ este o mulţime convexă; verificarea este imediată.

Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \neq 0$ o funcţie liniară, adică există constante reale $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nu toate nule astfel încât $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$. Orice mulţime de forma $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha\}$, α real dat, se numeşte *hiperplan*, iar mulţimile de forma $\{f < \alpha\} \triangleq \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \alpha\}$, $\{f \leq \alpha\}$, $\{f > \alpha\}$, $\{f \geq \alpha\}$, se numesc *semispaţii* definite de f şi α. Se probează fără dificultate că hiperplanele şi semispaţiile sunt mulţimi convexe; în cazul $n = 2$ hiperplanele sunt drepte, iar semispaţiile sunt semiplane.

Orice intersecţie de semispaţii din $\mathbb{R}^n$ se numeşte *poliedron convex*; vom numi *poliedru convex* orice poliedron convex care în plus este compact (în cazul $n = 2$ se regăsesc poligoanele convexe; de exemplu, interiorul unui triunghi reunit cu frontiera este intersecţia a trei semiplane şi este un poligon convex).

3.1.4 Exerciţii

1. Să se arate că orice mulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}$ este reuniune cel mult numărabilă de intervale deschise.

Indicaţie. Pentru orice $a \in D$ se aleg numere raţionale α, β astfel încât $a \in (\alpha, \beta) \subset D$. Atunci D este reuniunea intervalelor de forma (α, β).

2. Fie X un spaţiu metric, $A \subset X$, $a \in X$. Punctul a se numeşte *punct izolat al lui A* dacă $a \in A$ şi există $r > 0$ astfel încât $A \cap B(a,r) = \{a\}$. Punctul a se numeşte *punct de acumulare al lui A* dacă $a \in \overline{A \setminus a}$, adică în orice vecinătate a lui a se află o infinitate de elemente din A.

Presupunând $X = \mathbb{R}$, să se afle punctele izolate şi punctele de acumulare ale mulţimilor $\mathbb{Z}$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 0}$, $\mathbb{Q}$, $\left\{\cos \frac{n\pi}{2}\right\}_{n \geq 0}$. Similar pentru cazul $X = \mathbb{R}^2$ şi submulţimile $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n \geq 1}$, $\left\{\left(n, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n \geq 1}$.

3. Fie X un spaţiu metric şi $A \subset X$. Să se arate că $\overset{\circ}{A}$ este cel mai mare deschis al lui X conţinut în A, iar $\overline{A}$ este cel mai mic închis al lui X care conţine A (relativ la ordinea definită de incluziune).

4. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset X$; probaţi că (A, d) este de asemenea spaţiu metric (numit *subspaţiu al lui X*). Fie $X = \mathbb{R}$ şi $A = [-1, 1]$, cu distanţa euclidiană. Să se arate că mulţimea $D = [-1, 0)$ este deschisă în A, dar nu şi în X.

5. Fie D a submulţime a lui $\mathbb{R}^2$. Să se arate că:

a) D este deschisă dacă şi numai dacă $(\forall)(x,y) \in D$ există deschişi D_1, D_2 în $\mathbb{R}$ astfel încât $x \in D_1$, $y \in D_2$ şi $D_1 \times D_2 \subset D$;

b) Dacă D', D'' sunt deschişi în $\mathbb{R}$, atunci $D' \times D''$ este deschis în $\mathbb{R}^2$, dar nu orice deschis din $\mathbb{R}^2$ este de această formă.

6. Fie submulţimea $M = [10, 100]$ a lui $\mathbb{R}$. Să se arate că familia intervalelor deschise din $\mathbb{R}$ de lungime 1 formează o acoperire deschisă a lui M; să se indice o subacoperire finită a lui M. Care este numărul minim de astfel de intervale acoperind M ?

7. a) Să se arate că intersecţia şi reuniunea a două mulţimi compacte din $\mathbb{R}^2$ sunt compacte; generalizare.

b) Să se arate că dacă X este un spaţiu metric şi $x_n \overset{\text{în } X}{\longrightarrow} a$, atunci mulţimea $\{a, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ este compactă în X.

8. O mulţime $A \subset X$ dintr-un spaţiu metric X se numeşte *relativ compactă* dacă închiderea ei $\bar{A}$ este compactă. Să se arate că:

a) în $\mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$ o mulţime este relativ compactă dacă şi numai dacă este mărginită;

b) în spaţiul $X = \mathbb{Q}$ mulţimea $\{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$ este mărginită, fără a fi relativ compactă.

9. Fie $0 < \alpha < \beta$ numere reale fixate. Să se arate că mulţimile $\{|z| \le \alpha\}$, $\{\alpha \le |z| \le \beta\}$, $\{\alpha \le \operatorname{Re} z \le \beta\}$, $\{\alpha \le \operatorname{Im} z \le \beta\}$ din $\mathbb{C}$ sunt închise. Care din ele sunt compacte ?

10. Să se arate că $\mathbb{R}$ este spaţiu metric compact, dar $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{M}_A$ nu au această proprietate.

11. Să se arate că orice dreptunghi închis $[a, b] \times [c, d]$ din $\mathbb{R}^2$ este un compact convex; daţi exemple de submulţimi din $\mathbb{R}^2$ care sunt compacte neconvexe sau convexe necompacte.

12. Să se stabilească care din submulţimile următoare ale lui $\mathbb{C}$ sunt deschise, închise, compacte, convexe: $\{z \in \mathbb{C} | |z| \le 1\}$, $\{|z-1| = 1\}$, $\{1 < |z| \le 2\}$, $\{-1 \le \operatorname{Re} z \le 2\}$, $\{|z-2| > 1\}$, $\{|z-1| \ge 1$, $\{2 \le |z-2i| \le 4\}$.

3.2 Continuitate

3.2.1 Aplicaţii continue; caracterizare, tipuri particulare

Fie X, Y două spaţii metrice, în care convenim să notăm cu aceeaşi literă d distanţele respective. Fixăm o aplicaţie $f : X \to Y$.

Reamintim că termenii "aplicaţie" şi "funcţie" sunt sinonimi; în mod tacit, în consideraţii generale se foloseşte cu precădere termenul de aplicaţie.

În cele ce urmează, sunt cuprinse cazurile particulare

1) $X \subset \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ (tratat în liceu);

2) cazul aplicaţiilor vectoriale $X \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$, $m, n \ge 1$;

3) cazul câmpurilor scalare $X \to \mathbb{R}$ şi al câmpurilor vectoriale $X \to \mathbb{R}^3$ $(X \subset \mathbb{R}^3)$;

4) cazul funcţiilor complexe $X \to \mathbb{C}$ $(X \subset \mathbb{C})$.

Definiţia 2.1. *Aplicaţia f se numeşte* **continuă într-un punct** $x_0 \in X$ *dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(x_0)$, există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $f(U) \subset V$. Dacă f nu este continuă în x_0 ea se numeşte* **discontinuă** *în x_0. Dacă f este continuă în fiecare punct $x_0 \in X$, se spune că f* **este continuă pe** X.

Teorema 2.1. (caracterizarea continuităţii într-un punct). *Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie între spaţiile X, Y şi $x_0 \in X$ un punct fixat. Atunci sunt echivalente următoarele afirmaţii*:

(a) *f este continuă în x_0 ("definiţia cu vecinătăţi")*;

(b) $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)\delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $(\forall)x \in X$, $d(x, x_0) < \delta$ *implică* $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, *adică* $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$ *("definiţia cu $\varepsilon - \delta$")*;

(c) *pentru orice şir convergent* $a_n \xrightarrow{\text{în } X} x_0$, *rezultă* $f(a_n) \xrightarrow{\text{în } Y} f(x_0)$, *("definiţia cu şiruri")*.

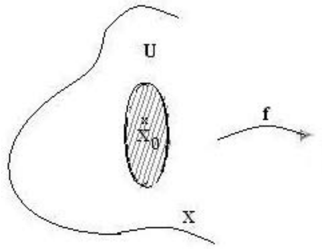


Fig. III.3a

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b). Presupunem că f este continuă în x_0 în sensul definiţiei 2.1 şi fie $(\forall)\varepsilon > 0$ fixat. Considerând vecinătatea $V = B(f(x_0), \varepsilon)$ a lui $f(x_0)$, există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $f(U) \subset V$. Dar atunci există $\delta > 0$ astfel încât $B(x_0, \delta) \subset U$ deci $f(B(x_0, \delta)) \subset f(U) \subset V = B(f(x_0), \varepsilon)$, de unde rezultă (b).

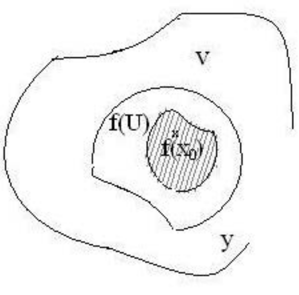


Fig. III.3b

(b) $\Rightarrow$ (c). Presupunem că f verifică condiţia (b) relativ la punctul x_0 şi fie $a_n \xrightarrow{\text{în } X} x_0$. Avem de arătat că $f(a_n) \xrightarrow{\text{în } Y} f(x_0)$ şi pentru aceasta fixăm $\varepsilon > 0$ arbitrar. Conform ipotezei (b), există $\delta > 0$ astfel încât ori de câte ori $x \in X$, $\mathrm{d}(x, x_0) < \delta$, să rezulte $\mathrm{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Cum $a_n \to x_0$, există un rang N astfel ca $\mathrm{d}(a_n, x_0) < \delta$, $(\forall)n \ge N$, adică $\mathrm{d}(f(a_n), f(x_0)) < \varepsilon$ pentru orice $n \ge N$; aşadar, $f(a_n) \xrightarrow{\text{în } Y} f(x_0)$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Raţionăm prin reducere la absurd; presupunem aşadar că deşi are loc condiţia (c), totuşi există o vecinătate V a lui $f(x_0)$ astfel încât oricare ar fi vecinătatea U a lui x_0 să avem $f(U) \not\subset V$. Pentru orice $n \ge 1$ natural, luăm $U = B\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)$. Cum $f\left(B\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)\right) \not\subset V$, există $a_n \in B\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)$ astfel încât $f(a_n) \notin V$. Aşadar $\mathrm{d}(a_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$, deci $a_n \to x_0$. Conform ipotezei (c) rezultă $f(a_n) \to f(x_0)$, deci de la un rang încolo, $f(a_n) \in V$, absurd.

Afirmaţiile (a), (b), (c) fiind logic echivalente, oricare din ele poate fi luată ca definiţie a continuităţii unei aplicaţii într-un punct. Sensul intuitiv al continuităţii lui f în x_0 este următorul: "la variaţii *suficient* de mici ale lui x_0 corespund variaţii *oricât* de mici ale lui $f(x_0)$". Continuitatea unei funcţii nu poate fi testată pe un calculator.

Exemple. 1) Fie X un spaţiu metric şi $a \in X$ un punct fixat. Aplicaţia identică $1_X : X \to X$ şi aplicaţia constantă $f : X \to X$, $x \mapsto a$ ($a \in X$ fixat) sunt evident continue pe X (folosind de exemplu (c)).

2) Fie $p \geq 1$ fixat. Aplicaţiile de proiecţie $\pi_k : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq p$ definite prin $\pi_k(z_1, \ldots, z_p) = z_k$ sunt continue pe $\mathbb{R}^p$. Într-adevăr, fie $(\forall)a = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ fixat şi $x_n \xrightarrow{\text{în } \mathbb{R}^p} a$; conform caracterizării convergenţei şirurilor din $\mathbb{R}^p$ pe componente, rezultă că $x_n^k \to a_k$ (în $\mathbb{R}$), adică $\pi_k(x_n) \to \pi_k(a)$ şi ca atare, fiecare aplicaţie π_k este continuă pe $\mathbb{R}^p$.

3) Din liceu este cunoscut faptul că orice funcţie reală elementară este continuă pe orice deschis conţinut în domeniul ei de definiţie.

Teorema 2.2. *Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie între două spaţii metrice.*

(a) *f este continuă pe X dacă şi numai dacă $f^{-1}(D)$ este deschisă în X pentru orice deschis D din Y;*

(b) *f este continuă pe X dacă şi numai dacă $f^{-1}(I)$ este închisă în X, oricare ar fi mulţimea închisă I din Y.*

Demonstraţie. (a) Fie f continuă pe X şi D un deschis în Y. Avem de arătat că mulţimea $f^{-1}(D)$ este deschisă în X. Pentru aceasta, fie $a \in f^{-1}(D)$ un punct arbitrar, deci $f(a) \in D$ şi cum D este deschis, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(f(a), \varepsilon) \subset D$. Conform teoremei 2.1 (b), f fiind continuă în a, există $\delta > 0$ astfel încât $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon) \subset D$, adică $B(a, \delta) \subset f^{-1}(D)$.

Reciproc, presupunem că f "întoarce" deschişi din Y în deschişi din X şi arătăm că f este continuă în fiecare punct $x_0 \in X$. Fie V o vecinătate oarecare a lui $f(x_0)$, deci există o bilă deschisă $D = B(f(x_0), \varepsilon) \subset V$; conform ipotezei $f^{-1}(D)$ este un deschis în X conţinând x_0 şi astfel găsim o vecinătate a lui x_0, anume $U = f^{-1}(D)$ astfel ca $f(U) \subset D \subset V$. Aşadar, am probat condiţia (a) din teorema 2.1 şi ca atare, f rezultă continuă în x_0.

(b) Rezultă direct din (a) folosind faptul că $f^{-1}(Y \setminus I) = X \setminus f^{-1}(I)$ şi că închişii coincid cu complementarele de deschişi.

Teorema 2.3. (continuitatea aplicaţiilor compuse). *Fie $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ două aplicaţii între spaţii metrice şi $x_0 \in X$. Dacă f este continuă în x_0 şi g este continuă în punctul $f(x_0)$, atunci compunerea $g \circ f$ este continuă în x_0. În particular, dacă f este continuă pe X, iar g este continuă pe Y, atunci $g \circ f$ este continuă pe X.*

Demonstraţie. Folosim teorema 2.1 (c). Fie orice şir convergent $u_n \xrightarrow{\text{în } X} x_0$; atunci $f(u_n) \xrightarrow{\text{în } Y} f(x_0)$ şi $g(f(u_n)) \xrightarrow{\text{în } Z} g(f(x_0))$, folosind ipoteza asupra funcţiilor f şi g. Aşadar, $(g \circ f)(u_n) \xrightarrow{\text{în } Z} (g \circ f)(x_0)$, deci $g \circ f$ este continuă în punctul x_0. Partea secundă a enunţului este imediată, deoarece pentru orice $x_0 \in X$, rezultă că $g \circ f$ este aplicaţie continuă în x_0.

Funcţii continue cu valori reale

Fixăm o funcţie continuă $f : X \to \mathbb{R}$ definită pe un spaţiu metric X. În acest caz, mulţimea $Z_f = \{x \in X | f(x) = 0\}$ a zerourilor lui f este închisă, deoarece $Z_f = f^{-1}(0)$, $\{0\}$ este mulţime închisă în $\mathbb{R}$ şi aplicăm teorema 2.2 (b).

Definiţia 2.2. *Se numeşte* **suport** *al funcţiei* $f : X \to \mathbb{R}$ *închiderea mulţimii* $\{x \in X | f(x) \neq 0\}$*, adică mulţimea*

$$\operatorname{supp} f \triangleq \overline{\complement Z_f} = \complement \overset{\circ}{Z}_f \ , \tag{4}$$

ultima relaţie decurgând din teorema 1.2.

Aşadar, suportul unei funcţii f este complementara interiorului lui Z_f, deci complementara celui mai mare deschis pe care f se anulează.

Exemple. 1) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dacă } x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Atunci $Z_f = (-\infty, -\pi] \cup \{0\} \cup [\pi, \infty)$ şi $\operatorname{supp} f = [-\pi, \pi]$.

2) Fie $X = \mathbb{R}^2$ şi funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 & \text{dacă } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Atunci $\operatorname{supp} f = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3) O clasă importantă de funcţii $X \to \mathbb{R}$ o constituie clasa $C_0(X)$ *a funcţiilor continue cu suport compact*, având suportul o mulţime compactă. Astfel, orice funcţie reală continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nulă în afara unui interval mărginit aparţine lui $C_0(\mathbb{R})$. Semnalul unitate $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definit prin

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x < 0. \end{cases}$$

nu are suport compact, deoarece $\operatorname{supp} \sigma = [0, \infty)$. Semnalele în timp, având suport compact, sunt nule în afara unui interval de timp $[t_0, t_1]$ şi "acţionează nebanal" doar între momentele de timp t_0 şi t_1.

Teorema 2.4. *Fie* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *funcţii continue şi* $\lambda \in \mathbb{R}$ *o constantă reală. Atunci funcţiile* $f + g$, $f - g$, λf, fg *sunt funcţii continue* $X \to \mathbb{R}$ *şi la fel este funcţia* $g/f : X \setminus Z_f \to \mathbb{R}$*, definită pe deschisul* $X \setminus Z_f$*. Funcţiile* $|f|$, $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$, $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ *sunt de asemenea continue.*

Demonstraţia rezultă imediat folosind definiţia continuităţii cu şiruri (teorema 2.1 (c)).

Corolar 1. *Fie* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *funcţii continue. Atunci mulţimile* $D_1 = \{x \in X | f(x) < g(x)\}$, $D_2 = \{x \in X | f(x) > g(x)\}$ *sunt deschise, iar* $I_1 = \{x \in X | f(x) \leq g(x)\}$, $I_2 = \{x \in X | f(x) \geq g(x)\}$ *sunt închise.*

Demonstraţie. Notăm $f - g = h$; aşadar, h este funcţie continuă. Intervalele $(-\infty, 0), (0, \infty)$ sunt mulţimi deschise, iar $(-\infty, 0], [0, \infty)$ sunt mulţimi închise. Corolarul rezultă aplicând teorema 2.2 şi observând că $D_1 = h^{-1}((-\infty, 0))$, $D_2 = h^{-1}((0, \infty))$, $I_1 = h^{-1}((-\infty, 0])$, $I_2 = h^{-1}([0, \infty))$.

Corolar 2. *Fie* $f, g : X \to \mathbf{R}$ *funcţii continue, coincizând pe o submulţime densă* $A \subset X$*. Atunci* $f = g$*.*

Demonstraţie. Notăm $I = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$. Mulţimea I este închisă (căci $I = I_1 \cap I_2$, cu notaţiile din corolarul 1) şi cum f şi g coincid pe A, rezultă că $A \subset I$. Atunci rezultă $\bar{A} \subset \bar{I} = I$ şi cum A este densă (adică $\bar{A} = X$), rezultă $X = I$, adică $f = g$ pe întreg X.

Teorema 2.5. (păstrarea semnului pe o vecinătate). *Fie* $f : X \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă într-un punct* $x_0 \in X$*. Dacă* $f(x_0) > 0$ *(respectiv* $f(x_0) < 0$*), atunci* f *este pozitivă (respectiv negativă) într-o vecinătate a lui* x_0*.*

Demonstraţie. Presupunem $f(x_0) > 0$ şi alegem $\varepsilon > 0$ astfel încât $f(x_0) > \varepsilon$. Considerăm vecinătatea lui $f(x_0)$, $V = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Deoarece f este continuă, există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $f(U) \subset V$; $(\forall)z \in U$, avem $f(z) \in V$, deci $f(z) > f(x_0) - \varepsilon$ şi ca atare, f este pozitivă pe U. Cazul $f(x_0) < 0$ se tratează la fel.

Teorema 2.6. *Fie $f_1, \ldots, f_p : X \to \mathbb{R}$ funcţii definite pe un spaţiu metric şi $F : X \to \mathbb{R}^p$ aplicaţia definită prin $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$, $(\forall)x \in X$. Aplicaţia F este continuă pe X dacă şi numai dacă $f_1, \ldots, f_p$ sunt continue pe X.*

Demonstraţie. Presupunem că F este continuă; avem $f_k = \pi_k \circ F$, $1 \leq k \leq p$, unde $\pi_k : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sunt aplicaţiile de proiecţie, deci aplicaţiile f_k sunt continue. Reciproc, dacă $f_1, \ldots, f_p$ sunt continue pe X atunci $(\forall)a \in X$ şi pentru orice şir $x_n \stackrel{\text{în } X}{\longrightarrow} a$, rezultă că $f_k(x_n) \to f_k(a)$, $1 \leq k \leq p$; conform caracterizării convergenţei şirurilor în $\mathbb{R}^p$, se obţine că $(f_1(x_n), \ldots, f_p(x_n)) \stackrel{\text{în } \mathbb{R}^p}{\longrightarrow} (f_1(a), \ldots, f_p(a))$, adică $F(x_n) \stackrel{\text{în } \mathbb{R}^p}{\longrightarrow} F(a)$, deci F este continuă în punctul a.

Exemple. 1) Funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ este continuă deoarece componentele ei $f_1(t) = t^2$, $f_2(t) = t^3$ sunt continue pe $\mathbb{R}$. În mod similar, funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(u + v) \mapsto (u + v, uv)$ este continuă.

2) De asemenea, dacă $A = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 | z > 0\}$, atunci câmpul vectorial $A \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto \left(\frac{xy}{z}, \ln z, x - y\right)$, notat echivalent $\bar{v} = \frac{xy}{z}\bar{\imath} + \ln z \bar{\jmath} + (x - y)\bar{k}$, relativ la un reper ortogonal de versori $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$, este continuu pe A.

3) Fie X un spaţiu metric şi o funcţie $f : X \to \mathbb{C}$ cu valori complexe; se pot asocia trei funcţii cu valori reale, anume $P : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$ (*partea reală a lui* f); $Q : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{Im} f(x)$ (*partea imaginară a lui* f) şi $|f| : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$ (*modulul lui* f). Utilizând definiţia continuităţii cu şiruri (sau aplicând teorema 2.6 pentru $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, rezultă că funcţia f este continuă pe X dacă şi numai dacă funcţiile P, Q sunt continue. De asemenea, dacă f este continuă pe X, atunci $|f| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ este continuă (Se mai scrie $f = P + iQ$).

Aplicaţii liniare şi continue între spaţii vectoriale normate

Fie E, F două spaţii vectoriale normate reale şi $f : E \to F$ o aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară; aşadar, $(\forall)x, y \in E$, $(\forall)\lambda \in \mathbb{R}$, avem $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. În particular, $f(0) = 0$.

Teorema 2.7. *Sunt echivalente afirmaţiile*:
(a) *f este continuă pe E*;
(b) *f este continuă în originea lui E*;
(c) există $C > 0$ real astfel încât $||f(x)|| \leq C||x||$, $(\forall)x \in E$.

Demonstraţie. Implicaţia (a) $\Rightarrow$ (b) este evidentă.

(b) $\Rightarrow$ (c). Scriem că f este continuă în punctul $x_0 = 0$, folosind definiţia continuităţii cu $\varepsilon - \delta$. Luând $\varepsilon = 1$, există un număr $\delta > 0$ astfel încât de îndată ce $x \in E$, $||x|| = \mathrm{d}(x, 0) < \delta$ să avem $||f(x)|| = \mathrm{d}(f(x), f(0)) < 1$. Alegem $C = \frac{2}{\delta}$ şi probăm că $||f(x)|| \leq C||x||$, $(\forall)x \in E$. Dacă $x = 0$ această inegalitate este evidentă; iar dacă $x \neq 0$, notăm $y = \delta\frac{x}{2||x||}$, deci $||y|| = \frac{\delta}{2||x||}||x|| = \frac{\delta}{2}$. Ca atare, $||f(y)|| < 1$, adică $\left\|f\left(\frac{\delta}{2||x||}x\right)\right\| < 1$ şi cum f este $\mathbb{R}$-liniară rezultă $\left\|\frac{\delta}{2||x||} \cdot f(x)\right\| < 1$, adică $||f(x)|| \leq \frac{2}{\delta}||x|| = C||x||$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Fie $(\forall)x_0 \in E$ fixat şi fie orice şir convergent $a_n \stackrel{\text{în } E}{\longrightarrow} x_0$. Atunci din condiţia (c) rezultă că

$$0 \leq ||f(a_n) - f(x_0)|| = ||f(a_n - x_0)|| \leq C||a_n - x_0||, \quad (\forall)n \geq 0.$$

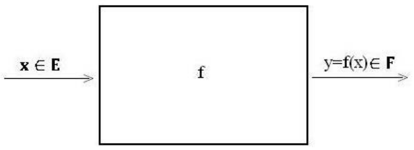


Fig. III.4

De aici se deduce că $f(a_n) \overset{\text{în } F}{\longrightarrow} f(x_0)$, adică f este continuă în punctul x_0.

Observaţie. Considerăm un sistem intrare-ieşire, în care intrările şi ieşirile sunt elemente ale spaţiilor vectoriale E şi F respectiv şi oricărei intrări $x \in E$ îi corespunde ieşirea $y = f(x)$ (scriem $x \mapsto y$). Presupunem că f este o aplicaţie liniară şi continuă. Proprietatea de liniaritate este o exprimare a "principiului suprapunerii", conform căruia de îndată ce $x_i \to y_i$ şi λ_i sunt scalari reali, $1 \le i \le p$, rezultă că $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \mapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i$. Conform teoremei 2.7, rezultă că există o constantă reală $C > 0$ astfel încât $||y|| \le C||x||$, deci $\frac{||y||}{||x||} \le C$, $(\forall) x \in E$, $x \ne 0$. Aşadar constanta C apare ca un grosisment al sistemului, ca un majorant al rapoartelor între normele semnalelor corespunzătoare de ieşire şi intrare, Numărul real

$$\inf\{C > 0 | \; ||f(x)|| \le C||x||, \quad (\forall) x \in E\}$$

exprimă o proprietate a sistemului f şi este notat $||f||$ (*norma lui* f). Se probează fără dificultate că $||f(x)|| \le ||f|| \cdot ||x||$, $(\forall) x \in E$.

Studiem acum cazul când spaţiile E şi F sunt finit dimensionale.

Corolar. *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 1)$ *o aplicaţie* $\mathbb{R}$*-liniară. Atunci* f *este continuă şi transformă mulţimi mărginite în mulţimi mărginite.*

Demonstraţie. Pentru început considerăm cazul $m = 1$; fie $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza canonică în $\mathbb{R}^n$ şi $c_i = f(e_i)$, $1 \le i \le n$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ avem $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ şi $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$. De aici rezultă că f este polinom de gradul I (pentru $m = 1$) şi ca atare este funcţie continuă.

Trecând la cazul general, pentru o aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oarecare rezultă că toate cele m componente $f_1, \dots, f_m$ ale lui f sunt continue şi utilizând teorema 2.6 rezultă că f este continuă.

Apoi conform teoremei 2.7 există $C > 0$ astfel încât $||f(x)|| \le C||x||$, $(\forall) x \in \mathbb{R}^n$. Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ o submulţime mărginită; deci există $\rho > 0$ astfel încât $M \subset B(0, \rho)$. Atunci $f(M) \subset B(0, \rho C)$, deoarece $(\forall) z \in f(M)$, avem $z = f(x)$ cu $x \in M$ deci $\mathrm{d}(z, 0) = ||z|| = ||f(x)|| \le C||x|| < \rho C$, adică $z \in B(0, \rho C)$. Aşadar, mulţimea $f(M)$ este conţinută într-o bilă din $\mathbb{R}^m$, deci este mărginită.

Demonstrăm acum un rezultat de mare însemnătate principială privind aplicaţiile analizei în conjugare cu metodele numerice.

Teorema 2.8. *Fie un interval compact fixat* $[a, b]$*,* $a < b$*.*

(a) *Luarea integralei, adică aplicaţia*

$$\mathcal{I} : C^0_{[a,b]} \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

este o aplicaţie continuă.

(b) *Operatorul de derivare*

$$\mathcal{D} : C^1_{[a,b]} \to C^0_{[a,b]}, \; f \mapsto f'$$

este o aplicaţie discontinuă în orice punct.

Demonstraţie. Pe spaţiul vectorial real $C^0_{[a,b]}$, ca şi pe subspaţiul $C^1_{[a,b]}$ al acestuia, se consideră norma uniformă.

(a) Pentru orice $f \in C^0_{[a,b]}$ avem

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x, \quad \text{deci } |\mathcal{I}(f)| \le \int_a^b ||f|| \mathrm{d}x = (b - a)||f||.$$

Am verificat astfel condiţia (c) a teoremei 2.7 şi aplicaţia $\mathcal{I}$ fiind $\mathbb{R}$-liniară, ea rezultă continuă.

(b) Deoarece $\mathcal{D}$ este aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară, este suficient (conform teoremei 2.7) să probăm că ea este discontinuă în origine. Pentru aceasta, este deajuns să indicăm un şir $\{f_n\}_{n\geq 0}$ de funcţii din $C^1_{[a,b]}$ astfel încât $f_n \xrightarrow{\text{UC}} 0$, dar $\mathcal{D}(f_n) \not\to 0$, adică $f_n \overset{\text{UC}}{\not\to} 0$.

În acest scop, luăm $f_n(x) = (\sin nx)/\sqrt{n}$ deci $f_n \xrightarrow{\text{UC}} 0$ pe intervalul $[a,b]$; pe de altă parte, $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$, deci $||f_n'|| = \sqrt{n}$ (pentru orice $n \geq \dfrac{2\pi}{b-a}$), deci şirul $\{f_n'\}$ nu este uniform convergent către 0, adică $\mathcal{D}f_n \not\to 0$ în $C^0_{[a,b]}$.

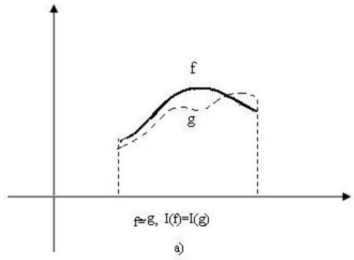


Fig. III.5a

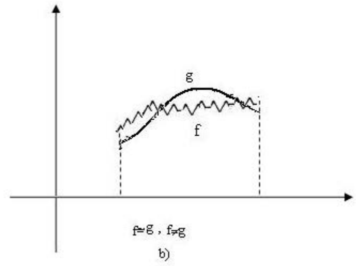


Fig. III.5b

Observaţie. Teorema 2.8 explică de ce integrala, spre deosebire de derivată, este mai bine adaptată aplicării metodelor aproximative (căci la variaţii suficient de mici ale lui f corespund variaţii oricât de mici pentru $\mathcal{I}(f)$, în timp ce două funcţii derivabile pot avea graficul "foarte apropiat" relativ la distanţa uniformă, dar derivatele să nu aibă o proprietate similară (fig. III. 5a şi b).

3.2.2 Proprietăţi ale funcţiilor continue pe spaţii compacte

Teorema 2.9. *Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie continuă între două spaţii metrice. Dacă $K \subset X$ este o mulţime compactă, atunci imaginea directă $f(K)$ este submulţime compactă a lui Y.*

Demonstraţie. Fie $\{V_i\}_{i\in I}$ o acoperire a lui $f(K)$ cu deschişi din Y, $f(K) \subset \bigcup\limits_{i\in I} V_i$; atunci $K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i\in I} V_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(V_i)$; cum f este continuă, mulţimile $D_i = f^{-1}(V_i)$, $i \in I$ sunt deschise în X (teorema 2.2 (a)). Din relaţia $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} D_i$ şi din ipoteza de compacitate a lui K, rezultă că există o submulţime finită $J \subset I$ astfel încât $K \subset \bigcup\limits_{i\in J} D_i$, deci

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{i\in J} D_i\right) = \bigcup_{i\in J} f(D_i) = \bigcup_{i\in J} f(f^{-1}(V_i)) \subset \bigcup_{i\in J} V_i$$

şi astfel, din acoperirea $\{V_i\}_{i\in I}$ a lui $f(K)$ am extras o subacoperire finită $\{V_i\}_{i\in J}$. Aşadar, mulţimea $f(K)$ este compactă.

Definiţia 2.3. *O funcţie numerică $f : X \to \mathbb{R}$ se numeşte* **mărginită** *dacă mulţimea $f(X)$ a lui $\mathbb{R}$ este mărginită; în acest caz se notează $\sup\limits_X f = \sup f(X)$, $\inf\limits_X f = \inf f(X)$ şi se spune că f* **îşi atinge marginile** *pe X dacă există puncte $\alpha \in X$, $\beta \in X$ astfel încât $\sup\limits_X f = f(\alpha)$, $\inf\limits_X f = f(\beta)$.*

Teorema care urmează constituie un rezultat fundamental.

Teorema 2.10. *Fie $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă numerică pe un spaţiu metric compact X. Atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile.*

Demonstraţie. Submulţimea $f(X)$ a lui $\mathbb{R}$ este compactă conform teoremei 2.9, deci este închisă şi mărginită (conform teoremei 1.5). Aşadar, funcţia f este mărginită. În plus, numerele reale $\sup\limits_X f$, $\inf\limits_X f$ aparţin lui $\overline{f(X)}$ şi cum $\overline{f(X)} = f(X)$, rezultă că $\sup\limits_X f$, $\inf\limits_X f$ aparţin lui $f(X)$ deci sunt atinse.

Exemple. 1) Funcţia $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{1}{x}$ este evident continuă, dar nu este mărginită; marginile ei în $\bar{\mathbb{R}}$ sunt $\inf f = 1$, $\sup f = \infty$ şi nu sunt atinse. Aceasta arată de ce condiţia ca X să fie compact este esenţială în teorema 2.10.

2) Fie A, B, C trei puncte distincte în plan şi X triunghiul ABC (interiorul reunit cu frontiera sa obţinută reunind cele trei laturi). Atunci suma $MA +$

$MB+MC$, unde M este un punct oarecare din planul triunghiului, are minimul şi maximul atinse în X. Într-adevăr, X este compact, suma $MA+MB+MC$ "variază continuu cu punctul M" şi se aplică teorema 2.10 (fixând un reper în planul triunghiului, suma respectivă este funcţie continuă de coordonatele punctului M).

Teorema 2.11. *Mulţimea C_X a tuturor funcţiilor continue $X \to \mathbb{R}$, definite pe un spaţiu compact, are o structură de spaţiu Banach relativ la norma uniformă.*

Demonstraţie. Mai întâi, observăm că orice funcţie $f \in C_X$ este mărginită (conform teoremei 2.10). Aşadar, $C_X \subset \mathcal{M}_X$ şi reamintim că spaţiul $\mathcal{M}_X$ este un spaţiu Banach relativ la norma uniformă (teorema II. 3.6). Este evident că spaţiul C_X este un SVN şi rămâne de dovedit completitudinea lui C_X. Fie pentru aceasta $\{f_n\}_{n\geq 0}$ un şir Cauchy în C_X; el va fi şir Cauchy în $\mathcal{M}_X$ şi cum $\mathcal{M}_X$ este complet, rezultă că şirul $\{f_n\}_{n\geq 0}$ converge către un element f în $\mathcal{M}_X$, adică $f_n \xrightarrow{UC} f$. Deoarece funcţiile f_n sunt continue, rezultă că f este continuă (teorema II. 4.3), adică şirul $\{f_n\}$ converge către f în C_X.

Definiţia 2.4. *O funcţie $f : X \to Y$ între două spaţii metrice se numeşte* **uniform continuă pe** X *dacă este îndeplinită următoarea condiţie:* $(\forall)\varepsilon > 0$ $(\exists)\ \delta > 0$ *astfel încât* $(\forall)x, y \in X$, $d(x, y) < \delta$, *să avem*

$$\mathrm{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{5}$$

Funcţia f se numeşte **lipschitziană** (după numele lui R. LIPSCHITZ, 1832-1903) dacă există o constantă reală $C > 0$ astfel încât $\mathrm{d}(f(x), f(y)) \leq C\mathrm{d}(x, y)$, $(\forall)x, y \in X$.

Evident, dacă f este lipschitziană, atunci ea este uniform continuă căci $(\forall)\varepsilon > 0$ se ia $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$ şi se probează banal condiţia (5)).

Exemplu. 1) Orice funcţie reală $f : I \to \mathbb{R}$ definită pe un interval, derivabilă cu derivata mărginită pe I este lipschitziană; într-adevăr, fie $M > 0$ astfel încât $|f'(x)| \leq M$, $(\forall)x \in I$. Atunci pentru orice $x, y \in I$ avem $f(x) - f(y) = (x-y)f'(\xi)$ cu $\xi \in I$, deci $|f(x)-f(y)| = |x-y|\cdot|f'(\xi)| \leq M|x-y|$, $(\forall)x, y \in I$.

Aşadar, orice funcţie din $C^1_{[a,b]}$ este lipschitziană.

2) Pentru o aplicaţie $f : X \to Y$ între două spaţii metrice, au loc evident implicaţiile:

$$f \text{ contracţie} \Rightarrow f \text{ lipschitziană} \Rightarrow f \text{ uniform continuă} \Rightarrow f \text{ continuă}.$$

Remarcăm că există funcţii continue, care nu sunt uniform continue. De exemplu, considerăm funcţia continuă $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Dacă f ar fi uniform continuă, atunci pentru $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ există $\delta > 0$ astfel încât $x, y \in (0, 1]$, $|x - y| < \delta$ să implice $|f(x) - f(y)| < \dfrac{1}{2}$. Luăm $x = \dfrac{1}{n}$, $y = \dfrac{1}{n+1}$ cu n natural ales astfel încât $\dfrac{2}{n} < \delta$. Atunci $|x - y| < \dfrac{2}{n} < \delta$, deci $|f(x) - f(y)| < \dfrac{1}{2}$; dar $f(x) = f\left(\dfrac{1}{n}\right) = n$, $f(y) = n + 1$ şi rezultă $|n - (n + 1)| < \dfrac{1}{2}$, adică $1 < \dfrac{1}{2}$, absurd.

Pentru o funcţie $f : X \to Y$ ca mai sus, deosebirea dintre definiţia continuităţii şi cea a uniform continuităţii revine la o permutare de cuantificatori logici:

$$f \text{ continuă pe } X : (\forall)x_0 \in X\ (\forall)\varepsilon > 0\ (\exists)\delta > 0 \text{ astfel încât } (\forall)x \in X$$
$$(\mathrm{d}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \mathrm{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon);$$

$$f \text{ uniform continuă pe } X : (\forall)\varepsilon > 0\ (\exists)\delta > 0 \text{ astfel încât } (\forall)x \in X$$
$$(\forall)x_0 \in X\ (\mathrm{d}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \mathrm{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

Am văzut că aceste noţiuni sunt distincte; are loc totuşi

Teorema 2.12. *Dacă $f : X \to Y$ este o funcţie continuă şi X este compact, atunci f este uniform continuă.*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că nu ar fi îndeplinită condiţia (5). Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(\forall)\delta > 0$ să existe $x, y \in X$, $\mathrm{d}(x, y) < \delta$ pentru care $\mathrm{d}(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Luând $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$ găsim puncte $x_n, y_n \in X$, astfel încât $\mathrm{d}(x_n, y_n) < \dfrac{1}{n}$ şi $\mathrm{d}(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. În spaţiul compact X şirul $\{x_n\}_{n\geq 1}$ are un subşir convergent $x_{k_n} \overset{\text{în } X}{\longrightarrow} \xi$ folosind teorema 1.4.). Din relaţia $\mathrm{d}(x_n, y_n) < \dfrac{1}{n}$, $(\forall)n \geq 1$ rezultă că $y_{k_n} \overset{\text{în } X}{\longrightarrow} \xi$. Deoarece f este continuă, rezultă că $f(x_{k_n}) \to f(\xi)$, $f(y_{k_n}) \to f(\xi)$, adică $\mathrm{d}(f(x_{k_n}), f(x_{k_n})) \to 0$ pentru $n \to \infty$.
Aceasta contravine faptului că $\mathrm{d}(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$, $(\forall)n \geq 1$.

Vom da o consecinţă importantă a acestei teoreme. Mai întâi este necesară

Definiţia 2.5. *O funcţie reală $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numeşte* **funcţie în scară** *dacă există o diviziune $(\Delta) : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ a intervalului $[a, b]$ astfel încât f să fie constantă pe fiecare din intervalele semi-deschise $[a, x_1), [x_1, x_2), \ldots, [x_{n-1}, b)$ ale diviziunii.*

Se verifică imediat că suma, diferenţa şi produsul a două funcţii în scară pe $[a, b]$ sunt de asemenea funcţii în scară.

Corolar. *Orice funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este limita unui şir uniform convergent de funcţii în scară.*

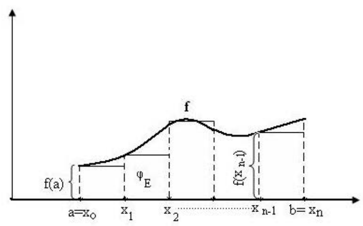


Fig. III.6

Demonstraţie. Fixăm $\varepsilon > 0$ arbitrar. Conform teoremei 2.12 există $\delta > 0$ astfel încât de îndată ce $x, y \in [a, b]$ şi $|x - y| < \delta$, să rezulte că $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Alegem puncte echidistante de diviziune $x_0 = a$, $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ astfel încât $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n} < \delta$, pentru orice $1 \leq i \leq n$ şi considerăm funcţia în scară $\varphi_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(a) & \text{dacă} \quad x \in [a, x_1) \\ f(x_1) & \text{dacă} \quad x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \\ f(x_{n-1}) & \text{dacă} \quad x \in [x_{n-1}, b] \end{cases}$$

Este evident că $||\varphi_\varepsilon - f|| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |\varphi_\varepsilon - f(x)| \leq \varepsilon$, ultima relaţie fiind o consecinţă a faptului că orice punct $x \in [a, b)$ aparţine unui interval $[x_{i-1}, x_i)$, $1 \leq i \leq n$ al diviziunii şi cum $x_i - x_{i-1} < \delta$, rezultă că $|\varphi_\varepsilon(x) - f(x)| \leq |f(x_{i-1}) - f(x)| < \varepsilon$; această relaţie are loc şi pentru $x = b$.

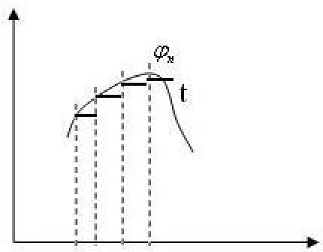


Fig. III.7

Reţinem deci că pentru orice $\varepsilon > 0$ am găsit o funcţie în scară φ_ε astfel încât $||\varphi_\varepsilon - f|| \leq \varepsilon$. Luând $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$, există atunci funcţii în scară $\varphi_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $||\varphi_n - f|| \leq \dfrac{1}{n}$ şi ca atare $\varphi_n \overset{\text{UC}}{\longrightarrow} f$; fig. III. 7.

Am dovedit astfel că orice funcţie reală continuă pe un interval compact poate fi aproximată uniform oricât de bine printr-o funcţie în scară. De exemplu, orice semnal $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuu, cu suport compact poate fi aproximat uniform prin sume finite de semnale "dreptunghiulare".

3.2.3 Proprietăţi ale funcţiilor continue pe mulţimi conexe

Definiţia 2.6. *Fie X un spaţiu metric; o submulţime $A \subset X$ se numeşte neconexă dacă există mulţimi deschise nevide D_1, D_2 în X astfel încât*

$$D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset,\ D_1 \cap A \neq \emptyset,\ D_2 \cap A \neq \emptyset \text{ şi } A \subset D_1 \cup A_2. \qquad (6)$$

Mulţimea A se numeşte **conexă** *dacă nu este neconvexă.* **Domeniu în** *X este orice deschis conex.*

Aşadar, din condiţia (6) rezultă că spaţiul X însuşi este conex dacă şi numai dacă nu există două mulţimi deschise nevide, disjuncte D_1, D_2 în X astfel încât $X = D_1 \cup D_2$; reţinem că X este conex $\leftrightarrows$ orice mulţime nevidă deschisă şi închisă coincide cu X.

Exemplu. Dacă X este un spaţiu metric şi $a \neq b$ sunt puncte distincte din X, atunci mulţimea $A = \{a, b\}$ este neconexă deoarece se verifică (6) pentru $D_1 = X \setminus \{a\}$, $D_2 = X \setminus \{b\}$. Similar, pe dreapta reală $X = \mathbb{R}$, mulţimea $A = (-1, 1) \cup (2, 4)$ este neconexă (luând $D_1 = (-1, 1)$, $D_2 = (2, 4)$).

Exemple sugestive de mulţimi conexe, ca şi dezvăluirea sensului intuitiv al definiţiei 2.6, vor fi date puţin mai târziu. Sunt necesare câteva pregătiri.

Teorema 2.13. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, o funcţie reală continuă.*

(a) *Dacă $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încât $f(\xi) = 0$;*

(b) *Fie $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Pentru orice punct u fixat, $m < u < M$, există $\eta \in [a, b]$ astfel încât $f(\eta) = u$.*

(c) *Dacă în plus f este strict monotonă, atunci f stabileşte o bijecţie $[a, b] \to [m, M]$, iar inversa f^{-1} este de asemenea continuă şi strict monotonă.*

Demonstraţie. (a) Notăm $I_0 = [a, b]$. Aşadar, funcţia f ia valori de semn contrar la capetele lui I_0; împărţim I_0 în două subintervale, de lungimi egale, f ia de asemenea valori de semn contrar la capetele unuia din cele două subintervale închise (pe care îl notăm cu I_1); continuăm acest procedeu şi găsim un şir descendent de intervale compacte $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ astfel încât $l(I_n) \to 0$; fie $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ (respectiv $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$) capetele acestor intervale în care funcţia f este pozitivă (respectiv negativă). Conform teoremei II.1.3 există $\xi \in \bigcap\limits_{n \geq 0} I_n$, deci $\alpha_n \to \xi$, $\beta_n \to \xi$ şi cum f este continuă, rezultă $f(\alpha_n) \to f(\xi)$, $f(\beta_n) \to f(\xi)$, pentru $n \to \infty$. Deoarece $f(\alpha_n) \geq 0$, $f(\beta_n) \leq 0$, $(\forall) n \geq 0$ rezultă că $f(\xi) \geq 0$ şi $f(\xi) \leq 0$, adică $f(\xi) = 0$.

(b) Conform definiţiei inf, sup, rezultă că există puncte $\alpha, \beta \in [a, b]$ astfel încât $m \leq f(\alpha) < u < f(\beta) \leq M$. Notăm $F(x) = f(x) - u$ şi obţinem astfel o funcţie continuă luând valori de semn contrar în punctele α, β deci aplicând (a), există un punct η situat între α, β astfel încât $F(\eta) = 0$, adică $f(\eta) = u$.

(c) Cum f este strict monotonă, ea este injectivă, iar surjectivitatea rezultă din (b) şi din faptul că m, M sunt atinse (conform teoremei 2.10); se verifică imediat că f^{-1} este de asemenea strict monotonă, iar faptul că f^{-1} este continuă rezultă observând că întoarce închişii în închişi (dacă $I \subset [a, b]$ este o mulţime închisă, ea este compactă şi atunci mulţimea $(f^{-1})^{-1}(I) = f(I)$ este compactă conform teoremei 2.9, deci închisă).

Observaţii. Teorema 2.13 este atribuită lui B. Bolzano şi lui G. Darboux. Punctul (b) se mai numeşte "teorema valorilor intermediare"; el se extinde şi la cazul intervalelor deschise, eventual nemărginite, anume: dacă $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ este o funcţie continuă şi dacă $m = \inf f$, $M = \sup f$ (calculate în $\mathbb{R}$, atunci f ia orice valoare din intervalul (m, M) cel puţin o dată.

Teorema 2.14. *Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie continuă între două spaţii metrice şi $A \subset X$ o mulţime conexă. Atunci mulţimea $f(A) \subset Y$ este de asemenea conexă.*

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că $f(A)$ ar fi neconexă. Atunci conform condiţiei (6) ar rezulta că există mulţimi deschise nevide V_1, V_2 în Y astfel încât $V_1 \cap V_2 \cap f(A) = \emptyset$, $V_1 \cap f(A) \neq \emptyset$, $V_2 \cap f(A) \neq \emptyset$ şi $f(A) \subset V_1 \cup V_2$. Deoarece f este continuă rezultă că mulţimile $D_1 = f^{-1}(V_1)$, $D_2 = f^{-1}(V_2)$ sunt deschise în X şi se verifică că $D_1 \neq \emptyset$, $D_2 \neq \emptyset$ (căci există puncte în $V_1 \cap f(A)$ şi în $V_2 \cap f(A)$); în plus, $D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$, $D_1 \cap A \neq \emptyset$,

$D_2 \cap A \neq \emptyset$ şi $A \subset D_1 \cup D_2$, deci mulţimea A ar fi neconexă în X, ceea ce este absurd.

Corolar 1. *Un spaţiu metric X este conex dacă şi numai dacă orice funcţie continuă $f : X \to \{0,1\}$ (având doar două valori !) este constantă.*

Demonstraţie. Fie X conex; dacă ar exista o funcţie continuă $f : X \to \{0,1\}$ neconstantă, ar rezulta că $f(X) = \{0,1\}$. Dar din teorema 2.14, rezultă că mulţimea $f(X)$ este conexă, adică mulţimea formată din punctele 0,1 este conexă, ceea ce este absurd.

Reciproc, presupunem că X este un spaţiu metric şi că orice funcţie continuă $f : X \to \{0,1\}$ este constantă. Avem de arătat că X este conex; în caz contrar, există mulţimi deschise nevide D_1, D_2 în X astfel încât $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 \cup D_2 = X$ şi funcţia $f : X \to \{0,1\}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x \in D_1 \\ 1 & \text{dacă} \quad x \in D_2 \end{cases}$$

este continuă şi neconstantă, ceea ce contravine ipotezei.

Corolar 2. *Fie X un spaţiu metric şi $\{A_i\}_{i \in I}$ o familie de părţi conexe ale lui X având intersecţia nevidă. Atunci mulţimea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ este conexă în X.*

Demonstraţie. Folosim corolarul 1 şi fie $f : A \to \{0,1\}$ o funcţie continuă oarecare. Din ipoteză rezultă că $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$ şi presupunem de exemplu că $f(a) = 0$ (cazul $f(a) = 1$ se tratează similar). Rezultă atunci că $f = 0$ pe A; într-adevăr, $(\forall) x \in A$, există $i \in I$ astfel încât $x \in A_i$. Cum $f|A_i$ este continuă, A_i conexă şi $a \in A_i$, rezultă că f este constantă pe A_i, deci $f(x) = f(a) = 0$. În concluzie, f este constantă pe A, deci conform corolarului 1, rezultă că A este conexă.

Teorema 2.15. *O submulţime $A \subset R$ este conexă dacă şi numai dacă A este un interval (reamintim că o mulţime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte interval dacă din faptul că numerele $a < b$ aparţin lui A şi $a \leq c \leq b$, rezultă că c aparţine lui A adică A este convexă).*

Demonstraţie. Presupunem că mulţimea $A \subset \mathbb{R}$ este conexă; dacă A nu ar fi un interval, ar rezulta că există numere reale a, b, c astfel încât $a < c < b$, $a \in A$, $b \in A$, $c \notin A$. Luând $D_1 = \{x \in \mathbb{R} | x < c\}$, $D_2 = \{x \in \mathbb{R} | x > c\}$, se verifică condiţia (6) şi A ar rezulta neconexă.

Reciproc, presupunem că A este un interval. Dacă A ar fi neconex, atunci conform corolarului 1 anterior ar rezulta că există o funcţie continuă neconstantă $f : A \to \{0,1\}$. Dar conform teoremei 2.13, b) această funcţie trebuie să ia valoarea $\frac{1}{2}$, ceea ce este absurd, deoarece f ia numai valorile 0 şi 1.

Corolar. *Fie $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă numerică reală pe un spaţiu metric conex. Dacă există puncte a, b în X astfel încât $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, atunci există $\xi \in X$ astfel ca $f(\xi) = 0$.*

Demonstraţie. Conform teoremei 2.14 rezultă că $f(X)$ este o submulţime conexă a lui $\mathbb{R}$, deci este un interval; atunci $[f(a), f(b)] \subset f(X)$. Dar 0 aparţine intervalului $[f(a), f(b)]$, deci $0 \in f(X)$.

Exemple. 1) Fie $a, b \in \mathbb{R}^n$ puncte fixate; funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (1-t)a + tb$ este continuă, definită pe mulţimea conexă [0,1]. Atunci mulţimea $f([0,1]) = \{(1-t)a + tb | t \in [0,1]\}$, adică segmentul închis $[a, b]$ de capete a, b (definit în §1.3), rezultă conex.

2) Orice mulţime stelată din $\mathbb{R}^n$ este conexă; în particular, orice mulţime convexă este conexă. (Într-adevăr, fie $S \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime stelată şi $a \in S$ un punct astfel încât $[a, x] \subset S$ pentru orice $x \in S$. Atunci S este tocmai

reuniunea tuturor segmentelor $[a,x]$, $x \in S$ şi aplicând corolarul 2 anterior, rezultă că S este mulţime conexă).

Teorema care urmează dă o caracterizare foarte utilă a domeniilor din $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), ca deschişi în care orice două puncte pot fi unite printr-o linie poligonală. Se numeşte **linie poligonală** unind două puncte a, b din $\mathbb{R}^n$ o submulţime $L \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât să existe puncte $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p \in \mathbb{R}^n$ şi $L = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{p-1}, x_p] \cup [x_p, b]$.

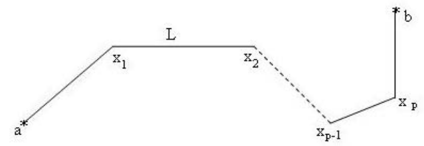


Fig. III.8

Aşadar, o linie poligonală de capete a, b este juxtapunerea (reuniunea) unui număr finit de segmente închise, primul având capătul în a, iar ultimul având extremitatea în b.

Teorema 2.16. *Fie A un deschis nevid din $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) fixat. Sunt echivalente următoarele afirmaţii:*

(a) *A este mulţime conexă (adică un domeniu în $\mathbb{R}^n$);*

(b) *orice două puncte din A pot fi unite printr-o linie poligonală conţinută în A.*

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b). Fie $a, b \in A$ orice două puncte fixate. Notăm $D_1 = \{x \in A |$ există o linie poligonală conţinută în A, unind x şi $a\}$ şi $D_2 = A \setminus D_1$. Evident, D_1 este deschis, $a \in D_1$ şi de asemenea, D_2 este deschis (deoarece centrul unei bile poate fi unit printr-un segment cu orice alt punct al bilei). Dacă $D_2 \neq \emptyset$, atunci ar rezulta imediat că mulţimea A ar fi neconexă, ceea ce contravine ipotezei (a). Aşadar, $D_2 = \emptyset$, adică $D_1 = A$ şi ca atare $b \in D_1$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Fixăm $a \in A$. Pentru orice punct $b \in A$ se poate alege o linie poligonală L_b conţinută în A şi unind punctele a, b. Atunci L_b este mulţime conexă (aplicând succesiv corolarul 2 al teoremei 2.14) şi în plus, mulţimea $A = \bigcup\limits_{b \in A} L_b$ rezultă conexă, ca reuniune de mulţimi conexe având un punct comun (anume a).

3.2.4 Noţiunea de limită într-un punct

Fixăm o aplicaţie $f : A \to Y$, $A \subset X$, unde X, Y sunt spaţii metrice.

Fixăm de asemenea un punct $a \in X$. Pentru orice vecinătate V a lui a notăm $\dot{V} = V \setminus \{a\}$. Ne vom situa în cazul cel mai important pentru aplicaţii, anume presupunem că a este punct de acumulare al mulţimii A, adică pentru orice vecinătate V a lui a, avem $\dot{V} \cap A \neq \emptyset$.

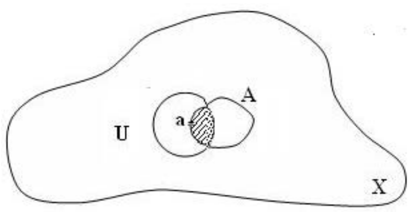


Fig. III.9a

Definiţia 2.7. *În aceste condiţii, un element $l \in Y$ se numeşte* **limita lui f în punctul** *a (şi se scrie $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$) dacă pentru orice vecinătate V a lui l în Y există o vecinătate U a lui a în X astfel încât $f(\dot{U} \cap A) \subset V$.*

Teorema 2.17 (caracterizarea noţiunii de limită). *Fie $f : A \to Y$, $A \subset X$ şi punctul a ca mai sus. Sunt echivalente afirmaţiile:*

(a) $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) f(x)$ (*"definiţia cu vecinătăţi"*);

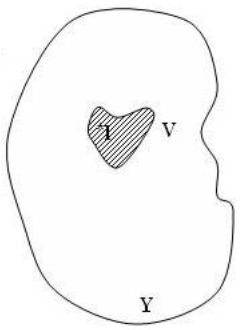


Fig. III.9b

(b) $(\forall)\varepsilon > 0$ $(\exists)\delta > 0$ *astfel încât* $(\forall)x \in A \setminus \{a\}$, $d(x, a) < \delta$, *să rezulte* $\mathrm{d}(f(x), l) < \varepsilon$ (*"definiţia cu $\varepsilon - \delta$"*);

(c) *pentru orice şir convergent de puncte din $A \setminus \{a\}$, $x_n \xrightarrow{\text{în } X} a$, rezultă $f(x_n) \xrightarrow{\text{în Y}} l$* (*"definiţia cu şiruri"*).

Demonstraţia urmează îndeaproape pe cea a teoremei 2.1. Trebuie remarcat că dacă există, atunci limita este unică (conform (c)).

În ipoteza că $a \notin A$, afirmaţiile de mai sus sunt echivalente cu afirmaţia:

(d) funcţia $\bar{f} : A \cup \{a\} \to Y$, $\quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in A \\ l & \text{dacă } x = a \end{cases}$

este continuă în punctul a.

Într-adevăr, dacă $\tilde{f}$ este continuă în a şi V este o vecinătate a lui $\tilde{f}(a) = l$, atunci există o vecinătate U a lui a aşa încât $\tilde{f}(U \cap (A \cup \{a\})) \subset V$ deci

$f(\dot{U} \cap A) \subset V$; aşadar (d) $\Rightarrow$ (a). Demonstrăm acum implicaţia (a) $\Rightarrow$ (d): fie V o vecinătate oarecare a punctului $\tilde{f}(a) = l$. Atunci din ipoteza (a) rezultă că există o vecinătate U a lui a astfel încât $f(\dot{U} \cap A) \subset V$ deci $\tilde{f}(U \cap (A \cup \{a\})) \subset V$, adică $\tilde{f}$ este continuă în punctul a.

Corolar 1. *Fie $f : A \to Y$, $A \subset X$ şi a punct de acumulare al lui A, $a \in A$. Atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă limita $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ există şi este egală cu $f(a)$.*

Demonstraţie. Dacă f este continuă în a, atunci pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$ există o vecinătate U a lui a astfel încât $f(U \cap A) \subset V$, deci cu atât mai mult $f(\dot{U} \cap A) \subset V$ şi ca atare, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$. Reciproc, fie $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$. Atunci $(\forall)\varepsilon > 0$ $(\exists)\delta > 0$ astfel încât $(\forall)x \in A \setminus \{a\}$, să avem $\mathrm{d}(f(x), f(a)) < \varepsilon$, de îndată ce $\mathrm{d}(x, a) < \delta$. Acelaşi lucru se întâmplă şi pentru $x = a$, deci f este continuă în punctul a.

Corolar 2. *În condiţiile teoremei 2.17, funcţia f nu are limită în punctul a în cazul când există două şiruri $x'_n \to a$, $x''_n \to a$ din $A \setminus \{a\}$ şi fie că unul din şirurile $\{f(x'_n)\}$, $\{f(x''_n)\}$ nu este convergent, fie că aceste şiruri sunt convergente dar nu au aceeaşi limită.*

Acest fapt rezultă din punctul (c) al teoremei 2.17.

Exemple. 1) Considerăm "funcţia-semn" $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sgn}\, x = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad x > 0 \\ -1 & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x = 0 \end{cases}$$

Limita $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{sgn}\, x$ nu există, deoarece considerăm şirurile $x'_n = \dfrac{1}{n}$, $x''_n = -\dfrac{1}{n}$ tinzând la zero şi $\mathrm{sgn}\,(x'_n) \to 1$, $\mathrm{sgn}\,(x''_n) \to -1$.

2) Fie $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ şi $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(\forall)(x,y) \in A$. Limita $\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in A}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ nu există, deoarece luând şiruri $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\lambda}{n}\right) \to (0,0)$, λ parametru real, avem $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\lambda}{n}\right) = \dfrac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$ şi limita $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\lambda}{n}\right)$ ar depinde de λ.

3) Presupunem $Y = \mathbb{R}$ şi fie $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subset X$ două funcţii numerice astfel încât $|f(x)| \leq g(x)$, $(\forall)x \in A$. Dacă $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = 0$. De exemplu, $\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} = 0$, deoarece $\left|\dfrac{x^3}{x^2 + y^2}\right| \leq |x|$, pentru orice $(x,y) \neq (0,0)$.

Cazuri particulare. 1) În liceu a fost considerat cazul $X = Y = \mathbb{R}$ şi au fost stabilite câteva proprietăţi ale calculului cu limite (referitor la sumă, diferenţă, produs de funcţii, păstrarea inegalităţilor la limită etc.). Acestea se extind direct la cazul când X este spaţiu metric oarecare şi $Y = \mathbb{R}$.

Există proprietăţi specifice ale limitelor de funcţii reale de o variabilă reală (limite laterale, discontinuităţi de speţa I, limite improprii etc.), care au fost studiate în liceu. Reamintim că discontinuităţile eventuale ale unei funcţii monotone sunt de speţa I (adică limitele laterale există şi sunt finite în acele puncte, dar nu sunt egale).

2) Cazul $Y = \mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$ fixat) se reduce la "limita pe componente". Mai precis, dacă $f : A \to \mathbb{R}^p$, $A \subset X$, a sunt ca în definiţia 2.7 şi dacă $f_1, \ldots, f_p : A \to \mathbb{R}$ sunt componentele lui f, atunci $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ există dacă şi numai dacă există $l_k = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_k(x)$, $0 \leq k \leq p$ şi în plus, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = (l_1, \ldots, l_p)$.

Demonstraţia rezultă folosind definiţia limitei cu şiruri, precum şi caracterizarea pe componente a convergenţei şirurilor din $\mathbb{R}^p$.

3) Presupunem $X = \mathbb{R}^p$, ($p \geq 1$ fixat), $A \subset X$ şi a punct de acumulare al lui A. Fie $f : A \to Y$ o aplicaţie fixată. Pentru orice vector $x \neq 0$ din $\mathbb{R}^p$ se poate defini *limita lui f în punctul a, după direcţia lui v*, anume $\lim\limits_{t\to 0} f(a+tv)$. Evident, punctele $x = a + iv$ au proprietatea că vectorul $x - a$ este coliniar cu v.

Dacă $l = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ există, atunci şi limita anterioară există şi este egală cu l (într-adevăr, dacă $t_n \to 0$, atunci $a + t_n v \to a$ deci $f(a + t_n v) \to l$).

Reciproca este falsă, deoarece funcţia $f(x, y) = \dfrac{x^4 - 2x^2y + y^2}{x^4 + y^2}$ are limită în (0,0) pe orice direcţie, deoarece

$$\lim_{t\to 0} f(t\alpha, t\beta) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4\alpha^4 - 2t^3\alpha^2\beta + t^2\beta^2}{t^4\alpha^4 + t^2\beta^2} = 1,$$

pentru orice vector nenul $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, dar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ nu există, aşa cum se observă luând şiruri $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\lambda}{n^2}\right)$, cu λ parametru real.

Observaţie. Sensul precis al afirmaţiei că $\dfrac{0}{0}$ este "nedeterminare" este următorul : pentru orice element $l \in \bar{\mathbb{R}}$ fixat, există două şiruri $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ astfel încât $\dfrac{x_n}{y_n} \to l$; cu alte cuvinte, funcţia $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ este discontinuă în origine şi în vecinătatea originii poate să tindă către orice valoare prescrisă pe anumite şiruri. Similar se precizează sensul afirmaţiei că $0 \cdot \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞ etc. sunt "nedeterminări".

3.2.5 Exerciţii

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să se arate că imaginea directă prin f a unui deschis nu este neapărat un deschis.

Indicaţie. Luăm $D = (-1, 1)$.

2. Se consideră şirul de puncte din $\mathbb{R}^2$

$$u_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{n}, n\right) & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \left(n, \dfrac{1}{n}\right) & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Să se arate că şirul $\{u_n\}_{n\geq 1}$ nu are nici un subşir convergent, deşi componentele sale au subşiruri convergente. Arătaţi că mulţimea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\}$ este închisă necompactă, că $u_n \in A$, $(\forall)n \geq 1$ şi că mulţimile $pr_1(A)$, $pr_2(A)$ nu sunt închise ($pr_k = \pi_k$ sunt proiecţiile $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$).

3. Să se arate că funcţiile $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ şi $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$.

4. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, o funcţie reală şi $x_0 \in [a, b]$ un punct fixat.

a) Presupunem că $(\forall)\varepsilon > 0$ şi $(\forall)\delta > 0$, rezultă $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, de îndată ce $x \in [a, b]$ şi $|x - x_0| < \delta$. Să se arate că f este constantă şi reciproc.

b) Presupunem că $(\exists)\varepsilon > 0$ astfel încât $(\forall)\delta > 0$ avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ de îndată ce $x \in [a, b]$ şi $|x - x_0| < \delta$. Să se arate că f este mărginită pe $[a, b]$. (deci, atenţie la folosirea cuantificatorilor în definiţia continuităţii cu $\varepsilon - \delta$!).

5. Fie $[a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ o matrice de tip $m\times n$ cu coeficienţi reali şi $M = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Se consideră aplicaţia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_m)$, unde $y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$, $1 \le j \le m$. Să se arate că

$$||\varphi(x)|| \le M||x||, \quad (\forall)x \in \mathbb{R}^n.$$

Indicaţie. Avem $||\varphi(x)||^2 = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i\right)^2 \le M^2(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = M^2 \cdot ||x||^2$ etc.

Acest exerciţiu dă o precizare a constantei reale C din teorema 2.7 (c).

6. Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie continuă şi bijectivă între două spaţii metrice, X fiind compact. Să se arate că f^{-1} este continuă.

Indicaţie. f^{-1} întoarce închişi în închişi.

7. Fie X un spaţiu metric compact; să se arate că în spaţiul Banach C_X (teorema 2.11) avem $||fg|| \le ||f|| \cdot ||g||$ şi $||f^n|| \le ||f||^n$, oricare ar fi $f, g \in C_X$ şi $n \ge 0$ întreg.

8. Să se arate că funcţia reală $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sin x$ este uniform continuă pe orice mulţime mărginită din $\mathbb{R}$, dar nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}$. Funcţiile $x \mapsto x$, $x \mapsto \sin x$ sunt totuşi uniform continue pe $\mathbb{R}$ (fiind lipschitziene).

9. Să se dea un exemplu de funcţie reală continuă şi mărginită care nu-şi atinge marginile şi un exemplu de funcţie reală lipschitziană nederivabilă.

10. Fie funcţia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (\cos x, \sin x)$. Să se arate că f este continuă şi că mulţimile $A_1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$, $A_2 = \{x^2 + y^2 < 1\}$, $A_3 = \{x^2 + y^2 > 1\}$ din $\mathbb{R}^2$ sunt conexe.

Indicaţie. Componentele $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$ ale lui f sunt evident continue. Apoi $\{x^2 + y^2 = 1\} = f([0, 2\pi])$ şi se aplică teorema 2.14. Pentru A_2, A_3 se poate aplica teorema 2.16.

11. a) Să se arate că orice paralelipiped închis $P = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ şi orice bilă deschisă din $\mathbb{R}^n$ sunt mulţimi conexe.

b) Să se arate că mulţimile $\{xy = 1\}$, $\{x^2 + y^2 \ge 4,\ x - y = 1\}$ sunt neconexe în $\mathbb{R}^2$.

Indicaţie. a) Este suficient de observat că ele sunt convexe; b) se aplică def. 2.6.

12. Fie X un spaţiu metric şi $X_1 \subset X$ o submulţime nevidă, cu distanţa indusă. Faptul că o mulţime $A \subset X_1$ este deschisă sau închisă depinde de spaţiul "ambiant" (adică de considerarea lui A ca submulţime în X sau în X_1). De exemplu, luând $X = \mathbb{R}$, $X_1 = [0, 1]$, $A = [0, 1)$, rezultă că A este deschis în X_1, dar nu şi în X. Să se arate că proprietatea unei mulţimi de a fi compactă sau conexă este independentă de spaţiul ambiant.

13. Să se arate că graficul unei funcţii reale continue $I \to \mathbb{R}$ (I interval) este mulţime conexă (în $\mathbb{R}^2$). Similar, dacă $g : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi $A \subset \mathbb{R}^2$ este conexă, atunci mulţimea $\{(x, y, g(x, y)) | (x, y) \in A\}$ este conexă (în $\mathbb{R}^2$).

Indicaţie. Graficul lui f este $\mathrm{Gr}\, f = \{(x, f(x)) | x \in I\}$ şi este imaginea directă a lui I prin aplicaţia continuă $I \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, f(x))$ şi se aplică teorema 2.14.

14. Asimilăm suprafaţa Pământului cu o suprafaţă sferică X din $\mathbb{R}^3$ (deci X este mulţime conexă). Să se arate că există două puncte diametral opuse ξ, ξ' pe X având aceeaşi temperatură (în ipoteza că temperatura unui punct variază continuu cu punctul).

Indicaţie. Pentru orice $x \in X$ notăm cu x' diametralul opus lui x şi cu $t(x)$ temperatura în punctul x. Se consideră funcţia continuă $f : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto t(x) - t(x')$ şi se observă că $f(x)f(x') = (t(x) - t(x'))(t(x') - t(x)) = -(t(x) - t(x'))^2 \leq 0$, deci conform corolarului teoremei 2.15 există $\xi \in X$ astfel încât $f(\xi) = 0$, adică $t(\xi) = t(\xi')$.

15. O proprietate a unei mulţimi dintr-un spaţiu metric X se numeşte *proprietate topologică* dacă ea poate fi formulată în termeni de mulţimi deschise din X, utilizând operaţiile uzuale cu mulţimi. Sunt compacitatea, conexitatea, densitatea, proprietăţi topologice? Dar convexitatea în $X = \mathbb{R}^n$?

(Topologia este un domeniu de matematică care studiază proprietăţile topologice ale spaţiilor metrice sau ale unor spaţii mai generale, cele topologice).

16. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă. Să se arate că mulţimea discontinuităţilor lui f este cel mult numărabilă.

Indicaţie. Presupunem f crescătoare. Pentru orice punct de discontinuitate $x_1 \in [a, b]$ a lui f se notează $s(x_1) = f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0)$ (*saltul lui f în x_1*). Să se arate că $s(x_1) \leq f(b) - f(a)$ şi în general, pentru orice număr finit de discontinuităţi $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ale lui f, avem $s(x_1) + \ldots + s(x_p) \leq f(b) - f(a)$. Fie E_1 mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f, situate în $[a, b]$ şi având saltul > 1 şi E_n mulţimea punctelor cu saltul cuprins în intervalul $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]$, $(\forall)n \geq 2$. Atunci mulţimea discontinuităţilor lui f este $\bigcup_{n\geq 1} E_n$, iar mulţimile E_n, $n \geq 1$ sunt finite.

17. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{x^6 + y^3} & \text{dacă} \quad y \neq -x^2 \\ 0 & \text{dacă} \quad y = -x^2. \end{cases}$

Să se arate că restricţia $\varphi_m(x) = f(x, mx)$ a lui f la orice dreaptă $y = mx$ ce trece prin origine este continuă în $x = 0$, fără ca f să fie continuă în origine.

18. Să se studieze existenţa următoarelor limite în origine:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y\neq 0}} \frac{x^2}{y}, \quad \lim_{\substack{z\to 0\\z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}} \frac{z}{|z|}, \quad \lim_{\substack{z\to 0\\z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}} \frac{\bar{z}}{z}.$$

19. Folosind un minicalculator, să se completeze tabloul

x	1	0,5	0,1	0,01	0,001
$\frac{\sin x}{x}$	0,84147	·	0,99833	·	·

Se obţine astfel o demonstraţie a faptului că $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1$?

3.3 Mulţimi măsurabile în $\mathbb{R}^n$

În acest paragraf prezentăm câteva noţiuni preliminare privind măsura mulţimilor în $\mathbb{R}^n$, extinzând în mod natural lungimile, ariile, volumele etc. Cele spuse aici vor fi utilizate îndeosebi în teoria integralei, dar ele întregesc totodată conţinutul capitolului de analiză multidimensională.

3.3.1 Volumul unui paralelipiped

Ne fixăm în spaţiul $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ şi notăm cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ coordonatele unui punct curent.

Definiţia 3.1. *Fie un paralelipiped închis* $P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ *din* $\mathbb{R}^n$. *Se numeşte* **volumul lui** P *numărul real şi pozitiv*

$$\mathrm{V}\,(P) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i). \tag{7}$$

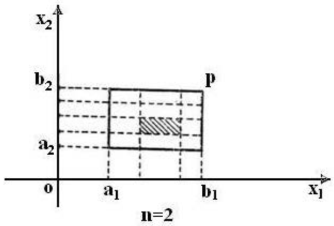


Fig. III.10a

Considerând câte o diviziune a fiecărui interval $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ şi ducând prin punctele de diviziune hiperplane paralele cu hiperplanele de coordonate corespunzătoare, se obţine o *diviziune multidimensională a lui* P, care cuprinde un număr finit de subparalelipipede închise (numite *celule*).

În figura III. 10a şi 10b sunt ilustrate cazurile $n = 2$, $n = 3$, de altfel cele mai des utilizate. În cazul $n = 1$, avem $P = [a_1, b_1]$ şi $\mathrm{V}\,(P) =$ lungimea intervalului P, în cazul $n = 2$, regăsim aria unui dreptunghi şi pentru $n = 3$, volumul unui paralelipiped uzual.

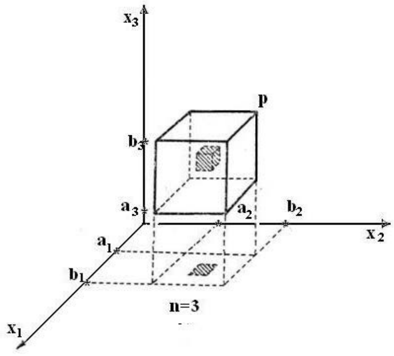


Fig. III.10b

Definiţia 3.2. *Se numeşte* **reţea spaţială în** $\mathbb{R}^n$ *orice configuraţie obţinută considerând pentru fiecare coordonată câte un număr finit* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *respectiv de valori distincte* ($r_i \geq 2$, $1 \leq i \leq n$) *şi ducând hiperplane paralele cu hiperplanele de coordonate corespunzătoare; se formează* $(r_1 - 1)(r_2 - 1) \ldots (r_n - 1)$ *celule paralelipipedice.* Orice reţea spaţială determină o partiţie a spaţiului $\mathbb{R}^n$.

Vom numi **fagure** n**-dimensional** orice mulţime din $\mathbb{R}^n$ care este reuniune *finită* de celule mărginite şi închise ale unei reţele spaţiale în $\mathbb{R}^n$. Aşadar, orice fagure este o mulţime închisă şi mărginită, deci este compactă (teorema 1.5). În figura alăturată III. 12 sunt indicate câteva exemple de faguri bidimensionali.

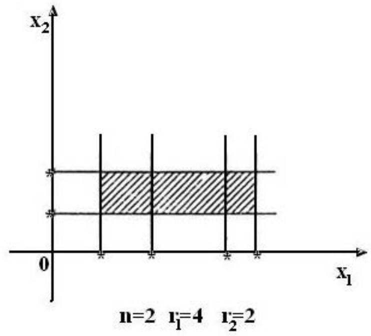


Fig. III.11a

Pentru orice fagure se poate defini volumul său ca fiind suma volumelor celulelor componente (pentru care se aplică formula (7)). În plus, dacă F_1, F_2 sunt faguri în $\mathbb{R}^n$, atunci $F_1 \cup F_2$ este de asemenea un fagure şi pentru volume avem

$$\mathrm{V}\,(F_1 \cup F_2) \leq \mathrm{V}\,(F_1) + \mathrm{V}\,(F_2), \tag{8}$$

cu egalitate în cazul când $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ (sau când nu conţine un paralelipiped de volum nenul).

3.3.2 Volumul mulţimilor deschise şi volumul mulţimilor compacte

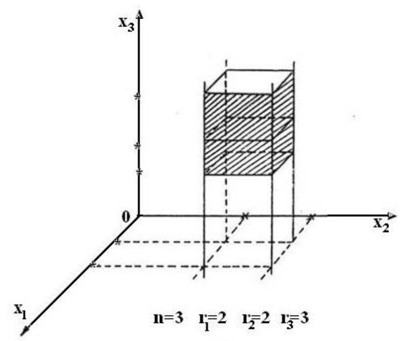


Fig. III.11b

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită oarecare. C. JORDAN (1838-1922) a avut ideea de a "aproxima" A prin faguri F_1 incluşi în A şi prin faguri F_2 care includ A şi a considera că A este măsurabilă dacă $\sup\limits_{F_1 \subset A} \mathrm{V}\,(F_1) = \inf\limits_{F_2 \supset A} \mathrm{V}\,(F_2)$; marele matematician francez H. LEBESGUE (1875-1941) a lărgit acest concept de măsurabilitate "înscriind" în A mulţimi compacte şi "circumscriind" lui A mulţimi deschise din $\mathbb{R}^n$. Vom prezenta acest ultim concept, după câteva pregătiri prealabile.

Definiţia 3.3. *Fie* $D \subset \mathbb{R}^n$ *o mulţime deschisă; se numeşte* **volumul lui** D

$$\mathrm{V}\,(D) = \sup_{F \subset D} \mathrm{V}\,, \quad F - \text{fagure} \tag{9}$$

Evident, $0 \leq \mathrm{V}\,(D) \leq \infty$.

Exemple. 1) Avem $\mathrm{V}\,(\mathbb{R}^n) = \infty$ şi $\mathrm{V}\,(\emptyset) = 0$.

2) Dacă $D \subset \mathbb{R}^n$ este un deschis mărginit, atunci există un paralelipiped închis astfel încât $D \subset P$ şi folosind (9), rezultă că $\mathrm{V}(D) \leq \mathrm{V}(P)$, deci volumul $\mathrm{V}\,(D)$ este finit.

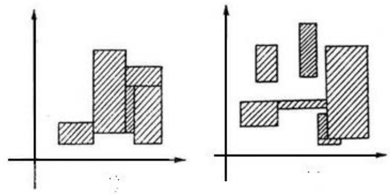


Fig. III.12a

Lema 1. *Fie* F *un fagure în* $\mathbb{R}^n$*; atunci* $V(\overset{\circ}{F}) = V(F)$.

Demonstraţie. Mai întâi pentru orice fagure $F_1 \subset \overset{\circ}{F}$ avem $F_1 \subset F$, deci $\mathrm{V}\,(F_1) \leq \mathrm{V}\,(F)$; apoi, $(\forall)\varepsilon > 0$ există un fagure $F_1 \subset \overset{\circ}{F}$ astfel încât $\mathrm{V}\,(F) <$

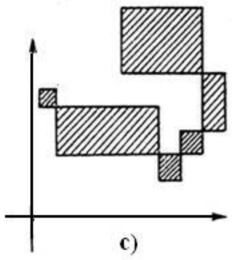


Fig. III.12b

$\mathrm{V}(F_1)+\varepsilon$ [căci dacă $F = P_1 \cup \ldots \cup P_r$ cu P_i celule paralelipipedice închise astfel ca $\mathrm{V}\,(P_i \cap P_j) = 0$, $i \neq j$ şi alegem $F_1 = P'_1 = \cup \ldots P'_r$ cu P'_k paralelipipedice închise astfel încât $P'_k \subset \overset{\circ}{P}_k$ şi $\mathrm{V}\,(P_k) < \mathrm{V}\,(P'_k) + \dfrac{\varepsilon}{r}$, $1 \leq k \leq r$, rezultă $F_1 \subset \overset{\circ}{F}$ şi $\mathrm{V}\,(F) < \mathrm{V}\,(F_1)+\varepsilon$]. Am probat astfel că $\mathrm{V}\,(F) = \sup\limits_{F_1 \subset \overset{\circ}{F}} \mathrm{V}\,(F_1)$, deci conform (9), rezultă că $\mathrm{V}\,(F) = \mathrm{V}\,(\overset{\circ}{F})$.

Definiţia 3.4. *Fie $K \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime compactă;* **volumul lui** K *este prin definiţie*

$$\mathrm{V}\,(K) = \inf_{K \subset \overset{\circ}{F}} \mathrm{V}\,(F), \quad F - \text{fagure}. \tag{10}$$

Evident, $0 \leq \mathrm{V}\,(K) < \infty$.

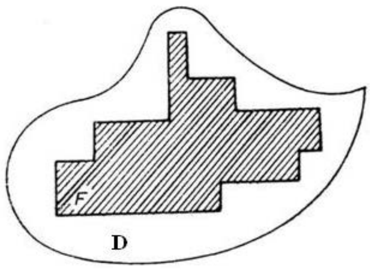


Fig. III.13

Exemplu. Dacă K este un fagure, în particular un paralelipiped închis, atunci se regăseşte definiţia dată anterior.

Lema 2. *Fie K un compact şi D un deschis în $\mathbb{R}^n$ astfel încât $K \subset D$. Atunci există un fagure n-dimensional F astfel încât $K \subset \overset{\circ}{F}$ şi $F \subset D$.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{P} = \{P\}_{P \subset D}$ mulţimea tuturor paralelipipedelor închise P conţinute în D; atunci $\{\overset{\circ}{P}\}_{P \in \mathcal{P}}$ formează o acoperire deschisă a lui K şi din ea se poate extrage o subacoperire finită $\overset{\circ}{P}_1, \ldots, \overset{\circ}{P}_r$ a lui K. Considerând fagurele $F = P_1 \cup \ldots \cup P_r$, rezultă $K \subset \overset{\circ}{P}_1 \cup \ldots \cup \overset{\circ}{P}_r \subset \overset{\circ}{\widehat{P_1 \cup \ldots \cup P_r}} = \overset{\circ}{F}$ şi în plus, $F \subset D$, deoarece $P_i \subset D$, $1 \leq i \leq r$.

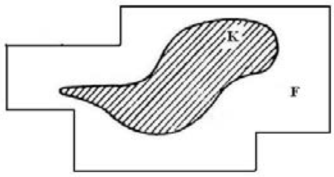


Fig. III.14

Teorema 3.1. (a) *Fie D_1, D_2 deschişi în $\mathbb{R}^n$ având volum finit. Atunci*

$$\mathrm{V}\,(D_1 \cup D_2) \leq \mathrm{V}\,(D_1) + \mathrm{V}\,(D_2);$$

(b) *Fie K_1, K_2 mulţimi compacte disjuncte în $\mathbb{R}^n$; atunci*

$$\mathrm{V}\,(K_1) + \mathrm{V}\,(K_2) \leq \mathrm{V}\,(K_1 \cup K_2).$$

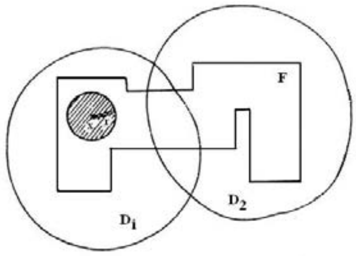


Fig. III.15

Demonstraţie. (a) Fie un fagure oarecare $F \subset D_1 \cup D_2$ şi $r > 0$ ales astfel încât $(\forall) x \in F$ să avem $B(x,r) \subset D_1$ sau $B(x,r) \subset D_2$ (fig. III. 15). Fagurele F poate fi considerat reuniune de celule cu diametrul $\leq r$; notând cu F_1 (respectiv F_2) reuniunea celulelor lui F conţinute în D_1 (respectiv D_2), rezultă că $F \subset F_1 \cup F_2$, deci $\mathrm{V}\,(F) \leq \mathrm{V}\,(F_1 \cup F_2) \leq \mathrm{V}\,(F_1) + \mathrm{V}\,(F_2)$, conform (8). Cum $F_1 \subset D_1$, $F_2 \subset D_2$, rezultă $\mathrm{V}\,(F_1) \leq \mathrm{V}\,(D_1)$, $\mathrm{V}\,(F_2) \leq \mathrm{V}\,(D_2)$, deci $\mathrm{V}\,(F) \leq \mathrm{V}\,(D_1) + \mathrm{V}\,(D_2)$ şi ca atare, $\sup\limits_{F \subset D_1 \cup D_2} \mathrm{V}\,(F) \leq \mathrm{V}\,(D_1) + \mathrm{V}\,(D_2)$ şi aplicând (9), rezultă că $\mathrm{V}\,(D_1 \cup D_2) \leq \mathrm{V}\,(D_1) + \mathrm{V}\,(D_2)$.

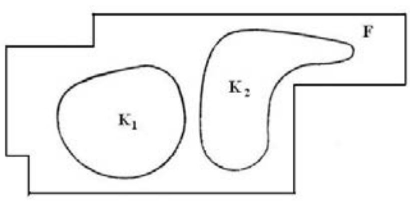


Fig. III.16

(b) Alegem un fagure F astfel încât $K_1 \cup K_2 \subset \overset{\circ}{F}$ (fig. III. 16). Atunci F este o reuniune de celule având diametrul suficient de mic astfel încât să nu existe nici o celulă care să intersecteze atât K_1 cât şi K_2. Notăm cu F_1 (respectiv F_2) reuniunea celulelor lui F care intersectează K_1 (respectiv K_2). Atunci $F_1 \cup F_2 \subset F$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ şi în plus, $K_1 \subset \overset{\circ}{F}_1$, $K_2 \subset \overset{\circ}{F}_2$. Aşadar, $\mathrm{V}\,(K_1) + \mathrm{V}\,(K_2) \leq \mathrm{V}\,(F_1) + \mathrm{V}\,(F_2) \leq \mathrm{V}\,(F)$, de unde $\mathrm{V}\,(K_1) + \mathrm{V}\,(K_2) \leq \inf\limits_{K_1 \cup K_2 \subset \overset{\circ}{F}} \mathrm{V}\,(F) = \mathrm{V}\,(K_1 \cup K_2)$, ultima egalitate decurgând din (10).

3.3.3 Proprietăţi ale mulţimilor măsurabile

Fixăm o mulţime oarecare mărginită $M \subset \mathbb{R}^n$.

Definiţia 3.5. *Se numeşte* **măsură exterioară a lui** M*, numărul real şi pozitiv*

$$\mu_e(M) = \inf_{D \supset M} \mathrm{V}\,(D), \quad D - \text{deschis în } \mathbb{R}^n \tag{11}$$

şi **măsura interioară a lui** M*, numărul real şi pozitiv*

$$\mu_i(M) = \sup_{K \subset M} \mathrm{V}\,(K), \quad K - \text{compact în } \mathbb{R}^n \tag{12}$$

Lema 3. *Fie* M, N *două mulţimi mărginite în* $\mathbb{R}^n$.

(a) *Avem* $\mu_i(M) \leq \mu_e(M)$;

(b) *dacă* $M \subset N$*, atunci* $\mu_i(M) \leq \mu_i(N)$ *şi* $\mu_e(M) \leq \mu_e(N)$;

(c) $\mu_e(M \cup N) \leq \mu_e(M) + \mu_e(N)$*; dacă* $M \cap N = \emptyset$*, atunci* $\mu_i(M) + \mu_i(N) \leq \mu_i(M \cup N)$.

Demonstraţie. (a) Fie $K \subset M$ un compact; pentru orice deschis $D \supset M$ avem $K \subset D$, deci $\mathrm{V}\,(K) \leq \mathrm{V}\,(D)$ şi deci $\mathrm{V}\,(K) \leq \inf\limits_{d \supset M} \mathrm{V}\,(D)$, adică $\mathrm{V}\,(K) \leq \mu_e(M)$, conform (11). Cum K este arbitrar, rezultă că $\sup\limits_{K \subset M} \mathrm{V}\,(K) \leq \mu_e(M)$ şi conform (12), rezultă $\mu_i \leq \mu_e(M)$.

Punctul (b) este evident.

(c) Fie $(\forall)\varepsilon > 0$ fixat şi $D_1 \supset M$, $D_2 \supset N$ deschişi mărginiţi astfel încât $\mathrm{V}\,(D_1) < \mu_e(M) + \frac{\varepsilon}{2}$, $\mathrm{V}\,(D_2) < \mu_e(N) + \frac{\varepsilon}{2}$, deci $D_1 \cup D_2 \supset M \cup N$ şi ca atare,

$$\mu_e(M \cup N) \leq \mu_e(D_1 \cup D_2) = \inf_{D \supset D_1 \cup D_2} V(D) \overset{cf.(11)}{=} \mathrm{V}\,(D_1 \cup D_2) \overset{cf.(3.1)}{\leq}$$

$$\leq \mathrm{V}\,(D_1) + \mathrm{V}\,(D_2) \leq \mu_e(M) + \mu_e(N) + \varepsilon.$$

Aşadar, ε fiind arbitrar, avem $\mu_e(M \cup N) \leq \mu_e(M) + \mu_e(N)$. Restul se demonstrează similar.

Definiţia 3.6. *O mulţime mărginită* $M \subset \mathbb{R}^n$ *se numeşte* **măsurabilă** *dacă* $\mu_i(M) = \mu_e(M)$*; valoarea comună se notează* $\mu(M)$ *şi se numeşte* **măsura** *(sau* **volumul** n**-dimensional***) al lui* M.

În chestiuni de măsurabilitate este esenţial de indicat "spaţiul ambiant". Segmentul $[-1, 1]$ are măsura 2 în $\mathbb{R}$ şi măsura 0 în $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.2. (a) *Orice mulţime deschisă şi mărginită* $D \subset \mathbb{R}^n$ *este măsurabilă şi* $\mu(D) = V(D)$;

(b) *Orice mulţime compactă* $K \subset \mathbb{R}^n$ *este măsurabilă şi* $\mu(K) = V(K)$.

Demonstraţie. (a) Fie $(\forall)D'$ deschis astfel încât $D \subset D'$, deci $\mathrm{V}\,(D) \leq \mathrm{V}(D')$ şi conform (11), $\mu_e(D) = \inf\limits_{D' \in D} \mathrm{V}(D') = \mathrm{V}(D)$. Apoi, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un fagure $F \subset D$ astfel încât $\mathrm{V}\,(D) - \varepsilon < \mathrm{V}\,(F)$. Cum F este compact, atunci $\mathrm{V}\,(F) \leq \mu_i(D)$, deci $\mathrm{V}\,(D) - \varepsilon < \mu_i(D)$ şi cum ε este arbitrar, rezultă că $\mathrm{V}\,(D) \leq \mu_i(D)$. Dar $\mu_i(D) \leq \mu_e(D)$, deci $\mathrm{V}\,(D) \leq \mu_i(D) \leq \mu_e(D) = \mathrm{V}\,(D)$. În concluzie, $\mu_i(D) = \mu_e(D) = \mathrm{V}\,(D)$, adică D este măsurabilă şi $\mu(D) = \mathrm{V}\,(D)$.

(b) Demonstraţia este similară celei de la punctul (a), folosind (12).

Din această teoremă se obţin deja numeroase exemple de mulţimi măsurabile în $\mathbb{R}^n$. În plus, dacă M şi N sunt mulţimi mărginite măsurabile *disjuncte*, atunci $M \cup N$ este măsurabilă şi

$$\mu(M \cup N) = \mu(M) + \mu(N). \tag{13}$$

Într-adevăr, conform lemei 3 avem $\mu(M) + \mu(N) = \mu_i(M) + \mu_i(N) \leq \mu_i(M \cup N) \leq \mu_e(M) + \mu_e(N) = \mu(M) + \mu(N)$, de unde rezultă că $\mu_i(M \cup N) = \mu_e(M \cup N) = \mu(M) + \mu(N)$.

Înainte de a indica şi alte proprietăţi ale mulţimilor măsurabile, dăm

Teorema 3.3 (criteriu de măsurabilitate). *Fie* $M \subset \mathbb{R}^n$ *o mulţime mărginită. Sunt echivalente afirmaţiile*:

(a) M *este măsurabilă*;

(b) *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un compact* K *şi un deschis mărginit* D *astfel încât* $K \subset M \subset D$ *şi* $V(D \setminus K) < \varepsilon$.

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b). Fie M măsurabilă şi $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Conform (11) există un deschis mărginit D astfel încât $\mathrm{V}(D) < \mu(M)+\frac{\varepsilon}{2}$ şi conform (12) există un compact K astfel încât $\mathrm{V}(K) > \mu(M)-\frac{\varepsilon}{2}$, deci $\mathrm{V}(D)-\mathrm{V}(K) < \varepsilon$. Dar $D = (D\setminus K)\cup K$ şi mulţimile $D\setminus K$, K sunt măsurabile disjuncte, deci conform relaţiei (13) şi aplicând teorema 3.2, rezultă că $\mathrm{V}(D) = \mathrm{V}(D\setminus K)+\mathrm{V}(K)$, de unde $\mathrm{V}(D \setminus K) = \mathrm{V}(D) - \mathrm{V}(K) < \varepsilon$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Fie $(\forall)\varepsilon > 0$ fixat. Alegem K şi D ca în ipoteza (b). Avem $\mu(K) \leq \mu_i(M)$, $\mu_e(M) \leq \mu(D)$, deci $0 \leq \mu_e(M) - \mu_i(M) \leq \mu(D) - \mu(K) = \mathrm{V}(D) - \mathrm{V}(K) = \mathrm{V}(D \setminus K) < \varepsilon$, deci ε fiind arbitrar, rezultă $\mu_i(M) = \mu_e(M)$, adică M este măsurabilă.

Teorema 3.4. *Fie M, N mulţimi mărginite măsurabile în $\mathbb{R}^n$. Atunci mulţimile $M \setminus N$, $M \cap N$ şi $M \cup N$ sunt de asemenea măsurabile în $\mathbb{R}^n$.*

Demonstraţie. Fixăm $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum M şi N sunt măsurabile, aplicând teorema 3.3, există compacţi K_1, K_2 şi deschişi mărginiţi D_1, D_2 astfel încât $K_1 \subset M \subset D_1$, $K_2 \subset N \subset D_2$, $\mathrm{V}(D_1 \setminus K_1) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\mathrm{V}(D_2 \setminus K_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Considerăm deschisul $W = D_1 \setminus K_1$ şi compactul $L = K_1 \setminus D_2$. Avem $L \subset M\setminus N \subset W$ şi în plus, $W\setminus L$ este deschis iar $W\setminus L \subset (D_1\setminus K_1)\cup(D_2\setminus K_2)$.

Atunci conform teoremei 3.1,

$$\mathrm{V}(W \setminus L) \leq \mathrm{V}((D_1 \setminus K_1) \cup (D_2 \setminus K_2)) \leq \mathrm{V}(D_1 \setminus K_1)+$$
$$+\mathrm{V}(D_2 \setminus K_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Astfel, conform teoremei 3.3, rezultă că $M \setminus N$ este măsurabilă (cuprinsă între un compact L şi un deschis W având măsura diferenţei $W \setminus L$ oricât de mică). Apoi $M \cap N = M \setminus (M \setminus N)$ şi cum M, $M \setminus N$ sunt măsurabile, rezultă după cele deja probate, că $M\cap N$ este măsurabilă. În fine, $M\cup N = (M\setminus N)\cup N$ şi aplicăm (13).

Observaţii. 1) Relaţia (13) se extinde imediat prin inducţie la un număr finit de mulţimi măsurabile disjuncte două câte două $M_1, M_2, \ldots, M_p$ (din $\mathbb{R}^n$); anume, $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_p$ este măsurabilă şi $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{p} M_i\right) = \sum_{i=1}^{p}\mu(M_i)$ (*aditivitate finită*). Această relaţie poate fi extinsă mai departe la un şir infinit de mulţimi măsurabile $\{M_p\}_{p\geq 1}$ disjuncte două câte două; anume, se poate arăta că dacă $M = \bigcup_{p\geq 1} M_p$ este mărginită, atunci M este măsurabilă şi $\mu(M) = \sum_{p=1}^{\infty}\mu(M_p)$; această proprietate poartă numele de *aditivitate numărabilă*. Dacă $\{M_p\}_{p\geq 1}$ nu ar fi disjuncte două câte două, atunci ar rezulta $\mu\left(\bigcup_{p\geq 1} M_p\right) \leq \sum_{p\geq 1}\mu(M_p)$ (*subaditivitate numărabilă*); într-adevăr, fie $N_1 = M_1$, $N_2 = M_2 \setminus M_1, \ldots, N_p = M_p\setminus(M_1\cup\ldots\cup M_{p-1})$ etc. Avem $\bigcup_{p\geq 1} M_p = \bigcup_{p\geq 1} N_p$, deci $\{N\}_{p\geq 1}$ fiind disjuncte două câte două rezultă

$$\mu\left(\bigcup_{p\geq 1} M_p\right) = \mu\left(\bigcup_{p\geq 1} N_p\right) = \sum_{p\geq 1}\mu(N_p) \leq \sum_{p\geq 1}\mu(M_p).$$

2) Cele spuse anterior s-au referit la măsurabilitatea mulţimilor mărginite. O mulţime nemărginită $M \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte *măsurabilă* dacă $(\forall)r \geq 1$ natural, mulţimea mărginită

$$M_r = M \cap B(0,r) = \{x \in M |\, ||x|| < r\}$$

este măsurabilă; în plus, se defineşte *măsura lui* M ca fiind $\mu(M) \triangleq \lim_{r\to\infty} \mu(M_r) \le \infty$. Şirul $\{\mu(M_r)\}_{r\ge 1}$ de numere reale este evident crescător, deoarece $M_r \subset M_{r+1}$, $(\forall) r \ge 1$.

Se extind fără dificultate proprietăţile date anterior.

3.3.4 Mulţimi de măsură nulă

Definiţia 3.7. *O mulţime mărginită măsurabilă* $M \subset \mathbb{R}^n$ *se numeşte* **mulţime de măsură nulă** *(sau* **neglijabilă în** $\mathbb{R}^n$*) dacă* $\mu(M) = 0$. *O mulţime nemărginită măsurabilă* $M \subset \mathbb{R}^n$ *se numeşte* **neglijabilă** *în* $\mathbb{R}^n$ *dacă* M_r *este neglijabilă pentru orice întreg* $r > 0$.

Teorema 3.5. (a) *Dacă* $N \subset M$ *şi* M *este neglijabilă în* $\mathbb{R}^n$*, atunci* N *este neglijabilă în* $\mathbb{R}^n$.

(b) *O reuniune cel mult numărabilă de mulţimi neglijabile este neglijabilă.*

Demonstraţie. (a) Presupunem M mărginită. Avem $0 \le \mu_i(N) \le \mu_e(N) \le \mu_e(M) = \mu(M) = 0$, deci $\mu_i(N) = \mu_e(N) = 0$, deci N este măsurabilă şi $\mu(N) = 0$ etc.

(b) Fie $\{N_k\}_{k\ge 1}$ un şir finit sau numărabil de mulţimi neglijabile; atunci $\mu\left(\bigcup_{k\ge 1} N_k\right) \le \sum_{k\ge 1} \mu(N_k) = 0$, deci $\mu\left(\bigcup_{k\ge 1} N_k\right) = 0$.

Exemple. Orice punct din $\mathbb{R}^n$ este evident mulţime neglijabilă (căci are măsura exterioară nulă) şi aplicând teorema 3.5 (b), rezultă că orice mulţime numărabilă de puncte din $\mathbb{R}^n$ este neglijabilă; în particular, $\mathbb{Q}$ este neglijabilă în $\mathbb{R}$.

Multe alte exemple de mulţimi neglijabile rezultă din teorema următoare:

Teorema 3.6. *Fixăm numere naturale* $m < n$, M *o submulţime mărginită din* $\mathbb{R}^m$ *şi* $f : M \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie lipschitziană. Atunci mulţimea* $f(M)$ *este neglijabilă în* $\mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Din ipoteză rezultă că $(\exists) C > 0$ real astfel încât $||f(x) - f(y)|| \le C||x - y||$, $(\forall) x, y \in M$. Fie K un cub din $\mathbb{R}^m$ de latură l astfel încât $M \subset K$. Împărţind fiecare latură a lui K în N părţi egale (N nedeterminat deocamdată), cubul se descompune în N^m cuburi de latură $\frac{l}{N}$ şi pentru orice astfel de cub ω, mulţimea $f(M \cap \omega)$ este conţinută într-un cub de latură $\frac{2Cml}{N}$ din $\mathbb{R}^n$ (într-adevăr, dacă $M \cap \omega = \emptyset$, afirmaţia este evidentă, iar dacă x, a sunt două puncte din $M \cap \omega$, atunci $||f(x) - f(a)|| \le C||x - a|| \le Cm\frac{l}{N}$ şi ca atare $f(x)$ aparţine bilei centrate în $f(a)$ de rază $\frac{Cml}{N}$, $(\forall) x \in M \cap \omega$).

Cele N^m cuburi de tip ω acoperă K, deci $f(M)$ va fi acoperită de N^m cuburi de latură $\frac{2Cml}{N}$ şi suma volumelor acestora va fi $N^m \left(\frac{2Cml}{N}\right)^n = \frac{(2Cml)^n}{N^{n-m}}$. Dar m, n, l sunt fixate şi deoarece $m < n$, rezultă că alegând N suficient de mare, expresia anterioară poate deveni oricât de mică. Astfel, $f(M)$ este mulţime neglijabilă în $\mathbb{R}^n$ (este acoperită de un număr finit de cuburi cu suma volumelor oricât de mică, deci $\mu_e(f(M)) = 0$).

Exemple. 1) Fie $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$, $r > 0$ fiind constant; deoarece f este lipschitziană, va rezulta că circumferinţa $\{x^2 + y^2 = r^2\}$ este mulţime neglijabilă în $\mathbb{R}^2$. Similar, sfera $\{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ este neglijabilă în $\mathbb{R}^3$, ca imagine directă a mulţimii mărginite $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ din $\mathbb{R}^2$ prin funcţia lipschitziană $f(\varphi, 0) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$.

2) Orice segment $[a, b]$ în $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$ este imaginea lui [0,1] prin aplicaţia lipschitziană $f(t) = (1-t)a + tb$, deci este mulţime neglijabilă. La fel va fi orice linie poligonală. Deci frontiera unui poligon convex este neglijabilă în $\mathbb{R}^2$.

Fie o proprietate relativ la elementele lui $\mathbb{R}^n$, adică un predicat unar pe $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ fiind fixat. Se spune că acea proprietate **are loc aproape peste tot** (a.p.) dacă mulţimea punctelor unde proprietatea nu are loc este neglijabilă în $\mathbb{R}^n$, adică mulţimea de adevăr a acelui predicat este complementara unei mulţimi neglijabile.

3.3.5 Exerciţii

1. Se consideră dreptunghiurile $P_1 = [1, 3] \times [0, 4]$, $P_2 = [2, 4] \times [2, 5]$ în $\mathbb{R}^2$. Să se afle volumele fagurilor $P_1 \cup P_2$, $P_1 \setminus P_2$, $P_2 \setminus P_1$, $P_1 \cap P_2$.

2. Dacă P_1, P_2 sunt două paralelipipede în $\mathbb{R}^n$, să se arate că $P_1 \cap P_2$ este paralelipiped; în ce caz $P_1 \setminus P_2$ sau $P_1 \cup P_2$ sunt paralelipipede ?

3. Dacă M şi N sunt măsurabile în $\mathbb{R}^n$ să se arate că

$$\mu(M \cup N) = \mu(M) + \mu(N) - \mu(M \cap N).$$

Indicaţie. Mai întâi observăm că $\mu(M \setminus N) \cup N = \mu(M) - \mu(M \cap N)$, apoi $M \cup N = (M \setminus N) \cup N$, deci $\mu(M \cup N) = \mu(M \setminus N) + \mu(N)$.

4. Să se arate că dacă M este măsurabilă în $\mathbb{R}^n$ iar N este neglijabilă, atunci

$$\mu(M \cup N) = \mu(M \setminus N) = \mu(M).$$

5. Folosind teorema 3.6 să se arate că mulţimile următoare sunt neglijabile:

a) $\left\{\dfrac{x^2}{4} - y^2 - 1 = 0\right\}$, $\{|x| + |y| = 1\}$ în $\mathbb{R}^2$;

b) frontiera oricărui paralelipiped din $\mathbb{R}^3$.

6. Să se arate că orice dreaptă în $\mathbb{R}^2$ este mulţime nemărginită neglijabilă. Dacă P este un plan să se arate că proprietatea unui punct din spaţiu de a nu aparţine lui P are loc a.p.

3.4 Derivate parţiale, diferenţiabilitate

În acest paragraf dăm primele rezultate ale calculului diferenţial pentru funcţii de mai multe variabile reale. Cazul funcţiilor reale de o variabilă este un caz particular şi în acelaşi timp, el permite testarea înţelegerii dezvoltărilor analizei multidimensionale . Reamintim că dacă o funcţie reală $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ este derivabilă într-un punct $x_0 \in (a, b)$, atunci graficul lui f are o tangentă bine determinată în punctul $(x_0, f(x_0))$, a cărei ecuaţie este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. În acest caz, este definită o aplicaţie liniară remarcabilă $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto f'(x_0) \cdot h$, iar în vecinătatea lui x_0, această aplicaţie reprezintă o aproximare a "creşterii" $f(x) - f(x_0)$, deoarece

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right] = 0$$

adică $f(x) - f(x_0) = L(x - x_0) + 0(x - x_0)$ în vecinătatea lui x_0.

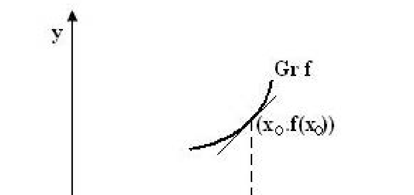


Fig. III.17

3.4.1 Derivată după un versor, derivate parţiale

Fixăm o funcţie $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$, unde A este un deschis din $\mathbb{R}^n$.
Fie $a \in A$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un punct fixat şi $x = (x_1, \ldots, x_n)$ punctul *curent* în $\mathbb{R}^n$. Pentru $n \geq 2$ nu se poate reproduce noţiunea de derivată a lui f în punctul a din cazul 1-dimensional ca fiind de exemplu limita $\lim\limits_{\substack{x \to a,\\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{||x - a||}$, deoarece ar rezulta pur şi simplu că funcţia elementară $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1$ nu ar avea derivată în origine, fapt inacceptabil. Conceptul de derivată este

esenţialmente 1-dimensional şi de aceea, în cazul funcţiilor de mai multe variabile reale se definesc derivate după direcţii date, mai precis după versori daţi (implicând şi sensul !).

Fixăm $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ deschis, $a \in A$ ca mai sus şi fie $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ un versor n-dimensional (adică $||s|| = 1$). Tripletului (f, a, s) i se poate asocia o funcţie de o *singură* variabilă reală, anume

$$g(t) = f(a + ts) = f(a_1 + ts_1, \dots, a_n + ts_n), \tag{14}$$

definită în vecinătatea originii; mai precis, cum A este deschis şi $a \in A$, există $r > 0$ real astfel încât $B(a, r) \subset A$; atunci pentru orice $t \in (-r, r)$ avem $\mathrm{d}(a+ts, a) = ||a+ts-a|| = ||ts|| = |t| \cdot ||s|| = |t| < r$, deci $a+ts \in B(a, r) \subset A$ şi astfel funcţia g este bine definită pe intervalul $(-r, r)$.

Definiţia 4.1. *Se spune că funcţia f* **este derivabilă în punctul** a **după versorul** s *dacă funcţia reală $g : (-r, r) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(a + ts)$ este derivabilă în punctul $t = 0$ şi în acest caz, numărul real $\frac{df}{ds}(a) \triangleq g'(0)$ se numeşte* **derivata lui f după versorul s în punctul** a *(sau cu o terminologie mai imprecisă,* **derivata lui f în a după direcţia** s*).*

Reţinem aşadar că

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a + ts) - f(a)}{t}.$$

Notând $x = a + ts$, rezultă că vectorul $x - a$ este coliniar cu s, iar t este abscisa punctului x pe dreapta determinată de a şi s, orientată cu ajutorul lui s. Rezultă atunci că

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a,\, s-a=ts}} \frac{f(x) - f(a)}{t}, \tag{15}$$

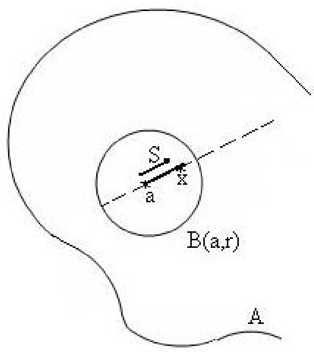


Fig. III.18

ceea ce justifică terminologia utilizată şi aminteşte că avem de-a face cu o derivată. În cazul $n = 1$, identificând $\mathbb{R}$ cu mulţimea punctelor unei axe de versor $\bar{\imath}$, rezultă că noţiunea uzuală de derivată pentru o funcţie $f(x)$, $f : A \to \mathbb{R}$, într-un punct a din deschisul $A \subset \mathbb{R}$ coincide cu cea de derivată a lui f în a după versorul $\bar{\imath}$.

Revenind la situaţia generală şi notând $s^* = -s$ (versorul opus), se vede că dacă există $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a)$, atunci există $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s^*}(a) = -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a)$; acest fapt justifică de ce derivata $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a)$ este asociată versorului s şi nu direcţiei s (care admite doi versori). În cazul $n = 1$, *nu* trebuie confundată derivata după versorul $\bar{\imath}$ cu derivata la dreapta, iar cea după versorul $-\bar{\imath}$ cu derivata la stânga.

Exemplu. Fie $n = 2$, $A = \mathbb{R}^2$ şi

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6 + y^2} & \text{dacă} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Evident, f nu este continuă în origine, căci $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right) \to (0, 0)$ şi $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right) = \frac{n}{2} \to \infty$. Totuşi apare un fenomen şocant, anume funcţia f are derivată în origine după orice versor $s = (s_1, s_2)$, deoarece

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(ts_1, ts_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{s_1^2 s_2}{t^4 s_1^6 + s_2^2} = \begin{cases} \dfrac{s_1^2}{s_2} & \text{dacă} \quad s_2 \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad s_2 = 0. \end{cases}$$

Fie $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$, deci $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Evident e_k, $1 \leq k \leq n$ sunt versori.

Definiţia 4.2. *Fie o funcţie* $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ *fiind un deschis şi* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *un punct din* A. *Se spune că* f **este derivabilă parţial în raport cu variabila** x_k **(de indice** k**) în punctul** a *dacă există* $\frac{df}{de_k}(a)$, $1 \leq k \leq n$; *acest număr real se numeşte* **derivata lui** f **în raport cu** x_k **în punctul** a *şi se notează* $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ *sau* $f'_{x_k}(a)$ *sau uneori* $D_k f(a)$.

Funcţia f *se numeşte* **derivabilă parţial în raport cu** x_k **pe deschisul** A *dacă în fiecare punct* $a \in A$ *există* $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$. *Reţinem aşadar că*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}e_k}(a) = \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_k + t, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{t}.\end{aligned} \tag{16}$$

În cazul $n = 2$ se notează cu (x, y), în loc de (x_1, x_2), punctul curent din $\mathbb{R}^2$, iar în $\mathbb{R}^3$ se notează (x, y, z) în loc de (x_1, x_2, x_3). Aşadar, o funcţie de două variabile $f(x, y)$, $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ este derivabilă în raport cu x şi respectiv y în punctul $a = (a_1, a_2)$ din deschisul A dacă există

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t} \quad \text{şi respectiv,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}.$$

Dacă această proprietate are loc $(\forall) a \in A$, atunci derivatele parţiale ale lui f în punctul curent din A sunt (omiţând condiţia subînţeleasă $t \neq 0$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{t} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.\end{aligned} \tag{17}$$

Notaţiile Δx, Δy sunt folosite mult în aplicarea practică a derivatelor parţiale, fiind asimilate cu "creşteri" ale lui x, y respectiv. Pentru funcţii elementare, $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$ se calculează derivând f uzual în raport cu x, considerând y ca parametru, iar $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$ se calculează derivând f în raport cu y şi considerând x ca parametru.

În mod similar se procedează pentru funcţii de trei variabile $f(x, y, z)$; în condiţii ca mai sus,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

deci se derivează în raport cu x, considerând y, z ca parametri etc.

Exemple. 1) Fie $f(x, y) = x^2 + xy$ şi $a = (5, -3)$, $A = \mathbb{R}^2$. În acest caz, aplicând (16), rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(5 + t, -3) - f(5, -3)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 + 7t}{t} = 7,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(5, -3 + t) - f(5, -3)}{t} = 5.$$

În punctul curent, avem $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$ şi înlocuind $x = 5$, $y = -3$ regăsim valorile anterioare.

2) Dacă $f(x,y,z) = x^2 + \sin yz$, $A = \mathbb{R}^3$, atunci $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = z\cos yz$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = y\cos yz$, în punctul curent.

3) Fie $f(x_1,\dots,x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \dfrac{x_n}{x_1}$, $A = \{x_1 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^n$. În acest caz,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - \frac{x_n}{x_1^2},\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} = 2x_{n-1},\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{1}{x_1},$$

derivând în raport cu câte o variabilă şi considerând celelalte $n-1$ ca parametri.

Definiţia 4.3. *O funcţie $f(x_1,\dots,x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ definită pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte* **derivabilă parţial pe** *A dacă $(\forall)a \in A$ şi pentru orice k, $1 \le k \le n$, există $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$. În acest caz se pot defini n funcţii $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} : A \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $(1 \le k \le n)$, numite* **derivatele parţiale ale lui** f **pe** A. *Funcţia f se numeşte* **de clasă** C^1 **pe** A *şi se notează $f \in C^1(A)$ dacă f este derivabilă parţial pe A şi în plus, funcţiile $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ sunt continue pe A.*

Se verifică imediat că orice funcţie elementară este de clasă C^1 pe orice deschis conţinut în domeniul ei de definiţie. Aşadar, polinoamele, funcţiile raţionale, exponenţialele etc, compuneri ale acestora sunt funcţii de clasă C^1.

3.4.2 Matrici Jacobiene

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ un deschis şi $F : A \to \mathbb{R}^m$ o aplicaţie cu valori vectoriale. Fie $f_1,\dots,f_m$ componentele lui F; aşadar, $f_i : A \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$ sunt funcţii astfel încât $F(x) = (f_1(x),\dots,f_m(x))$, $(\forall)x = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in A$.

Definiţia 4.4. *Se spune că aplicaţia F* **este derivabilă parţial într-un punct** *$a \in A$ dacă fiecare din funcţiile $f_1,\dots,f_m$ sunt derivabile parţial în a, în raport cu toate valorile $x_1,\dots,x_n$. În acest caz, se poate considera o matrice remarcabilă cu m linii şi n coloane cu coeficienţi reali*

$$\mathbf{J}_F(a) \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \tag{18}$$

numită **matricea jacobiană a lui** F **în punctul** a (C.G. JACOBI, 1804-1851). *Dacă $m = n$, atunci matricea $\mathbf{J}_F(a)$ este pătratică şi determinantul ei se numeşte* **jacobianul** *sau* **determinantul funcţional al funcţiilor** $f_1,\dots,f_n$ **în punctul** *a şi se notează*

$$\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(a) \triangleq \det \mathbf{J}_F(a). \tag{19}$$

Exemple. 1) Aplicaţia

$$F : A \to \mathbb{R}^2,\ (\overset{x_1}{\rho}, \overset{x_2}{\theta}) \mapsto (\overset{f_1}{\rho\cos\theta}, \overset{f_2}{\rho\sin\theta}),$$

A fiind un deschis conţinut în submulţimea $[0,\infty) \times \mathbb{R}$, stabileşte legătura între coordonatele carteziene şi coordonatele polare în $\mathbb{R}^2$. Matricea jacobiană a lui F în punctul curent este

$$\mathbf{J}_F(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \rho} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ & \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \rho} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}$$

şi jacobianul este conform (19)

$$\frac{D(f_1,f_2)}{D(x_1,x_2)} = \frac{D(f_1,f_2)}{D(\rho,\theta)} = \det \mathbf{J}_F(\rho,\theta) = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho.$$

Evident, aplicaţia F indică modul de calcul al coordonatelor carteziene ale unui punct dintr-un plan raportat la un reper ortogonal, cunoscând coordonatele polare ale punctului.

2) Aplicaţia $F : A \to \mathbb{R}^3$, $(\overset{x_1}{r}, \overset{x_2}{\theta}, \overset{x_3}{\varphi}) \mapsto (\overset{f_1}{r\sin\theta\cos\varphi}, \overset{f_2}{r\sin\theta\sin\varphi}, \overset{f_3}{r\cos\theta})$ este de clasă C^1 pe orice deschis A conţinut în submulţimea $[0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ a lui $\mathbb{R}^3$ şi jacobianul lui F în punctul curent este

$$\frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta,$$

după calcule imediate. În mod similar, aplicaţia $G : A \to \mathbb{R}^3$, $(\rho,\varphi,z)\mapsto(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)$ este de clasă C^1 în mulţimea A de mai sus şi jacobianul lui G este în acest caz egal cu ρ. Evident, aplicaţiile F şi G sunt strâns legate de trecerea la coordonate sferice şi respectiv cilindrice în spaţiu.

3) Considerăm funcţia $F : A \to \mathbb{R}^2$, $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(x_1 + x_2^2\ln x_3, \dfrac{x_4}{x_3}\right)$ definită pe deschisul $A = \{x_3 > 0\}$ din $\mathbb{R}^4$. În acest caz matricea jacobiană în punctul curent este

$$\mathbf{J}_F(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2\ln x_3 & \dfrac{x_2^2}{x_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{x_4}{x_3^2} & \dfrac{1}{x_3} \end{bmatrix}, \quad \text{unde } \underline{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4),$$

deci o matrice de tip (2,4). În acest caz, nu se poate vorbi de un determinant funcţional asociat lui F.

3.4.3 Funcţii diferenţiabile; noţiunea de diferenţială

Fixăm o aplicaţie $F : A \to \mathbb{R}^m$, definită pe un deschis A din $\mathbb{R}^n$ $(m,n \geq 1)$ şi un punct $a \in A$.

Definiţia 4.5. *Se spune că aplicaţia F* **este diferenţiabilă în punctul** *a dacă există o aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, depinzând de a, astfel încât*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{F(x)-F(a)-T(x-a)}{||x-a||} = 0. \tag{20}$$

Noând cu $\varphi(x)$, $\varphi : A\setminus\{a\} \to \mathbb{R}^m$, raportul de sub limita anterioară, relaţia (20) se mai scrie echivalent

$$F(x) = F(a) + T(x-a) + ||x-a||\cdot\varphi(x), \quad (\forall)x \in A \tag{21}$$

şi în plus, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$.

Funcţia F se numeşte **diferenţiabilă pe** *A dacă este diferenţiabilă în orice punct din A.*

În general, printre proprietăţile funcţiilor trebuie subliniate cele globale şi cele locale. Proprietăţile globale se referă la un întreg domeniu de studiu (de exemplu, mărginirea, integrabilitatea, monotonia, convexitatea, continuitatea uniforă etc.) în timp ce proprietăţile locale angajează doar valorile funcţiei în vecinătatea fiecărui punct studiat; în această categorie intră continuitatea, derivabilitatea, diferenţiabilitatea. Faptul că o funcţie $F : A \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă pe A este evident echivalent cu existenţa unei familii de deschişi $\{A_i\}_{i\in I}$ din $\mathbb{R}^n$ astfel încât $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ şi restricţiile $F|A_i$ să fie diferenţiabile pe A_i, $(\forall)i \in I$.

Lema 1. *În condiţiile anterioare, dacă F este diferenţiabilă în punctul a, atunci aplicaţia $\mathbb{R}$-liniară T este unic determinată prin relaţia* (21).

Demonstraţie. Presupunem că ar exista o aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ astfel încât

$$F(x) = F(a) + T_1(x-a) + ||x-a|| \cdot \psi(x), \quad (\forall)x \in A \tag{22}$$

şi în plus $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = 0$.
Notând $T - T_1 = U$ şi scăzând relaţiile (21), (22), se obţine $U(x-a) = ||x-a|| \cdot \alpha(x)$, unde $\alpha = \psi - \varphi$. Fie $(\forall)h \in \mathbb{R}^n$ fixat; pentru orice $t > 0$ suficient de mare, notând $x = a + th$, rezultă $U(th) = ||th|| \cdot \alpha(a+th)$ şi cum aplicaţia U este $\mathbb{R}$-liniară, se obţine $U(h) = ||h|| \cdot \alpha(a+th)$.

Făcând $t \to 0$ în ultima relaţie şi ţinând cont că $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, rezultă că $U(h) = 0$, $(\forall)h \in \mathbb{R}^n$, adică $U = 0$ şi $T = T_1$.

Definiţia 4.6. *Dacă aplicaţia $F : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ fiind deschis, este diferenţiabilă într-un punct $a \in A$, atunci aplicaţia $\mathbb{R}$-liniară T satisfăcând (21), se numeşte* **diferenţiala lui** F **în punctul** a *şi se notează* $dF(a)$.

Conform lemei 1, această aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară $\mathrm{d}F(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este unică, depinzând numai de F şi de punctul a.

Exemple. 1) Orice aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţabilă pe $\mathbb{R}^n$ şi în plus, $(\forall)a \in \mathbb{R}^n$ avem $\mathrm{d}T(a) = T$. Într-adevăr, cum T este liniară, rezultă că $T(x) - T(a) - T(x-a) = 0$, $(\forall)x \in \mathbb{R}^n$, deci este satisfaăcută în mod evident condiţia (20).

2) Aplicaţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$ este diferenţiabilă în orice punct $a = (a_1, a_2)$; anume $T = \mathrm{d}f(a)$ este aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(h,k) \mapsto a_2 h + a_1 k$. Este suficient să observăm că

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - f(a_1,a_2) - T(x-a_1, y-a_2)}{||(x-a_1, y-a_2)||} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{xy - a_1a_2 - a_2(x-a_1) - a_1(y-a_2)}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}} = 0.$$

Dar aplicaţia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ nu este diferenţiabilă în origine.

Teorema 4.1. *Fie $F : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ deschis, $a \in A$ ca mai sus şi fie $f_1, \ldots, f_m$ componentele lui F. Atunci F este diferenţiabilă în punctul a dacă şi numai dacă $f_1, \ldots, f_m$ sunt diferenţiabile în a şi în acest caz, diferenţiala $dF(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ are drept componente diferenţialele $df_1(a), \ldots, df_m(a)$ ca aplicaţii $\mathbb{R}$-liniare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

Demonstraţie. Teorema rezultă direct din definiţia diferenţiabilităţii (relaţia (21)) şi din unicitatea probată în lema 1.

Din teorema 4.1. rezultă că este suficient de considerat cazul $m = 1$ al funcţiilor cu valori reale (lucrând pe componente).

Teorema 4.2. *Fie o funcţie $f(x_1, \ldots, x_m)$, $f : A \to \mathbb{R}$ definită pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$.*

(a) *Dacă f este diferenţiabilă într-un punct $a \in A$, atunci f este continuă în a; în plus, există $\dfrac{df}{ds}(a)$, pentru orice versor $s \in \mathbb{R}^n$ şi în particular există derivatele parţiale de ordinul I, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$; anume*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a) = \mathrm{d}f(a)(s) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \mathrm{d}f(a)(e_k),\ 1 \le k \le n. \tag{23}$$

(b) *Dacă $f \in C^1(A)$, atunci f este diferenţiabilă pe deschisul A; în particular, orice funcţie elementară este diferenţiabilă pe orice deschis din domeniul ei de definiţie.*

Demonstraţie. (a) Fie orice şir $x_n \overset{\text{în A}}{\longrightarrow} a$; atunci din relaţia (21), rezultă că $f(x_n) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(x_n - a) + ||x_n - a|| \cdot \varphi(x_n)$, $(\forall)n \geq 0$ şi pentru $n \to \infty$, rezultă că $f(x_n) \to f(a)$, deci f este continuă în punctul a. Pe de altă parte, pentru orice $t \neq 0$ astfel încât $|t| < r$ (unde $r > 0$ este ales astfel încât $B(a,r) \subset A$) avem $\mathrm{d}(a+ts, a) < r$, deci $a + ts \in A$, pentru $1 \leq k \leq n$; în plus,

$$\frac{f(a+ts) - f(a)}{t} \overset{cf.(21)}{=} \frac{\mathrm{d}f(a)(ts) + ||ts|| \cdot \varphi(a+ts)}{t} = \mathrm{d}f(a)(s) + \frac{|t|}{t}\varphi(a+ts),$$

deci există limita

$$\lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(a+ts) - f(a)}{t} = \mathrm{d}f(a)(s),$$

adică $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a) = \mathrm{d}f(a)(s)$; pentru $s = e_k$, se obţine $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \mathrm{d}f(a)(e_k)$, $1 \leq k \leq n$, cf. (16).

(b) Fie $(\forall)a \in A$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ şi notăm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Atunci

$$f(x) - f(a) = [f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, x_2, \ldots, x_n)] + [f(a_1, x_2, \ldots, x_n) -$$

$$- f(a_1, a_2, x_3, \ldots, x_n)] + \ldots + [f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x_n) -$$

$$- f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)] = (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ (x_2 - a_2) \times \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2, x_2, \ldots, x_n) + \ldots +$$

$$+ (x_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \xi_n),$$

aplicând fiecărei paranteze drepte formula creşterilor finite pentru funcţii de o variabilă (ξ_1 fiind situat între a_1 şi x_1, ξ_2 între a_2 şi $x_2, \ldots, \xi_n$ între a_n şi x_n). Considerăm acum aplicaţia $\mathbb{R}$-liniară $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) x_k$. Aşadar $T(x - a) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k)$, deci

$$\lim_{x \to a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{||x - a||} =$$

$$= \lim_{x \to a, x \neq a} \frac{(x_1 - a_1)\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, \ldots, x_n) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right]}{||x - a||} +$$

$$+ \lim_{x \to a, x \neq a} \frac{(x_2 - a_2)\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2, x_3, \ldots, x_n) - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right]}{||x - a||} + \ldots$$

$$\ldots + \lim_{x \to a, x \neq a} \frac{(x_n - a_n)\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, \ldots, x_{n-1}, \xi_n) - \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right]}{||x - a||}$$

şi fiecare din aceste limite este nulă, deoarece rapoartele $\dfrac{x_1 - a_1}{||x - a||}, \dfrac{x_2 - a_2}{||x - a||}, \ldots, \dfrac{x_n - a_n}{||x - a||}$ sunt mărginite în modul de 1, iar f fiind funcţie de clasă C^1 pe A, parantezele drepte tind către zero când $x \to a$ (adică $x_k \to a_k$, $1 \leq k \leq n$). În concluzie, avem

$$\lim_{x \to a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{||x - a||} = 0,$$

deci funcţia f este diferenţiabilă în orice punct $a \in A$.

Teorema 4.2 se extinde fără dificultate la aplicaţii cu valori vectoriale; punctul (b) constituie cel mai utilizat criteriu de diferenţiabilitate.

Teorema 4.3 (formula de calcul a diferenţialei). *Presupunem că funcţia $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$, definită pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, este diferenţiabilă într-un punct $a \in A$. Atunci are loc formula*

$$df(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \cdot pr_j \text{ (egalitate de aplicaţii } \mathbb{R}\text{-liniare } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\text{)}. \quad (24)$$

Demonstraţie. Două aplicaţii liniare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt egale dacă valorile lor pe vectorii e_k, $1 \leq k \leq n$, ai bazei canonice a lui $\mathbb{R}^n$, coincid. Aplicând acest fapt, relaţia (24) rezultă de îndată ce se probează că $\mathrm{d}f(a)(e_k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \cdot \mathrm{pr}_j(e_k)$, ceea ce rezultă imediat folosind (23) şi faptul că $\mathrm{pr}_j(e_k) = \delta_{jk}$.

Din formula (24) rezultă că $(\forall)(h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, avem $\mathrm{d}f(a)(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j$. Relaţia (24) se scrie într-un mod mai convenabil astfel: se observă că aplicaţiile de proiecţie $\mathrm{pr}_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definite prin $\mathrm{pr}_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ sunt $\mathbb{R}$-liniare, deci $\mathrm{d}(\mathrm{pr}_j)(a) = \mathrm{pr}_j$, adică $\mathrm{d}x_j(a) = \mathrm{pr}_j$ şi formula (24) se scrie

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\mathrm{d}x_j(a),$$

iar dacă f este diferenţiabilă în orice punct $a \in A$, atunci în punctul curent are loc formula

$$\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j.$$

Exemple. 1) Pentru $n = 1$, fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de o variabilă reală definită pe un interval deschis I şi diferenţiabilă într-un punct $a \in I$. Atunci f este derivabilă în a şi diferenţiala ei $\mathrm{d}f(a)$ este aplicaţia $\mathbb{R}$-liniară $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care asociază oricărui $h \in \mathbb{R}$ numărul real $f'(a)h$. În cazul $n = 1$, diferenţiabilitatea unei funcţii $f : I \to \mathbb{R}$ într-un punct este evident echivalentă cu derivabilitatea în acel punct, aşa cum rezultă din relaţia (21), observând că pentru orice aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $T(x) = \lambda x$; în acest caz $f'(a) = \lambda$. Pentru $n \geq 2$ se poate întâmpla ca o funcţie să aibă derivate după orice direcţie într-un punct fără a fi diferenţiabilă şi nici măcar continuă (exemplul dat după definiţia 4.1.)

2) Fie $f(x, y, z) = x^2 + xyz$. Diferenţiala lui f în puntul curent este

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = (2x + yz)\mathrm{d}x + xzdy + xydz.$$

În particular, $(\forall)a \in \mathbb{R}^3$, $A = (a_1, a_2, a_3)$ şi oricare ar fi $(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$ avem $\mathrm{d}f(a)(h_1, h_2, h_3) = (2a_1 + a_2a_3)h_1 + a_1a_3h_2 + a_1a_2h_3$.

3) Un cazan cilindric are raza bazei $R = 10m$ şi înălţimea $I = 30m$. Determinăm cu aproximaţie "creşterea" volumului V al cilindrului dacă dimensiunile R, I au —creşteri" de 2 cm. Aşadar, $V = \pi R^2 \cdot I$, deci $\mathrm{d}V = \pi(2RI \cdot \mathrm{d}R + R^2 \cdot \mathrm{d}I)$ şi ca atare, $|\Delta V| \simeq \pi \left(2 \cdot 30 \cdot 10 \cdot \frac{2}{100} + 100\frac{2}{100}\right) = 14\pi\ cm^3$.

Observaţii. 1) În condiţiile teoremei 4.3, din relaţia (21) rezultă formula aproximativă

$$f(x) \simeq f(a) + \mathrm{d}f(a)(x - a), \text{ adică } f(x) \simeq f(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j),$$

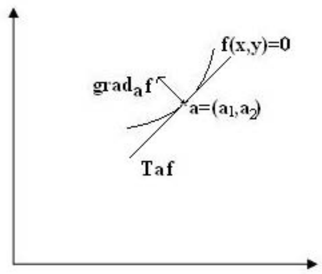


Fig. III.19a

pentru orice x din vecinătatea lui a; aşadar, f se aproximează în jurul lui a cu o funcţie afină (suma unei funcţii liniare cu o constantă). Mai precis, două aplicaţii f, g definite în vecinătatea punctului a se numesc *tangente in* a dacă $f(x) - g(x) = 0(||x - a||)$ pentru $x \to a$; orice aplicaţie f ca mai sus este diferenţiabilă în $a \leftrightarrow$ există o aplicaţie afină g astfel încât f şi g să fie tangente în a.

2) Vectorul $\text{grad}_a f \triangleq \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$, unde f este de clasă C^1 în vecinătatea lui a, se numeşte *gradientul lui f în punctul a*, iar mulţimea

$$T_a f = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j) = 0 \right\}$$

se numeşte *hiperplanul tangent în a la hipersuprafaţa de ecuaţie* $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(a)$. Pentru $n = 2$ se obţine tangenta la o curbă plană dată printr-o ecuaţie carteziană, iar pentru $n = 3$ se obţine planul tangent la o suprafaţă dată cartezian (fig. III. 19a şi b). Asupra acestor noţiuni vom reveni.

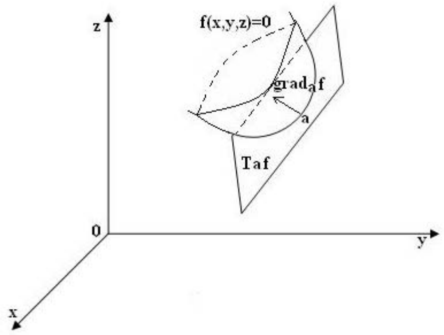


Fig. III.19b

3.4.4 Derivatele parţiale ale funcţiilor compuse; proprietăţi de calcul

Teorema 4.4. *Fie $F : A \to B$, $G : B \to \mathbb{R}^l$ două aplicaţii unde $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ sunt mulţimi deschise. Dacă F este diferenţiabilă într-un punct $a \in A$ şi G este diferenţiabilă în punctul $b = F(a)$, atunci funcţia compusă $G \circ F$ este diferenţiabilă în a şi în plus,*

$$d(G \circ F)(a) = dG(b) \cdot dF(a). \tag{25}$$

În particular, compunerea a două aplicaţii diferenţiabile este de asemenea diferenţiabilă.

Demonstraţie. Notăm $T = \mathrm{d}F(a)$, $U = \mathrm{d}G(b)$; aceste aplicaţii sunt $\mathbb{R}$-liniare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ şi în plus, conform (21) au loc relaţii de forma $F(x) = b + T(x-a) + ||x-a|| \cdot \varphi(x)$ şi $G(y) = G(b) + U(y-b) + ||y-b|| \cdot \psi(y)$, $(\forall)x \in A$, $(\forall)y \in B$, unde $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{y \to b} \psi(y) = 0$. Înlocuind $y = F(x)$, $x \in A$ şi ţinând cont că $F(x) - b = T(x-a) + ||x-a|| \cdot \varphi(x)$, avem $G(F(x)) = G(b) + U(f(x) - b) + ||F(x) - b|| \cdot \psi(y) = G(F(a)) + U(T(x-a) + ||x - a|| \cdot \varphi(x)) + ||T(x-a)||x-a|| \cdot \varphi(x)|| \cdot \psi(F(x))$, adică $G(F(x)) = G(F(a)) + {}$ $+ (U \circ T)(x-a) + ||x-a|| \cdot U(\varphi(x)) + ||T(x-a) + ||x-a|| \cdot \varphi(x)||\psi(F(x))$ şi ultimii doi termeni tind către zero când $x \to a$. În concluzie, are loc o relaţie de forma (21) pentru compunerea $G \circ F$ şi pentru punctul a şi în plus, $\mathrm{d}(G \circ F)(a) = U \circ T$, adică tocmai relaţia (25).

Corolar (teorema de medie). *Fie $[a, b]$ un segment în $\mathbb{R}^n$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$ care conţine acel segment. Atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încât*

$$f(b) - f(a) = \mathrm{d}f(\xi)(b - a).$$

Demonstraţie. Funcţia $g(t) = f((1-t)a + tb)$ este definită pe un deschis în $\mathbb{R}$ care conţine intervalul [0,1] şi în plus $g(0) = f(a)$, $g(1) = f(b)$. Conform teoremei creşterilor finite, există $t_0 \in (0, 1)$ astfel încât $g(1) - g(0) = g'(t_0)$. Conform teoremei 4.4 avem $g'(t) = \mathrm{d}f((1-t)a + tb)(b-a)$, deci $f(b) - f(a) = \mathrm{d}f(\xi)(b-a)$, unde $\xi = (1-t_0)a + t_0 b$.

În particular, dacă normele aplicaţiilor liniare $\mathrm{d}f(u)$, $u \in A$ ar fi majorate de un acelaşi număr $M > 0$, atunci se deduce din teorema de medie că

$$|f(b) - f(a)| \leq M \cdot ||b - a||. \tag{26}$$

Din teorema 4.4 vom deduce o regulă mai practică pentru derivarea parţială a funcţiilor compuse. Mai întâi vom stabilim o legătură remarcabilă între diferenţiala unei aplicaţii într-un punct şi matricea jacobiană corespunzătoare.

Fie $F : A \to \mathbb{R}^m$ o aplicaţie definită pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, diferenţiabilă într-un punct $a \in A$ şi $f_1, \ldots, f_m$ componentele lui F; atunci conform teoremei 4.1 aplicaţia $\mathbb{R}$-liniară $\mathrm{d}F(a)$ are componentele $\mathrm{d}f_1(a), \ldots, \mathrm{d}f_m(a)$. Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ este baza canonică în $\mathbb{R}^n$, atunci relaţiile (23) devin $\mathrm{d}f_i(a)(e_j) = = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Reamintim că dacă $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară şi dacă $t_1, t_2, \ldots, t_m$ sunt componentele lui T, atunci matricea

$$M_T = [t_i(e_j)]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

se numeşte *matricea asociată lui T în bazele canonice din* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$. Aplicând acest fapt pentru $T = \mathrm{d}F(a)$, $t_i = \mathrm{d}f_i(a)$, $1 \le i \le m$, rezultă că *matricea asociată diferenţialei lui F în punctul a este tocmai matricea jacobiană* $\mathbf{J}_F(a) = \left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ *a lui F în a.* Reamintim de asemenea că asocierea $T \mapsto M_T$ este $\mathbb{R}$-liniară şi că dacă T, U sunt liniare, atunci $M_{U\circ T} = M_U \cdot M_T$, iar o aplicaţie $\mathbb{R}$ liniară $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este izomorfism $\leftrightarrow$ matricea M_T este nesingulară şi în acest caz, $(M_T)^{-1} = M_{T^{-1}}$. Din teorema 4.4 rezultă direct

Teorema 4.5. *În condiţiile teoremei 4.4 are loc relaţia*

$$\mathbf{J}_{G\circ F}(a) = \mathbf{J}_G(b) \cdot \mathbf{J}_G(a). \tag{27}$$

Relaţia (27) concentrează diversele *reguli de derivare parţială a funcţiilor compuse*, utilizate foarte des în aplicaţiile analizei. În cazul $l = m = n$ se obţine o relaţie remarcabilă între determinanţi funcţionali: fie $y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$ componentele lui F şi $g_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_n)$ componentele lui G; notând cu $h_i(x_1, \ldots, x_n) = g_i(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$, $1 \le i \le n$ componentele compunerii $G \circ F$, rezultă căre loc relaţia

$$\frac{D(h_1, \ldots, h_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a) = \frac{D(g_1, \ldots, g_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}(b) \cdot \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a). \tag{28}$$

Această relaţie rezultă din (27), aplicând faptul că determinantul produsului a două matrici pătratice de ordin n este produsul determinanţilor acelor două matrici.

Cazuri particulare. 1) Fie $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^2$ mulţimi deschise şi f, g aplicaţii diferenţiabile

$$\begin{aligned}
&A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{R}\\
&t \mapsto f(t)\\
&\qquad (u, v) \mapsto w,\\
&f(t) = (u(t), v(t)),\ w = g(u, v).
\end{aligned}$$

Se poate atunci considera funcţia compusă $w = w(t)$ prin $w = (g \circ f)(t) = g(f(t)) = g(u(t), v(t))$ şi relaţia (27) scrisă în punctul curent $\mathbf{J}_{g\circ f} = \mathbf{J}_g \cdot \mathbf{J}_f$ devine

$$w'(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \frac{\partial g}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial g}{\partial v}v'(t).$$

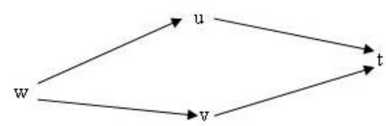


Fig. III.20

Pentru a reţine această formulă, este util graful (fig. III. 20).

2) Fie $A \subset \mathbb{R}^2$, $B \subset \mathbb{R}^2$ mulţimi deschise şi f, g aplicaţii diferenţiabile

$$\begin{aligned}
&A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{R}\\
&(x, y) \mapsto (u, v),\\
&\qquad (u, v) \mapsto w,\\
&u = u(x, y),\ v = v(x, y),\ w = g(u, v).
\end{aligned}$$

Relaţia matricială (27) în punctul curent devine în acest caz

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial u} & \dfrac{\partial w}{\partial v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

de unde

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y},$$

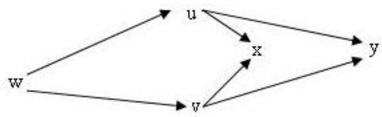


Fig. III.21

care se pot reţine mai uşor folosind graful (fig. III.21).

3) Fie un *con deschis* $C \subset \mathbb{R}^n$ (adică o submulţime deschisă C astfel încât din ipoteza că $x \in C$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ să rezulte $tx \in C$; de exemplu, $C = \mathbb{R}^n$ este un con deschis şi la fel sunt mulţimile $\{xy > 0\}$ în $\mathbb{R}^2$ şi $\{x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$ în $\mathbb{R}^3$). Fie $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f : C \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă pe C, care în plus este *omogenă de grad* r (adică $f(tx) = t^r f(x)$, $(\forall)x \in C$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, r fiind un număr real fixat). În acest caz rezultă relaţia

$$f(\overbrace{tx_1}^{u_1}, \ldots, \overbrace{tx_n}^{u_n}) = t^r \cdot f(x_1, \ldots, x_n),\ (\forall)t \in \mathbb{R},\ t \neq 0, (\forall)x = (x_1, \ldots, x_n) \in C.$$

Derivând această relaţie în raport cu t, rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(tx) \cdot x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(tx)x_n = r\, t^{r-1} \cdot f(x)$$

şi făcând $t = 1$, se obţine o relaţie remarcabilă în punctul curent din C, anume

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = r \cdot f(x_1, \ldots, x_n), \tag{29}$$

numită *formula lui Euler pentru funcţii omogene.*

Vom da în continuare proprietăţile de calcul pentru derivata după un versor şi în particular pentru derivate parţiale.

Teorema 4.6. *Fie* $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ *(*$A \subset \mathbb{R}^n$ *deschis) o funcţie diferenţiabilă într-un punct* $a \in A$*. Pentru orice versor* $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ *avem*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a) = s_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \ldots + s_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a). \tag{30}$$

Demonstraţie. Fie $g(t) = f(a+ts)$, definită în vecinătatea originii. Deoarece f este diferenţiabilă în punctul a, rezultă că g este o funcţie diferenţiabilă în punctul $t = 0$ şi fiind funcţie de o variabilă reală, există $g'(0)$, adică tocmai $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a)$, conform definiţiei 4.1. În plus,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a) = g'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a) f(\overbrace{a_1 + ts_1}^{x_1}, \ldots, \overbrace{a_n + ts_n}^{x_n})\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \cdot x_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \cdot x_n'(t)\right]\Bigg|_{t=0},$$

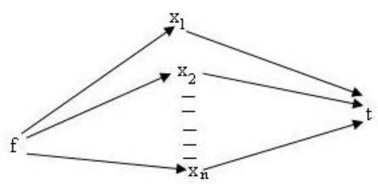


Fig. III.22

conform regulei de derivare a funcţiilor compuse, ilustrată în graful (fig. III.22).

Aşadar, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)s_1 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)s_n$, deoarece pentru $t = 0$ avem $x_k = a_k$ şi $x_k'(t) = s_k$, $1 \leq k \leq n$.

Teorema 4.7. *Fie* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *(*$A \subset \mathbb{R}^n$ *deschis) două funcţii diferenţiabile într-un punct* $a \in A$*. Atunci* $f + g$, λf *(*$\lambda \in \mathbb{R}$ *constant),* fg, f/g *(*$g(x) \neq 0$, $(\forall)x \in A$*) sunt diferenţiabile în* a *şi în plus*:

(a)

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f+g)(a)=\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)+\frac{\partial g}{\partial x_k}(a),\ \frac{\partial}{\partial x_k}(\lambda f)(a)=\lambda\frac{\partial f}{\partial x_k}(a),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(fg)(a)=f(a)\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)+g(a)\frac{\partial f}{\partial x}(a),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f/g)(a)=\frac{g(a)\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)-f(a)\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)}{g(a)^2},\quad 1\le k\le n.$$

(b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(f+g)(a)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a)+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}(a),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\lambda f)(a)=\lambda\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(fg)(a)=f(a)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}(a)+g(a)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(f/g)(a)=\frac{g(a)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a)-f(a)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}(a)}{g(a)^2}\quad \textit{pentru orice versor } s\in\mathbb{R}^n.$$

(c)

$$\mathrm{d}(f+g)(a)=\mathrm{d}f(a)+\mathrm{d}g(a),\ \mathrm{d}(\lambda f)(a)=\lambda\mathrm{d}f(a),$$

$$\mathrm{d}(fg)(a)=f(a)\mathrm{d}g(a)+g(a)\mathrm{d}f(a),\ \mathrm{d}(f/g)(a)=\frac{g(a)\mathrm{d}f(a)-f(a)\mathrm{d}g(a)}{g(a)^2}.$$

Demonstraţie. (a) Se aplică faptul că pentru derivate parţiale $\frac{\partial}{\partial x_k}$, considerând $x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n$ ca parametri, au loc regulile de derivare pentru funcţii de o variabilă reală, cunoscute din liceu.

(b) Se foloseşte relaţia (30). De exemplu,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(fg)(a)=\sum_{k=1}^{n}s_k\frac{\partial}{\partial x_k}(fg)(a)=\sum_{k=1}^{n}s_k\left[g(a)\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)+\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)\right]=$$

$$=g(a)\sum_{k=1}^{n}s_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)+f(a)\sum_{k=1}^{n}s_k\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)=g(a)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a)+f(a)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}(a)\text{ etc.}$$

(c) Rezultă din relaţia (24) şi din punctul (a) al acestei teoreme.
Relaţiile din teorema 4.7 se scriu în punctul curent astfel:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f+g)=\frac{\partial f}{\partial x_k}+\frac{\partial g}{\partial x_k},\ \frac{\partial}{\partial x_k}(fg)=f\frac{\partial g}{\partial x_k}+g\frac{\partial f}{\partial x_k},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(fg)=f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}+$$

$$+g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s},\ \mathrm{d}(f+g)=\mathrm{d}f+\mathrm{d}g,\ \mathrm{d}(fg)=f\mathrm{d}g+g\mathrm{d}f,\ \mathrm{d}(f/g)=\frac{g\mathrm{d}f-f\mathrm{d}g}{g^2}\text{ etc.}$$

3.4.5 Derivate parţiale de ordin superior, diferenţiale de ordin superior

Fie $f(x_1,\dots,x_n)$, $f:A\to\mathbb{R}$ o funcţie de n variabile reale, definită pe un deschis $A\subset\mathbb{R}^n$ şi cu valori reale. Definiţiile de mai jos se extind cu uşurinţă la cazul funcţiilor cu valori vectoriale, cu ajutorul funcţiilor componente.

Definiţia 4.7. *Funcţia f se numeşte:* **de clasă** $C^0(A)$ *dacă este continuă pe A;* **de clasă** $C^1(A)$ *(sau* **continuu diferenţiabilă pe** *A) dacă este continuă pe A şi derivabilă parţial în fiecare punct din A, iar funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x_k}:A\to\mathbb{R}$, $1\le k\le n$, sunt continue pe A;* **de clasă** $C^2(A)$ *dacă $f\in C^1(A)$ şi toate derivatele $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $1\le k\le n$, sunt funcţii de clasă $C^1(A)$, adică pentru orice*

$1 \leq j, k \leq n$, există $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ în fiecare punct din A şi acestea sunt funcţii continue pe A.

Derivata $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ se notează cu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ pentru $j \neq k$ şi cu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ pentru $j = k$. Dacă $f \in C^2(A)$ se obţin astfel noi funcţii continue

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : A \to \mathbb{R} \quad \text{(cele } n \text{ derivate de ordin I pe } A\text{) şi}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} : A \to \mathbb{R} \quad \text{(cele } n^2 - n \text{ derivate mixte de ordin II pe } A\text{) şi}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} : A \to \mathbb{R} \quad \text{(cele } n \text{ derivate nemixte de ordin II pe } A\text{)}, 1 \leq j, k \leq n.$$

Exemplu. Pentru $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 x_3$ avem

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 x_3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 + x_1 x_3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 x_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = x_3, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = x_1, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{etc.}$$

Prin inducţie după p, se definesc funcţiile **de clasă** $C^p(A)$, $p \geq 1$ (ca fiind funcţii de clasă C^{p-1} ale căror derivate de ordin $p-1$ sunt de clasă C^1). De asemenea se pune $C^\infty(A) \triangleq \bigcap\limits_{p \geq 0} C^p(A)$. Funcţiile de clasă $C^\infty(A)$ se numesc **funcţii indefinit derivabile parţial pe** A; ele sunt funcţii continue, derivabile parţial de ori câte ori în raport cu variabilele $x_1, \ldots, x_n$ pe A, cu toate derivatele parţiale funcţii continue $A \to \mathbb{R}$. În mod evident, au loc incluziunile

$$C^\infty(A) \subset \ldots \subset C^p(A) \subset C^{p-1}(A) \subset \ldots \subset C^1(A) \subset C^0(A).$$

Se poate proba fără dificultate că pentru orice $p \in \mathbb{N} \cup \infty$ fixat mulţimea de funcţii $C^p(A)$ este inel comutativ cu element unitate, relativ la operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire a funcţiilor $A \to \mathbb{R}$ (A fiind un deschis fixat din $\mathbb{R}^n$), dar un inel neintegru.

În cele mai multe aplicaţii ale analizei apar funcţii de clasă cel mult C^2. În cazul unei funcţii $f(x, y)$ de două variabile reale de clasă C^2 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^2$, derivatele parţiale de ordin I şi II sunt uneori în mod specific, anume

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \ q = \frac{\partial f}{\partial y}, \ r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

şi

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{notaţiile lui G. MONGE, (1746-1818).}$$

Vom vedea în teorema care urmează că $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, adică pentru derivatele mixte de ordin II se poate interverti ordinea de derivare.

Teorema 4.8 (H.A. SCHWARTZ 1843-1921). *Fie $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^2(A)$, A fiind un deschis din $\mathbb{R}^n$. Atunci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a),$$

în orice punct $a \in A$ şi pentru orice j, k $(1 \leq j, k \leq n)$.

Demonstraţie. Stabilim în prealabil o lemă, care este de fapt un caz particular al teoremei.

Lema 2. *Fie $g(u,v), g : B(0,r) \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe o bilă $B(0,r)$, $r > 0$ centrată în originea din $\mathbb{R}^2$. Atunci*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(0,0) = \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(0,0).$$

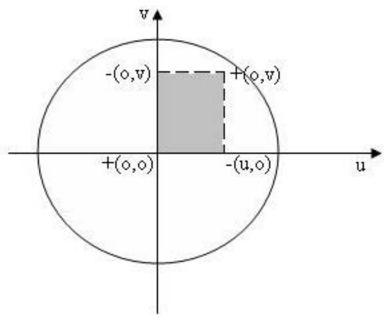


Fig. III.23

Demonstraţia lemei. Se consideră expresia

$$E = g(u,v) - g(0,v) - g(u,0) + g(0,0), \quad (\forall)(u,v) \in B(0,r).$$

Notând $\varphi(u,v) = g(u,v) - g(u,0)$, $\psi(u,v) = g(u,v) - g(0,v)$, rezultă

$$E = [g(u,v) - g(u,0)] - [g(0,v) - g(0,0)] = \varphi(u,v) - \varphi(0,v) \tag{31}$$

şi similar

$$E = [g(u,v) - g(0,v)] - [g(u,0) - g(0,0)] = \psi(u,v) - \psi(u,0) \tag{32}$$

Aplicând teorema creşterilor finite pentru v fixat, din relaţia (31) rezultă

$$E = u\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\xi_1, v) = u\left[\frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1, v) - \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1, 0)\right],$$

deci aplicând din nou teorema creşterilor finite, rezultă $E = uv\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(\xi_1, \xi_2)$, unde ξ_1 este cuprins între 0 şi u, iar ξ_2 între 0 şi v. Raţionând similar pornind de la relaţia (32), rezultă că $E = uv\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(\xi_3, \xi_4)$, unde ξ_3 este cuprins între 0 şi u, iar ξ_4 între 0 şi v. Comparând cele două expresii pentru E, rezultă că $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(\xi_1, \xi_2) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(\xi_3, \xi_4)$, punctele (ξ_1, ξ_2) şi (ξ_3, ξ_4) aparţinând dreptunghiului haşurat în fig. III. 23; făcând $(u,v) \to (0,0)$, aceste puncte vor tinde către (0,0) şi ţinând cont de continuitatea lui $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ şi $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ (g fiind presupusă funcţie de clasă C^2), va rezulta că $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(0,0) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(0,0)$ şi lema este probată.

Revenim la demonstraţia teoremei. Cazul $j = k$ este evident; presupunem $j \neq k$, de exemplu $j < k$. Deoarece A este deschis şi $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a \in A$, există $r > 0$ astfel încât $B(a,r) \subset A$ în $\mathbb{R}^n$. Pentru orice punct $(u,v) \in B(0,r)$ în $\mathbb{R}^2$ rezultă $u^2 + v^2 < r^2$. Notând cu $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza canonică în $\mathbb{R}^n$, rezultă că

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(a + ue_j + be_k, a) &= ||a + ue_j + ve_k - a|| = ||ue_j + ve_j|| = \\ &= ||0, \dots, 0, \overset{j}{u}, 0, \dots, \overset{k}{v}, 0, \dots, 0)|| = \sqrt{u^2 + v^2} < r, \end{aligned}$$

deci $a + ue_j + ve_k \in B(a,r) \subset A$ şi ca atare, se poate defini în bila $B(0,r)$ din $\mathbb{R}^2$ funcţia g de clasă C^2, ca şi f, punând $g(u,v) = f(a + ue_j + ve_k) =$ $= f(\overset{x_1}{a_1}, \dots, a_j \overset{x_j}{+} u, \dots, a_k \overset{x_k}{+} v, \dots, \overset{x_n}{a_n})$. Conform regulii de derivare a funcţiilor compuse, rezultă

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + ue_j + ve_k), \; \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a + ue_j + ve_k),$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a + ue_j + ve_k), \; \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a + ue_j + ve_k).$$

Înlocuind $u = 0$, $v = 0$, va rezulta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(0,0) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(0,0);$$

aplicând lema 2, rezultă în final că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$.

Definiţia 4.8. *Se numeşte* **multi-indice** *(sau n-***indice***) orice sistem ordonat $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de numere naturale, adică un element din $\mathbb{N}^n$, $n \geq 1$ fiind fixat. Pentru orice multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ întregul $|\alpha| = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se numeşte* **ordinul lui** α.

De exemplu, (4.7) este un 2-indice de ordin 11, iar (4,1,0,2) este un 4-indice de ordin 7.

Dacă $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă $C^p(A)$ pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, atunci pentru orice n-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ cu $|\alpha| \leq p$ este definită funcţia $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} : A \to \mathbb{R}$ de clasă $C^{p-|\alpha|}(A)$, obţinută derivând succesiv f de α_n ori în raport cu x_n de α_{n-1} ori în raport cu x_{n-1} etc. şi de α_1 ori în raport cu x_1. Această funcţie se mai notează cu $D^\alpha f$. Aplicând teorema 4.8 a lui Schwartz, rezultă că pentru orice permutare σ a numerelor $1, 2, \ldots, n$, avem $D^\alpha f = D^{\sigma(\alpha)} f$, în fiecare punct din A, adică

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_{\sigma(1)}^{\alpha_{\sigma(1)}} \ldots \partial x_{\sigma(n)}^{\alpha_{\sigma(n)}}}.$$

De exemplu, pentru o funcţie $f(x, y)$ de clasă C^2 avem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, iar pentru o funcţie $f(x, y)$ de clasă C^3 rezultă,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \text{ etc.}$$

Asocierea $D^\alpha : C^p(A) \to C^{p-|\alpha|}(A)$, $f \mapsto D^\alpha f$, se numeşte *operatorul de derivare de multi-indice* α; mai general, se numeşte *operator diferenţial liniar de ordin* $\leq p$ *pe* A orice combinaţie liniară $\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \cdot D^\alpha$, cu a_α funcţii continue $A \to \mathbb{R}$. De exemplu, în cazul $n = 2$, un operator diferenţial extrem de important este $\Delta = D^{(2,0)} + D^{(2,0)}$, adică $\Delta : C^2(A) \to C^0(A)$, $f \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f$, numit **laplacianul în două variabile** (după numele lui P. LAPLACE, 1749-1827).

Definim acum pe scurt diferenţialele de ordin superior.

Definiţia 4.9. *Fie $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$. Pentru orice punct $a \in A$, are sens* **diferenţiala I a lui** f **în** a *(conform teoremei* 4.2, *(b)), anume aplicaţia liniară*

$$\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \underline{h} = (h_1, \ldots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i. \tag{33}$$

De asemenea se poate considera forma pătratică

$$\mathrm{d}^2 f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \underline{h} = (h_1, \ldots, h_n) \mapsto \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j. \tag{34}$$

numită **diferenţiala a II-a a lui** f **în** a. *Matricea*

$$H = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right]_{1 \leq i,j \leq n}$$

asociată formei pătratice $\mathrm{d}^2 f(a)$ *este o matrice simetrică, numită* **hessiana lui** f **în** a (O. HESSE, 1811-1874).

Observând că $h_i = \mathrm{pr}_i(\underline{h}) = \mathrm{d}(\mathrm{pr}_i)(a) = \mathrm{d}x_i(a)$, rezultă în mod simbolic relaţiile

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i, \quad \mathrm{d}^2 f = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j\ , \tag{35}$$

al căror sens riguros îl constituie (33), (34).

Exemple. 1) Dacă $f(x,y)$ este o funcţie de clasă C^2 pe un deschis din $\mathbb{R}^2$, atunci în punctul curent din acel deschis au loc, cu notaţiile lui Monge, relaţiile

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 = r\,\mathrm{d}x^2 + 2s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + t\,\mathrm{d}y^2,$$

cu convenţia de notaţie $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}x^2$, $\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}y = \mathrm{d}y^2$. Evident, dacă $f(x,y) = x$, atunci $\mathrm{d}f = \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}^2 f = 0$, iar dacă $f(x,y) = y$, atunci $\mathrm{d}f = \mathrm{d}y, \mathrm{d}^2 f = 0$.

2) Fie $f(x,y,z) = x^2 + xy - xz^2$ şi $a = (1,1,0)$. Atunci conform (35) avem $\mathrm{d}f = (2x + y - z^2)\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y - 2xz\,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}^2 f = 2\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 4z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z - 2x\mathrm{d}z^2$. Diferenţialele I şi II ale lui f în punctul a sunt, conform (33), (34), aplicaţiile

$$\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (h_1, h_2, h_3) \mapsto 3h_1 + h_2 \quad \text{şi}$$

$$\mathrm{d}^2 f(a) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (h_1, h_2, h_3) \mapsto 2h_1^2 + 2h_1 h_2 - 2h_3^2.$$

Pentru o funcţie de clasă $C^p(A)$, $p \geq 3$ se pot defini diferenţiale $\mathrm{d}^k f$, $3 \leq k \leq p$, de exemplu, $\mathrm{d}^3 f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in A$ este forma cubică

$$(h_1, \ldots, h_n) \mapsto \sum_{1 \leq i,j,k \leq n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) h_i h_j h_k.$$

Puţine sunt problemele practice care utilizează diferenţiale de ordin ≥ 3.

3.4.6 Extremele locale ale funcţiilor de mai multe variabile reale

Fie $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie *valori reale*, definită pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$.

Definiţia 4.10. *Un punct $a \in A$ se numeşte* **punct extrem local al lui** *f dacă există o bilă $B(a,r) \subset A$, centrată în a, unde diferenţa $f(x) - f(a)$ are semn constant; mai precis, punctul $a = (a_1, \ldots, a_n)$ se numeşte* **punct de minim** *(respectiv* **maxim***)* **local al lui** *f dacă pentru orice punct $x = (x_1, \ldots, x_n)$ din acea bilă, avem $f(x) \geq f(a)$ (respectiv $f(x) \leq f(a)$).*

Definiţia 4.11. *Un punct $a \in A$ se numeşte* **punct critic** *(sau* **staţionar***) pentru funcţia f dacă f este funcţie diferenţiabilă în punctul a şi în plus, $df(a) = 0$.*

Teorema 4.9 (teorema lui FERMAT). *Dacă funcţia f este diferenţiabilă într-un punct $a \in A$, care este punct de extrem local al lui f, atunci acest punct este critic pentru f.*

Demonstraţie. Fixăm un versor $s \in \mathbb{R}^n$ oarecare. Alegând $r > 0$ astfel încât diferenţa $f(x) - f(a)$ să aibă semn constant pe o bilă $B(a,r)$ conţinută în A, se poate considera funcţia reală derivabilă

$$g : (-r, r) \to \mathbb{R}, \quad g(t) = f(a + ts).$$

Aşadar, diferenţa $g(t) - g(0)$ are semn constant pentru orice $t \in (-r, r)$ deci $t = 0$ este punct de extrem local al lui g şi conform teoremei clasice a lui Fermat, rezultă $g'(0) = 0$, adică $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a) = 0$. În particular $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$, $1 \leq k \leq n$ şi ca atare, $\mathrm{d}f(a) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\mathrm{d}x_k = 0$.

Reciproca teoremei 4.9 este falsă; de exemplu, luăm $A = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = xy$ şi $a = (0,0)$. Evident, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$, adică $\mathrm{d}f(a) = 0$ şi a este punct critic pentru f, dar diferenţa $f(x,y) - f(0,0) = xy$ nu are semn constant în nici o bilă centrată în origine, adică (0,0) nu este punct de extrem local pentru f.

Din cele spuse mai sus, rezultă direct următorul

Corolar. *Dacă $f(x_1,\ldots,x_n)$ este o funcţie de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, atunci extremele locale ale lui f în A se află printre soluţiile situate în A, ale sistemului*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_n) = 0. \tag{36}$$

Exemplu. Extremele locale ale funcţiei $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $A = \mathbb{R}^2$ se află printre soluţiile sistemului $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, adică $3x^2 - 3y = 0$, $3y^2 - 3x = 0$, deci se află printre punctele (0,0), (1,1).

În cele ce urmează, vom indica condiţii *suficiente* de extrem (teorema 4.9 şi corolarul ei dau numai condiţii *necesare* de extrem !); cu alte cuvinte, vom da un criteriu de a decide care din punctele critice ale unei funcţii sunt puncte de extrem ale ei. În prealabil, este necesar analogul multidimensional al formulei lui Taylor (teorema II. 4.8).

Dacă $f(x_1,\ldots,x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă $C^p(A)$, unde $A \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă şi dacă fixăm un punct $a = (a_1,\ldots,a_n) \in A$, se notează

$$T_a(x) = (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \ldots + (x_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a), \quad (\forall)x \in A.$$

Fie $[T_a(x)]^{(k)}$, $2 \le k \le p$, *puterea simbolică a polinomului* $T_a(x)$, obţinută aplicând formula tip binomul lui Newton, cu convenţia de a înlocui $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^k$ cu $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(a)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ cu $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^{k-1}\partial x_j}(a)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^{k-2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right)^2$ cu $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^{k-2}\partial x_j^2}(a)$ etc. Cu aceste precizări, probăm

Teorema 4.10 (formula lui TAYLOR). *Fie f, A, $a \in A$ ca mai sus, f fiind de clasă $C^p(A)$. Alegem $r > 0$ astfel încât $B(a,r) \subset A$. Atunci pentru orice $x \in B(a,r)$ există un punct $\xi \in [a,x]$ astfel încât*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{1}{1!}T_a(x) + \frac{1}{2!}[T_a(x)]^{(2)} + \ldots + \\ &+ \frac{1}{(p-1)!}[T_a(x)]^{(p-1)} + \frac{1}{p!}[T_a^*(x)]^{(p)}, \end{aligned} \tag{37}$$

unde în puterea simbolică $[T_a^*(x)]^{(p)}$, derivatele de ordin p sunt calculate în punctul ξ.

Demonstraţie. Fixăm un versor $s = (s_1,\ldots,s_n) \in \mathbb{R}^n$. Atunci pentru orice $t \in (-r,r)$ avem $a + ts \in B(a,r) \subset A$ şi se poate considera funcţia $g(t) = f(a+ts) = f(a_1 + ts_1,\ldots,a_n + ts_n)$; cum $f \in C^p(A)$, atunci g este de clasă $C^p(-r,r)$ şi în plus avem

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+ts)\cdot s_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a+ts)\cdot s_n, \\ g''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a+ts)\cdot s_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a+ts)\cdot s_1 s_2 + \ldots + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}(a+ts)\cdot s_{n-1}s_n + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a+ts)\cdot s_n^2 = [g'(t)]^{(2)}, \\ g'''(t) &= [g'(t)]^{(3)} \text{ etc.} \end{aligned}$$

Aplicând pentru funcţia g formula Mac Laurin (cor. 3 al teoremei 4.8, din Cap. 2), rezultă că $(\forall)t \in (-r, r)$ există ξ_0 între 0 şi t astfel încât

$$g(t) = g(0) + \frac{t}{1!}g'(0) + \frac{t^2}{2!}g''(0) + \ldots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}(0) + \frac{t^p}{p!}g^{(p)}(\xi_0).$$

Înlocuind $a + ts = x$, rezultă $ts_1 = x_1 - a_1, \ldots, ts_n = x_n - a_n$. Avem $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)s_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)s_n$, $g''(0) = [g'(0)]^{(2)}, \ldots, g^{(p)}(\xi_0) = [g'(\xi_0)]^{(p)}$ deci $tg'(0) = T_a(x)$, $t^2g''(0) = [T_a(x)]^{(2)}$ etc. şi luând $\xi = a + \xi_0 s$, se obţine tocmai formula (37).

Formula (37) este numită uneori *dezvoltare până la ordinul* $p-1$ *a lui* f *în jurul punctului* a *(sau* după puterile lui $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$). Aceeaşi formulă permite o estimare pentru creşterea $f(x) - f(a)$.

Observaţie. Fie f o funcţie de clasă C^∞ într-o vecinătate a unui punct $a \in \mathbb{R}^n$; funcţiei f i se poate asocia "seria Taylor" în punctul a

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!}[T_a(x)]^{(p)} = f(a) + \frac{1}{1!}T_a(x) + \frac{1}{2!}[T_a(x)]^{(2)} + \ldots$$

Dacă această serie este punctual convergentă şi are suma $f(x)$ în vecinătatea lui a, se spune că f este *analitică reală în punctul* a.

Corolar 1. *Dacă* $f \in C^p(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ *deschis, atunci în vecinătatea oricărui punct* $a \in A$ *are loc formula*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}T_a(x) + \frac{1}{2!}[T_a(x)]^{(2)} + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}[T_a(x)]^{(p-1)} + 0(||x-a||^{p-1}).$$

Corolar 2. *Fie* $A \subset \mathbb{R}^2$ *un deschis şi* $f(x, y)$, $f : A \to \mathbb{R}$ *o funcţie de clasă* $C^2(A)$; *atunci pentru orice punct* (x, y) *din vecinătatea unui punct fixat* $a = (x_0, y_0) \in A$, *are loc formula*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[(x - x_0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + (y - y_0)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\times\left[(x - x_0)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\xi + 2(x - x_0)(y - y_0)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_\xi + (y - y_0)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_\xi\right],$$

unde ξ *este un punct situat pe segmentul unind* a *cu punctul* (x, y), *adică există* $0 < \theta < 1$ *astfel încât*

$$\xi = ((1 - \theta)x_0 + \theta x,\ (1 - \theta)y_0 + \theta y) = (x_0 + \theta(x - x_0),\ y_0 + \theta(y - y_0)).$$

Exemple. 1) Dezvoltăm $f(x, y) = y \sin xy$, în jurul punctului $a = (0, \pi)$ până la ordinul doi. Avem $f(a) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \pi^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = 2\pi$, deci conform corolarului 1, avem $y \sin xy = \pi^2 x + \pi x(y - x) + R_2$, $(\forall)(x, y) \in \mathbb{R}^2$ unde

$$R_2 = \frac{1}{3!}\left[x^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\xi) + 3x^2(y - \pi)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\xi) + \right.$$

$$\left. + 3x(y - \pi)^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\xi) + (y - \pi)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\xi)\right],$$

ξ fiind situat între $(0, \pi)$ şi (x, y).

2) **A liniariza** o funcţie $f \in C^1(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ în jurul unui punct $a \in A$ înseamnă a considera aproximarea $f(x) \simeq f(a) + T_a(x)$, pentru orice x din vecinătatea punctului a. De exemplu, liniarizata funcţiei $f(x, y, z) =$

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos xy$ în jurul punctului $a = (\pi, 1, 0)$ este funcţia de gradul întâi

$$f(a) + (x-\pi)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(a) + (z-0)\frac{\partial f}{\partial z}(a) =$$

$$= -\sqrt{\pi^2+1} - \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}}(x-\pi) - \frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}}(y-1) = -\frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}}(x\pi+y)$$

iar liniarizata lui $f(x,y) = 2xy + ye^x$ în jurul lui $a = (0,1)$ este $3x + y - 1$.

Acest procedeu este utilizat în liniarizarea unor procese fizice sau tehnice, dacă astfel de procese sunt descrise prin funcţii $f(x_1, \ldots, x_n)$, unde $x_1, \ldots, x_n$ sunt parametri de stare.

Revenim la problema iniţială a extremelor locale. Este necesară următoarea

Lema 3. *Fie $[a_{ij}]_{1\le i,j\le n}$ o matrice simetrică de numere reale ($a_{ij} = a_{ji}$ $(\forall)i,j$) şi $\varphi(x) = \sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ forma pătratică asociată. Dacă φ este pozitiv definită (adică $\varphi(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$), atunci există $\lambda > 0$ real astfel încât $\varphi(y) \ge \lambda||y||^2$, $(\forall)y \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstraţie. Fie $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = 1\} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ sfera unitate din $\mathbb{R}^n$. Evident, S este o mulţime închisă şi mărginită în $\mathbb{R}^n$, deci este compactă (conform teoremei 1.5). Deoarece funcţia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este continuă (polinomială în $x_1, \ldots, x_n$), ea este mărginită şi îşi atinge marginea inferioară pe S (conform teoremei 2.10). Fie $\lambda = \inf\limits_{x\in S}\varphi(x)$; aşadar, există $\xi \in S$ deci $\xi \neq 0$, astfel încât $\lambda = \varphi(\xi)$. Din ipoteza că φ este pozitiv definită, rezultă $\lambda > 0$. Aşadar, $(\forall)x \in S$ avem $\varphi(x) \ge \lambda$. Fie $(\forall)y \in \mathbb{R}^n$. Dacă $y = 0$, atunci evident $\varphi(y) \ge \lambda \cdot ||y||^2$. Dacă $y \neq 0$, atunci $\frac{y}{||y||} \in S$, deci $\varphi\left(\frac{y}{||y||^2}\right) \ge \lambda$, $\frac{1}{||y||^2}\varphi(y) \ge \lambda$ şi se obţine inegalitatea din enunţ.

Teorema 4.11. *Fie $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$. Fie a un punct critic al lui f (adică $df(a) = 0$). Dacă forma pătratică $d^2f(a)$ este pozitiv definită (respectiv negativ definită), atunci a este punct de minim (respectiv de maxim) local pentru f.*

Demonstraţie. Presupunem că forma pătratică (34) este pozitiv definită. Conform lemei 3, aplicată pentru $y = x - a$, există $\lambda > 0$ real astfel ca

$$\mathrm{d}^2f(a)(x-a) \ge \lambda||x-a||^2. \tag{38}$$

Pe de altă parte, conform formulei lui Taylor (37) pentru $p = 2$, avem

$$f(x) - f(a) = T_a(x) + \frac{1}{2}R, \tag{39}$$

unde

$$T_a(x) = (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \ldots + (x_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

şi

$$R = \left[(x_1-a_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\xi) + 2(x_1-a_1)(x_2-a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi) + \right.$$

$$\left. + \ldots + (x_n-a_n)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\xi)\right],$$

unde $\xi \in [a,x]$. Deoarece a este un punct critic, rezultă că $\mathrm{d}f(a) = 0$, deci $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \mathrm{d}f(a)(e_k) = 0$, $1 \le k \le n$, deci $T_a(x) = 0$. Apoi, deoarece f este de clasă C^2, funcţiile $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ sunt continue, deci

$$R = (x_1-a_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) + 2(x_1-a_1)(x_2-a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) + \ldots +$$

$$\ldots + (x_n - a_n)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} + 0(||x-a||^2) = \mathrm{d}^2 f(a)(x-a) + 0(||x-a||^2).$$

Atunci relaţiile (39), (38) arată că

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) = \frac{1}{2}R \quad &\geq \quad \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(a)(x-a) + \theta(x)\cdot ||x-a||^2 \geq \\ &\geq \quad \left(\frac{\lambda}{2} + \theta(x)\right)\cdot ||x-a||^2, \end{aligned} \tag{40}$$

unde $\lim\limits_{x\to a}\theta(x) = 0$. Deoarece $\lambda > 0$, se poate găsi $r > 0$ astfel încât $\dfrac{\lambda}{2} + \theta(x) > 0$, pentru orice $x \in B(a,r)$. Aşadar, din relaţia (40) rezultă că $f(x) - f(a) \geq 0$ pentru orice $x \in B(a,r)$, adică a este punct de minim local pentru f.

Cazul punctului de maxim se tratează similar sau se consideră $-f$.

Observaţii. 1) Din algebra liniară, se ştie că forma pătratică $\mathrm{d}^2 f(a)$ este pozitiv definită (respectiv negativ definită) dacă matricea ei asociată, adică hessiana $H = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right])_{1\leq i,j\leq n}$ are toate valorile proprii strict pozitive (respectiv toate valorile proprii strict negative). Matricea H fiind simetrică, toate valorile ei proprii sunt reale. În acest mod, este indicat un criteriu pentru aplicarea teoremei 4.11. Dacă H are valori proprii atât pozitive cât şi negative, un punct critic a nu este extrem local pentru f.

2) Cazul $n = 2$ al unei funcţii $f(x,y)$ este simplu cu deosebire. Se determină punctele critice ale lui f în deschisul $A \subset \mathbb{R}^2$ respectiv, rezolvând sistemul (36) corespunzător, adică $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Dacă $a \in A$ este un astfel de punct critic, se calculează $\mathrm{d}^2 f(a) = r\,\mathrm{d}x^2 + 2s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + t\,\mathrm{d}y^2$, cu r, s, t calculate în a. Dacă $rt - s^2 > 0$, $r > 0$, atunci forma pătratică $\mathrm{d}^2 f(a)$ va fi pozitiv definită, deoarece $(\forall)(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$,

$$\mathrm{d}^2 f(a)(u,v) = ru^2 + 2suv + tv^2 = r\left[\left(u + \frac{s}{r}v\right)^2 + \frac{rt - s^2}{r^2}v^2\right] > 0;$$

teorema 4.11 arată că în acest caz, punctul a este de minim local pentru f; similar, dacă $rt - s^2 > 0$, $r < 0$, atunci forma pătratică $\mathrm{d}^2 f(a)$ este negativ definită şi punctul a este de maxim local. Dacă $rt - s^2 < 0$, atunci forma pătratică $\mathrm{d}^2 f(a)$ nu este nici pozitiv definită şi nici negativ definită iar din relaţia (39) rezultă că diferenţa $f(x) - f(a)$ nu are semn constant pe vreo vecinătate a punctului a; acest punct este critic, fără a fi extrem local. În cazul $rt - s^2 = 0$ este necesară evaluarea directă a semnului diferenţei $f(x) - f(a)$, utilizând dezvoltarea Taylor a lui $f(x)$ de ordin superior în jurul punctului critic a.

3) Fie $K \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime compactă şi f o funcţie de clasă C^1 pe un deschis care conţine K. Extremele globale ale lui f pe K sunt atinse în puncte din K. Dacă aceste puncte aparţin lui $\overset{\circ}{K}$, atunci ele sunt în mod necesar puncte critice şi pot fi determinate ca atare, aplicând teorema lui Fermat. Dacă ele nu aparţin lui $\overset{\circ}{K}$, atunci ele aparţin mulţimii $K \setminus \overset{\circ}{K}$, adică frontierei lui K sunt necesare alte metode pentru determinarea lor (de exemplu, metoda multiplicatorilor Lagrange care va fi dezvoltată ulterior, în cazul când $\mathrm{Fr}\,K$ este dată prin ecuaţii carteziene).

Exemple. 1) Determinăm extremele locale ale funcţiei $f(x,y,z) = x^2y + yz + 32x - z^2$ în $\mathbb{R}^3$. Punctele critice se obţin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 32 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = y - 2z = 0, \end{cases}$$

care admite o singură soluţie, anume $a = (2, -8, -4)$. Atunci matricea hessiană asociată lui $\mathrm{d}^2 f(a)$ va fi

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii ale lui H vor fi rădăcinile polinomului

$$P(\lambda) = \det(\lambda U_3 - H) = \lambda^3 + 18\lambda^2 + 15\lambda - 48.$$

Acest polinom are atât rădăcini pozitive, cât şi negative, deci a nu este punct de extrem local al lui f.

2) Determinăm extremele locale ale funcţiei $f(x, y) = x + y + 4 \sin x \sin y$ în deschisul $A = \left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \times \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ din $\mathbb{R}^2$. În acest caz, $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 4 \cos x \sin y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 4 \sin x \cos y$ şi punctele critice vor verifica relaţiile $\sin y \cos x = \sin x \cos y = -\frac{1}{4}$, deci $\sin(x + y) = -\frac{1}{2}$, $\sin(x - y) = 0$ şi unicul punct critic în A este $a = \left(\frac{7\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right)$. În plus, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 \sin x \sin y$, $s = 4 \cos x \cos y$, $t = -4 \sin x \sin y$, deci în punctul a, avem $rt - s^2 > 0$ şi $r < 0$, adică punctul a este maxim local pentru f.

3.4.7 Exerciţii

1. Să se calculeze, pornind de la definiţia, $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ pentru $f(x, y) = x^2 + 3xy$ în punctul $a = (1, 2)$.

2. Să se calculeze derivatele de ordin I ale funcţiilor $f(x, y) = x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $f(x, y) = x^3 + y^3 \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2}$, $f(x, y) = \sin \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$, $f(x, y, z) = x^2 + yz^2 + ze^{xy}$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \frac{x_n}{x_1 + \ldots + x_n}$, în punctul curent din deschisul maxim pe care funcţiile sunt definite.

3. Se consideră funcţia $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ şi punctul $a = (2, 1, 1)$. Să se calculeze $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a)$, unde $\bar{s} = \frac{\bar{\imath} - \bar{k}}{\sqrt{2}}$.

4. Să se studieze existenţa derivatelor parţiale ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^p y}{x^2 + y^2} & \text{dacă} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

în diversele puncte din $\mathbb{R}^2$ şi după diverse valori ale lui $p \geq 1$. Să se arate că pentru $p = 1$, funcţia f nu este continuă în origine, dar are derivate parţiale în acest punct.

5. a) Care sunt versorii s, astfel încât pentru funcţia $f(x, y) = \sqrt[4]{xy^2}$ să existe $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(0, 0)$?

b) Fie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ şi $a = (1, 0, 2)$. Dintre toţi versorii s să se afle cel pentru care $\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a)\right|$ este extrem.

Răspuns. a) $\bar{s} = \bar{\imath}$, $\pm\bar{\jmath}$; b) $\bar{s} = \pm\dfrac{\bar{\imath} + 2\bar{k}}{\sqrt{5}}$.

6. Să se expliciteze matricea J_F în punctul curent, pentru fiecare din aplicaţiile următoare:

$$F(x,y) = (x^2 + y, x + y^2), \quad F(x,y) = (xy, y\sin x, x + y),$$
$$F(x,y,z) = (xy, yz^2), \quad F(x,y,z) = (xyz, xy, x).$$

7. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Să se arate că: a) f este continuă şi admite derivate parţiale în toate punctele din $\mathbb{R}^2$, fără a fi diferenţiabilă în origine; b) g este diferenţiabilă în $\mathbb{R}^2$, dar nu este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$.

8. a) Fie funcţia $f(x,y) = x^3 + xy^2$ şi punctul $a = (1,2)$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordin I, II ale lui f în a, precum şi diferenţialele $\mathrm{d}f(a)$, $\mathrm{d}^2 f(a)$.

b) Să se calculeze $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}^2 f$ în punctul curent pentru fiecare din funcţiile $f(x,y) = x^2 y$, $f(x,y) = x + \ln y$, $f(x,y,z) = xyz$.

9. Fie $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ deschis şi $a \in A$ fixate. Să se arate că dacă f este continuă în a şi g este diferenţiabilă în a, $g(a) = 0$, atunci produsul fg este funcţie diferenţiabilă în a.

10. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Să se arate că f este de clasă C^1 în $\mathbb{R}^2$ şi că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Cum se explică ?

11. Fie $a, b > 0$ constante reale şi $u(x,t) = \dfrac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$. Să se arate că în fiecare punct (x,t), $t > 0$ este verificată relaţia $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (numită *ecuaţia căldurii*, $u(x,t)$ reprezentând în anumite condiţii temperatura la momentul t în punctul curent x al unei bare).

12. Să se arate că pentru fiecare din funcţiile $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^x \cos y$, $A = \mathbb{R}^2$ şi $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $A = \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$, laplacianul Δf este nul în fiecare punct din A.

13. Fie $f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(r)$, unde $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ şi φ este funcţie de clasă C^2 în intervalul $(0, \infty)$. Să se calculeze $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ şi să determine $\varphi(r)$ astfel încât $\Delta f = 0$; discuţie după n.

Indicaţie. Avem $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = \varphi'(r)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \dfrac{\varphi''(r)}{r^2} x_k^2 + \dfrac{\varphi'(r)}{r^2}(r^2 - x_k^2)$, $1 \leq k \leq n$, deci $\Delta f = \varphi''(r) + \dfrac{(n-1)\varphi'(r)}{r}$ etc.

14. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ un deschis şi $f \in C^1(A)$. Să se probeze că $\mathrm{d}(f^k) = kf^{k-1}\mathrm{d}f$, $k \geq 1$ întreg, $\mathrm{d}(e^f) = e^f \cdot \mathrm{d}f$, $\mathrm{d}(\sin f) = \cos f \, \mathrm{d}f$ şi în punctele unde f nu se anulează $\mathrm{d}(1/f) = -\dfrac{1}{f^2}\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}(\ln|f|) = \dfrac{1}{f}\mathrm{d}f$.

15. Să se determine punctele critice ale funcţiilor $f(x,y) = 10 - \sqrt{x^2+y^2}$, $g(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$, $h(x,y,z) = xyz + yz + x$.

16. a) Să se dezvolte funcţia $f(x,y) = y^2 + y\sin xy$ în jurul punctului $a = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ până la ordinul II; idem $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $a = (1,1)$.

b) Să se indice o formulă de calcul al câtului $\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 y}$ pentru $|x|, |y|$ "mici".

17. Să se arate, folosind numai definiţiile, că funcţia $f(x,y) = x^2 + y^2$ are minim în (0,0), iar $g(x,y) = x^2 + y^2$ nu are nici minim şi nici maxim în (0,0).

18. Să se afle extremele funcţiilor $f(x,y) = x^4 + y^4 - 8xy$, $f(x,y) = (5+x-2y)\cdot e^{y^2-x}$, $f(x,y) = (x+y)e^{x+y}$, $f(x,y,z) = 3x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz$, $f(x,y,z) = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + x + y + z$.

19. Să se arate că funcţia $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$ are o infinitate de maxime şi nici un minim.

20. Dacă un punct $a = (x_0, y_0)$ are proprietatea că o funcţie $f(x,y)$ are minim în a în lungul oricărei drepte trecând prin a, rezultă sau nu că a este punct de minim pentru f ? Să se analizeze exemplul $f(x,y) = (x-y^2)(2x-y^2)$, $a = (0,0)$.

21. Fie $\varphi(x,y,z)$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. Să se arate că dacă U este conex şi $\operatorname{grad}\varphi = 0$ în U, atunci φ este constantă.

3.5 Schimbări de coordonate, funcţii implicite

În acest paragraf vom demonstra câteva dintre marile teoreme ale analizei matematice, referitoare la transformările punctuale. Multe din aceste rezultate au interpretări geometrice utile şi stau la baza Geometriei diferenţiale moderne. Schimbările de coordonate locale (sau cum se mai spune, schimbările de variabile) au rostul de a simplifica studiul unor proprietăţi de natură diferenţială şi se aplică în mod curent la rezolvarea unor clase de ecuaţii diferenţiale, ecuaţii cu derivate partiale etc. De asemenea, noţiunea de tensor este strâns legată de comportarea anumitor entităţi la schimbări de coordonate.

3.5.1 Transformări punctuale, difeomorfisme, schimbări de coordonate

Definiţia 5.1. *Fie $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ mulţimi deschise fixate ($n, m \geq 1$).*

Orice aplicaţie $F : A \to B$, de clasă C^1 pe A (adică toate componentele sale $f_1, \ldots, f_m : A \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă $C^1(A)$) se numeşte **transformare punctuală** *de la A la B.*

În acest caz, oricărui *punct* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$ îi corespunde un punct bine determinat $F(x) = (y_1, \ldots, y_m) \in B$, depinzând diferenţial de x, unde

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n),$$

ceea ce justifică terminologia.

Definiţia 5.2. *Fie A, B deschişi din $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$ fixat). O transformare punctuală $F : A \to B$ se numeşte* **difeomorfism** *(sau* **izomorfism diferenţiabil** *sau* **transformare regulată***) de la A la B dacă F este bijectivă şi inversa ei $F^{-1} : B \to A$ este o aplicaţie de clasă $C^1(B)$.*

Teorema 5.1 (caracterizarea difeomorfismelor). *Fie $F : A \to B$ o aplicaţie bijectivă de clasă $C^1(A)$ între doi deschişi din $\mathbb{R}^n$ şi $f_1, \ldots, f_n : A \to \mathbb{R}$ componentele lui F. Sunt echivalente afirmaţiile următoare:*

a) *F este difeomorfism;*

b) *pentru orice punct $a \in A$, diferenţiala $dF(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este izomorfism $\mathbb{R}$-liniar şi F^{-1} este continuă;*

c) *pentru orice punct $a \in A$, matricea jacobiana $J_F(a)$ este nesingulară, adică $\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a) \neq 0$ şi F^{-1} este continuă.*

Demonstraţie. Echivalenţa afirmaţiilor (b), (c) rezultă din faptul că $J_F(a)$ este matricea asociată aplicaţiei liniare $\mathrm{d}F(a)$ în baza canonică din $\mathbb{R}^n$ şi într-o astfel de asociere, matricele nesingulare corespund izomorfismelor liniare.

(a) $\Rightarrow$ (b). Fixăm un punct arbitrar $a \in A$ şi fie $b = F(a)$. Deoarece F este difeomorfism, aplicaţia F^{-1} este de clasă $C^1(B)$, deci conform teoremei 4.2 (b), F^{-1} este diferenţiabilă în punctul b. Cum $F \circ F^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$, $F^{-1} \circ F = 1_{\mathbb{R}^n}$, din relaţia (27) rezultă $J_F(a) \cdot J_{F^{-1}}(b) = U_n$, $J_{F^{-1}}(b) \cdot J_F(a) = U_n$, unde U_n este matricea unitate de ordin n; deci matricea $J_F(a)$ este nesingulară; în plus, are loc relaţia

$$J_{F^{-1}}(F(a)) = J_F(a)^{-1}. \tag{41}$$

(b) $\Rightarrow$ (a). Presupunem îndeplinită condiţia (b), adică aplicaţia $\mathbb{R}$-liniară $T = \mathrm{d}F(a)$ este bijectivă şi fie $G = F^{-1}$. Avem de arătat că $G \in C^1(B)$. Pentru aceasta, probăm mai întâi că G este diferenţiabilă în orice punct $b \in B$. Fie $a = G(b)$, deci $b = F(a)$. Deoarece F este *diferenţiabilă* în a, are loc o relaţie de forma $F(x) = F(a) + T(x-a) + ||x-a|| \cdot \varphi(x)$ cu $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} \varphi(x) = 0$; notând $y = F(x)$, rezultă $y - b = T(x-a) + ||x-a|| \cdot \varphi(x)$, de unde, aplicând T^{-1}, se obţine

$$x - a = T^{-1}(y-b) - ||x-a|| T^{-1}(\varphi(x)). \tag{42}$$

De aici, ţinând cont că $||T^{-1}(y-b)|| \leq C||y-b||$ cu $C > 0$ convenabil (conform teoremei 2.7), rezultă că $||x-a|| \leq C||y-b|| + ||x-a|| \cdot ||T^{-1}(\varphi(x))||$, deci raportul $\frac{||x-a||}{||y-b||}$ este mărginit în vecinătatea lui b. Conform (42), raportul

$$\frac{x - a - T^{-1}(y-b)}{||y-b||} = -\frac{||x-a|| T^{-1}(\varphi(x))}{||y-b||}, \; y \neq b$$

are limită pentru $y \to b$ şi anume această limită este nulă (căci dacă $y \to b$, atunci $x \to a$, $\varphi(x) \to 0$, deci $T^{-1}(\varphi(x)) \to T^{-1}(0) = 0$). Aşadar, am arătat că limita

$$\lim_{x \to a, x \neq a} \frac{G(y) - G(b) - T^{-1}(y-b)}{||y-b||}$$

există şi este nulă, deci aplicaţia G este diferenţiabilă în b şi în plus, $\mathrm{d}G(b) = T^{-1} = \mathrm{d}F(a)^{-1}$. Atunci G are derivate parţiale în orice punct din B (conform teoremei 4.2 a)) şi rămâne de probat că acestea sunt continue pe B. Dar conform relaţiei (41) (în care se utilizează doar diferenţiabilitatea lui F, F^{-1}), rezultă $J_G(F(x)) = J_F(x)^{-1}$ şi cum determinantul lui $J_F(x)$ este nenul în fiecare punct $x \in A$, iar elementele lui $J_F(x)$ sunt funcţii continue (căci $F \in C^1(A)$, adică $f_1, \ldots, f_n \in C^1(A)$, va rezulta că elementele matricei inverse $J_F(x)^{-1}$ variază continuu cu x; cu alte cuvinte, derivatele parţiale ale lui G, în punctul $y = F(x)$, $(\forall) x \in A$ sunt continue, adică $G \in C^1(B)$.

Direct din această teoremă se deduce următorul:

Corolar. a) *Compunerea a două difeomorfisme este un difeomorfism;*

b) *Inversul unui difeomorfism este un difeomorfism.*

Trebuie reţinut totodată că dacă $A \xrightarrow{F} B \xrightarrow{G} C$ sunt difeomorfisme, atunci conform (28), (41) au loc relaţiile următoare între determinanţi funcţionali:

$$\frac{D(G\circ F)}{D(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{D(G)}{D(y_1,\ldots,y_n)}\cdot\frac{D(y_1,\ldots,y_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)},$$
$$\frac{D(F^{-1})}{D(y_1,\ldots,y_n)}=\frac{1}{\dfrac{D(F)}{D(x_1,\ldots,x_n)}} \tag{43}$$

cu notaţii şi în condiţii uşor de precizat. Dacă relaţiile $y_i = f_i(x_1,\ldots,x_n)$, $1\le i\le n$ definesc un difeomorfism, atunci se scrie $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$ în loc de $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sau $\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$ în loc de $\dfrac{\partial (F^{-1})_i}{\partial y_j}$. Sunt necesare unele precauţii (de exemplu, $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\neq 1/\dfrac{\partial x_j}{\partial y_i}$ pentru $n\ge 2$).

Se poate arăta că dacă F este un difeomorfism de clasă C^p, $p\ge 1$ (adică $f_1,\ldots,f_n$ sunt de clasă C^p), atunci difeomorfismul F^{-1} este de asemenea de clasă C^p.

Exemple. Dacă $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ este o aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară şi dacă $M_T = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ este matricea asociată (în bazele canonice), atunci notând cu $t_1,\ldots,t_m$ funcţiile componente ale lui T, $y_i = t_i(x_1,\ldots,x_n)$, $1\le i\le m$ şi identificând punctele din $\mathbb{R}^p$ cu vectori-coloană p-dimensionali, rezultă relaţia matricială $T(x) = M_T\cdot x$ sau explicit $y_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, $1\le i\le m$. Aplicaţia T este evident o transformare punctuală de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^m$. Pentru $m=n$, aplicând teorema 5.1, rezultă că T este difeomorfism dacă şi numai dacă T este nesingulară (adică matricea M_T este nesingulară); în acest caz, jacobianul lui T este chiar determinantul $\det M_T$.

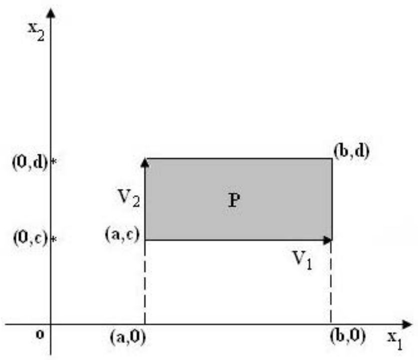


Fig. III.24a

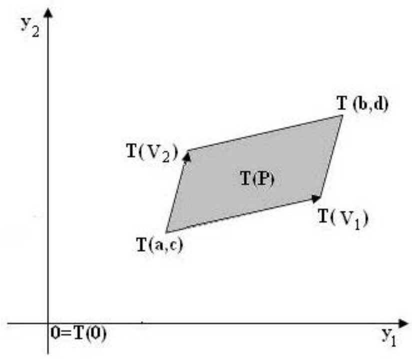


Fig. III.24b

Reamintim că o aplicaţie liniară nesingulară $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ se numeşte ortogonală dacă inversa ei coincide cu transpusa ei, adică $M_T^{-1}=M_T'$; în acest caz, avem $M_T\cdot M_T' = 1$, deci $\det M_T\cdot det M_T'=1$, adică $\det M_T=\pm 1$.

Transformările ortogonale având determinantul egal cu 1 se numesc *rotaţii ale spaţiului $\mathbb{R}^n$ în jurul originii.*

Orice aplicaţie $\alpha:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ de forma $\alpha = T + a$, cu $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ aplicaţie $\mathbb{R}$ - liniară şi $a\in\mathbb{R}^n$ fixat, deci $\alpha(x) = T(x)+a$, $(\forall)x\in\mathbb{R}^n$, se numeşte *transformare afină*; dacă $T = 1_{\mathbb{R}^n}$ se obţine *translaţia de vector a în* $\mathbb{R}^n$.

Toate aplicaţiile de mai sus reprezintă cazuri particulare importante de transformări punctuale.

Indicăm acum modul în care se modifică volumul paralelipipedelor compacte din $\mathbb{R}^n$ prin aplicaţii liniare (privite ca transformări punctuale).

Teorema 5.2. *Fie $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ o aplicaţie $\mathbb{R}$ - liniară şi $P\subset\mathbb{R}^n$ un paralelipiped închis. Atunci*

$$V(T(P)) = |\Delta|\cdot V(P), \tag{44}$$

unde Δ este determinantul matricii M_T.

Demonstraţie. Pentru simplitate, presupunem $n=2$ şi fie $P=[a,b]\times[c,d]$. Dacă $M_T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$, atunci $y_1 = a_{11}x_1+a_{12}x_2$, $y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2$ şi cum $v_1=(b-a,0)$, $v_2=(0,d-c)$, rezultă $T(v_1)=(a_{11}(b-a),a_{21}(b-a))$, $T(v_2)=(a_{12}(d-c),a_{22}(d-c))$ şi $T(P)$ este tocmai paralelogramul construit pe vectorii $T(v_1)$, $T(v_2)$; ca atare, $V(T(P)) =$ aria $T(P) =$ modulul produsului vectorial $T(v_1)\times T(v_2) = (b-a)(d-c)|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}| = |\Delta|\cdot V(P)$.

Cazul când P este un paralelipiped închis din $\mathbb{R}^n$, $n\ge 1$ se tratează similar, ţinând cont de interpretarea geometrică a noţiunii de determinant (ca volumul orientat al paralelipipedului construit pe vectorii-coloană).

Din faptul că relaţia (44) este verificată pentru paralelipede închise, ea rezultă adevărată pentru orice fagure F din $\mathbb{R}^n$ (definiţia 3.2). De asemenea, teorema 5.2 are loc pentru orice transformare afină, iar dacă T este o rotaţie, atunci evident $V(T(P)) = V(P)$.

Teorema 5.2 va fi utilizată în capitolul următor, la calculul integralelor multiple prin intermediul unor schimbări convenabile de coordonate.

Definiţia 5.3. *Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă. Orice transformare punctuală injectivă $F : A \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ astfel încât mulţimea $B = F(A)$ să fie deschisă şi F să stabilească un difeomorfism de la A la B se numeşte* **schimbare de coordonate** *în A. Pentru orice punct $x \in A$, numerele $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ se numesc* **coordonatele lui** *x în sistemul de coordonate F, iar funcţiile $f_1, \ldots, f_n$ poartă numele de* **sistem de coordonate** *în A.*

Aşadar schimbările de coordonate sunt de fapt difeomorfisme, în care se precizează numai domeniul de definiţie; în multe probleme fizice, este cunoscut tocmai acest domeniu, iar aplicaţia F este privită ca o schimbare a coordonatelor carteziene în A prin alte coordonate.

Exemple. 1) Dacă $A = \mathbb{R}^n$ şi $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este izomorfism $\mathbb{R}$-liniar, se spune că F este o schimbare liniară nesingulară de coordonate.

2) Fie $A = \{x > 0, y > 0\}$ primul cadran în $\mathbb{R}^2$. Aplicaţia $F : A \to \mathbb{R}^2$ $(x, y) \mapsto (\rho, \theta)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ este o schimbare de coordonate (numită *trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare*). În mod similar se definesc trecerile la coordonate sferice sau la coordonate cilindrice în $\mathbb{R}^3$.

Un rezultat profund, care înlesneşte totodată o demonstraţie simplă a teoremei funcţiilor implicite, îl constituie

Teorema 5.3 (teorema de inversiune locală). *Fie $F : A \to \mathbb{R}^n$ o aplicaţie de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$ fixat) şi fie $a \in A$ un punct, astfel încât matricea jacobiană $J_F(a)$ să fie nesingulară. Atunci există un deschis $U \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât*:

1) $a \in U \subset A$;

2) *$F(U)$ să fie un deschis în $\mathbb{R}^n$ şi F să stabilească un difeomorfism între deschişii U şi $F(U)$.*

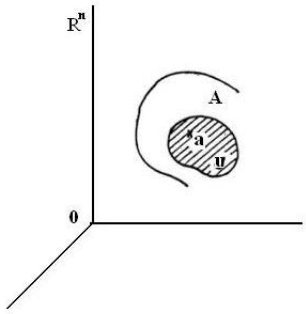


Fig. III.25a

(Pe scurt, teorema afirmă că prin restricţie convenabilă în jurul punctului a, aplicaţia F devine bijectivă, deci local inversabilă, iar inversa F^{-1} este de clasă C^1, adică *local, F este o schimbare de coordonate*).

Nu dăm demonstraţia.

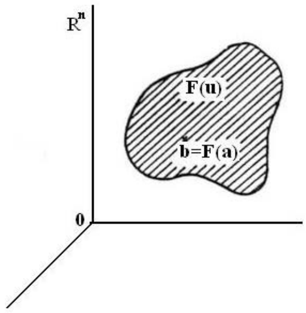


Fig. III.25b

Corolar 1. *Fie $F : A \to \mathbb{R}^n$ o aplicaţie de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât pentru orice $a \in A$, matricea $J_F(a)$ să fie nesingulară. Atunci aplicaţia F transformă deschişi în deschişi.*

Demonstraţie. Fie $D \subset A$ un deschis fixat. Trebuie arătat că $F(D)$ este un deschis în $\mathbb{R}^n$; fie $(\forall) b \in F(D)$, deci există $a \in D$ astfel încât $b = F(a)$. Conform teoremei 5.3 există un deschis U astfel încât $a \in U \subset D$ şi mulţimea $F(U)$ să fie deschisă; deoarece $b \in F(U) \subset F(D)$, rezultă că există $r > 0$ astfel încât $B(b, r) \subset F(U) \subset F(D)$, deci $F(D)$ este mulţime deschisă.

Corolar 2. Fie $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leq i \leq n$ funcţii de clasă $C^1(A)$ astfel încât $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a) \neq 0$, $a \in A$. Atunci există o vecinătate W a punctului $b = (f_1(a), \ldots, f_n(a))$ astfel încât pentru orice $y = (y_1, \ldots, y_n) \in W$, sistemul de ecuaţii

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = y_1, \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n) = y_n$$

să aibă soluţie unică (în vecinătatea lui a).

Demonstraţie. Se consideră aplicaţia $F : A \to \mathbb{R}^n$ având componentele $f_1, \ldots, f_n$ şi se aplică teorema 5.3. Atunci există o vecinătate deschisă U a lui a astfel încât F să stabilească un difeomorfism între deschişii U şi $F(U)$ şi se ia $W = F(U)$.

Studiul general al sistemelor de ecuaţii ca mai sus este legat de studiul funcţiilor implicite, aşa cum se va vedea mai târziu.

Ca o primă aplicaţie a teoremei 5.3, vom studia probleme dependenţei funcţionale. Începem cu demonstrarea unei leme.

Lema 1. *Fie $g_1, \dots, g_m : A \to \mathbb{R}$ funcţii $g_i(x_1, \dots, x_n)$, $1 \le i \le m$ de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât $m \le n$ şi matricea jacobiană a acestor funcţii în raport cu variabilele $x_1, \dots, x_n$ să aibă rangul maxim, adică m, în fiecare punct din A. Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o altă funcţie din $C^1(A)$. Atunci sunt echivalente afirmaţiile*:

a) *Funcţia f depinde funcţional de $g_1, \dots, g_m$, local; adică $(\forall)a \in A$, există o vecinătate U a punctului a şi o funcţie $\theta(y_1, \dots, y_m)$ de clasă C^1 într-o vecinătate a punctului $(g_1(a), \dots, g_m(a))$ a.î. $f(x) = \theta(g_1(x), \dots, g_m(x))$, pentru orice $x \in U$.*

b) *Există funcţii continue $\lambda_i : A \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$ a.î. $df = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i dg_i$, în punctul curent din A.*

Demonstraţie. Implicaţia (a)⇒(b) este evidentă, căci dacă $f = \theta(g_1, \dots, g_m)$, atunci $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \theta}{\partial y_i} \mathrm{d}g_i$ şi luăm $\lambda_i = \frac{\partial \theta}{\partial y_i}$, $1 \le i \le m$.

b) ⇒ (a). Fixăm $(\forall)a \in A$; se poate presupune de la început că $\Delta = \frac{D(g_1, \dots, g_m)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) \ne 0$, renumerotând eventual variabilele. Definim următoarea aplicaţie de clasă $C^1(A)$

$$H : A \to \mathbb{R}^n,\ \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (g_1(\underline{x}), \dots, g_m(\underline{x}), x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Evident, jacobianul lui H în a coincide cu Δ şi putem aplica teorema 5.3; există atunci un deschis $U \subset A$ conţinând a astfel încât aplicaţia H să stabilească un difeomorfism între U şi $V = H(U)$. Fie

$$F : V \xrightarrow{H^{-1}} U \xrightarrow{f|U} \mathbb{R},\ G_i : \xrightarrow{H^{-1}} U \xrightarrow{g_i|U} \mathbb{R},\ 1 \le i \le m.$$

Din ipoteza $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{d}g_i$, rezultă imediat că $\mathrm{d}F = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathrm{d}G_i$, unde $\mu_i = \lambda_i \circ H^{-1}$. În plus, $(\forall)\underline{y} = (y_1, \dots, y_n) \in V$, $G_i(\underline{y}) = g_i(H^{-1}(\underline{y})) = (\mathrm{pr}_i \circ H)(H^{-1}(\underline{y})) = \mathrm{pr}_i(\underline{y}) = y_i$, $1 \le i \le m$. Aşadar, $(\forall)\underline{y} \in V$, avem $\mathrm{d}F(\underline{y}) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\underline{y}) \mathrm{d}y_i$, deci $\frac{\partial F}{\partial y_{m+1}} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_n} = 0$, adică $F(\underline{y})$ este funcţie numai de variabilele $y_1, \dots, y_m$, adică $F(\underline{y}) = \theta(y_1, \dots, y_m)$. Alegem acum un punct oarecare $\underline{x} \in U$ şi fie $\underline{y} = H(\underline{x})$; atunci $y_1 = g_1(\underline{x}), \dots, y_m = g_m(\underline{x})$ şi deci $F(\underline{y}) = F(H(\underline{x})) = (f \circ H^{-1})(H(\underline{x})) = f(\underline{x})$, adică $f(\underline{x}) = F(\underline{y}) = \theta(y_1, \dots, y_m) = \theta(g_1(\underline{x}), \dots, g_m(\underline{x}))$, $(\forall)\underline{x} \in U$.

Demonstraţia acestei leme este o ilustrare a utilităţii schimbărilor de coordonate; folosirea difeomorfismului H, adică înlocuirea coordonatelor x cu coordonatele y a simplificat consideraţiile făcute anterior.

Demonstrăm acum un rezultat fundamental al analizei multidimensionale.

Teorema 5.4 (teorema dependenţei funcţionale). *Fie $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $1 \le i \le m$, funcţii de n variabile $(n \ge m)$ definite pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, cu valori reale, pentru care matricea jacobiană are rang constant r pe A. Atunci funcţiile $f_1, \dots, f_m$ satisfac local $m - r$ relaţii funcţionale (într-un sens care va fi indicat).*

Demonstraţie. Putem presupune că

$$\frac{D(f_1, \dots, f_r)}{D(x_1, \dots, x_r)}(a) \ne 0$$

în vecinătatea unui punct $a \in A$, arbitrar fixat (prin reordonarea eventuală a lui $f_1, \dots, f_m, x_1, \dots, x_n$). Liniile cu numărul de ordine $r+1, \dots, m$ ale matricei jacobiene a funcţiilor $f_1, \dots, f_m$ sunt atunci combinaţii liniare de primele r linii, de unde rezultă imediat relaţii de forma $\mathrm{d}f_i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} \mathrm{d}f_j$, $r+1 \leq i \leq m$. Conform lemei 1, există funcţii $\theta_{r+1}, \dots, \theta_m$ de r variabile astfel încât $f_i = \theta(f_1, \dots, f_r)$, pentru $r+1 \leq i \leq m$, în vecinătatea lui a. Se obţin astfel $m-r$ relaţii între funcţiile $f_1, \dots, f_m$ date iniţial.

În condiţiile teoremei 5.4, dacă $r = m$, atunci se spune că funcţiile $f_1, \dots, f_m$ sunt *independente funcţional*; această terminologie este justificată prin faptul că dacă una din funcţii s-ar exprima funcţional cu ajutorul celorlalte $m-1$, atunci conform lemei 1 (implicaţia (a) $\Rightarrow$ (b), ar rezulta imediat că matricea jacobiană asociată nu ar mai avea rangul maxim m (căci una din linii ar fi combinaţie liniară a celorlalte).

Exemple. 1) Funcţiile $f_1(x,y) = \sin xy$, $f_2(x,y) = \cos xy$ sunt funcţional dependente căci rangul matricei lor jacobiene este 1; dealtfel, $f_1^2 + f_2^2 = 1$ în $\mathbb{R}^2$.

2) Fie funcţiile $f_1(x,y,z) = x+y+z$, $f_2 = x^2+y^2+z^2$, $f_3(x,y,z) = xy + yz + zx$; matricea jacobiană asociată are rangul 2 în orice punct al deschisului $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \neq y, y \neq z, z \neq x\}$. Conform teoremei 5.4, rezultă că f_1, f_2, f_3 satisfac în vecinătatea oricărui punct din A o relaţie funcţională $(m - r = 3 - 2 = 1)$. Se observă dealtfel direct că $f_2 = f_1^2 - 2f_3$, adică există funcţia $\theta(y_1, y_2) = y_1^2 - 2y_2$ astfel încât $f_2 = \theta(f_1, f_3)$.

3.5.2 Funcţii implicite

Fie $\Phi_1(\underline{x}, \underline{y}), \dots, \Phi_m(\underline{x}, \underline{y})$ m funcţii cu valori reale de câte $n+m$ variabile reale $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_m)$, pe care le presupunem de clasă C^1 pe un deschis U din R^{n+m}. Fie

$$M = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in U | \Phi_1(\underline{x}, \underline{y}) = 0, \dots, \Phi_m(\underline{x}, \underline{y}) = 0\},$$

adică mulţimea zerourilor comune situate în U ale funcţiilor $\Phi_1, \dots, \Phi_m$. Ne vor interesa condiţii în care mulţimea M este tocmai graficul unei aplicaţii $A \to \mathbb{R}^m$ $(A \subset \mathbb{R}^n)$.

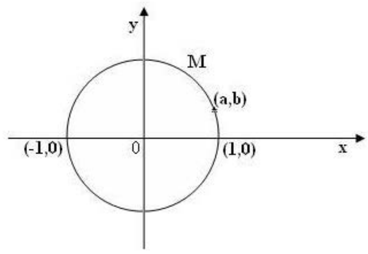


Fig. III.26

Exemple. 1) Fie $m = 1$, $n = 1$, $\Phi(x,y) = x^2+y^2-1$, $U = \mathbb{R}^2$. În acest caz, M este mulţimea punctelor circumferinţei $x^2+y^2 = 1$ (fig. III.26). Evident, M nu este graficul vreunei funcţii reale, căci pentru $x \in (-1,1)$ există două puncte $+\sqrt{1-x^2}$, $-\sqrt{1-x^2}$ astfel încât $(x, \sqrt{1-x^2})$, $(x, -\sqrt{1-x^2})$ să aparţină lui M; cu alte cuvinte, mulţimea $M \subset \mathbb{R}^2$ nu este o relaţie funcţională (I, def. 1.1). Dar pentru orice punct $(a,b) \in M$, există o vecinătate V a acestui punct astfel încât $M \cap V$ să fie graficul unei funcţii reale. De exemplu, dacă $b > 0$ se poate lua $V = \{y > 0\}$, $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1,1)$ şi atunci $M \cap V = \mathrm{Gr}\,\varphi$; dacă $b < 0$, se poate lua $V = \{y < 0\}$, $\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1,1)$ şi din nou $M \cap V = \mathrm{Gr}\,\varphi$. Dacă $a = 1$, $b = 0$, se poate lua $V = \{x > 0\}$ şi atunci $M \cap V$ apare ca graficul unei aplicaţii $x = \sqrt{1-y^2}$, $y \in (-1,1)$, anume $M \cap V = \{(\sqrt{1-y^2}, y) | y \in (-1,1)\}$ etc. Aşadar, deşi M nu este graficul unei funcţii, totuşi local această proprietate este verificată.

2) Luând $\Phi(x,y) = x^2 - 4y^2$ se observă că în nici o vecinătate a originii, mulţimea $\{x^2 - 4y^2 = 0\}$ nu este un grafic.

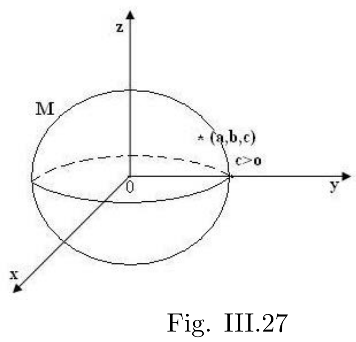


Fig. III.27

3) Fie $m = 1$, $n = 2$, $\Phi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$, $U = \mathbb{R}^3$. În acest caz, M este sfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ şi orice punct $(a,b,c) \in M$, $c > 0$ are o vecinătate, de exemplu $V = \{z > 0\}$, astfel ca $V \cap M$ să fie graficul unei funcţii; anume luând $\varphi(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, se observă că $V \cap M = \{(x,y,\varphi(x,y)) | x^2+y^2 < 1\} = \mathrm{Gr}\,\varphi$ (fig. III. 27).

Cu notaţiile generale de la început, se poate proba următoarea teoremă fundamentală, numită *teorema funcţiilor implicite* (pe scurt TFI), direct pe cazul sistemelor de forma

$$\Phi_i(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0,\quad 1\le i\le m.$$

TFI se mai numeşte "teorema de rezolvare locală a sistemelor de ecuaţii" şi în varianta generală, este datorată lui E. GOURSAT (1858 - 1936).

Teorema 5.5 (TFI). *Presupunem că într-un punct* $(\underline{a},\underline{b})\in M\subset R^{n+m}$ *avem*

$$\frac{D(\Phi_1,\ldots,\Phi_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}(\underline{a},\underline{b})\neq 0. \tag{48}$$

Atunci există un deschis $A\subset\mathbb{R}^n$, *un deschis* $B\subset\mathbb{R}^m$ *şi o funcţie* $\varphi(\underline{x})$, $\varphi:A\to B$ *de clasă* C^1 *astfel încât* $\underline{a}\in A$, $\underline{b}=\varphi(\underline{a})$, $A\times B\subset U$ *şi în plus,* $M\cap(A\times B)$ *să coincidă cu graficul lui* φ, *adică*

$$\{(\underline{x},\underline{y})\in A\times B|\Phi_1(\underline{x},\underline{y})=0,\ldots,\Phi_m(\underline{x},\underline{y})=0\}=\{(\underline{x},\varphi(\underline{x}))|\underline{x}\in A\}. \tag{49}$$

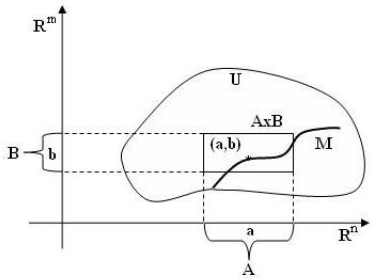


Fig. III.28

(Cu alte cuvinte, într-o vecinătate $A\times B$ a oricărui punct fixat $(\underline{a},\underline{b})$ din M unde jacobianul funcţiilor $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$ în raport cu $y_1,\ldots,y_m$ este nenul, mulţimea M apare local ca un grafic. Funcţia $\varphi:A\to B$ are componentele $\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)$, $1\le i\le m$ şi cum $(\underline{x},\varphi(\underline{x}))\in M\cap(A\times B)$, va rezulta că $\Phi_i(\underline{x},\varphi(\underline{x}))=0$, $1\le i\le m$, adică

$$\Phi_i(x_1,\ldots,x_n,\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_m(x_1,\ldots,x_n))=0,\quad 1\le i\le m.$$

Funcţiile φ_i se numesc *funcţii implicite de* $\underline{x}$, obţinute prin "rezolvarea" în raport cu $y_1,\ldots,y_m$, a sistemului

$$\Phi_i(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0,\quad 1\le i\le m.$$

Observaţii. 1) Se poate arăta că dacă $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$ sunt funcţii de clasă C^p, $p\ge 1$, în aceleaşi ipoteze ca în teorema 5.5, atunci φ este de asemenea funcţie de clasă C^p.

2) Trebuie remarcat că, mulţimea M fiind dată (prin ecuaţiile ei carteziene ca în TFI, nu poate exista local decât *cel mult* o funcţie astfel încât M să fie graficul lui φ; cu alte cuvinte, local, φ este *unică* satisfăcând concluzia teoremei 5.4 (deschişii A,B în jurul lui $\underline{a}$ şi respectiv $\underline{b}$ nu sunt unici).

Teorema funcţiilor implicite este o teoremă importantă de existenţă (a funcţiei implicite φ); ea nu dă o metodă de aflare a funcţiei φ definită de sistemul $\Phi(\underline{x},\underline{y})=\underline{0}$, adică a soluţiei acestui sistem în raport cu variabilele $\underline{y}=(y_1,\ldots,y_m)$, dar existenţa lui φ este o informaţie foarte utilă. Dăm câteva consecinţe şi aplicaţii ale TFI, care atestă forţa acestei teoreme.

Consecinţe ale TFI

a) Fie $F(x,y)$ o funcţie de clasă C^2 pe un deschis $U\subset\mathbb{R}^2$ şi $(a,b)\in U$ un punct astfel încât $F(a,b)=0$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$. Atunci conform TFI există o funcţie $y=y(x)$ de clasă C^2 într-o vecinătate W a lui a (numită şi *funcţie implicită definită de relaţia* $F(x,y)=0$) astfel încât $F(x,y(x))=0$ în orice punct $x\in W$. Acesta este sensul precis al afirmaţiei că "o relaţie $F(x,y)=0$ permite ca y să fie exprimat ca funcţie de x". Din informaţia că *există* această funcţie, se pot calcula derivatele ei de ordinul I şi II în punctul curent din W; anume, derivăm relaţia, de fapt identitatea $F(x,y(x))=0$ în raport cu x, conform regulii de derivare a funcţiilor compuse:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'=0. \tag{51}$$

Derivând din nou în raport cu x relaţia (51), care este o identitate în W, se obţine

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y'+y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'\right)+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0. \tag{52}$$

Din relaţiile (51), (52) se determină y', y'' în punctul curent (din W). Punctele în care $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$ se numesc *puncte singulare* pentru curba $F(x, y) = 0$; omitem studiul acestora.

Extremele funcţiei implicite $y = y(x)$ definită de relaţia $F(x, y) = 0$ se determină punând condiţia necesară $y' = 0$, adică rezolvând conform (51) sistemul

$$F(x, y) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0 \tag{53}$$

Pentru precizare, este suficient de aflat semnul lui y'' în fiecare din punctele critice (în ipoteza că y'' este nenul acolo); din relaţia (52) rezultă că $y'' = -\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) / \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)$. Geometric, determinarea extremelor funcţiei implicite $y = y(x)$ revine la aflarea punctelor de ordonată maximă şi minimă situate pe curba $F(x, y) = 0$.

Exemplu. a) Relaţia $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ defineşte y ca funcţie implicită de x şi conform TFI curba $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 + y^3 - 2xy = 0\}$ este un grafic în vecinătatea oricărui punct (a, b) unde $3y^2 - 2x \neq 0$. Aşadar, pentru orice x din vecinătatea punctului $x = a$, ecuaţia $y^3 - 2xy + x^3 = 0$ are soluţie unică $y(x)$. Deşi aceasta este dificil de explicitat, se pot obţine informaţii utile relativ la y', y'', folosind formulele (51), (52). Astfel y' verifică relaţia $3x^2 + 3y^2 y' - 2(y + xy') = 0$, de unde $y' = \dfrac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}$. Similar, derivând relaţia anterioară în raport cu x, se obţine $6x + 6yy'^2 + 3y^2 y'' - 4y' - 2xy'' = 0$ şi într-un punct critic al lui $y(x)$, rezultă $y'' = -\dfrac{6x}{3y^2 - 2x}$.

Pentru a afla extremele funcţiei $y = y(x)$, trebuie rezolvat mai întâi sistemul (53) corespunzător, adică $x^3 + y^3 - 2xy = 0$, $2y - 3x^2 = 0$, $3y^2 - 2x \neq 0$. Se găseşte unica soluţie $\left(\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{3}, \dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}\right)$; în acest punct avem $y'' < 0$, deci punctul respectiv este de maxim local pentru y.

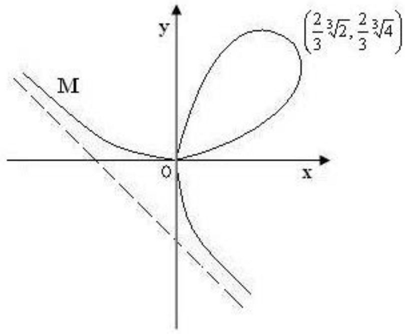


Fig. III.29

b) Fie $F(x, y, z)$, $F : U \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. Relaţia $F(x, y, z) = 0$ defineşte local, în condiţiile TFI, o funcţie $z = z(x, y)$, astfel încât să aibă loc identitatea $F(x, y, z(x, y)) = 0$; deşi în general această funcţie nu se poate explicita efectiv, se pot calcula totuşi z'_x, z'_y, z''_{x^2} etc., derivând relaţia $F(x, y, z(x, y)) = 0$ în raport cu x, y; obţinem $F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$, $F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0$, deci

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} \tag{54}$$

Pentru a determina extremele locale ale funcţiei $z(x, y)$ este necesar conform teoremei 4.11 să aflăm punctele critice (rezolvând sistemul $F(x, y, z) = 0$, $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_z \neq 0$), apoi să aflăm semnul expresiei $rt - s^2$ etc. Geometric, aceasta revine la a determina punctele de cotă maximă sau minimă situate pe suprafaţa $F(x, y, z) = 0$.

c) Fie $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ două funcţii de clasă C^1 pe un deschis U din $\mathbb{R}^3$. Sistemul de relaţii $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ poate fi rezolvat în raport cu y şi z şi sunt definite, în condiţiile TFI, funcţii $y(x)$, $z(x)$ (de exemplu, în vecinătatea oricărui punct $(a, b, c) \in U$ unde $F(a, b, c) = 0$, $G(a, b, c) = 0$, $\dfrac{D(F, G)}{D(y, z)}(a, b, c) \neq 0$). Pentru calculul derivatelor $y'(x)$, $z'(x)$ nu se derivează y, z în raport cu x (pentru că acestea nu sunt explicitate efectiv), ci se derivează în raport cu x relaţiile iniţiale care au definit $y(x)$, $z(x)$; atunci rezultă

$$F'_x + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' = 0, \quad G'_x + G'_y \cdot y' + G'_z \cdot z' = 0,$$

de unde, cu ajutorul regulii lui Cramer, obţinem y', z'.

3.5.3 Extreme cu legături; metoda multiplicatorilor lui Lagrange

Fie $f(\underline{x}, \underline{y})$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, $f : U \to \mathbb{R}$ o funcţie de $n + m$ variabile reale, cu valori reale, de clasă C^1 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ (numită *funcţie-scop* sau *funcţie-obiectiv*). Presupunem că există m "legături" între variabilele $\underline{x}, \underline{y}$, adică m relaţii de forma

$$g_1(\underline{x}, \underline{y}) = 0, \ldots, g_m(\underline{x}, \underline{y}) = 0,\ g_i : U \to \mathbb{R} \text{ de clasă } C^1(U),\ 1 \leq i \leq m. \quad (55)$$

Fie $M = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in U | g_i(\underline{x}, \underline{y}) = 0,\ 1 \leq i \leq m\}$ mulţimea punctelor din U care verifică legăturile (55).

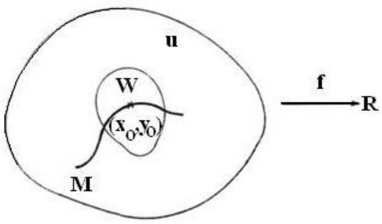


Fig. III.30

Definiţia 5.4. *Se numeşte* **punct de extrem local al funcţiei** f **cu legăturile** *(55) orice punct* $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in M$ *pentru care există o vecinătate* $W \subset U$ *astfel încât diferenţa* $f(\underline{x}, \underline{y}) - f(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ *să aibă semn constant pentru orice* $(\underline{x}, \underline{y}) \in M \cap W$ *(Cu alte cuvinte, extremele locale ale lui* f *cu legături sunt tocmai extremele locale ale restricţiei lui* f *la* M*).*

Exemple. 1) Un punct material $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de masă m are energia potenţială $V = mgz$; dacă punctul se află pe paraboloidul $z = a + x^2 + y^2$ ($a \in \mathbb{R}$ constant), atunci funcţia V are minim cu legătura $x^2 + y^2 - z + a = 0$, anume în punctul $(0, 0, a)$.

2) Fixăm un reper ortogonal în $\mathbb{R}^3$. Pentru a determina punctele de pe dreapta $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$, situate la distanţa minimă de suprafaţa $g(x, y, z) = 0$, trebuie aflat minimul funcţiei $f(x, y, z, u, v, w) = (x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2$ de 6 variabile, cu următoarele trei legături:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},\ g(u, v, w) = 0.$$

3) În cazul unei funcţii-scop f de două variabile reale $f(x, y)$, cu restricţia $(x, y) \in M$, se poate aplica uneori "metoda curbelor de nivel" $f(x, y) = k$, $k \in \mathbb{R}$; mai precis, $\sup\limits_M f = \sup\{k |$ curba $f(x, y) = k$ intersectează $M\}$, $\inf\limits_M f = \inf\{k |$ curba $f(x, y) = k$ intersectează $M\}$. De exemplu, pentru a determina extremele globale ale funcţiei $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$ cu restricţia $M = \{x^2 + y^2 - 16 \leq 0, y \geq 0\}$, curbele de nivel sunt cercurile $(x - 2)^2 + y^2 = 4 + k$ cu centrul $(2, 0)$ şi $\inf\limits_M f = f(2, 0) = -4$, iar $\sup\limits_M f = f(-4, 0) = 32$.

Teorema care urmează dă condiţii necesare ca un punct să fie extrem local cu legături. În practică se poate preciza, în funcţie de context, dacă punctul respectiv este de maxim, sau minim; pentru obţinerea unor condiţii suficiente de extrem se poate folosi semnul lui $\mathrm{d}^2 f|_M$. În exemplele anterioare 1, 2, este clar că se pun probleme de minim şi nu de maxim.

Teorema 5.6 (LAGRANGE). *Cu notaţiile de la început, presupunem că* $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ *este un punct de extrem local al lui* f *cu legăturile (55) şi în plus, că*

$$\frac{D(g_1, \ldots, g_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \neq 0. \quad (56)$$

Atunci există m *numere reale* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *(numite multiplicatori Lagrange) astfel încât considerând funcţia* $F = f + \lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_m g_m$, *punctul* $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ *să verifice în mod necesar sistemul de* $n + 2m$ *relaţii*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0,\ g_l = 0\ (1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq l \leq m), \quad (57)$$

cu $n + 2m$ *necunoscute* $\underline{\lambda}, \underline{x}, \underline{y}$.

Demonstraţie. Conform teoremei 5.5, în vecinătatea lui $\underline{x}_0$ există funcţii $\varphi_1(\underline{x}), \ldots, \varphi_m(\underline{x})$ de clasă C^1 astfel încât $\varphi(\underline{x}_0) = \underline{y}_0$, $1 \leq i \leq m$ şi în plus,

$g_i(\underline{x}; \varphi_1(\underline{x}), \ldots, \varphi_m(\underline{x})) = 0$, $1 \le i \le m$, în acea vecinatate. Derivând aceste relaţii în raport cu x_j, $1 \le j \le n$, se obţine

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} = 0, \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n. \tag{58}$$

Considerăm acum funcţia $h(\underline{x}) = f(\underline{x}; \varphi_1(\underline{x}), \ldots, \varphi_m(\underline{x}))$. Evident, deoarece $(\underline{x}, \varphi_1(\underline{x}), \ldots, \varphi_m(\underline{x})) \in M$ şi $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ este extrem local cu legăturile (55) pentru f, rezultă că $\underline{x}_0$ va fi un punct de extrem local, fără legături, pentru h. Conform teoremei 4.11, rezultă atunci $\dfrac{\partial h}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = 0$, $1 \le j \le n$, adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = 0. \tag{59}$$

Pe de altă parte, sistemul liniar în necunoscute $u_1, \ldots, u_m$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \cdot u_i = -\frac{\partial f}{\partial y_k}(\underline{x}_0, \underline{y}_0),\ 1 \le k \le m$$

are soluţie unică $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, deoarece determinantul acestui sistem este nenul, conform ipotezei (56). Aşadar,

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \cdot \lambda_i = -\frac{\partial f}{\partial y_k}(\underline{x}_0, \underline{y}_0),\ 1 \le k \le m. \tag{60}$$

Rămâne să arătăm că funcţia F şi punctul $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ verifică relaţiile (57). Mai întâi, observăm că $g_i(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = 0$, $1 \le l \le m$, deoarece $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in M$. Apoi,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_j}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \overset{cf.(58)}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) - \\
&- \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(\underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x}_0) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) - \\
&- \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \overset{cf.(60}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) + \\
&+ \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \overset{cf.(60}{=} 0.
\end{aligned}$$

În sfârşit,

$$\frac{\partial F}{\partial y_k}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial y_k}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \overset{cf.(60}{=} 0.$$

Teorema 5.6 este demonstrată.

Corolar. *Într-un punct de extrem al funcţiei f cu legăturile (55), diferenţiala lui f este combinaţie liniară a diferenţialelor legăturilor.*

Demonstraţie. Din relaţiile (57) rezultă direct că $\mathrm{d}F(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = 0$, adică

$$\mathrm{d}f(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = -\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \mathrm{d}g_k(\underline{x}_0, \underline{y}_0).$$

În practică, teorema 5.6 se utilizează astfel: fiind date funcţia f (funcţie-scop sau functie de optimizat) şi legăturile $g_1 = 0, \ldots, g_m = 0$, se consideră funcţia $F = f + \lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_m g_m$ cu numere reale λ_i, $1 \le i \le m$ nedeterminate (numite *multiplicatori*) şi se rezolvă sistemul (57). De aceea teorema 5.6 este numită *metoda multiplicatorilor lui Lagrange.*

Cazuri particulare. a) Extremele locale ale unei funcţii $f(x,y)$ cu legătura $g(x,y)=0$ cu f,g de clasă C^1 $(m=1,n=1)$ se află printre punctele (x,y) care verifică sistemul $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}=0,\ g=0$ care este esenţialmente echivalent cu $g(x,y)=0,\ \dfrac{D(f,g)}{D(x,y)}=0.$

b) Extremele locale ale unei funcţii $f(x,y,z)$ cu legăturile $g_1(x,y,z)=0$, $g_2(x,y,z)=0$ $(m=2,n=1)$, unde f,g_1,g_2 sunt de clasă C^1 pe un deschis din $\mathbb{R}^3$, se afla printre soluţiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial z}=0,\ g_1=0,\ g_2=0$$

(esenţialmente echivalent cu $g_1=0,\ g_2=0,\ \dfrac{D(f,g_1,g_2)}{D(x,y,z)}=0$).

c) Fie $f:A\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe un deschis $A\subset\mathbb{R}^n$ şi fie $K\subset A$ un compact a cărui frontieră poate fi definită prin ecuaţii carteziene. Cum f este continuă, ea este mărginită în K şi îşi atinge extremele globale, adică există puncte $a,b\in K$ astfel încât

$$f(a)=\inf_K f,\quad f(b)=\sup_K f.$$

Dacă $a\in\overset{\circ}{K}$, atunci, în particular, a este punct de minim local pentru f, deci $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)=0,\ 1\le k\le n$. Dacă $a\notin\overset{\circ}{K}$, atunci $a\in K\setminus\overset{\circ}{K}=\mathrm{Fr}\,K$ şi a va fi punct de minim pentru f cu legăturile date de faptul că a verifică ecuaţiile carteziene ale frontierei. O discuţie similară are loc pentru punctul de maxim b. Aşadar, dacă se cer marginile unei funcţii pe un compact ca mai sus, se aplică teorema lui Fermat pentru a determina punctele de extrem local situate în interiorul compactului şi metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru a analiza cazul când extremele se află pe frontiera compactului respectiv.

Exemple. 1) În cap. II, §4.6 s-a definit *entropia*

$$H(p_1,p_2,\ldots,p_n)=-\sum_{j=1}^n p_j\log_2 p_j$$

unde $p_i>0$, $1\le i\le n$ şi $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$. Determinăm extremele funcţiei H cu legătura indicată, folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Considerăm funcţia auxiliară

$$F(p_1,\ldots,p_n)=H(p_1,p_2,\ldots,p_n)+\lambda(p_1+p_2+\ldots+p_n);$$

punctele de extrem sunt printre soluţiile sistemului

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}=0,\ldots,\frac{\partial F}{\partial p_n}=0,\quad p_1+\ldots+p_n=1,\ p_i>0\ (1\le i\le n).$$

Va rezulta

$$-\frac{1}{\ln 2}(\ln p_1+1)+\lambda=0,\ldots,-\frac{1}{\ln 2}(\ln p_n+1)+\lambda=0,$$

de unde $p_1=p_2=\ldots=p_n=\dfrac{1}{n}$. Se probează fără dificultate că diferenţiala a doua d^2H este negativ definită în punctul $\left(\dfrac{1}{n},\ldots,\dfrac{1}{n}\right)$, deci entropia H este maximă atunci când probabilităţile $p_1,\ldots,p_n$ sunt egale.

2) Determinăm marginile funcţiei $f(x,y) = x^2+2xy$ în compactul $x^2+y^2 \leq 1$. Se observă mai întâi că originea este punct critic pentru f, dar nu este extrem, deci marginile lui f sunt atinse pe frontieră (căci dacă ar fi atinse în interior, acele puncte ar rezulta critice, iar f nu are puncte critice distincte de origine). Avem aşadar de aflat extremele lui f cu legătura $x^2 + y^2 = 1$ şi aplicând cazul a), obţinem fără dificultate $\inf f = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \sup f = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3.5.4 Elemente de Geometrie diferenţială

Înainte de a aborda conceptul de varietate diferenţială, studiem pe scurt câteva entităţi geometrice importante, împreună cu proprietăţile lor diferenţiale: curbe plane, curbe şi suprafeţe în spaţiu, reprezentate parametric sau prin ecuaţii carteziene. În prealabil, vom defini noţiunea de drum parametrizat.

a. Funcţii vectoriale de o variabilă reală; drumuri parametrizate

Fie I un interval în $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}^p$ o aplicaţie cu valori vectoriale ($p \geq 1$ fiind fixat) şi $f_1, \ldots, f_p$ componentele lui f. Aşadar, $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_p(t))$, $(\forall)t \in I$.

Definiţia 5.5. *Funcţia f se numeşte* **derivabilă într-un punct** $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ *dacă există în $\mathbb{R}^p$ limita*

$$f'(t_0) = \lim_{t\to t_0, t\neq t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$

(numită *derivata lui f în* t_0). În cazul când $I = [a,b]$, $a < b$, se poate defini derivabilitatea laterală la dreapta şi respectiv la stânga în punctele a, b.

Pentru orice $t \in I$, $t \neq t_0$, avem evident

$$\frac{1}{t-t_0}[f(t)-f(t_0)] = \left(\frac{f_1(t)-f_1(t_0)}{t-t_0}, \ldots, \frac{f_p(t)-f_p(t_0)}{t-t_0}\right)$$

şi conform celor spuse în §2, 4, funcţia f este derivabilă în t_0 dacă şi numai dacă $f_1, \ldots, f_p$ sunt derivabile în t_0 şi în acest caz,

$$f'(t_0) = (f_1'(t_0), \ldots, f_p'(t_0)), \tag{61}$$

adică derivarea funcţiilor cu valori vectoriale se face pe componente.

Exemple. 1) Pentru $f(t) = (t + t^2, \cos t, \ln t)$, $I = (0, \infty)$, avem $f'(t) = \left(1 + 2t, -\sin t, \dfrac{1}{t}\right)$, $(\forall)t \in I$.

2) Funcţia vectorială $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ este derivabilă în orice punct $t \in [0, 2\pi]$ şi $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$.

Pentru a fixa ideile, vom presupune că I este un interval deschis pe dreapta reală. Dacă $f : I \to \mathbb{R}^p$ este derivabilă pe I, adică în fiecare punct $t \in I$, atunci se poate defini derivata $f' : I \to \mathbb{R}^p$, $t \mapsto f'(t)$, care este de asemenea o funcţie cu valori vectoriale. Se definesc fără dificultate funcţii de clasa $C^k(I)$, $0 \leq k \leq \infty$. Proprietăţile de calcul ale derivabilităţii funcţiilor vectoriale sunt concentrate în următoarea teoremă a cărei demonstraţie este evidentă.

Teorema 5.7. (a) *Orice funcţie $f : I \to \mathbb{R}^p$ derivabilă într-un punct din intervalul I este continuă în acel punct;*

b) *Dacă $f : I \to J$ este o funcţie derivabilă într-un punct $t_0 \in I$, I şi J fiind intervale pe dreapta reală şi dacă $g : J \to \mathbb{R}^p$ este derivabilă în punctul $f(t_0)$, atunci compunerea $g \circ f$ este derivabilă în t_0 şi $(g \circ f)'(t_0) = g'(f(t_0)) \cdot f'(t_0)$.*

c) *Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}^p$ sunt funcţii derivabile în $t_0 \in I$, atunci funcţiile $f+g$, λf (λ fiind o constantă reală) au aceeaşi proprietate şi în plus $(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$, $(\lambda f)'(t_0) = f'(t_0)$; în cazul $p = 1$ se adaugă regulile uzuale de derivare a produsului şi câtului.*

În cazul $p = 2$, alegând un reper ortogonal xOy de versori $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$ există identificarea $\mathbb{R}^2 \simeq \mathcal{V}_2$ asociind oricărui punct $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ vectorul $\alpha\bar{\imath} + \beta\bar{\jmath}$. Orice funcţie vectorială $f : I \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ se poate identifica atunci cu câmpul vectorial $I \to \mathcal{V}_2$, $\bar{v}(t) = f_1(t)\bar{\imath} + f_2(t)\bar{\jmath}$; în acest caz, se scrie $\bar{v}'(t)$ în loc de $f'(t)$ şi regula (61) devine $\bar{v}'(t) = f_1'(t)\imath + f_2'(t)\bar{\jmath}$. Un lucru similar are loc pentru $p = 3$, prin fixarea unui reper ortogonal $Oxyz$ în spaţiu de versori $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$, relativ la care avem identificarea $\mathbb{R}^3 \simeq \mathcal{V}_3$, iar funcţiile vectoriale $f : I \to \mathbb{R}^3$, $f = (f_1, f_2, f_3)$ se identifică cu câmpurile vectoriale de o variabilă reala $\bar{v}(t) = f_1(t)\bar{\imath} + f_2(t)\bar{\jmath} + f_3(t)\bar{k}$, $t \in I$.

Dacă $\bar{v}, \bar{w} : I \to \mathcal{V}_3$ sunt două câmpuri vectoriale derivabile într-un punct t_0, atunci se probează imediat (lucrând pe componente) că produsul scalar $\bar{v}\cdot\bar{w} : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \bar{v}(t)\cdot\bar{w}(t)$ şi produsul vectorial $\bar{v}\times\bar{w} : I \to \mathcal{V}_3$, $t \mapsto \bar{v}(t)\times\bar{w}(t)$ sunt funcţii derivabile în t_0 şi în plus, $(\bar{v}\cdot\bar{w})'(t_0) = \bar{v}'(t_0)\cdot\bar{w}(t_0) + \bar{v}(t_0)\cdot\bar{w}'(t_0)$ şi $(\bar{v}\times\bar{w})'(t_0) = \bar{v}'(t_0)\times\bar{w}(t_0) + \bar{v}(t_0)\times\bar{w}'(t_0)$.

Definiţia 5.6. *Se numeşte drum parametrizat în $\mathbb{R}^p$ orice funcţie continuă $\gamma : I \to \mathbb{R}^p$ definită pe un interval I al dreptei reale. Notând $\gamma(t) = (f_1(t), \ldots, f_p(t))$, $(\forall)t \in I$, se spune atunci că* **este definită o reprezentare parametrică** *sau* **o parametrizare**

$$\gamma : \begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ \vdots \\ x_p = f_p(t) \end{cases}, \ (\forall)t \in I, \tag{62}$$

a drumului γ. *Submulţimea (evident conexă, cf. teor. II. 14)*

$$(\gamma) \triangleq \{(f_1(t), \ldots, f_p(t)) | t \in I\}$$

a lui $\mathbb{R}^p$ este tocmai imaginea directă $\gamma(I)$ şi se numeşte **urma** *(***traiectoria** *sau* **hodograful***) drumului γ. Relaţiile (62) se mai numesc* **ecuaţii parametrice ale drumului** γ.

Dacă $I = [a, b]$ este un interval compact, atunci mulţimea (γ) rezultă compactă şi conexă (conform teoremelor 2.9 şi 2.14); în acest caz, punctele $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ se numesc **capetele drumului** γ iar dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, drumul se numeşte **închis**.

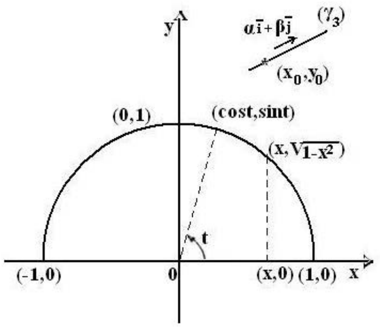


Fig. III.31

Exemple. 1) Drumurile parametrizate $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ şi $\gamma_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$ se consideră distincte, deşi ele au aceeaşi urmă în $\mathbb{R}^2$ (identificat cu planul xOy), anume semicercul $(\gamma) = (\gamma_1) = \{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ (fig. III. 31).

2) Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ drumul parametrizat închis $\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos nt, \sin nt)$ este numit *circumferinţa unitate parcursă de n ori în sens pozitiv*; urma tuturor drumurilor γ_n este aceeaşi, anume cercul $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

3) Drumul $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (r\cos t, r\sin t, c)$ unde $r > 0$, c sunt constante, are ca urmă cercul $\{x^2 + y^2 = r^2, z = c\}$, iar drumul $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (r\cos t, r\sin t, ht)$ are ca urmă elicea cilindrică de pas h situată pe cilindrul $\{x^2 + y^2 = r^2\}$ (fig. III.32).

4) Dreapta trecând printr-un punct (x_0, y_0), dintr-un plan raportat la un reper ortogonal xOy de versori $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, paralelă cu vectorul nenul $\alpha\bar{\imath} + \beta\bar{\jmath}$ are ecuaţia $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta}$ şi este urma drumului parametrizat

$$\gamma_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ t \mapsto (x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t); \text{ vezi fig. III.31.}$$

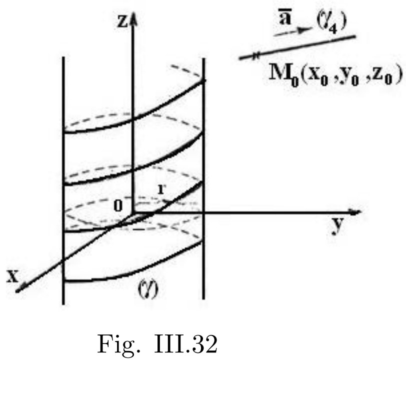


Fig. III.32

În mod similar, dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct din spaţiul $\mathbb{R}^3$, raportat la un reper ortogonal $Oxyz$ de versori $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ şi dacă $\bar{a} = a_1\bar{\imath} + a_2\bar{\jmath} + a_3\bar{k}$ este un vector nenul fixat, atunci dreapta trecând prin M_0, paralelă cu $\bar{a}$ are, de exemplu, parametrizarea

$$\gamma_4 : \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}, (\forall)t \in \mathbb{R}. \qquad \text{(fig. III.32)}$$

Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ un drum parametrizat fixat; drumul

$$\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^p,\ t \mapsto \gamma(a + b - t)$$

se numeşte *opusul lui* γ; evident, $\gamma^-(a) = \gamma(b)$, $\gamma^-(b) = \gamma(a)$ şi $(\gamma^-) = (\gamma)$, adică urmele drumurilor γ^- şi γ coincid.

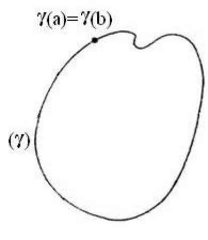


Fig. III.33a

Dacă $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$, $\gamma_1 : [b, c] \to \mathbb{R}^p$ sunt două drumuri parametrizate (în $\mathbb{R}^p$) astfel încât $\gamma(b) = \gamma_1(b)$, adică extremitatea lui γ coincide cu capătul lui γ_1, atunci se poate defini drumul

$$\gamma \cup \gamma_1 : [a, c] \to \mathbb{R}^p \text{ prin } (\gamma \cup \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{dacă} \quad t \in [a, b] \\ \gamma_1(t) & \text{dacă} \quad t \in [b, c], \end{cases}$$

numit *juxtapunerea lui* γ *şi* γ_1; urma lui $\gamma \cup \gamma_1$ este reuniunea urmelor lui γ şi γ_1.

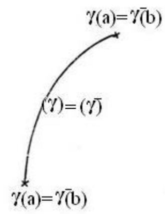


Fig. III.33b

În vederea aplicaţiilor, ipoteza de continuitate din definiţia 5.6 a drumurilor parametrizate este insuficientă şi sunt necesare anumite condiţii de regularitate impuse funcţiei γ. Ne situăm în cazul $p = 2$ şi presupunem că funcţia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$ este derivabilă, adică funcţiile componente $x(t)$, $y(t)$ sunt derivabile, într-un punct $t_0 \in I$ şi că $\gamma'(t_0) \neq 0$. Dreapta trecând prin punctul $\gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ notat cu P_0 şi paralelă cu vectorul nenul $\gamma'(t_0) = x'(t_0)\bar{\imath} + y'(t_0)\bar{\jmath}$ se numeşte **tangenta în** t_0 **la drumul** γ; orice punct $M(x, y)$ al acestei drepte verifică atunci condiţia că vectorii $\overline{P_0 M}$ şi $\gamma'(t_0)$ sunt coliniari, deci ecuaţia ei va fi

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}. \tag{63}$$

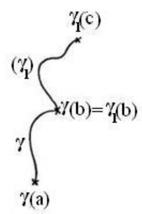


Fig. III.33c

Pentru orice $t \in I$, $t \neq t_0$, notând cu P punctul corespunzător pe (γ), vectorul $\overline{OP}$ se identifică cu $\gamma(t)$, iar $\overline{OP_0}$ cu $\gamma(t_0)$, deci

$$\frac{1}{t - t_0}\overline{P_0 P} = \frac{1}{t - t_0}(\overline{OP} - \overline{OP_0}) = \frac{1}{t - t_0}(\gamma(t) - \gamma(t_0))$$

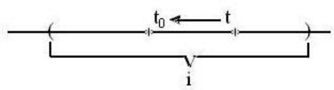


Fig. III.34a

şi există limita $\lim\limits_{t \to t_0, t \neq t_0} \frac{1}{t - t_0}\overline{P_0 P}$, care este egală cu $\gamma'(t_0)$. Aşadar, poziţia limită a vectorului-coardă $\overline{P_0 P}$ când $t \to t_0$, adică *tangenta în* t_0 *la* γ*, este coliniară cu* $\gamma'(t_0)$, ceea ce justifică terminologia utilizată. Dacă $\gamma'(t_0) = 0$, atunci se spune că t_0 este un *punct singular* al drumului γ; în acest caz, tangenta în t_0 la γ nu este bine determinată. Toate cele spuse anterior sunt valabile fără modificare în cazul $p = 3$ şi cu definiţii convenabile, se extind la cazul general al drumurilor în $\mathbb{R}^p$.

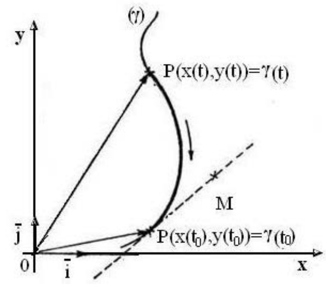


Fig. III.34b

Exemple. 1) Cercul din plan de centru (a, b) şi raza $r > 0$ parcurs pozitiv o dată admite reprezentarea parametrică $x = a + r\cos t$, $y = b + r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, adică este urma drumului $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a + r\cos t, b + r\sin t)$. Aşadar, dacă parametrul t parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, atunci punctul (x, y) corespunzător parcurge cercul $\{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$; în acest caz, $\gamma'(t) = -r\sin t\bar{\imath} + r\cos t\bar{\jmath}$. Avem $\overline{CM} = \overline{OM} - \overline{OC} = r\cos t\bar{\imath} + r\sin t\bar{\jmath}$ şi se observă că produsul scalar $\gamma'(t) \cdot \overline{CM}$ este nul, ceea ce exprimă faptul binecunoscut că tangenta la cerc este perpendiculară pe rază în punctul de contact (fig. III.35).

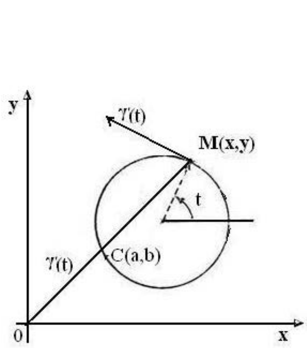


Fig. III.35

2) Fie $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ un drum parametrizat derivabil pe I, astfel încât $(\forall)t \in I$, $||\gamma(t)|| = k$ ($k > 0$ fiind constant). Atunci produsul scalar $\gamma(t) \cdot \gamma(t) = ||\gamma(t)||^2 = k^2$ este constant şi derivând, rezultă $\gamma'(t) \cdot \gamma(t) + \gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$, adică $\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$, deci vectorul $\gamma'(t)$ este perpendicular pe "raza vectoare" $\gamma(t)$, $(\forall)t \in I$. De altfel, urma lui γ este situată pe sfera cu centrul în origine şi raza k (identificând punctul $\gamma(t)$ cu vectorul său de poziţie) şi este firesc ca tangenta la (γ) în punctul curent să fie perpendiculară pe raza vectoare.

3) Evident, cercul, dreapta $t \to (t, mt + n)$, $t \in \mathbb{R}$ nu au puncte singulare; însă pentru drumul parametrizat $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ punctul $t_0 = 0$ este

singular. Elicea cilindrică $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$, $t \in \mathbb{R}$ de asemenea nu are puncte singulare.

Se pot defini în mod evident drumuri parametrizate de clasă C^k, $0 \leq k \leq \infty$ (pentru care funcţiile componente sunt de clasă C^k).

Definiţia 5.7. *Un drum parametrizat $\gamma : I \to \mathbb{R}^p$ pe un interval I al dreptei reale se numeşte* **neted** *(sau* **nesingular***) dacă γ este de clasă $C^1(I)$, şi $\gamma'(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$; un drum $\gamma : I \to \mathbb{R}^p$ se numeşte* **neted pe porţiuni** *dacă el este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.*

De exemplu, dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie reală de clasă $C^1(I)$, atunci $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$ este un drum neted în $\mathbb{R}^2$ a cărui urmă este tocmai graficul lui f.

Definiţia 5.8. *Două drumuri netede $\gamma : I \to \mathbb{R}^p$, $\gamma_1 : J \to \mathbb{R}^p$ definite pe intervalele I, J se numesc* **echivalente, cu aceeaşi orientare** *(şi se scrie $\gamma \sim \gamma_1$) dacă există o funcţie $\varphi : I \to J$ bijectivă, de clasă $C^1(I)$, strict crescătoare pe I, astfel încât φ^{-1} să aibă aceleaşi proprietăţi şi în plus, $\gamma_1 \circ \varphi = \gamma$. Funcţia φ se mai numeşte* **schimbare de parametru**.

Dacă $\gamma \sim \gamma_1$, atunci ele au aceeaşi urmă, adică $(\gamma) = (\gamma_1)$. Într-adevăr, dacă $u \in (\gamma)$, atunci există $t \in I$ astfel ca $u = \gamma(t)$, deci $u = \gamma_1(\varphi(t))$ şi ca atare, $u \in (\gamma_1)$ adică $(\gamma) \subset (\gamma_1)$. Apoi, dacă $u \in (\gamma_1)$, atunci $u = \gamma_1(\xi)$ cu $\xi \in J$ şi cum φ este bijectivă, există $t \in I$ astfel ca $\xi = \varphi(t)$, deci $u = \gamma_1(\varphi(t)) = (\gamma_1 \circ \varphi)(t) = \gamma(t)$, adică $u \in (\gamma)$. Aşadar, două drumuri echivalente cu aceeaşi orientare au aceeaşi urmă şi "sunt parcurse în acelaşi sens"; dacă φ ar fi strict descrescătoare, atunci $\gamma \sim \gamma_1^-$.

Exemple. Drumurile plane netede $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $\gamma_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (-x, \sqrt{1 - x^2})$ sunt echivalente cu aceeaşi orientare, căci luăm $\varphi(t) = -\cos t$, $\varphi : [0, \pi] \to [-1, 1]$ şi se verifică uşor condiţiile din definiţia 5.8. Orice drum neted $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ este echivalent cu un drum $\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^p$, definit pe intervalul [0, 1], anume $\gamma_1(t) = \gamma(1-t)a + tb)$, $(\forall)t \in [0, 1]$. Dacă $m \neq n$ în $\mathbb{Z}$, atunci circumferinţele γ_n şi γ_m nu sunt echivalente.

Observaţii. 1) Există o interpretare mecanică sugestivă a celor spuse anterior (pentru $p = 3$). Presupunând că I este un interval de timp şi că punctul $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ reprezintă poziţia unei particule materiale la momentul t, atunci urma drumului γ este traiectoria particulei. Drumul nu este identificat cu traiectoria şi acest fapt este subînţeles în mecanică, pentru că traiectoria este mulţimea tuturor poziţiilor particulei, în timp ce drumul reprezintă modalitatea de obţinere a acestor poziţii şi "legitatea" în parcurgerea traiectoriei (exprimată prin funcţia γ): adică funcţia γ însăşi cuprinde o informaţie mai bogată decât mulţimea (γ) a valorilor ei. Dacă γ este functie de clasă C^2, atunci funcţiile $x(t), y(t), z(t)$, ca şi derivatele lor de ordin I, II, sunt continue pe I; vectorul $\gamma'(t)$ reprezintă "viteza instantanee" a particulei la momentul t, iar $\gamma''(t)$ "acceleraţia" particulei la momentul t. Faptul că $\gamma'(t) \neq 0$, $(\forall)t \in I$ are semnificaţia că particula "se mişcă" tot timpul (de aceea punctele singulare se mai numesc uneori puncte staţionare). Această interpretare a constituit sursa modelării matematice a conceptului de drum parametrizat.

2) Cazul general al drumurilor parametrizate $I \in \mathbb{R}^p$ cuprinde cazurile particulare importante $p = 2$, $p = 3$ (pentru $p = 1$ se regăseşte studiul funcţiilor reale efectuate în liceu). Dar nu numai atât. Dacă evoluţia în timp a unui sistem fizic sau tehnic depinde de p parametri de stare $f_1(t), \ldots, f_p(t)$, pe un interval de timp I, atunci este firesc să fie considerat vectorul de stare $\gamma(t) = (f_1(t), \ldots, f_p(t))$, $t \in I$; în cazul când parametrii $f_1, \ldots, f_p$ variază continuu în timp, este definit astfel în mod natural un drum parametrizat $\gamma : I \to \mathbb{R}^p$. Acest fapt arată că importanţa noţiunilor anterioare, în contextul general adoptat, depăşeşte cadrul matematicii pure şi are legatură cu descrierile fizice sau tehnice. De exemplu, pentru o clasă largă de sisteme (numite sisteme dinamice liniare), parametri de stare sunt funcţii de clasă $C^1(I)$ şi ecuaţiile de

evoluţie sunt de forma

$$f_i'(t) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}(t) \cdot f_j(t) + b_i(t),\ 1 \leq i \leq p,\ (\forall)t \in I,$$

unde $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$, $1 \leq i, j \leq p$ sunt funcţii continue şi mărginite $I \in \mathbb{R}$. Notând $A(t) = [a_{ij}(t)]_{1 \leq i,j \leq p'}$, $B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_p(t) \end{bmatrix}$, ecuaţiile anterioare se scriu matriceal sub forma

$$\gamma'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \gamma(t) + \mathbf{B}(t), \quad (\forall)t \in I,$$

identificând vectorii multidimensionali cu matrici-coloană. Studiul matematic al acestor sisteme se referă în principal la determinarea soluţiei $\gamma(t)$, adică la determinarea (explicită în anumite cazuri) a parametrilor de stare $f_1(t), \ldots, f_p(t)$ din cunoaşterea legii fizice de evoluţie a sistemului.

b. Curbe plane

Am dat definiţia unui drum neted ca şi noţiunea de echivalenţă a două drumuri netede; relaţia binară obţinută pe mulţimea drumurilor netede este evident o relaţie de echivalenţă.

Definiţia 5.9. *Se numeşte* **curbă plană parametrizată de clasă** C^1 *orice clasă de echivalenţă a unui drum neted* $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$.

Mulţimea (γ) *se numeşte* **urma curbei***; pentru orice punct* $P \in (\gamma)$ *se numeşte* **multiplicitatea lui** P *numărul acelor valori distincte ale lui* t *pentru care* $\gamma(t) = P$.

Aşadar, a defini o curbă plană parametrizată de clasă C^1 revine la a fixa un drum neted $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ pe un interval I şi a identifica prin γ orice alt drum echivalent cu γ. De exemplu, drumurile distincte $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $\gamma_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (-x, \sqrt{1 - x^2})$ definesc aceeaşi curbă plană parametrizată. Se consideră ca proprietăţi ale curbelor parametrizate exact acelea care nu depind de parametrizare, în sensul că dacă $\gamma \sim \gamma_1$ şi dacă γ are o proprietate, aceeaşi proprietate o are γ_1.

O curbă plană parametrizată (de clasă C^1) ca mai sus se numeşte **simplă** (sau **jordaniană**) dacă aplicaţia γ este injectivă adică punctele lui (γ) au multiplicitatea 1; aşadar, la valori distincte ale parametrului corespund puncte distincte pe (γ), iar în interpretarea mecanică dată anterior, particula materială nu ocupă la momente distincte aceeaşi poziţie. Dacă aplicaţia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ defineşte o curbă parametrizată având reprezentarea

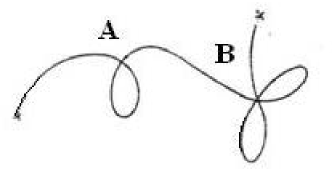
$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b], \tag{64}$$

de tipul (62) ea se numeşte *curbă închisă simplă* dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$ şi toate punctele lui (γ) cu excepţia capetelor au multiplicitatea 1.

Cele spuse anterior se adaptează fără dificultate la cazul curbelor plane parametrizate de clasă C^1 pe porţiuni.

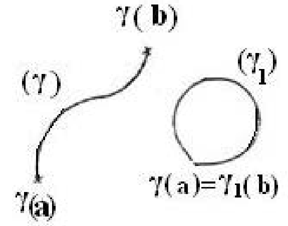
Orice curbă parametrizată simplă $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ are proprietatea că dacă t creşte de la a la b, atunci punctul $\gamma(t)$ parcurge urma (γ) a curbei "într-un singur sens", de la $\gamma(a)$ la $\gamma(b)$. Se mai spune că aceasta este *orientarea pozitivă pe* (γ), după cum orientarea pozitivă pe γ^- se numeşte *orientare negativă pe* (γ). Acestea sunt singurele două orientări posibile ale unei curbe simple. În cazul curbelor care nu sunt simple apar dificultăţi în fixarea unei orientări naturale şi aceasta se face după context.

Exemplu. Cercul $\{x^2 + y^2 = 1\}$ parcurs pozitiv o dată este parametrizat punând $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ şi este urma drumului $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Orientarea pozitivă pe acest cerc corespunde creşterii



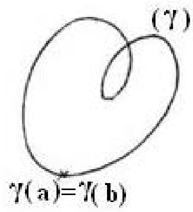
a) Punctul A are multiplicitatea 2 iar B are multiplicitatea 3.

Fig. III.36a



b) Curbe simple (γ1 inchisa)

Fig. III.36b



c) Curba inchisa nesimpla

Fig. III.36c

Fig. III.37a

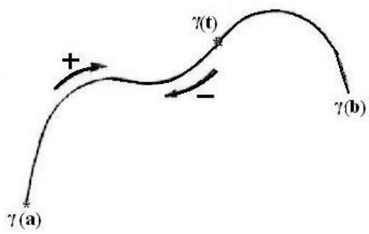


Fig. III.37b

parametrului unghiular t de la 0 la 2π şi coincide cu "sensul trigonometric" pe cerc.

Se extind fără dificultate la curbe parametrizate (de clasa C^1) noţiunile de tangentă într-un punct, punct singular etc., care nu depind de parametrizarea fixată, aşa cum se poate verifica uşor.

Fixăm un reper ortogonal $x0y$ de versori $\bar{\imath}, \bar{\jmath}$.

Definiţia 5.10. *Fie* $f(x,y)$, $f : A \to \mathbb{R}$ *o funcţie de clasă* C^1 *pe un deschis* $A \subset \mathbb{R}^2$. *Se numeşte* **curbă plană de clasă** C^1 **având ecuaţia carteziană** $f(x,y) = 0$, *mulţimea* $C = \{(x,y) \in A | f(x,y) = 0\}$. Un punct $(x_0, y_0) \in C$ se numeşte *singular* dacă $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) = 0$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) = 0$

Orice curbă plană parametrizată de clasă C^1 cu reprezentarea (64) poate fi dată prin ecuaţie carteziană în vecinătatea oricărui punct nesingular, aplicând TFI şi eliminând parametrul t. Reciproc, fie o curbă plană de clasă C^1 cu ecuaţia carteziană $f(x,y) = 0$, $(x_0,y_0) \in C$ şi $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) \neq 0$. Conform TFI, există o funcţie $\varphi(x)$ de clasă C^1 în vecinătatea lui x_0 astfel ca în vecinătatea punctului nesingular (x_0,y_0) curba C să coincidă cu graficul lui φ. Aceasta înseamnă că punând $x = t$, $y = \varphi(t)$, este parametrizată local curba C. În acest caz, ecuaţia tangentei în punctul (x_0,y_0) la curba C este, conform (63),

$$\frac{x - t_0}{1} = \frac{y - \varphi(t_0}{\varphi'(t_0)} \text{ şi cum } t_0 = x_0,\ \varphi(t_0) = x_0,\ \varphi'(t_0) = -\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)},\text{ cf. (51),}$$

rezultă că ecuaţia respectivă este

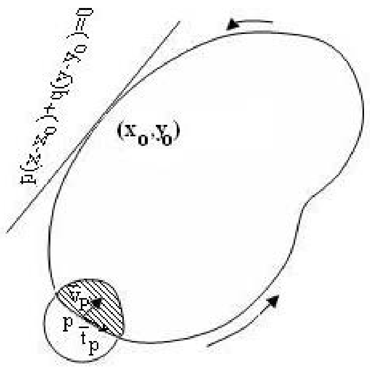


Fig. III.38

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = 0,$$

unde am notat $p = f'_x(x_0,y_0)$, $q = f'_y(x_0,y_0)$; cei doi versori normali la curba C în punctul nesingular (x_0,y_0), deci perpendiculari pe tangentă, sunt evident $\pm\dfrac{p\bar{\imath} + q\bar{\jmath}}{\sqrt{p^2 + q^2}}$.

Orientarea unei curbe plane C dată prin ecuaţie carteziană se face în funcţie de context. Există un caz particular extrem de important, anume cel în care *urma lui* C *este frontiera unei mulţimi compacte* K *din* $\mathbb{R}^2$ *şi nu are puncte singulare.* Pentru orice punct $P \in C$ curba C împarte local planul în două regiuni, una (cea haşurată în fig. II.38) conţinând puncte din K, iar cealaltă puncte din $\mathbb{R}^2 \setminus K$.

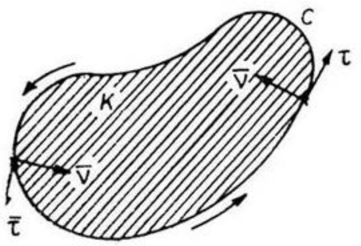


Fig. III.39a

Notăm cu $\bar{\nu}_P$ versorul normalei în P la C, care este orientat spre partea haşurată. Dintre cei doi versori ai tangentei în P la curba C se alege acela, notat $\bar{\tau}_P$ astfel încât reperul $(\bar{\tau}_P, \bar{\nu}_P)$ să fie orientat la fel ca $(\bar{\imath}, \bar{\jmath})$; în acest mod este fixat "sensul pozitiv al tangentei", căruia i se asociază în mod evident un "sens de parcurs" adică o orientare pozitivă pe C. Intuitiv, aceasta revine la a parcurge C astfel încât "mâna stângă să cadă în K". Indicăm în fig. III.39 două situaţii de orientare pozitivă a frontierei unui compact; în cazul b) frontiera este reuniunea urmelor a trei curbe închise nesingulare, iar compactul K este haşurat.

c. Suprafeţe în spaţiu

Definiţia 5.11. *Se numeşte* **pânză de suprafaţă parametrizată de clasă** C^1 *orice aplicaţie de clasă* C^1

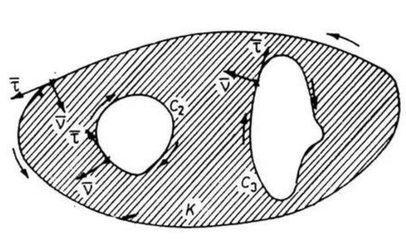


Fig. III.39b

$$s : \Delta \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto s(u,v) = (x,y,z)$$

pe un deschis conex $\Delta \subset \mathbb{R}^3$. *Oricărui punct* $(u,v) \in \Delta$ *ii corespunde un punct* $s(u,v)$ *din* $\mathbb{R}^3$ *cu coordonatele*

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v) \end{cases} , \quad (\forall)(u,v) \in \Delta. \tag{65}$$

Relaţiile (65) se numesc **ecuaţii parametrice ale pânzei** s*, iar submulţimea* $s(\Delta) = \{s(u,v) | (u,v) \in \Delta\}$ *a lui* $\mathbb{R}^3$ *se numeşte* **urma pânzei** *şi se mai notează* (s)*. Dacă spaţiul* $\mathbb{R}^3$ *este raportat la un reper ortogonal* $Oxyz$ *de versori* $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$*, atunci punctul curent* $s(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$*,* $(u,v) \in \Delta$ *al urmei* (s) *are vectorul de poziţie* r *dat de relaţia*

$$\bar{r} = x(u,v)\bar{\imath} + y(u,v)\bar{\jmath} + z(u,v)\bar{k}, \text{ unde } (u,v) \in \Delta.$$

Două pânze de suprafaţă $s : \Delta \to \mathbb{R}^3$, $s_1 : \Delta_1 \to \mathbb{R}^3$ se consideră **echivalente** (se scrie $s \sim s_1$) dacă există un difeomorfism $\Phi : \Delta \to \Delta_1$ între deschişi din $\mathbb{R}^3$ (conform definiţiei 5.2), numit **schimbare de parametri**, astfel încât jacobianul lui Φ să fie strict pozitiv în fiecare punct al deschisului Δ şi în plus, $s_1 \circ \Phi = s$. Folosind bijectivitatea lui Φ, se verifică imediat că dacă $s \sim s_1$, atunci $(s) = (s_1)$, adică urmele lui s şi s_1 coincid. Este evident că relaţia $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea pânzelor parametrizate.

O pânză de suprafaţă parametrizată $s : \Delta \to \mathbb{R}^3$ cu ecuaţiile (65) se numeşte **simplă** dacă aplicaţia s este injectivă şi **nesingulară** dacă în fiecare punct $(u,v) \in \Delta$, matricea jacobiană a lui s

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

are rangul maxim, adică are rangul doi în toate punctele lui Δ.

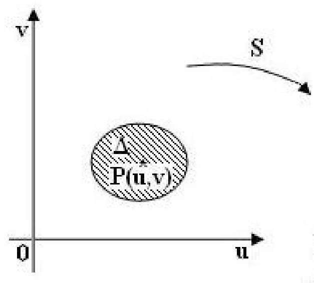


Fig. III.40a

Notând

$$\bar{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\bar{\imath} + \frac{\partial y}{\partial u}\bar{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial u}\bar{k}, \quad \bar{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\bar{\imath} + \frac{\partial y}{\partial v}\bar{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial v}\bar{k}$$

rezultă atunci că $\bar{r}_u \times \bar{r}_v \neq 0$, $(\forall)(u,v) \in \Delta$. Dacă $P(u,v)$ este un punct din Δ şi $Q(x,y,z)$ punctul corespunzător pe urma lui s, atunci planul trecând prin Q paralel cu vectorii $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ se numeşte **planul tangent la** s **în punctul** (u,v) şi ecuaţia lui este

$$\begin{bmatrix} x - x_Q & y - y_Q & z - z_Q \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = 0$$

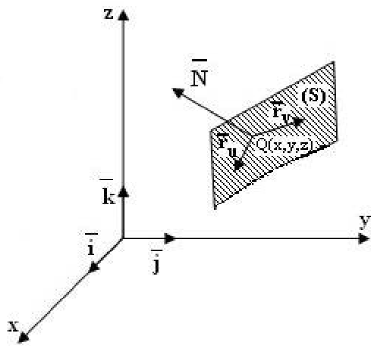


Fig. III.40b

Se notează cu $\bar{N}$ *versorul-normală* la suprafaţă în punctul curent, având proprietatea că triedrele $\{\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{N}\}$, $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$ sunt la fel orientate, deci $\bar{N} = \dfrac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{||\bar{r}_u \times \bar{r}_v||}$. Este evident că dacă $s \sim s_1$ şi s este simplă sau nesingulară, aceeaşi proprietate o are s_1.

În analogie cu definiţia 5.9 se poate da

Definiţia 5.12. *Se numeşte* **suprafaţă parametrizată de clasă** C^1 *orice clasă de echivalenţă a unei pânze de suprafaţă parametrizată nesingulară* $s : \Delta \to \mathbb{R}^3$*; aşadar, a defini o suprafaţă parametrizată (de clasă* C^1*) revine la a fixa o pânză nesingulară* $s : \Delta \to \mathbb{R}^3$ *şi a identifica prin* s *toate pânzele echivalente cu* s*.*

Se poate asocia oricărei suprafeţe parametrizate versorul normală în punctul curent, luând o parametrizare (acest versor fiind independent de parametrizarea aleasă).

Exemplu. Octantul de sferă $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$ este urma pânzei de suprafaţă definită prin ecuaţiile parametrice

$$s : \begin{cases} x = R \sin u \cos v \\ y = R \sin u \sin v \\ z = R \cos u \end{cases}$$

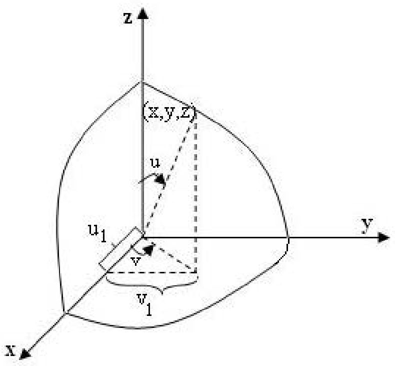


Fig. III.41

pentru $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. O altă parametrizare poate fi obţinută luând $x = u_1$, $y = v_1$, $z = \sqrt{R^2 - u_1^2 - v_1^2}$, cu $u_1^2 + v_1^2 < R^2$, $u_1 > 0$, $v_1 > 0$. Aceste două parametrizări sunt echivalente şi definesc aceeaşi suprafaţă, octantul de sferă reprezentat în figura III.41.

În acest caz, $\bar{r} = R\sin u\cos v\bar{\imath} + R\sin u\sin v\bar{\jmath} + R\cos u\bar{k}$, $\bar{r}_u = R\cos u\cos v\bar{\imath} + R\cos u\sin v\bar{\jmath} - R\sin u\bar{k}$, $\bar{r}_v = -R\sin u\sin v\bar{\imath} + R\sin u\cos v\bar{\jmath}$ şi se obţine

$$\bar{N} = \sin u\cos v\bar{\imath} + \sin u\sin v\bar{\jmath} + \cos u\bar{k}.$$

În analogie cu definiţia 5.10 vom da

Definiţia 5.13. *Fie $f(x,y,z)$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^3$. Se numeşte* **suprafaţă de clasă C^1 având ecuaţia carteziană** $f(x,y,z) = 0$, *mulţimea*

$$S = \{(x,y,z) \in A | f(x,y,z) = 0\}.$$

Un punct $(x_0, y_0, z_0) \in S$ se numeşte *singular* dacă derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ se anulează în acel punct, adică punctul respectiv este un zero critic al funcţiei f. Folosind TFI se poate proba fără dificultate că orice suprafaţa parametrizată de clasă C^1 poate fi dată local printr-o ecuaţie carteziană (eliminând parametrii). Reciproc, suprafaţa S de ecuaţie carteziană $f(x,y,z) = 0$ ca mai sus, poate fi local parametrizată; mai precis, dacă $a = (x_0, y_0, z_0) \in S$ este un punct nesingular dacă şi $\frac{\partial f}{\partial z}(a) \neq 0$, atunci există o funcţie $\varphi(x,y)$ în vecinătatea lui (x_0, y_0) astfel încât în vecinătatea lui *a suprafaţa* să aibă parametrizarea $x = u$, $y = v$, $z = \varphi(u,v)$. În acest caz, vectorul de poziţie al punctului curent din acea vecinătate este $\bar{r} = u\bar{\imath} + v\bar{\jmath} + \varphi(u,v)\bar{k}$, deci $\bar{r}_u = \bar{\imath} + p\bar{k}$, $\bar{r}_v = \bar{\jmath} + q\bar{k}$ şi versorii normalei sunt $\pm N \bar{=} \pm$ vers$(\bar{r}_u \times \bar{r}_v) = \pm\frac{-p\bar{\imath} - q\bar{\jmath} + \bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$, unde $p = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $q = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$. Conform calcului derivatelor funcţiilor date implicit (54), avem $p = -\frac{f'_x}{f'_z}$, $q = -\frac{f'_y}{f'_z}$, deci $\bar{N} = \frac{f'_x\bar{\imath} + f'_y\bar{\jmath} + f'_z\bar{k}}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}}$; nu există raţiuni apriorice pentru fixarea semnului. Ecuaţia planului tangent la S într-un punct nesingular $a = (x_0, y_0, z_0) \in S$ se obţine scriind că pentru orice punct $M(x,y,z)$ al acestui plan, vectorii $\overline{aM}$ şi $\bar{N}$ sunt ortogonali şi se obţine

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(z - z_0) = 0 \tag{66}$$

O suprafaţă parametrizată nesingulară de clasă C^1 se consideră *orientată* deoarece unul din cei doi versori ai normalei poate fi fixat în fiecare punct şi variază continuu cu punctul. Orientarea suprafeţelor date prin ecuaţia carteziană se face după context. Pentru suprafeţele închise care sunt frontiere ale unor mulţimi compacte din $\mathbb{R}^3$ vom introduce mai târziu "orientarea dupa normala exterioară", extrem de utilizată.

d) Curbe în spaţiu

Cele spuse anterior pentru curbe plane se refac imediat în cazul curbelor în spaţiu. Fie în spaţiul $\mathbb{R}^3$ o curbă parametrizată nesingulară simplă de clasă C^3 de parametrizare

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad , \quad t \in I. \\ z = z(t) \end{cases}$$

Fixând $t_0 \in I$, atunci pentru orice $t \in I$, $t > t_0$ se defineşte **lungimea arcului de curbă între t_0 şi t** ca fiind

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

deci $s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$ (Detalii vor fi date în capitolul IV. §2).

Fie versorul tangentei la curba γ în punctul curent t

$$\bar{\tau}(t) = \frac{x'(t)\bar{\imath} + y'(t)\bar{\jmath} + z'(t)\bar{k}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}}.$$

Versorul $\dfrac{\bar{\tau}'(t)}{||\bar{\tau}'(t)||}$ se numeşte **normala principală la** γ în punctul t şi se notează $\bar{\nu}(t)$ iar $\bar{\beta}(t) = \bar{\tau}(t) \times \bar{\nu}(t)$ se numeşte **versorul binormală** la γ în punctul t. Triedrul mobil $\{\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}\}$ depinzând de t, se numeşte **triedrul lui** J. FRENET (1801 - 1865) **al curbei** γ.

Se pot stabili formule indicând viteza de variaţie a versorilor triedrului lui Frenet în raport cu arcul; anume, există funcţii continue $R(s)$, $T(s)$, numite **raza de curbură** şi **raza de torsiune ale lui** γ **în punctul** t astfel încât $s = s(t)$ şi în plus,

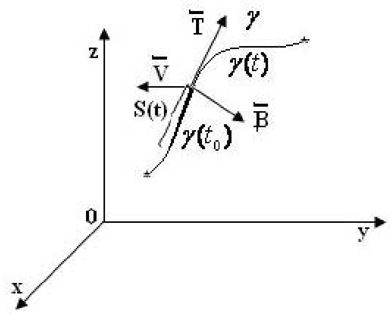


Fig. III.42

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R}\bar{\nu},\ \frac{\mathrm{d}\bar{\nu}}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{R}\bar{\tau} + \frac{1}{T}\bar{\beta},\ \frac{\mathrm{d}\bar{\beta}}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{T}\bar{\nu}$$

(*formulele lui Frenet*). Într-un anumit sens, R măsoară "abaterea" curbei γ de la o linie dreaptă, iar T "abaterea" lui γ de la a fi o curbă având urma situată într-un plan.

Exemplu. Fie elicea cilindrică $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (r\cos t, r\sin t, ht)$ unde $r > 0$, $h > 0$ sunt constante. Ecuaţiile parametrice ale lui γ sunt $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = ht$, $t \in [0, 2\pi]$; fixând $t_0 = 0$, rezultă $s'(t)^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = r^2 + h^2$ şi lungimea arcului de elice între punctele care corespund valorilor 0 şi t ale parametrului va fi

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 + h^2}\mathrm{d}t = t\sqrt{r^2 + h^2}.$$

Se pot calcula imediat versorii triedului lui Frenet:

$$\bar{\tau} = \frac{\gamma'(t)}{s'(t)}, \quad \bar{\nu} = \text{ versorul lui } \bar{\tau}'(t) = -\cos t\bar{\imath} - \sin t\bar{\jmath},$$

$$\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}(h\sin t\bar{\imath} - h\cos t\bar{\jmath} + r\bar{k}).$$

Curbele în spaţiu pot fi de asemenea reprezentate ca intersecţie de suprafeţe date prin ecuaţii carteziene.

d. Noţiunea de varietate diferenţiabilă

Toate entităţile geometrice studiate anterior sunt cazuri particulare de varietăţi diferenţiabile. Importanţa acestora din urmă nu constă numai în generalitatea lor; în ultimul timp, mecanica analitică modernă, teoria sistemelor dinamice, teoria stabilităţii structurale a sistemelor, teoria catastrofelor etc. au ca punct de plecare tocmai conceptul de varietate diferenţiabilă.

Definiţia 5.14. *Fie $n \geq 1$ fixat. O submulţime $V \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte* **varietate diferenţiabilă de clasă C^1 de dimensiune** r $(0 \leq r < n)$ *dacă pentru orice punct $a \in V$ există o vecinătate deschisă A a lui a şi $n - r$ funcţii $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leq i \leq n - r$, de clasă $C^1(A)$ astfel încât*

$$V \cap A = \{x \in A | \varphi_1(x) = 0, \ldots, \varphi_{n-r}(x) = 0\} \tag{67}$$

şi matricea jacobiană a funcţiilor $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-r}$ în raport cu variabilele $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ să aibă rangul maxim $n - r$ în fiecaare punct din A. Deschişii din $\mathbb{R}^n$ se consideră varietăţi de dimensiune n, astfel că putem presupune mai sus că $r \leq n$.

Aşadar, local, mulţimea V este mulţimea zerourilor comune a $n - r$ funcţii diferenţiabile. Folosind TFI, rezultă că pentru orice punct $\underline{a} \in V$, $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_r$

$, a_{r+1}, \ldots, a_n) = (\underline{a}', \underline{a}")$, unde $\underline{a}' = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^r$, din relaţiile $\varphi_1(\underline{x}) = 0, \ldots, \varphi_{n-r}(\underline{x}) = 0$ şi în ipoteza (nerestrictivă) că $\dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-r})}{D(x_{r+1}, \ldots, x_n)}(a) \neq 0$ se pot defini în vecinătatea punctului $\underline{a}'$ $n-r$ funcţii $\psi_1(\underline{x}'), \ldots, \psi_{n-r}(\underline{x}')$ de clasă C^1, $\underline{x}' = (x_1, \ldots, x_r)$ astfel încât $x_{r+1} = \psi_1(\underline{x}'), \ldots, x_n = \psi_{n-r}(\underline{x}')$ şi $\varphi_i(x', \psi_1(\underline{x}'), \ldots, \psi_{n-r}(\underline{x}')) = 0$, $1 \leq i \leq n-r$ într-o vecinătate B a lui a. Aşadar, local mulţimea V se parametrizează (cu r parametri $x_1, \ldots, x_r$) având ecuaţiile parametrice

$$x_1 = x_1, \ldots, x_r = x_r,\ x_{r+1} = \psi_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, x_n = \psi_{n-r}(x_1, \ldots, x_r). \quad (68)$$

Restrîngând eventual B, aplicaţia $G : B \to \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \mapsto (\underline{x}', \varphi_1(\underline{x}), \ldots, \varphi_{n-r}(\underline{x}))$ este un difeomorfism (conform raţionamentului din cazul TFI) şi în plus, este evident că $G(B \cap V)$ este o submulţime deschisă în subspaţiul r-dimensional $\{(\underline{x}', 0) | \underline{x}' \in \mathbb{R}^r\}$ al lui $\mathbb{R}^n$. Din acest motiv se mai spune că orice varietate diferenţiabilă de dimensiune r este local difeomorfă cu un deschis din $\mathbb{R}^r$.

Exemple. 1) Dacă $n = 2$ şi $r = 1$, atunci varietăţile de dimensiune 1 din $\mathbb{R}^2$ sunt local curbele plane nesingulare definite printr-o ecuaţie carteziană. Dacă $n = 3$, $r = 1$, atunci varietăţile de dimensiune 1 din $\mathbb{R}^3$ sunt curbele în spaţiu nesingulare definite prin $n - r = 2$ ecuaţii carteziene. Varietăţile de dimensiune 1 din $\mathbb{R}^n$ se mai numesc curbe definite local prin $n - 1$ ecuaţii carteziene (conform (67)) şi au local o parametrizare cu un singur parametru, de forma (68), anume: $x_1 = x_1$, $x_2 = \psi_1(x_1), \ldots, x_n = \psi_{n-1}(x_1)$, regăsind astfel urmele unor drumuri parametrizate $t \mapsto (t, \psi_1(t), \ldots, \psi_{n-1}(t))$ din $\mathbb{R}^n$.

2) Dacă $n = 3$, $r = 2$ se obţin varietăţi de dimensiune 2 în $\mathbb{R}^3$, care sunt tocmai suprafeţele nesingulare definite printr-o ecuaţie carteziană.

3) Sfera unitate $\{x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ din $\mathbb{R}^n$ este o varietate de dimensiune $n-1$. În general, varietăţile de dimensiune $n-1$ din $\mathbb{R}^n$ se numesc *hipersuprafeţe* în $\mathbb{R}^n$; aşadar, sfera este o hipersuprafaţă.

4) Dăm un exemplu de submulţime din $\mathbb{R}^n$ care nu este varietate. Anume, fie $n = 2$ şi $V = \{xy = 0\}$. Originea $a = (0, 0)$ nu are nici o vecinătate difeomorfă cu un interval deschis din $\mathbb{R}$.

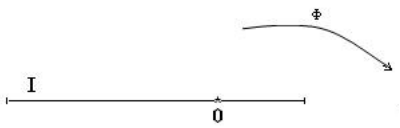


Fig. III.43a

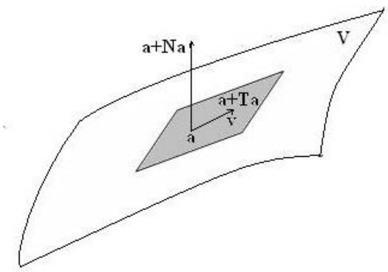


Fig. III.43b

Definiţia 5.15. *Fie $V \subset \mathbb{R}^n$ o varietate diferenţiabilă şi $a \in V$ un punct. Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ se numeşte* **vector tangent la** V **în** a *dacă există o funcţie $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$ pe un interval deschis I conţinând originea şi derivabilă în origine, astfel încât $\Phi(I) \subset V$, $\Phi(0) = a$ şi $\Phi'(0) = v$. Mulţimea T_a a vectorilor tangenţi la V în a se numeşte* **spaţiul tangent la** V **în** a. *Un vector $w \in \mathbb{R}^n$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$ se numeşte* **normal la** V **în** a *dacă pentru orice $v \in T_a$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, avem $w \perp v$, adică produsul scalar $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$ este nul.*

Mulţimea N_a a vectorilor normali la V în a se numeşte **spaţiul normal la** V **în a**.

Teorema 5.8. *Fixăm $a \in V$ ca mai sus şi fie $r =$ dimensiunea lui V. Atunci*

a) *T_a este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$ de dimensiune r;*

b) *N_a este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$ de dimensiune $n - r$.*

Demonstraţie. a) Fie aplicaţia diferenţiabilă $F : A \to \mathbb{R}^{n-r}$, $x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-r}(x))$ definită conform (67) şi aplicaţia diferenţiabilă

$$G : B \to \mathbb{R}^n, \quad \underline{x} \mapsto (\underline{x}', \varphi_1(\underline{x}), \ldots, \varphi_{n-r}(\underline{x})),$$

definită după relaţia (68) într-o vecinătate B a punctului a. Vom arăta prin dubla incluziune că

$$T_a = \ker \mathrm{d}F(a),$$

adică spaţiul tangent T_a coincide cu nucleul diferenţialei lui F în punctul a. Într-adevăr, fie $(\forall)v \in T_a$. Atunci există funcţia Φ ca în definiţia 5.15 şi restrîngând eventual I se obţine că $F(\Phi(t)) = 0$, $(\forall)t \in I$, adică $F \circ \Phi = 0$ pe I;

aplicând teorema 4.4, rezultă $\mathrm{d}F(a)(\Phi'(0)) = 0$, adică $\mathrm{d}F(a)(v) = 0$, deci $v \in \ker \mathrm{d}F(a)$. Reciproc, fie $(\forall)v \in \ker \mathrm{d}F(a)$, deci $\mathrm{d}F(a)(v) = 0$. Aplicaţia G fiind un difeomorfism între deschişii B şi $G(B)$, se poate considera aplicaţia de clasă C^1, $G^{-1} : G(B) \to B$. Fie $g_1, \dots, g_n$ componentele lui G, deci $g_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $1 \leq i \leq r$ şi $g_k(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{k-r}(x_1, \dots, x_n)$, $r + 1 \leq k \leq n$. Relaţia $\mathrm{d}F(a)(v) = 0$, se scrie $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a) v_j = 0$, $1 \leq i \leq n - r$. Pe de altă parte,

$$\mathrm{d}g_i(a)(v) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) v_j = \begin{cases} v_i & \text{dacă} \quad 1 \leq i \leq r \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{i-r}}{\partial x_j}(a) v_j & \text{dacă} \quad r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

deci $\mathrm{d}G(a)(v) = (v_1, \dots, v_r, 0, \dots, 0)$, adică

$$\mathrm{d}G(a)(v) = (\underline{v}', \underline{0}). \tag{69}$$

Deoarece $(\underline{a}', \underline{0}) = (a_1, \dots, a_r, \underline{0}) = G(a) \in G(B)$ şi $G(B)$ este deschis, rezultă că există un interval deschis I conţinând originea astfel încât $(\underline{a}' + t\underline{v}', \underline{0}) \in G(B)$ pentru orice $t \in I$. Are atunci sens funcţia

$$\Phi(t) = G^{-1}(\underline{a}' + t\underline{v}', \underline{0}), \quad t \in I.$$

Avem $\Phi(t) \in V$, $\Phi(0) = G^{-1}(\underline{a}', \underline{0}) = a$ şi în plus, $\Phi'(0) = \mathrm{d}G^{-1}(\underline{a}', \underline{0})(\underline{v}', \underline{0}) \overset{cf.(69)}{=} \mathrm{d}G^{-1}(\underline{a}', \underline{0})\mathrm{d}G(a)(v) \overset{teor.4.4}{=} \mathrm{d}(G^{-1} \circ G)(a)(v) = v$, deci $v \in T_a$.

Am probat aşadar că $T_a = \ker \mathrm{d}F(a)$, deci $\dim T_a = \dim \ker \mathrm{d}F(a) = n - \dim \mathrm{Im}\, \mathrm{d}F(a) = n - \mathrm{rang}\, J_F(a) = n - (n - r) = r$.

b) Aşadar, N_a este prin definiţie subspaţiul ortogonal lui T_a în $\mathbb{R}^n$, deci $\dim N_a = n - \dim T_a = n - r$.

O bază a spaţiului N_a este formată din cei $n - r$ vectori $\mathrm{grad}\, \varphi_i(a)$, $1 \leq i \leq n - r$. Într-adevăr, $\langle \mathrm{grad} \varphi_i(a), v \rangle = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a) v_j = 0$ pentru orice $1 \leq i \leq n - r$, $(\forall)v \in T_a$, deci $\mathrm{grad}\, \varphi_i(a) \in N_a$. Deoarece matricea jacobiană a funcţiilor $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-r}$ are rang maxim, rezultă că vectorii $\mathrm{grad} \varphi_i(a)$, $1 \leq i \leq n - r$ sunt liniar independenţi.

f. Un exemplu ingineresc de varietate diferenţiabilă

Considerăm la un moment fixat un circuit RLC format dintr-un rezistor, un inductor şi un capacitor (fig. III.44). Prin fiecare ramură trece curent având intensitatea notată i şi tensiunea notată v. Circuitului i se asociază în mod natural două triplete de numere reale

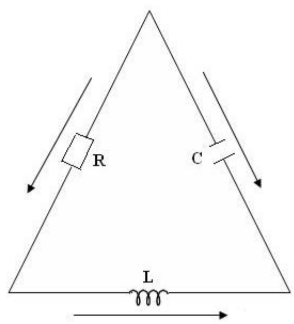


Fig. III.44

$$(i_R, i_L, i_C), \quad (v_R, v_L, v_C).$$

Legile lui Kirchhoff arată că

$$i_R = i_L = -i_C, \quad v_R + v_L - v_C = 0.$$

În acest mod se asociază un punct $(i_R, i_L, i_C, v_R, v_L, v_C)$ din $\mathbb{R}^6$ cu legăturile anterioare. O analiză mai atentă arată că există şi alte legături între mărimile fizice considerate. De exemplu în cazul unui rezistor liniar are loc legea lui Ohm ($v_R = k i_R$, k constantă) şi în general există o legătură de forma $v_R = \varphi(i_R)$ cu φ funcţie de clasă C^1.

Schimbând notaţiile, am asociat circuitului următoarea mulţime $V \subset \mathbb{R}^6$,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)|^{x_1 - x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0}_{x_4 + x_5 - x_6 = 0, \varphi(x_1) - x_4 = 0}\},$$

Conform definiţiei 5.14, *V este o varietate diferenţiabilă de dimensiune 2 în $\mathbb{R}^6$.*

Până acum discuţia s-a purtat pentru un moment fixat. Considerând comportarea circuitului într-un interval de timp $I = [t_0, t_f]$ şi presupunând că mărimile fizice anterioare sunt funcţii de clasă C^1 în timp, se defineşte o funcţie $\gamma : I \to \mathbb{R}^6$. Deoarece legile lui Kirchhoff au loc în fiecare moment $t \in I$, γ este un drum parametrizat de clasă C^1 situat pe varietatea V (adică $\gamma(t) \in V$, $(\forall) t \in I$).

Inductorul şi capacitorul verifică de asemenea legile lui Faraday

$$i_L'(t) = \frac{1}{L} v_L(t),\ v_C'(t) = \frac{1}{C} i_C(t) \text{ adică } x_2'(t) = \frac{1}{L} x_5,\ x_6'(t) = \frac{1}{C} x_3$$

(unde $L > 0$, $C > 0$ sunt inductanţa şi capacitatea, presupuse constante).

Notăm $x_1 = u$, $x_6 = v$. Atunci pentru orice punct $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in V$ avem $x_2 = u$, $x_3 = -u$, $x_4 = \varphi(u)$, $x_5 = v - \varphi(u)$, ceea ce constituie o parametrizare a varietăţii V; legile lui Faraday se exprimă atunci prin sistemul diferenţial de ordinul I

$$(*) \qquad u'(t) = \frac{1}{L}(v - \varphi(u)), \quad v'(t) = -\frac{1}{C} u, \quad (\forall) t \in I.$$

(Dacă $L = 1$, $C = 1$, $\varphi(u) = u^3 - u$, atunci se obţine *sistemul Van der Pol*).

Evoluţia circuitului în timp este descrisă prin drumul parametrizat $\gamma : I \to \mathbb{R}^6$, $\gamma(t) = (u(t), u(t), -u(t), \varphi(u(t)), v(t) - \varphi(u(t)), v(t))$, $(\forall) t \in I$, unde $(u(t), v(t))$ este soluţie a sistemului (*). Probăm acum o proprietate remarcabilă. Se numeşte *energie a circuitului* funcţia $E(u, v)$, $E = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $E(u, v) = \frac{1}{2}(Lu^2 + Cv^2)$. Pentru orice $t \in I$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(u(t), v(t)) = \frac{\partial E}{\partial u} \cdot u'(t) + \frac{\partial E}{\partial v} \cdot v'(t) = Lu \cdot u'(t) + Cv \cdot v'(t) \overset{cf. (*)}{=}$$

$$= Lu \cdot \frac{1}{L}(v - \varphi(u)) + Cv \cdot \left(-\frac{1}{C} u\right) = -u \cdot \varphi(u).$$

În ipoteza că $u \cdot \varphi(u) > 0$ pentru orice $u \neq 0$, rezultă că $i_R v_R > 0$ (rezistorul se numeşte atunci *pasiv*) şi am probat că în acest caz, de-a lungul evoluţiei, *energia circuitului descreşte în timp.*

3.5.5 Exerciţii

1. Ce devine teorema 5.1 pentru $n = 1$? Să se arate că aplicaţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ este bijectivă, de clasă $C^\infty(\mathbb{R})$, f^{-1} este continuă şi totuşi f nu este un difeomorfism. Cum se explică ?

2. Se consideră aplicaţia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 2y, x^2 - y)$. Să se determine două mulţimi deschise, nevide $A, B \in \mathbb{R}^2$ astfel încât F să stabilească un difeomorfism de la A la B şi să se expliciteze F^{-1}.

3. Să se arate că un deschis din $\mathbb{R}^2$ nu poate fi difeomorf cu un deschis din $\mathbb{R}^3$.

Indicaţie. Dacă ar exista un difeomorfism $F : A \to B$ ($A \subset \mathbb{R}^2, B \subset \mathbb{R}^3$ fiind deschişi), atunci $(\forall) a \in A$, $\mathrm{d}F(a) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ este un izomorfism liniar, absurd.

4. Se consideră aplicaţia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \to (x, xy, xyz)$ şi fie $A = \{x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Să se arate că $B = F(A)$ este un deschis, că aplicaţia F este un difeomorfism de la A la B şi să se expliciteze F^{-1}. Idem, pentru $F(x, y, z) = (z \cos xy, z \sin xy, x)$ şi $A = \{x > 0, z > 0\}$.

5. a) Se consideră aplicaţia $\mathbb{R}$-liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z)$ şi paralelipipedul închis $P = [0, 1] \times [0, 2] \times [1, 3]$. Să se determine $T(P)$ şi volumul lui $T(P)$. Idem pentru $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, 2x)$ şi $P = [2, 5] \times [1, 3]$.

b) O aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară nesingulară $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se numeşte *transformare Lorentz* (H. A. LORENTZ, 1853 - 1928) dacă considerând aplicaţia $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$, avem $L' \circ S \circ L = S$, unde L' este transpusa lui L. Să se arate că în acest caz, notând cu $l_1, \ldots, l_n$ componentele lui L avem $\sum_{i=1}^{n}[l_i(\underline{x}) - l_n(\underline{x})]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right) - x_n^2$, $(\forall)x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Care sunt transformările Lorentz pentru $n = 2$?

6. Orice funcţie complexă $w = f(z)$, $f : A \to \mathbb{C}$ definită pe un deschis A din planul complex poate fi identificată cu o transformare punctuală $f : A \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u, v)$, considerând $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ şi notând $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, $z = x + iy$, $w = u + iv$.

Să se expliciteze transformarea punctuală $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asociată funcţiei complexe $w = z^2$. Să se arate folosind teorema 5.3, că pentru orice punct $z \neq 0$ există o vecinătate A a lui z şi o vecinătate B a lui z^2, difeomorfe. Are punctul $z = 0$ o proprietate similară?

Indicaţie. Deoarece $z^2 = (-z)^2$, rezultă că aplicaţia $z \mapsto z^2$ nu poate fi injectivă în nici o vecinătate a originii.

7. Fie $0 < \varepsilon < 1$ constant. Să se calculeze y', y'' în punctul curent pentru funcţia implicită $y(x)$ definită prin relaţia $y - \sin y = x$ (numită *ecuaţia lui* J. KEPLER, 1571 - 1630).

8. a) Se consideră relaţia $x - z + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{z - x} = 0$ definind local z ca funcţie implicită de x şi y. Să se calculeze $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ şi $\mathrm{d}z$.

b) Relaţiile $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$, $2x^3 + y^3 - 3z^3 = 0$ definesc y, z ca funcţii de x în vecinatatea punctului (1, 1, 1). Să se calculeze y', z', y'', z'' în punctul $x = 1$.

9. Să se determine extremele funcţiei implicite $y = y(x)$ definită prin relaţia $x^3 + 8y^3 - 6xy = 0$. Idem pentru $z = z(x, y)$ dată implicit prin relaţia $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$.

10. Fie φ o funcţie de clasă C^1 dată; relaţia $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$, a, b, c fiind constante reale, defineşte implicit z ca funcţie de x, y. Să se arate că $(cy - bz)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\dfrac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$. Idem, să se arate că dacă $\varphi\left(x + \dfrac{z}{y}, y + \dfrac{z}{x}\right) = 0$, atunci $xy + x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

11. Se cer punctele curbei $x^2 + xy + y^2 = 1$, care sunt cele mai îndepărtate de origine.

Indicaţie. Trebuie determinate punctele (x, y) pentru care funcţia $f(x, y) = x^2 + y^2$ este maximă, cu legătura $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$.

12. a) Să se afle extremele funcţiei $f(x, y, z) = xyz$ cu legătura $x+y+z = 1$; similar, extremele lui $f(x, y, z) = x + y + z$ cu legăturile $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $2x + y + 2z = 1$.

b) Să se arate, folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange, că $||v|| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n, ||x||=1} \langle v, x\rangle$, $(\forall)v \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, unde $\langle v, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$.

13. Să se determine marginile funcţiilor de mai jos pe mulţimile compacte indicate:

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$ pe $K = \{x^2 \leq 1, 0 \leq y < x^2\}$;
b) $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - xy + z^4 - 2z^2$, $K = \{x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 8\}$;
c) $f(x, y, z) = z - y - x$, $K = \{2y^2 + z^2 - 1 = 0, 4x - 3z = 0\}$.

14. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială de clasă C^1 pe intervalul $[a, b]$, $a < b$. Să se arate că există o constantă $M > 0$ astfel încât

$||f(b) - f(a)|| \leq M(b-a)$. În particular, orice funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ de clasă C^1 este lipschitziană.

Indicaţie. Fie $f_1, \ldots, f_p$ componentele lui f şi $M_k = \sup_{t\in[a,b]} |f_k'(t)|$, deci $|f_k(b) - f_k(a)| \leq M_k(b-a)$, $1 \leq k \leq p$ şi atunci

$$||f(b) - f(a)|| = \left(\sum_{k=1}^{p}(f_k(b) - f_k(a))^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M(b-a),$$

unde $M = (M_1^2 + \ldots + M_p^2)^{\frac{1}{2}}$.

Observaţie. Se poate demonstra o teoremă de medie generală, datorată lui J. DIEUDONNÉ: Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ şi $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii derivabile, cu g monoton crescătoare şi $||f'(t)|| \leq ||g'(t)|| \leq g(b) - g(a)$. Pentru $g(t) = Mt$ se regăseşte exerciţiul 14.

15. Să se justifice de ce teoremele clasice Fermat, Rolle, Lagrange nu se extind direct pentru funcţii cu valori vectoriale.

Indicaţie. Pentru funcţii cu valori în $\mathbb{R}^p$, $p \geq 2$ nu se poate defini o noţiune convenabilă de extrem, deoarece $\mathbb{R}^p$ nu are o structură convenabilă de ordine. Considerăm apoi funcţia $f : [0,2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, de clasă C^1. Evident, $f(0) = f(2)$ dar nu există $\xi \in (0, 2\pi)$ astfel încât $f'(\xi) = 0$, ceea ce arată că teorema lui Rolle nu are loc pentru f etc.

16. a) Să se determine punctele singulare ale curbelor plane $y^2 - x^3 = 0$, $x^3 + y^3 - xy = 0$; figuraţi apoi urma acestor curbe.

b) Se consideră curbele plane parametrizate $\gamma_1(t) = (\sin 2^t, \sin^3 t)$, $t \in \mathbb{R}$ şi $\gamma_2(t) = (\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Să se determine punctele lor singulare, să se figureze urma şi să se calculeze curbura lor în fiecare punct (pentru o curbă parametrizată $x = x(t)$, $y = y(t)$ de clasă C^2 se numeşte *curbura* într-un punct nesingular t numărul real $k = \dfrac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}}$).

17. Să se figureze curbele plane definite prin:

a) ecuaţia carteziană $x(x^2-1) = y(y^2-1)$; idem $x^2 + x^2y = 1$.

b) ecuaţiile parametrice $x = \left(t + \dfrac{1}{t^2}\right)$, $y = \left(t^2 - \dfrac{1}{t}\right)$, $t \in (0,2)$; idem $x = \sin t - t\cos t, y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

c) ecuaţia în coordonate polare $\rho = \theta$; idem $\rho = \cos 2\theta$ şi $\rho^2 = \cos 2\theta$.

18. Să se arate că: a) planul tangent la suprafaţa de ecuaţie carteziană $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - 1 = 0$, în punctul curent, determină pe cele trei axe ale reperului ortogonal $Oxyz$ fixat, segmente având capătul în O, a căror sumă a lungimilor este constantă; b) normalele la suprafaţă $x^2 + y^2 - \sin z = 0$ intersectează axa Oz.

19. Fie $\varphi(x,y,z)$, $\varphi : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^3$ şi $a \in A$ un punct fixat astfel ca grad ${}_a\varphi \neq 0$. Să se arate că dintre toţi versorii $\bar{s}$, cei pentru care derivata $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}(a)$ este maximă sau minimă sunt versorii lui grad ${}_a\varphi$, adică sunt versorii normalei în punctul a la suprafaţa de ecuaţie carteziană $\varphi(x,y,z) = \varphi(a)$.

20. Fie $\Delta = \mathbb{R}^2$ şi aplicaţia $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$, definită prin $\varphi(u,v) = (u\cos v,$ $u \sin v,\ 1-u)$. Să se arate că φ defineşte o pânză parametrizată de suprafaţă de clasă C^1 cu urma situată pe conul $x^2 + y^2 = (1-z)^2$; care sunt punctele singulare? Să se figureze imaginea prin φ a compactului $K = \{0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi\}$.

21. a) Să se arate că pentru orice $c \neq 0$, hiperboloidul $x^2 + y^2 - z^2 = c$ este o varietate de dimensiune 2 în $\mathbb{R}^3$, dar conul $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ nu este varietate.

b) Să se arate că mulţimea $V = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ xy = 0,\ z \neq \pm 1\}$ este o varietate de dimensiune 1 în $\mathbb{R}^3$.

22. Fie $V_1 \subset \mathbb{R}^m$ o varietate de dimensiune r_1 şi $V_2 \subset \mathbb{R}^n$ o varietate de dimensiune r_2. Să se arate că $V_1 \times V_2$ este o varietate de dumensiune $r_1 + r_2$ în $\mathbb{R}^{m+n}$.

3.6 Aplicaţii

3.6.1 Schimbări de variabilă

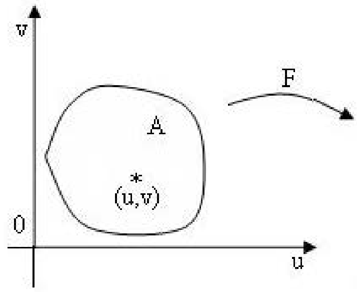


Fig. III.45a

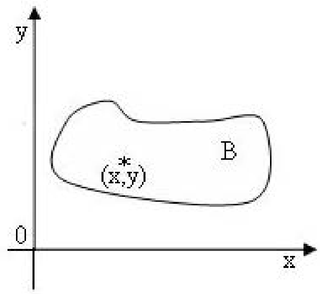


Fig. III.45b

Ideea schimbărilor de variabilă (mai corect, a schimbărilor de coordonate locale) este ca studiul unor proprietăţi diferenţiale exprimate într-un anumit sistem de coordonate să fie simplificat prin alegerea unui alt sistem de coordonate şi prin transferul corespunzător al acelor proprietăţi. Este dificil de indicat un procedeu general sau un reţetar de schimbări de variabilă; există însă unele schimbări-tip,care vor fi indicate pe scurt mai jos.

Considerăm un difeomorfism de clasă C^k $(k \geq 2)$, $F : A \to B$, între doi deschişi din $\mathbb{R}^2$. Notăm cu u, v coordonatele în A şi cu x, y coordonatele în B; aşadar, există funcţii $\varphi, \psi : A \to \mathbb{R}$ de clasă C^k astfel încât $F(u,v) = (\varphi(\overset{x}{u},v), \psi(\overset{y}{u},v))$, $(\forall)(u,v) \in A$, iar $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \neq 0$ în orice punct $(u,v) \in A$.

Avem deci relaţiile

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v), \quad (\forall)(u,v) \in A. \tag{70}$$

a. Cazul unei singure variabile independente

Pentru o funcţie de o variabilă reală $y = f(x)$, $f : I \to \mathbb{R}$ definită pe un interval deschis I, derivabilitatea lui f într-un punct $x_0 \in I$ este echivalentă cu diferenţiabilitatea lui f în x_0. Dacă f este derivabilă pe I, atunci are loc relaţia $\mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x$ în punctul curent (teorema 4.3); aceasta poate fi scrisă simbolic $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Această notaţie are justificare numai în cazul funcţiilor de o variabilă; ea a determinat multe confuzii în considerarea derivatelor ca nişte "câturi de infiniţi mici". Totuşi notaţia anterioară este utilă în special la derivarea funcţiilor compuse.

Presupunem funcţia $y = f(x)$ de clasă C^k; proprietăţile ei diferenţiale se exprimă cu ajutorul lui $y', y'', \ldots$. Din relaţiile (70), rezultă $\psi(u,v) = f(\varphi(u,v))$ şi aplicând TFI, se obţine local o relaţie de forma $v = v(u)$. Se mai scrie $y(x) \leftrightarrow v(u)$ şi se mai spune că difeomorfismul definit prin relaţiile (70) permite un transfer de proprietăţi diferenţiale între planul xOy al variabilelor "vechi" şi planul uOv al variabilelor "noi". În plus, în punctul curent au loc relaţiile

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \overset{*}{=} \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}} = \frac{y'(u)}{x'(u)} \overset{cf.(70)}{=} \frac{\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}v'(u)}{\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}v'(u)},$$

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} \overset{*}{=} \frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}u}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}} = \frac{1}{x'(u)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(y') = \frac{1}{x'(u)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}v'(u)}{\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}v'(u)}\right) \quad etc.$$

(semnul $*$ indică o scriere diferenţială a derivării de funcţii compuse, revenind la împărţirea cu diferenţiala variabilei independente "noi" $\mathrm{d}u$).

Exemple. 1) *Intervertirea variabilelor* $y(x) \leftrightarrow x(y)$. În acest caz

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \overset{*}{=} \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'(y)},$$

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} \overset{*}{=} \frac{\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{1}{x'(y)}\right)}{x'(y)} = -\frac{x''(y)}{x'(y)^3} \text{ etc.}$$

De exemplu, ecuaţia diferenţială $y'y'' = y^2$ cu funcţia necunoscută $y = y(x)$ (presupusă inversabilă) devine prin intervertirea variabilelor, $\dfrac{1}{x'}\left(-\dfrac{x''}{x'^3}\right) = y^2$, adică $x''+y^2x'^4 = 0$, cu necunoscuta $x(y)$. În acest caz, ecuaţia nu se simplifică, dar există şi situaţii fericite (de exemplu, $yy'^3 + y'' = 0$).

2) *Schimbarea variabilei independente* $x = \varphi(u)$, $y(x) \leftrightarrow y(u)$. În acest caz,

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \overset{*}{=} \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}} = \frac{y'(u)}{\varphi'(u)},$$

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} \overset{*}{=} \frac{\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}u}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\dfrac{y'(u)}{\varphi'(u)}\right)}{\varphi'(u)} = \frac{y''(u)\varphi'(u) - y'(u)\varphi''(u)}{\varphi'(u)^3} \text{ etc.}$$

De exemplu, ne propunem să determinăm ce devine ecuaţia diferenţială $x^2y'' + xy' - y = 0$, cu necunoscuta $y = y(x)$, prin schimbarea de variabilă independentă $x = e^u$. Avem

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \overset{*}{=} \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}}{e^u} = e^{-u}\cdot y'(u), \quad y''(x) = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} \overset{*}{=} \frac{\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}u}}{e^u} = e^{-u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(y') =$$

$$= e^{-u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(e^{-u}\cdot y'(u)) = e^{-2u}[y''(u) - y'(u)]$$

şi ecuaţia iniţială devine $y''(u) - y(u) = 0$, cu necunoscuta $y = y(u)$.

b. Cazul a două variabile independente

Presupunem acum că este studiată o problemă bidimensională, care revine la studiul unei funcţii de clasă C^k, $z = f(x, y)$ şi al derivatelor ei parţiale. Prin relaţiile (70), adică prin difeomorfismul F, problema poate fi reformulată în planul coordonatelor ”noi” u, v şi necesită în primul rând calculul derivatelor ”vechi” $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots$ în funcţie de cele noi $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \dots$. În efectuarea acestui calcul, poate fi utilizată *proprietatea de invarianţă a primei diferenţiale*, care se enunţă astfel: în punctul curent, diferenţiala I a lui f considerată ca funcţie de x, y şi a aceleiaşi funcţii f, considerată ca funcţie de u, v coincid, adică $\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = \dfrac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v$ (ceea ce rezultă din relaţiile (70) prin diferenţiere şi ţinând cont de regula de derivare a funcţillor compuse).

Exemplu. Ne propunem să studiem ce devine ecuaţia $x\dfrac{\partial z}{\partial y} = y\dfrac{\partial z}{\partial x}$, cu funcţia necunoscută $z = z(x, y)$, în coordonate polare, $z(x, y) \leftrightarrow z(\rho, \theta)$, deci prin schimbarea de variabile independente $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. În acest caz, $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \dfrac{\partial z}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta$ şi cum $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\rho\cos\theta - \rho\sin\theta\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}\rho\sin\theta + \rho\cos\theta\mathrm{d}\theta$, se obţin, prin identificarea coeficienţilor lui $\mathrm{d}\rho$, $\mathrm{d}\theta$, relaţiile

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta = \frac{\partial z}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(-\rho\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(\rho\cos\theta) = \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

(acestea puteau fi obţinute şi direct din identitatea $z(\rho, \theta) = z(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))$ derivând în raport cu ρ şi apoi în raport cu θ). Folosind regula lui Cramer, rezultă imediat

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \sin\theta\frac{\partial z}{\partial \rho}$$

şi ecuaţia iniţială devine

$$\rho\cos\theta\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)=\rho\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial\rho}-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right),$$

adică $\dfrac{\partial z}{\partial\theta}=0$, deci se simplifică considerabil. Mergând mai departe, rezultă de aici că z este funcţie constantă în raport cu θ, adică o funcţie numai de ρ; în acest mod, se obţine chiar soluţia generală a ecuaţiei $x\dfrac{\partial z}{\partial y}=y\dfrac{\partial z}{\partial x}$, anume $z=h(x^2+y^2)$, cu h funcţie arbitrară de clasă C^1.

În general, coordonatele polare în plan (respectiv coordonatele sferice în spaţiu) sunt utilizate în probleme cu simetrie centrală, adică simetrie faţă de un punct fixat, după cum coordonatele cilindrice sunt utilizate în probleme cu simetrie axială.

Desigur, se pot considera multe alte exemple de schimbări de variabilă.

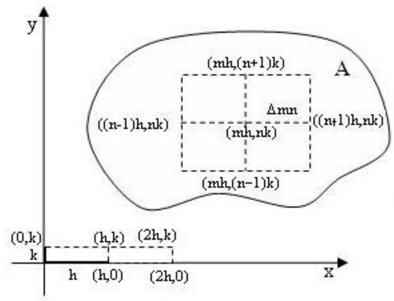


Fig. III.46

Observaţie. În unele calcule cu derivate parţiale, alături de schimbările de variabile, sunt utilizate procedee de discretizare, care fac programabile pe calculator astfel de calcule. Considerăm o funcţie $f(x,y)$, $f:A\to\mathbb{R}$ de clasă C^2 pe un deschis $A\subset\mathbb{R}^2$. Fixăm o pereche (h,k) de numere reale strict pozitive, numită *bipas* şi considerăm reţeaua plană obţinută ducând dreptele $x=mh$, $y=nk$ paralele cu axele, unde $m,n\in\mathbb{Z}$ (fig. III. 46). Pentru punctele (mh,nk) ale reţelei, numite şi *noduri*, care aparţin lui A, facem convenţia de a nota $f_{m,n}$ (sau f_{mn}) în loc de $f(mh,nk)$; notăm de asemenea cu Δ_{mn} dreptunghiul centrat în punctul (mh,nk) cu laturile paralele cu axele. Atunci derivatele parţiale de ordin I, II ale lui f în punctul (mh,nk) pot fi exprimate prin formulele aproximative următoare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(mh,nk)\simeq\frac{f_{m+1,n}-f_{mn}}{h},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(mh,nk)\simeq\frac{f_{m,n+1}-f_{mn}}{k},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(mh,nk)\simeq\frac{f_{m+1,n}+f_{m-1,n}-2f_{mn}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(mh,nk)\simeq\frac{f_{m+1,n}+f_{m,n+1}-2f_{mn}}{hk},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(mh,nk)\simeq\frac{f_{m,n+1}+f_{m,n-1}-2f_{mn}}{k^2},\ \text{în ipoteza că } \Delta_{mn}\subset A.$$

Acestea se folosesc la metoda reţelelor din teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale.

Exemplu. Fie un dreptunghi $D=[0,a]\times[0,b]$ şi $g(x,y)$ o funcţie continuă ale cărei valori sunt cunoscute pe frontiera lui D. Presupunem că trebuie determinată o funcţie $f(x,y)$ de clasă C^2 pe un deschis A care conţine D, astfel încât

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \text{ în } A \text{ şi } f|\mathrm{Fr}\,D=g.$$

O soluţie aproximativă a acestei probleme poate fi obţinută alegând o reţea cu bipasul $h=\dfrac{a}{M}$, $k=\dfrac{b}{N}$ ($M,N\geq 1$ întregi convenabili); relaţiile anterioare devin

$$\frac{f_{m+1,n}+f_{m-1,n}-2f_{mn}}{h^2}+\frac{f_{m,n+1}+f_{m,n-1}-2f_{mn}}{k^2}=0,$$

pentru $0\leq m\leq M$, $0\leq n\leq N$ şi $f_{mn}=g_{mn}$ în punctele (mh,nk) de pe frontiera lui D (adică pentru $m=0$, $m=M$, $n=0$, $n=N$). Din aceste relaţii de recurenţă se determină valorile funcţiei căutate f, în nodurile reţelei, obţinând informaţii utile relativ la valorile lui f în toate punctele lui D.

3.6.2 Metoda gradientului

În studiul unor sisteme complexe (de exemplu cele economice), apar probleme de optimizare cu un număr mare de variabile independente în care soluţia optimă nu poate fi dată decât prin metode de ”programare empirică”. Expunem aici bazele teoretice ale unei metode utilizate curent în rezolvarea unor probleme de optimizare.

Fie $f(x_1,\ldots,x_n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$ şi $a \in A$ un punct fixat. În acest caz, am definit în §4.4 un vector remarcabil în $\mathbb{R}^n$, anume gradientul lui f în a,

$$\mathrm{grad}_a f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Presupunem că a nu este punct critic al lui f, adică $\mathrm{d}f(a) \neq 0$; atunci cel puţin una din derivatele $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $1 \le k \le n$ este nenulă şi ca atare, vectorul $\mathrm{grad}_a f$ este nenul. Ne propunem să determinăm (pentru f, a fixate) versorii $s = (s_1,\ldots,s_n)$ pentru care derivata $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a)$ este maximă sau minimă. Conform teoremei 4.6, avem $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot s_i$ şi notând $\lambda_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $1 \le i \le n$, trebuie determinate extremele funcţiei liniare $g(s_1,\ldots,s_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s_i$ cu legătura $s_1^2 + \ldots + s_n^2 = 1$. Aplicând metoda multiplicatorilor lui Lagrange, rezultă imediat că versorul s este coliniar cu vectorul $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$; acest vector este tocmai gradientul lui f în a şi notând cu

$$g_a = \frac{\mathrm{grad}\,_a f}{||\mathrm{grad}\,_a f||},$$

versorul lui $\mathrm{grad}\,_a f$, rezultă că $s = \pm g_a$.

Aşadar am probat:

Teorema 5.9. *Fie f, a fixate ca mai sus. Maximul (respectiv minimul) derivatei $\dfrac{df}{ds}(a)$ sunt atinse în cazul când s este versorul g_a (respectiv $-g_a$) al gradientului lui f în a.*

În plus

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a)\right)_{\max} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)}{||\mathrm{grad}\,_a f||} = \frac{1}{||\mathrm{grad}\,_a f||}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)^2 =$$

$$= \frac{1}{||\mathrm{grad}\,_a f||}\cdot||\mathrm{grad}\,_a f||^2 = ||\mathrm{grad}\,_a f|| \text{ şi } \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a)\right)_{\min} = -||\mathrm{grad}\,_a f||.$$

De asemenea conform teoremei 5.7, vectorul $\mathrm{grad}\,_a f$ rezultă normal în a la hipersuprafaţa $f(\underline{x}) = f(a)$.

Această teoremă afirmă deci că ”variaţiile extreme” ale lui f în punctul a se produc pe direcţia gradientului lui f în a şi stă la baza metodei gradientului pentru determinarea extremelor (de fapt punctelor critice) ale unei funcţii f de clasă C^1, pentru care nu se poate rezolva uşor sistemul $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0,\ldots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ (corolarul teormei 4.9). Descriem pe scurt această metodă.

Fie $f \in C^1(A)$, $f : A \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$ astfel ca $n_a \triangleq \mathrm{grad}\,_a f \neq 0$. Se numeşte *traiectorie de gradient pornind din a* orice drum parametrizat de clasă $C^1 g : I \to A$ pe un interval centrat în origine astfel încât

$$g'(t) = \mathrm{grad}\,_{g(t)} f,\ (\forall)t \in I \quad \text{şi} \quad g(0) = a \text{ deci } g'(0) = n_a. \tag{71}$$

Aşadar, urma drumului g trece prin punctul a şi este tangentă în a la vectorul $n_a = \mathrm{grad}\,_a f$ (fig. III. 47). Notăm $h(t) = f(g(t)) = f(\overset{x_1}{g_1}(t),\ldots,\overset{x_n}{g}(t))$,

$(\forall)t \in I$; atunci $h'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)) \cdot g_1'(t) + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(g(t)) \cdot g_n'(t)$. Dar conform (71) $g_1'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)), \ldots, g_n'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(g(t))$, deci $h'(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))^2$, adică

$$h'(t) = ||\mathrm{grad}_{\,g(t)} f||^2 \geq 0. \tag{72}$$

Astfel funcţia reală $h : I \to \mathbb{R}$ este *monoton crescătoare*, adică valorile lui f cresc în lungul oricărei traiectorii de gradient în a.

Teorema 5.10. *Presupunem că intervalul I este de forma $I = (t_0, \infty)$ şi că există $\xi = \lim\limits_{t\to\infty} g(t)$ în A. Atunci ξ este un punct critic al lui f.*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că ξ nu ar fi punct critic al lui f, adică $n_\xi \neq 0$. Definim $h(t) = f(g(t))$, $t \in I$ ca mai sus. Cum $g(t) \to \xi$ pentru $t \to \infty$, rezultă că $h(t) \to f(\xi)$, deoarece f este continuă. Cum $n_\xi = \mathrm{grad}_\xi f \neq 0$ şi cum f este de clasă C^1, rezultă că grad f este continuă şi ca atare, există $m > 0$ şi o vecinătate W a lui ξ astfel încât

$$||\mathrm{grad}_{\,x} f|| > m \text{ pentru orice } x \in W. \tag{73}$$

Alegem apoi $t_1 \in I$ astfel încât $g(t) \in W$ pentru $t \geq t_1$. Atunci ori de câte ori $t > t_1$, avem conform formulei Leibniz-Newton, $\displaystyle\int_{t_1}^{t} h'(t)\mathrm{d}t = h(t) - h(t_1)$ şi pe de altă parte, conform (72) şi (73), $\displaystyle\int_{t_1}^{t} h'(t)\mathrm{d}t \geq \int_{t_1}^{t} m^2 \mathrm{d}t = m^2(t - t_1)$.

Aşadar, $h(t) \geq h(t_1) + m^2(t - t_1)$, pentru orice $t > t_1$, adică pentru $t \to \infty$ se obţine o contradicţie (căci membrul stâng tinde către $f(\xi)$, iar membrul drept către $+\infty$).

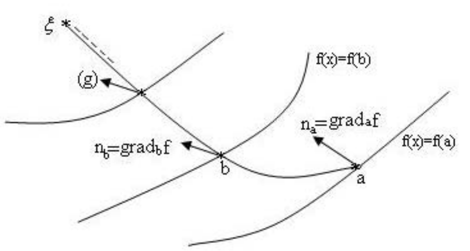


Fig. III.47

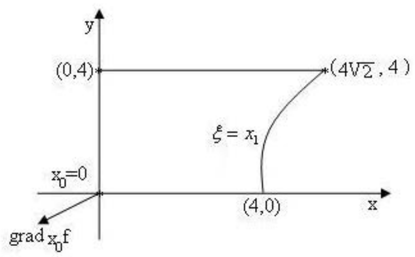


Fig. III.48

Observaţii. Se poate arăta că dacă ξ este un punct de maxim local al unei funcţii $f \in C^2(A)$, atunci orice traiectorie de gradient (g) pornind dintr-un punct suficient de aproape de ξ converge către ξ. În practică, se fixează mai întâi un punct $x_0 \in A$ (suficient de aproape de soluţia căutată ξ) şi se construieşte un şir $\{x_n\}_{n\geq 0}$ de puncte din A astfel încât pentru orice k fixat, în punctul x_k se alege direcţia $s^{(k)}$ = versorul lui $\mathrm{grad}_{x_k} f$ astfel ca pentru orice $\lambda > 0$ suficient de mic, segmentul $\{x_k + \lambda s^{(k)}\}$ să fie conţinut în A; notăm cu λ_k valoarea lui λ care corespunde maximului lui f pe acest segment. Atunci $x_{k+1} = x_k + \lambda_k s^{(k)}$ şi procesul iterativ $\{x_n\}_{n\geq 0}$ converge către ξ; metoda se adaptează evident şi în cazul punctelor de minim.

Exemplu. Căutăm minimul funcţiei $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y$ cu restricţiile $\{x^2 - y^2 \leq 16,\ y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Evident, grad $f = (2x - 4)\bar{\imath} + (2y - 2)\bar{\jmath}$. Luăm $x_0 = (0, 0)$, deci $\mathrm{grad}_{\,x_0} f = -4\bar{\imath} - 2\bar{\jmath}$ şi considerăm dreapta care trece prin origine cu direcţia $\mathrm{grad}_{x_0} f$, adică $\dfrac{x - 0}{-4} = \dfrac{y - 0}{-2}$, adică parametric $x = 4t$, $y = 2t$. Se observă că $t > 0$ şi $f(4t, 2t) = 20t^2 - 20t$; minimul acestei funcţii este atins pentru $t = \dfrac{1}{2}$ şi luăm $x_1 = (2, 1)$. Se observă că de fapt $\xi = x_1$ este punctul căutat în care f îşi atinge minimul.

Metoda gradientului este utilizată la rezolvarea unor sisteme de ecuaţii, a căror soluţie este un punct critic al unei funcţii. O altă metodă des folosită o constituie procedeul lui Newton, descris mai jos.

3.6.3 Procedeul lui Newton pentru rezolvarea unor sisteme de ecuaţii

Considerăm un sistem de ecuaţii

$$f_1(x_1,\ldots,x_p)=0,\ldots,f_p(x_1,\ldots,x_p)=0, \tag{74}$$

unde funcţiile $f_1,\ldots,f_p$ sunt funcţii de clasă C^1 într-o bilă $B(a,r)\subset\mathbb{R}^p$. Considerând aplicaţia $F:B(a,r)\to\mathbb{R}^p$, $\underline{x}\mapsto(f_1(\underline{x}),\ldots,f_p(\underline{x}))$, sistemul (74) este echivalent cu ecuaţia vectorială $F(x)=0$. Presupunem că sistemul (74) are o soluţie $\xi\in B(a,r)$ şi că diferenţiala $\mathrm{d}F(a):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ este un izomorfism $\mathbb{R}$-liniar $\left(\text{adică } \dfrac{D(f_1,\ldots,f_p)}{D(x_1,\ldots,x_p)}(a)\neq 0\right)$. Vom indica un proces iterativ $\{u_n\}_{n\ge0}$ care converge către ξ. Anume, se ia mai întâi $u_0=a$; presupunând u_n determinat, creşterea $F(\underline{x})-F(u_n)$ poate fi aproximată cu $\mathrm{d}F(u_n)(\underline{x}-u_n)$. Ecuaţia $F(\underline{x})=0$ se poate aproxima cu $F(u_n)+\mathrm{d}F(u_n)(\underline{x}-u_n)=0$ sau cu $F(u_n)+\mathrm{d}F(a)(\underline{x}-u_n)=0$ şi soluţia acestei ecuaţii se notează u_{n+1}; deci

$$u_{n+1}=u_n-(\mathrm{d}F(a))^{-1}(F(u_n)),\quad(\forall)n\ge 0. \tag{75}$$

Se poate proba, în analogie cu cazul 1-dimensional tratat în capitolul II, §5.1, următorul rezultat: presupunem că există o constantă $C>0$ astfel încât $||\mathrm{d}F(x)-\mathrm{d}F(y)||\le C\cdot||x-y||$, $(\forall)x,y\in B(a,r)$ şi că aplicaţia $\mathrm{d}F(a)$ este izomorfism. Atunci procesul $\{u_n\}_{n\ge0}$ definit prin relaţia (75) şi prin $u_0=a$, este convergent către soluţia ξ, cu condiţia ca $r>0$ să fie suficient de mic; în practică alegerea lui u_0 este esenţială pentru convergenţa însăşi şi pentru rapiditatea acesteia. Procesul ietrativ $\{u_n\}_{n\ge0}$ poate fi programat cu uşurinţă.

Exemplu. Considerăm sistemul $x^2-y=0$, $x^2+y^2-3x=0$. Luâm $a=(1,1)$; în acest caz $F(x,y)=(x^2-y,x^2+y^2-3x)$ şi $\mathrm{d}F(a):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ este aplicaţia liniară asociată matricei jacobiene $J_F(a)=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$, adică $\mathrm{d}F(a)(u,v)=(2u-v,-u+2v)$, deci $\mathrm{d}F(a)^{-1}(x,y)=\left(\dfrac{2x+y}{3},\dfrac{x+2y}{3}\right)$.

Notând $u_n=(x_n,y_n)$, relaţia (75) devine

$$(x_n,y_n)-(x_{n+1},y_{n+1})=\mathrm{d}F(a)^{-1}(x_n^2-y_n,x_n^2+y_n^2-3x_n)=$$
$$=\left(\frac{3x_n^2-2y_n+y_n^2-3x_n}{3},\frac{3x_n^2-y_n+2y_n^2-6x_n}{3}\right)$$

deci soluţia $\xi=(x,y)$ a sistemului dat este limita procesului iterativ (x_n,y_n), $n\ge0$ definit prin $x_0=1$, $y_0=1$, $x_{n+1}=-\dfrac{3x_n^2-2y_n+y_n^2-6x_n}{3}$, $y_{n+1}=-\dfrac{3x_n^2-4y_n+2y_n^2-6x_n}{3}$.

3.6.4 Metoda celor mai mici pătrate

Presupunem, ca rezultat al măsurătorii unei mărimi fizice $f(x)$, că se obţine o tabelă de valori

x_0	x_1	$\ldots$	x_p
y_0	y_1	$\ldots$	y_p

astfel încât $y_i=f(x_i)$, $0\le i\le p$, fiecare din valorile y_i fiind calculată cu o anumită eroare. Am văzut în capitolul II, §5.2 că rostul interpolării este acela de a estima, din tabela anterioară, valoarea lui f în puncte distincte de nodurile x_i, $0\le i\le p$. Sunt situaţii în care este util de cunoscut cât de mult se abate graficul funcţiei f de la o dreaptă, adică de la graficul unei funcţii de gradul întâi $g(x)=ax+b$ cu a,b parametri reali. Considerăm expresia

$$U(a,b)=\sum_{i=0}^{p}[f(x_i)-g(x_i)]^2=\sum_{i=0}^{p}(y_i-ax_i-b)^2,$$

numită *abaterea medie pătratică* în formula aproximativă $f \simeq g$ (relativ la tabela noastră).

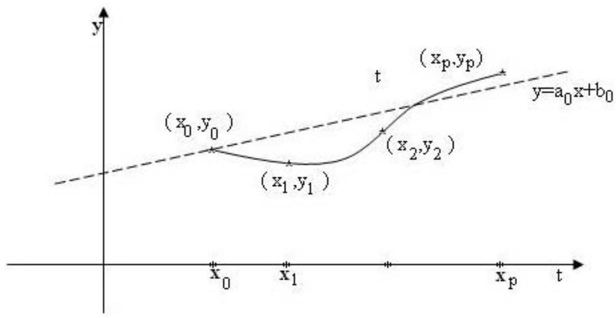


Fig. III.49

Metoda celor mai mici pătrate constă în determinarea lui a, b astfel încât funcţia $U(a,b)$ să fie minimă; condiţiile necesare de extrem sunt date de corolarul teoremei 4.9, anume $\dfrac{\partial U}{\partial a} = 0$, $\dfrac{\partial U}{\partial b} = 0$, adică $\sum\limits_{i=0}^{p}(y_i - ax_i - b)\cdot x_i = 0$, $\sum\limits_{i=0}^{p}(y_i - ax_i - b)\cdot x_i = 0$ sau explicit

$$\begin{cases} a\cdot\sum\limits_{i=0}^{p} x_i^2 + b\cdot\sum\limits_{i=0}^{p} x_i = a\cdot\sum\limits_{i=0}^{p} x_i y_i \\ a\cdot\sum\limits_{i=0}^{p} x_i + (p+1)b = \sum\limits_{i=0}^{p} y_i, \end{cases} \tag{76}$$

de unde se determină valorile căutate pentru a, b pe care le notăm cu a_0, b_0;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = 2\sum_{i=0}^{p} x_i^2, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=0}^{p} x_i, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial b^2} = 2p+2,$$

$$\text{deci} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} > 0 \text{ şi } \left(\frac{\partial^2 U}{\partial a \partial b}\right)^2 - \frac{\partial^2 U}{\partial a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial b^2} < 0,$$

aşa cum rezultă din inegalitatea lui Schwartz. Aşadar, conform teoremei 4.11, (a_0, b_0) este într-adevăr un punct de minim pentru U. Se mai spune că dreapta $y = a_0 x + b_0$ ”liniarizează optim” datele experimentale (x_i, y_i), $0 \le i \le p$ şi se numeşte *dreapta de regresie a lui y în raport cu x.*

Dacă ξ, η sunt două variabile aleatoare având mediile $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ şi dispersiile σ_ξ^2, σ_η^2 şi dacă se consideră o selecţie de valori ξ_i, η_i $(0 \le i \le p)$ ale lor, atunci o variabilă aleatoare de forma $\rho = a + b(\xi - \bar{\xi})$ cu a, b constante reale, se numeşte *regresia liniară a lui η în raport cu ξ* (relativ la selecţia considerată) dacă expresia $U(a,b) =$ media lui $(\eta - \rho)^2$, adică $U(a,b) = \dfrac{1}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}[\eta_i - a - b(\xi_i - \bar{\xi})^2]$ este minimă. Din condiţiile necesare $\dfrac{\partial U}{\partial a} = 0$, $\dfrac{\partial U}{\partial b} = 0$ se obţine fără dificultate soluţia $a = \bar{\eta}$, $b = \dfrac{1}{\sigma_\xi^2}\times$ media lui $\eta(\xi - \bar{\xi})$. Pentru a, b astfel aflaţi, dreapta de regresie $\eta = a + b(\xi - \bar{\xi})$, considerată în planul (ξ, η) are proprietatea că în ”apropierea” ei (în sensul abaterii medii pătratice) sunt concentrate cât mai multe din perechile de valori (ξ_i, η_i), $0 \le i \le p$ ale variabilelor aleatoare ξ, η.

Metoda celor mai mici pătrate se generalizează astfel: se consideră un SVN $(E, ||\cdot||)$, un subspaţiu vectorial F al lui E, se fixează un element $f \in E$ şi se pune problema determinării unui element $g_0 \in F$ astfel încât distanţa $\mathrm{d}(f, g_0) = ||f - g_0||$ să fie minimă (adică $||f - g_0|| \le ||f - g||$, $(\forall) g \in F$). Există diverse variante ale metodei, împreună cu programe de calcul adaptate; în cele de mai sus am schiţat doar ideea generală a metodei celor mai mici pătrate, ca pretext de aplicare a teoremelor 4.9, 4.11 din acest capitol.

3.6.5 Enunţul problemei celor n corpuri $(n \geq 3)$

Se consideră un sistem de n corpuri cu masele $m_1, m_2, \ldots, m_n$ şi respectiv poziţiile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (asimilate cu puncte din spaţiul fizic $\mathbb{R}^3$). Din punct de vedere mecanic, studiul sistemului revine la cunoaşterea poziţiei şi vitezei fiecărui corp la fiecare moment de timp, astfel încât este firesc să considerăm că stările sunt perechi $(\underline{x}, \underline{v})$ unde $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este un element din spaţiul $\mathbb{R}^{3n} = \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3}_{n\ ori}$ (poziţia întregului sistem de n puncte în spaţiu, iar $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ unde $v_i \in \mathbb{R}^3$ este viteza corpului x_i, $1 \leq i \leq n$.

Mulţimea $\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \simeq \mathbb{R}^{6n}$ se mai numeşte *spaţiul stărilor sistemului.*

Pentru $i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq n)$ notăm $C_{ij} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{3n} | x_i = x_j\}$ şi fie $C = \bigcup_{1\leq i,j\leq n} C_{ij}$. Mulţimea C este închisă (în $\mathbb{R}^{3n}$) ca reuniune finită de închişi şi se numeşte *spaţiul de ciocnire* (a vreunei perechi de corpuri). *Energia cinetică* a sistemului este prin definiţie funcţia $E : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ definită prin $E(\underline{x}, \underline{v}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i ||v_i||^2$ şi *energia potenţială* este funcţia $V : \mathbb{R}^{3n} \setminus C \to \mathbb{R}$, definită prin $V(\underline{x}) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{m_i m_j}{||x_j - x_i||}$. Aşadar, V este o funcţie de $3n$ variabile

$$\overbrace{(\underset{x_1}{\underbrace{x_1^1, x_1^2, x_1^3}})}, \ldots, \overbrace{(\underset{x_i}{\underbrace{x_i^1, x_i^2, x_i^3}})}, \ldots, \overbrace{(\underset{x_n}{\underbrace{x_n^1, x_n^2, x_n^3}})}$$

de clasă C^∞ pe mulţimea deschisă $\mathbb{R}^{3n} \setminus C$ (spaţiul de neciocnire !). Ecuaţiile lui Newton descriind mecanica în timp a sistemului considerat sunt $m_i x_i''(t) = -\mathrm{grad}\,_i V$, $1 \leq i \leq n$, sau explicit

$$m_1(x_1^1)'' = -\frac{\partial V}{\partial x_1^1}, \quad m_1(x_1^2)'' = -\frac{\partial V}{\partial x_1^2}, \quad m_1(x_1^3)'' = -\frac{\partial V}{\partial x_1^3}, \ldots \text{etc.} \tag{77}$$

O problemă încă nerezolvată, care nu poate fi abordată decât cu metode profunde de Analiză matematică şi Geometrie diferenţială, este următoarea: *este adevărat că sistemul diferenţial (77) are soluţii periodice (stabile) şi că din orice stare iniţială de neciocnire sistemul ajunge tot într-o stare de neciocnire*?

3.6.6 Exerciţii

1. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (pentru z funcţie de clasă C^2) în funcţie de derivatele lui z în raport cu u, v considerând $z(u, v)$, prin schimbarea de variabile independente definită prin

a) $u = x - y$, $v = x + y$; b) $u = x + y$, $v = y$; c) $x = u^2$, $y = v$.

2. Se consideră ecuaţia $a\frac{\partial^2 z}{\partial x^3} + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (a, b, c fiind constante reale) şi efectuăm schimbarea de variabilă $u = x + py$, $y = x + qy$ cu p, q parametri reali. Atunci $z(x, y)$ devine o funcţie $F(u, v)$ şi se cere să se exprime derivatele de ordin I, II ale lui z în raport cu x, y în funcţie de derivatele lui F în raport cu u, v. Să se arate că dacă $b^2 - ac > 0$ (respectiv $b^2 - ac = 0$) atunci se pot alege p, q încât $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$ (respectiv $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$). Ca aplicaţie să se determine funcţiile $z(x, y)$ care verifică ecuaţiile $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

3. Folosind metoda gradientului să se determine:

a) maximul lui $f(x, y) = 5 + 4x + 2y - x^2 - y^2$, pornind din punctul $a = (4, 5)$;

b) maximul lui $f(x, y) = y^2 + 4x$ cu restricţiile $\{9x^2 + 4y^2 \leq 36,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$;

Lumea curbelor are o structură mai bogată decât lumea punctelor. Tehnica de integrare Lebesgue şi ideile fizice ale lui Gibbs au avut efecte considerabile în studiul multor fenomene de care se interesează inginerul, legate de calculul variaţiilor, termodinamică, teoria comunicaţiilor, analiză armonică, procese aleatorii etc.

(N. WIENER)

Capitolul 4

Extinderi ale conceptului de integrală

Introducere

Ideea principală a teoriei integralei este ca la anumite funcţii, considerate pe anumite mulţimi, să fie asociate numere bine determinate, obţinând în acest mod un instrument de studiu şi totodată un indicator cantitativ extrem de util - integrala. B. RIEMANN (1826-1866) a definit integrala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ pentru anumite funcţii mărginite $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, aşa cum s-a studiat în liceu, dar acest concept s-a dovedit insuficient în rezolvarea unor probleme mai speciale (de exemplu, în teoria seriilor Fourier, în clasificarea semnalelor, în studiul transformărilor integrale, în teoria distribuţiilor, calcul operaţional, teoria probabilităţilor etc.). H. LEBESGUE (1875-1941) a construit un concept mai general şi mai util de integrală, pe care îl prezentăm în acest capitol. În paragraful 2 vom indica succint construcţia integralei Stieltjes şi în §3 vom defini integralele curbilinii în lungul unui drum parametrizat, care extind integralele uzuale (în lungul unui segment). În încheierea acestui capitol vor fi date proprietăţile de bază ale integralelor cu parametri, utilizate curent în diverse reprezentări integrale.

4.1 Integrabilitate Lebesgue

4.1.1 Integrarea funcţiilor în scară

În acest capitol vor fi studiate în principal integralele simple sau reductibile la acestea. Anumite consideraţii preliminare pot fi totuşi făcute în cazul general al funcţiilor de mai multe variabile reale, fapt care nu aduce dificultăţi suplimentare, dar permite a prezentare unificată a integralelor simple şi multiple. Pentru început, considerăm integralele unor funcţii de un tip particular, numite funcţii în scară (sau etajate). Menţionăm că în capitolul III am definit o noţiune mai restrictivă de funcţie în scară (definiţia 2.5), care trebuie însă extinsă.

Definiţia 1.1. *O funcţie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numeşte* **funcţie în scară** *sau (***etajată***) dacă există mulţimi mărginite măsurabile (conform definiţiei III 3.6.) disjuncte două câte două $M_1, M_2, \ldots, M_p$ în $\mathbb{R}^n$ astfel încât să fie îndeplinite condiţiile*:

a) *pe fiecare mulţime M_k, $1 \leq k \leq p$, funcţia φ este constantă*;

b) *funcţia φ este nulă în afara reuniunii mulţimilor $M_1, M_2, \ldots, M_p$.*

Exemple. 1) Funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

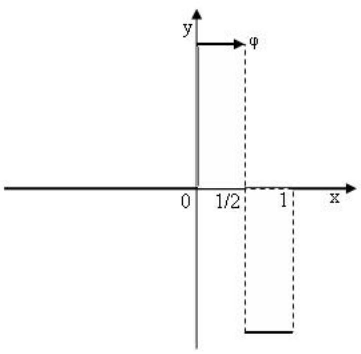


Fig. IV.1

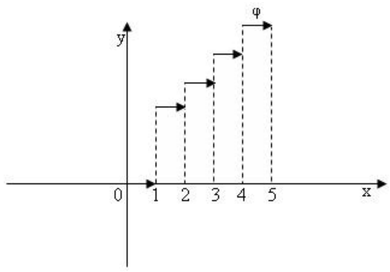


Fig. IV.2

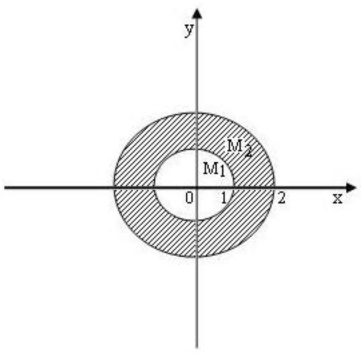


Fig. IV.3

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{dacă} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ -1 \quad \text{dacă} \quad x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \\ 0 \quad \text{în rest} \end{cases}$$

este o funcţie în scară (luând $M_1 = \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$, $M_2 = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$; aici $\varphi = 1$ pe M_1 şi $\varphi = -1$ pe M_2).

Similar pentru funcţia $\varphi(x) = \begin{cases} [x] \text{ (partea întreagă a lui } x) \text{ dacă } x \in [1, 5] \\ 0 \text{ în rest} \end{cases}$

(în acest caz, $M_1 = [1, 2)$, $M_2 = [2, 3)$, $M_3 = [3, 4)$, $M_4 = [4, 5)$ şi $\varphi = k$ pe M_k, $1 \leq k \leq 4$), fig. IV.2.

2) Considerăm mulţimile măsurabile din $\mathbb{R}^2$, $M_1 = \{x^2 + y^2 < 1\}$, $M_2 = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ şi funcţia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ având o valoare reală constantă c_1 pe M_1, o valoare constantă c_2 pe M_2 şi nulă în rest. Se obţine astfel o funcţie în scară de două variabile reale.

În general, dacă se consideră un număr finit de mulţimi mărginite, disjuncte două câte două, măsurabile în plan (sau în spaţiu) şi o mărime fizică constantă pe fiecare din aceste mulţimi, nulă în afara lor, atunci este definită o funcţie în scară.

Teorema 1.1. *Mulţimea S a funcţiilor în scară $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ are în mod natural o structură de spaţiu vectorial normat.*

Demonstraţie. Notând $X = \mathbb{R}^n$, se observă că orice funcţie în scară $\varphi \in S$ este o funcţie mărginită $\varphi : X \to \mathbb{R}$, adică $S \subset \mathcal{M}_X$. Cum $\mathcal{M}_X$ este SVN (relativ la norma - sup), este suficient de probat că S este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_X$, adică de îndată ce $\varphi, \psi \in S$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ este o constantă, rezultă $\varphi + \psi \in S$ şi $\lambda\varphi \in S$. Dacă funcţia în scară φ (respectiv ψ) este constantă pe fiecare din mulţimile măsurabile mărginite $M_1, M_2, \ldots, M_p$ (respectiv $N_1, N_2, \ldots, N_q$), adică $\varphi = c_k$ pe M_k, $1 \leq k \leq p$ (respectiv $\psi = d_l$ pe N_l, $1 \leq l \leq q$) şi $\varphi(x) = 0$ $(\forall)x \notin \bigcup\limits_{k=1}^{p} M_k$ (respectiv $\psi(x) = 0$, $(\forall)x \notin \bigcup\limits_{l=1}^{q} N_l$), atunci suma $\varphi + \psi$ va fi constantă pe fiecare din mulţimile măsurabile $M_k \cap N_l$, cu valoarea $c_k + d_l$, $1 \leq k \leq p$, $1 \leq l \leq q$ şi nulă în afara reuniunii acestora; similar, $\lambda\varphi$ este constantă cu valoarea λc_k pe fiecare M_k, $1 \leq k \leq p$. Aşadar, $\varphi + \psi \in S$ şi $\lambda\varphi \in S$.

În situaţia că $\varphi \in S$ ca mai sus şi $\varphi = c_k$ pe M_k, $1 \leq k \leq p$ şi $\varphi = 0$ pe complementara reuniunii mulţimilor M_k, facem convenţia de a nota $M_{p+1} = \mathbb{R}^n \setminus (M_1 \cup M_2 \cup \ldots M_p)$ şi $c_{p+1} = 0$ şi scriem pe scurt, $\varphi = \{M_k, c_k\}_{1 \leq k \leq p+1}$. Reţinem că mulţimea M_{p+1} este nemărginită şi $c_{p+1} = 0$. În acest caz, norma $-$ sup a funcţiei φ este evident $||\varphi|| = \sup_{\in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| = \max(|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_p|)$.

Definiţia 1.2. *Dacă $\varphi \in S$, $\varphi = \{M_k, c_k\}_{1 \leq k \leq p+1}$, se numeşte* **integrala lui** *φ numărul real*

$$I(\varphi) \triangleq \sum_{k=1}^{p} c_k \mu(M_k). \tag{1}$$

În acest mod, este definită o aplicaţie $I : S \to \mathbb{R}$, numită **luarea integralei pentru funcţii în scară**.

Este evident că $I(\varphi)$ depinde numai de funcţia φ (şi nu de alegerea mulţimilor măsurabile pe care φ este constantă). Este de asemenea clar că $I(\varphi) = \sum\limits_{k=1}^{p+1} c_k \mu(M_k)$, făcând convenţia ad-hoc că $c_{p+1} \cdot \mu(M_{p+1}) = 0$ (adică $0 \cdot \infty = 0$).

Exemple. 1) Fie $n = 1$ şi

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{dacă} \quad x \in [0,2] \\ -\dfrac{2}{5} & \text{dacă} \quad x \in (2,5] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

În acest caz, $M_1 = [0,2]$, $M_2 = (2,5]$, deci $\mu(M_1) = 2$, $\mu(M_2) = 3$ şi deci $I(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{2}{5} \cdot 3 = -\frac{1}{5}$.

2) Fie $n = 3$ şi funcţia în scară

$$\varphi(x,y,z) = \begin{cases} 30 & \text{dacă} \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ -3 & \text{dacă} \quad 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

În acest caz, $M_1 =$ sfera $\{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$, $M_2 =$ coroana sferică $\{1 < x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$, $\mu(M_1) =$ volumul sferei de rază 1, egal cu $\frac{4\pi}{3}$, $\mu(M_2) = \frac{28\pi}{3}$, deci $I(\varphi) = 30 \cdot \frac{4\pi}{3} - 3 \cdot \frac{28\pi}{3} = 12\pi$.

3) Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime măsurabilă. Atunci funcţia caracteristică χ_M a lui M,

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad x \in M \\ 0 & \text{dacă} \quad x \notin M \end{cases}$$

este evident o funcţie în scară şi în plus,

$$I(\chi_M) = 1 \cdot \mu(M) = \mu(M). \tag{2}$$

Proprietăţile imediate ale integralei sunt cuprinse în

Teorema 1.2. (a) *Aplicaţia $I : S \to \mathbb{R}$ este $\mathbb{R}$-liniară, adică $I(\varphi+\psi) = I(\varphi) + I(\psi)$, $I(\lambda\varphi) = \lambda I(\varphi)$, $(\forall)\varphi, \psi \in S$, $\lambda \in \mathbb{R}$;*

(b) *Dacă $\varphi \in S$ şi $\varphi \geq 0$, atunci $I(\varphi) \geq 0$;*

(c) *Pentru orice $\varphi \in S$ există $C > 0$ real astfel încât*

$$|I(\varphi)| \leq C \cdot ||\varphi||.$$

Demonstraţie. (a) $\varphi = \{M_k, c_k\}_{1 \leq k \leq p+1}$, $c_{p+1} = 0$ şi $\psi = \{N_i, d_l\}_{1 \leq l \leq q+1}$, $d_{q+1} = 0$. Atunci $\varphi + \psi = \{M_l \cap N_l, c_k + d_l\}$ şi $\lambda\varphi = \{M_k, \lambda c_k\}$. Conform definiţiei 1.2, avem

$$I(\varphi) = \sum_{k=1}^{p+1} c_k \mu(M_k) = \sum_{k=1}^{p+1} c_k \sum_{l=1}^{q+1} \mu(M_k \cap N_l) = \sum_{l=1}^{q+1}\sum_{k=1}^{p+1} c_k \mu(M_k \cap N_l)$$

şi similar

$$I(\psi) = \sum_{l=1}^{q+1} d_l \mu(N_l) = \sum_{l=1}^{q+1} d_l \sum_{k=1}^{p+1} \mu(N_l \cap M_k) = \sum_{l=1}^{q+1}\sum_{k=1}^{p+1} d_l \mu(M_k \cap N_l),$$

deci

$$I(\varphi) + I(\psi) = \sum_{l=1}^{q+1}\sum_{k=1}^{p+1} (c_k + d_l)\mu(M_k \cap N_l) = I(\varphi + \psi).$$

Similar,

$$I(\lambda\varphi) = \sum_{k=1}^{p} \lambda c_k \mu(M_k) = \lambda \sum_{k=1}^{p} c_k \mu(M_k) = \lambda I(\varphi).$$

b) Aşadar, dacă $\varphi = \{M_k, c_k\}$, atunci $c_k \geq 0$, $1 \leq k \leq p$, deci $I(\varphi) \geq 0$.

c) Cu notaţiile anterioare, avem $I(\varphi) = \sum_{k=1}^{p} c_k \mu(M_k)$ şi cum $|c_k| \leq ||\varphi||$, $1 \leq k \leq p$, rezultă $|I(\varphi)| \leq ||\varphi|| \cdot \sum_{k=1}^{p} \mu(M_k)$; este suficient să notăm $C = \sum_{k=1}^{p} \mu(M_k)$.

Corolar. *Funcţionala $I : S \to \mathbb{R}$ este monotonă ($\varphi \leq \psi \Rightarrow I(\varphi) \leq I(\psi)$) şi continuă.*

Demonstraţie. Dacă $\varphi, \psi \in S$ şi $\varphi \leq \psi$, atunci $\psi - \varphi \geq 0$, deci conform teoremei 1.2, (b), $I(\psi - \varphi) \geq 0$, $I(\psi) - I(\varphi) \geq 0$, adică $I(\varphi) \leq I(\psi)$. Apoi se aplică teorema III 2.7.

4.1.2 Integrarea funcţiilor mărginite cu suport compact

Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită, cu suport compact (conform definiţiei III 2.2); faptul căf are suport compact este echivalent cu aceea că f se anulează în afara unui paralelipiped închis $P \subset \mathbb{R}^n$, iar faptul că f este mărginită revine la existenţa unei constante $A > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq A$, adică $-A \leq f(x) \leq A$, $(\forall) x \in P$. Atunci se pot construi două funcţii $\varphi, \psi \in S$ astfel încât $\varphi \leq f \leq \psi$; de exemplu, este suficient să definim

$$\varphi(x) = \begin{cases} -A & \text{dacă} \quad x \in P \\ 0 & \text{dacă} \quad x \notin P \end{cases}, \quad \psi(x) = \begin{cases} A & \text{dacă} \quad x \in P \\ 0 & \text{dacă} \quad x \notin P. \end{cases}$$

Aşadar, funcţia f poate fi "încadrată" între două funcţii în scară.

Notăm cu $\mathcal{M}_c$ mulţimea funcţiilor $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mărginite cu suport compact.

Evident, $\mathcal{M}_c$ este un SVN (relativ la norma-sup) şi $S \subset \mathcal{M}_c$.

Definiţia 1.3. *Dacă $f \in \mathcal{M}_c$, atunci numerele reale*

$$\underline{\int} f \triangleq \sup_{\varphi \in S, \varphi \leq f} I(\varphi); \quad \overline{\int} f \triangleq \inf_{\psi \in S, \varphi \geq f} I(\psi) \tag{3}$$

se numesc **integralele inferioară** *şi respectiv* **superioară ale lui** *f (pe $\mathbb{R}^n$).*

Este evident că mulţimea de numere reale $\{I(\varphi) | \varphi \in S, \varphi \leq f\}$ este majorată de numărul $A \cdot V(P)$, deci are margine superioară, iar mulţimea $\{I(\psi) | \psi \in S, \psi \leq f\}$ este minorată de numărul $-A \cdot V(P)$ şi deci are margine inferioară, astfel că sunt bine definite numerele reale $\underline{\int} f$, $\overline{\int} f$.

Teorema 1.3. *Dacă $f \in \mathcal{M}_c$, atunci*

$$\underline{\int} f \leq \overline{\int} f, \tag{4}$$

cu egalitate în cazul când $f \in S$.

Demonstraţie. Pentru orice $\varphi, \psi \in S$ astfel încât $\varphi \leq f \leq \psi$ avem $\varphi \leq \psi$ deci $I(\varphi) \leq I(\psi)$. În particular, $\sup_{\varphi \in S,\, \varphi \leq f} I(\varphi) \leq I(\psi)$, adică $\underline{\int} f \leq I(\psi)$.

Această relaţie are loc pentru orice $\psi \in S$, $\psi \geq f$, deci

$$\underline{\int} f \leq \inf_{\psi \in S,\, \psi \geq f} I(\psi) \overset{cf.(3)}{=} \overline{\int} f.$$

Dacă $\varphi \in S$, atunci din (3) este evident că

$$\underline{\int} \varphi = I(\varphi) \quad \text{şi} \quad \overline{\int} \varphi = I(\varphi), \quad \text{deci} \quad \underline{\int} \varphi = \overline{\int} \varphi = I(\varphi).$$

Definiţia 1.4. *O funcţie* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *din* $\mathcal{M}_c$ *se numeşte* **integrabilă** *dacă*

$$\underline{\int} f = \overline{\int} f. \tag{5}$$

Valoarea comună se numeşte **integrala lui** f **pe** $\mathbb{R}^n$ *şi se notează*

$$\int f \text{ (sau echivalent } \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x})\mathrm{d}(\underline{x}), \underbrace{\int \dots \int_{\mathbb{R}^n}}_{n\ ori} f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n).$$

Exemple. 1) Din definiţia 1.3 rezultă direct că orice funcţie în scară $\varphi \in S$ este integrabilă şi în plus,

$$\int \varphi = I(\varphi).$$

2) Considerând în relaţiile (3) numai funcţii în scară de un tip special, anume constante pe paralelipipedele semiînchise $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ ale unei reţele spaţiale şi nulă în rest, obţinem integralele Riemann inferioară şi superioară (R) $\underline{\int} f$, (R) $\overline{\int} f$; evident au loc inegalităţile

$$(R)\underline{\int} f \le \underline{\int} f \le \overline{\int} f \le (R)\overline{\int} f.$$

Dacă extremităţile coincid, atunci rezultă evident că f este integrabilă; această afirmaţie se mai enunţă astfel: orice funcţie f din $\mathcal{M}_c$ integrabilă Riemann (adică $(R)\underline{\int} f = (R)\overline{\int} f$) este integrabilă (în sensul definiţiei 1.4).

Teorema 1.4. *Fie* $f, g \in \mathcal{M}_c$ *funcţii integrabile şi* $\lambda \in \mathbb{R}$ *un număr real constant.*

(a) *Atunci funcţiile* $f + g$, λf *sunt integrabile şi*

$$\int (f+g) = \int f + \int g, \quad \int (\lambda f) = \lambda \int f \quad \text{(Liniaritate)};$$

(b) *Dacă* $f \le g$, *atunci* $\int f \le \int g$ (Monotonie).

Nu mai dăm detalii de demonstraţie.

Indicăm acum o clasă largă de funcţii integrabile. În prealabil definim conceptul de funcţie măsurabilă.

Definiţie 1.5. *O funcţie* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se numeşte* **măsurabilă** *dacă pentru orice număr real* a, *submulţimea*

$$\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > a\}$$

a lui $\mathbb{R}$ *este măsurabilă.*

O mărime fizică $f(x_1, \dots, x_n)$, depinzând de n parametri de stare exprimaţi prin numere reale, se consideră măsurabilă dacă pentru orice nivel a, mulţimea acelor $(x_1, \dots, x_n)$ pentru care valoarea acelei mărimi se află deasupra nivelului a, adică $f(x_1, \dots, x_n) > a$, este măsurabilă în sensul III. §3.3; se poate considera că mulţimile, ca şi toate mărimile care intervin în descrierile fizice sau tehnice sunt mulţimi, respectiv funcţii măsurabile. De altfel nu se cunosc exemple de mulţimi şi nici de funcţii nemăsurabile, obţinute prin procedee de analiză constructivistă. Indicarea de exemple de funcţii nemăsurabile este dificilă. Are loc:

Teorema 1.5. *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *o funcţie din* $\mathcal{M}_c$, *măsurabilă şi pozitivă* $(f \ge 0)$. *Atunci* f *este integrabilă.*

4.1.3 Funcţii integrabile pe mulţimi mărginite măsurabile

Fixăm o mulţime $M \subset \mathbb{R}^n$, presupusă mărginită şi măsurabilă. Dacă $f : M \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită pe M, atunci notăm cu $f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă} \quad x \in M \\ 0 & \text{dacă} \quad x \notin M. \end{cases}$$

Aşadar, dacă f ar fi definită pe $\mathbb{R}^n$, atunci ar avea loc egalitatea

$$f_M = f \cdot \chi_M, \tag{6}$$

unde χ_M este funcţia caracteristică a mulţimii M.

Prelungind (în mod arbitrar) f la $\mathbb{R}^n$, are deci loc relaţia (6). Însăşi funcţia f_M este o prelungire a lui f la întreg $\mathbb{R}^n$, deoarece $f_M(x) = f(x)$, $(\forall)x \in M$.

Este evident că f_M este o funcţie mărginită cu suport compact, adică $f_M \in \mathcal{M}_c$ (căci f este mărginită, iar mulţimea M este mărginită, deci f_M se anulează în afara unei mulţimi mărginite, deci are suport compact).

Definiţia 1.6. *O funcţie mărginită $f : M \to \mathbb{R}$ se numeşte* **integrabilă** *pe mulţimea mărginită măsurabilă M dacă f_M este integrabilă (în sensul definiţiei 1.4). În plus, numărul real*

$$\int_M f \triangleq \int f_M = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_M$$

(notat echivalent $\int_M f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$) se numeşte **integrala lui** *f pe M).*

În cazul când $n = 1$, $M = [a, b]$ se obţine definiţia **integrabilităţii Lebesgue a unei funcţii mărginite** *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi a* **integralei Lebesgue** *$\int_a^b f(x)dx$.*

Proprietăţile de bază ale integralei pe mulţimi măsurabile sunt concentrate în

Teorema 1.6. *Fie $f, g : M \to \mathbb{R}$ funcţii integrabile (pe mulţimea mărginită măsurabilă M). În aceste condiţii, sunt adevărate afirmaţiile*:

(a) *$f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$ constant) sunt integrabile M şi*

$$\int_M (f+g) = \int_M f + \int_M g, \quad \int_M (\lambda f) = \lambda \int_M f \quad \text{(Liniaritate)};$$

(b) *dacă $f \leq g$, atunci* $\int_M f \leq \int_M g$ (Monotonie);

(c) $\int_M 1 = \mu(M)$ *sau echivalent,* $\mu(M) = \int_M dx_1 \ldots dx_n$ (Expresia integrală a măsurii);

(d) $\left| \int_M f \right| \leq ||f|| \cdot \mu(M)$ (Limitarea modulului integralei);

(e) *dacă M este neglijabilă, atunci*

$$\int_M f = 0 \quad \text{(Anularea pe mulţimi neglijabile)};$$

(f) *dacă $N \subset \mathbb{R}^n$ este o altă mulţime mărginită măsurabilă, atunci*

$$\int_{M \cup N} f = \int_M f + \int_N f - \int_{M \cap N} f;$$

în particular, dacă $M \cap N$ este neglijabilă, atunci

$$\int_{M \cup N} f = \int_M f + \int_N f \quad \text{(Aditivitate)};$$

(g) *dacă $f = g$ a.p., atunci g este, de asemenea, integrabilă şi*

$$\int_M f = \int_M g.$$

Demonstraţie. (a) Aşadar, conform ipotezei, f_M şi g_M sunt integrabile (în sensul definiţiei 1.4) şi aplicând teorema 1.4 (a), rezultă că $f_M + g_M$ are aceeaşi proprietate şi în plus,

$$\int (f_M + g_M) = \int f_M + \int g_M.$$

Ţinând cont că $f_M + g_M = f \cdot \chi_M + g \cdot \chi_M = (f+g) \cdot \chi_M = (f+g)_M$ şi utilizând (12), rezultă

$$\int (f+g) = \int_M f + \int_M g.$$

Similar,

$$\int_M (\lambda f) = \int (\lambda f)_M = \int (\lambda \cdot f_M) = \lambda \cdot \int f_M = \lambda \int_M f.$$

(b) Dacă $f \leq g$, atunci $f\chi_M \leq f\chi_M$ şi aplicând teorema 1.4 (b), se obţine

$$\int f\chi_M \leq \int g\chi_M, \quad \text{adică} \int_M f \leq \int_M g.$$

(c) Avem

$$\int_M 1 = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_M = I(\chi_M) \overset{cf.(2)}{=} \mu(M).$$

(d) Avem $-||f|| \leq f \leq ||f||$, deci aplicând (b) rezultă

$$-\int_M ||f|| \leq \int_M f \leq \int_M ||f||$$

şi deoarece $||f||$ este o constantă, rezultă $-||f|| \int_M 1 \leq \int_M f \leq ||f|| \int_M 1$; aplicând (c), rezultă $-||f||\mu(M) \leq \int_M f \leq ||f||\mu(M)$, adică

$$\left| \int_M f \right| \leq ||f||\mu(M).$$

(e) Rezultă direct din (d), deoarece $\mu(M) = 0$.

(f) Mai întâi observăm că $\chi_{M\cup N} = \chi_M + \chi_N - \chi_{M\cap N}$, deci $f\chi_{M\cup N} = f\chi_M + f\chi_N - f\chi_{M\cap N}$. Deoarece $M \cup N$, $M \cap N$ sunt mulţimi mărginite măsurabile (conform teoremei III. 3.4), folosind liniaritatea integralei va rezulta

$$\int f\chi_{M\cup N} = \int f\chi_M + \int f\chi_N - \int f\chi_{M\cap N},$$

şi conform definiţiei 1.6, se obţine formula din enunţ. Ultima afirmaţie rezultă aplicând (e) pentru mulţimea $M \cap N$.

(g) Fie $P = \{x \in M | f(x) \neq g(x)\}$, deci P este neglijabilă. Aplicând aditivitatea integralei pentru funcţia $f - g$ şi pentru $M = P \cup (M \setminus P)$, se obţine

$$\int_M (f-g) = \int_P (f-g) + \int_{M\setminus P} (f-g)$$

şi cum $f = g$ pe $M \setminus P$, iar

$$\int_P (f-g) = 0 \text{ conform (e), se obţine } \int_M (f-g) = 0, \text{ deci } \int_M f = \int_M g.$$

În încheierea acestui paragraf indicăm o clasă importantă de funcţii integrabile pe mulţimi mărginite măsurabile. Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ o astfel de mulţime. O funcţie $f : M \to \mathbb{R}$ se numeşte **măsurabilă pe** M dacă pentru orice $a \in \mathbb{R}$, submulţimea $\{x \in M | f(x) > a\}$ este măsurabilă.

Teorema 1.7. *Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită măsurabilă şi $f : M \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită.*

(a) *Dacă f este măsurabilă pe M, atunci f este integrabilă pe M;*

(b) *Dacă M este continuă pe mulţimea M, atunci f este integrabilă pe M.*

Demonstraţie. a) Ne situăm mai întâi în cazul când $f \geq 0$. În acest caz, avem

$$\{x \in \mathbb{R}^n | f_M(x) > a\} = \begin{cases} \{x \in M | f(x) > a\} & \text{dacă} \quad a \geq 0 \\ \mathbb{R}^n & \text{dacă} \quad a < 0, \end{cases}$$

deci funcţia f_M este măsurabilă, fiind nulă în afara lui M. Conform teoremei 1.5, rezultă că f_M este integrabilă pe $\mathbb{R}^n$, adică f este integrabilă pe M (conform definiţiei 1.4). Presupunând acum că f poate lua valori negative pe M, din mărginirea lui f pe M, rezultă că funcţia mărginită $h = f + ||f||$ este pozitivă şi în plus, h este măsurabilă (ca suma unei funcţii măsurabile cu o constantă), deci h este integrabilă pe M conform cazului tratat anterior. Aşadar, f rezultă integrabilă pe M.

b) Cum f este continuă, rezultă că $(\forall) a \in \mathbb{R}$, mulţimea $D_a = \{x \in \mathbb{R} | f(x) > a\} = f^{-1}((a, \infty))$ este deschisă, conform teoremei III 2.2. (a), deci este măsurabilă (conform III 3.2 (a) şi aceeaşi proprietate o are mulţimea $M \cap D_a = \{x \in M | f(x) > a\}$. Aşadar, f este măsurabilă pe M şi se poate aplica punctul a).

Corolar 1. *Orice funcţie $f : K \to \mathbb{R}$ continuă pe o mulţime compactă $K \subset \mathbb{R}^n$ este integrabilă pe K.*

Acest fapt rezultă direct din punctul b) al teoremei anerioare, folosind III. 2.10.

Corolar 2. *Orice funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe porţiuni este integrabilă; de asemenea, orice funcţie monotonă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă.*

Demonstraţie. În ambele cazuri, funcţia este mărginită şi măsurabilă iar mulţimea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ este măsurabilă şi se poate aplica teorema 1.7. De asemenea, se putea observa că în ambele cazuri funcţia f coincide a.p. cu o funcţie continuă. (Reamintim că f este continuă pe porţiuni dacă este continuă pe subintervalele deschise ale unei diviziuni şi are cel mult discontinuităţi de speţa I).

4.1.4 Integrale improprii şi teoreme de convergenţă

Am definit până acum un concept de integrală pentru funcţii mărginite pe mulţimi mărginite. Renunţând la câte una din aceste condiţii de mărginire (sau la amândouă) se obţin integrale improprii sau generalizate. Înainte de a preciza aceste extinderi, este util să dăm câteva proprietăţi ale funcţiilor măsurabile. Fixăm $p \geq 1$. O funcţie $f : \mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$ (luând eventual valorile $-\infty, +\infty$) este, prin definiţie, *măsurabilă* dacă pentru orice număr real $a \in \mathbb{R}$, mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R}^p | f(x) > a\}$ este măsurabilă.

1°. *Dacă $f : \mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$ este măsurabilă şi $a \in \mathbb{R}$, atunci mulţimile*

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^p | f(x) \leq a\},\ A_2 = \{x \in \mathbb{R}^p | f(x) \geq a\},\ A_3 = \{x \in \mathbb{R}^p | f(x) < a\}$$

sunt măsurabile.

Într-adevăr, $A_1 = \complement A$, $A_2 = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left\{ f(x) > a - \dfrac{1}{k} \right\}$, $A_3 = \complement A_2$ şi folosim faptul că prin trecerea la complementară, la intersecţii şi reuniuni numărabile, proprietatea de măsurabilitate se conservă.

2°. *Dacă* $f, g : \mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$ *sunt funcţii măsurabile, atunci funcţiile* $u = \max(f, g)$, $v = \min(f, g)$ *sunt de asemenea măsurabile.*

Este suficient de observat că $(\forall) a \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in \mathbb{R}^p | u(x) > a\} = \{x \in \mathbb{R}^p | f(x) > a\} \cup \{x \in \mathbb{R}^p | g(x) > a\}.$$

Apoi folosind 1°, rezultă că $-f, -g$ sunt măsurabile, deci $v = -\max(-f, -g)$ este funcţie măsurabilă.

3°. *Dacă* $\{f_n\}_{n \geq 0}$ *este un şir de funcţii măsurabile* $\mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$, *atunci funcţiile* $\varphi_1 = \sup\limits_{n \geq 0} f_n$, $\varphi_2 = \inf\limits_{n \geq 0} f_n$, $\liminf f_n \triangleq \sup\limits_{k \geq 0} \inf\limits_{n \geq k} f_n$, $\limsup f_n \triangleq \inf\limits_{k \geq 0} \sup\limits_{n \geq k} f_n$ *sunt măsurabile.*

Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem

$$\{x \in \mathbb{R}^p | \varphi_1(x) > a\} = \bigcup_{k \geq 0} \{x \in \mathbb{R}^p | f_k(x) > a\}$$

şi o reuniune numărabilă de mulţimi măsurabile este măsurabilă; apoi

$$\varphi_2 = -\sup_{n \geq 0}(-f_n) \quad \text{etc.}$$

4°. *Dacă* $\{f_n\}_{n \geq 0}$ *este un şir de funcţii măsurabile* $\mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$ *şi dacă* $f_n \xrightarrow{PC} f$, *atunci funcţia limită* f *este măsurabilă.*

Este suficient de notat că $f = \liminf f_n = \limsup f_n$.

Definiţia 1.7. *Fie* $f : \mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$ *o funcţie mărginită, măsurabilă şi pozitivă. Funcţia* f *se numeşte* **integrabilă pe** $\mathbb{R}^p$ *dacă există în* $\mathbb{R}$ *limita*

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{B_\rho} f.$$

Conform teoremei 1.7 a), funcţia f restrânsă la bila închisă $B_\rho \subset \mathbb{R}^p$, centrată în origine şi de rază $\rho > 0$, este integrabilă, oricare ar fi $\rho > 0$ şi integrala $\int_{B_\rho} f$ creşte odată cu ρ. Limita anterioară se notează cu

$$\int_{\mathbb{R}^p} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \quad \text{sau} \quad \int_{\mathbb{R}^p} f \text{ sau mai simplu } \int f$$

şi se numeşte **integrala improprie a lui f pe spaţiul** $\mathbb{R}^p$. Este evident că dacă $f, g : \mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$, $0 \leq f \leq g$, g fiind mărginită şi dacă g este integrabilă pe $\mathbb{R}^p$, atunci f este de asemenea integrabilă pe $\mathbb{R}^p$ şi

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^p} f \leq \int_{\mathbb{R}^p} g. \tag{7}$$

Dacă limita anterioară este ∞, atunci se mai scrie că

$$\int_{\mathbb{R}^p} f = \infty \text{ (dar în acest caz funcţia } f \text{ nu se consideră integrabilă pe } \mathbb{R}^p).$$

În cazul $p = 1$, se obţine

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{\rho \to \infty} \int_{-\rho}^{\rho} f(x) \mathrm{d}x \text{ (în sensul valorii principale Cauchy).}$$

De exemplu,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 1}\, \mathrm{d}x = \lim_{\rho \to \infty} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{x^2 + 1}\, \mathrm{d}x = \lim_{\rho \to \infty} (\operatorname{arctg} \rho - \operatorname{arctg}(-\rho)) = \pi.$$

Definiţia 1.8. *Fie $f : \mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$ o funcţie măsurabilă, pozitivă, nu neapărat mărginită. Pentru orice $\lambda > 0$ se consideră funcţia mărginită, pozitivă şi în plus măsurabilă (conform proprietăţii 2°)*

$$f_\lambda : \mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}, \text{ definită prin } f_\lambda = \min(f, \lambda),$$

adică

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă} \quad f(x) \le \lambda \\ \lambda & \text{dacă} \quad f(x) > \lambda. \end{cases}$$

Se spune că f **este integrabilă pe spaţiul** *$\mathbb{R}^p$ dacă există în $\mathbb{R}$ limita*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int f_\lambda, \quad \text{notată} \int_{\mathbb{R}^p} f \quad \text{sau simplu} \int f \tag{8}$$

(evident, $\displaystyle\int f_\lambda$ creşte odată cu λ). Se regăseşte şi în acest caz (7); mai precis, dacă $0 \le f \le g$ sunt funcţii măsurabile, atunci $f_\lambda \le g_\lambda$, $(\forall)\lambda > 0$ şi dacă g este integrabilă pe $\mathbb{R}^p$, atunci aceeaşi proprietate o are f şi are loc relaţia (7).

Facem de asemenea observaţia că dacă limita (8) este ∞ se mai scrie

$$\int_{\mathbb{R}^p} f = \infty \text{ (fără a considera de aici că } f \text{ este integrabilă pe } \mathbb{R}^p).$$

Dacă f este integrabilă pe $\mathbb{R}^p$ se mai spune uneori că integrala improprie

$$\int_{\mathbb{R}^p} f \quad \text{este convergentă.}$$

Exemplu. Luăm $p = 1$ şi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{dacă} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Aşadar, f este măsurabilă, pozitivă şi

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\frac{1}{\lambda}\sqrt{\lambda^2-1}}^{\frac{1}{\lambda}\sqrt{\lambda^2-1}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} \left(2 \arcsin \frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda}\right) = 2 \arcsin 1 = \pi.$$

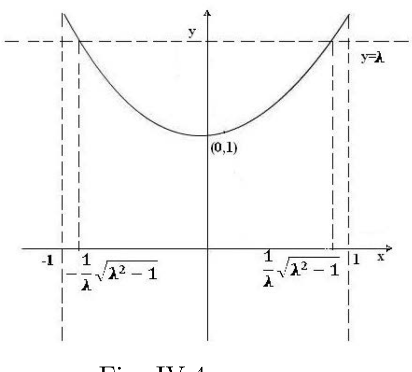


Fig. IV.4

În definiţia 1.8, dacă f este mărginită, avem compatibilitate cu definiţia 1.7, deoarece atunci $f_\lambda = f$ pentru orice $\lambda > M$ (unde $M = ||f||$), deci limita (8) coincide cu $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p} f$. Dacă în plus funcţia f are suport compact, atunci integrala $\displaystyle\int_{B_\rho} f$ este aceeaşi pentru orice $\rho > 0$ suficient de mare şi la limită, se regăseşte definiţia 1.6.

Până acum am considerat numai funcţii pozitive. Extindem acum conceptul de integrabilitate pentru funcţii nu neapărat cu semn constant.

Definiţia 1.9. *O funcţie măsurabilă $f : \mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$ se numeşte* **integrabilă** *dacă funcţiile pozitive*

$$f_+ = \max(f, 0), \quad f_- = \max(-f, 0)$$

sunt integrabile (în sensul definiţiilor 1.7 sau 1.8).

Este evident că $(\forall)x \in \mathbb{R}^p$, avem $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ şi $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$, deci $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$.

Dacă f este integrabilă, atunci se defineşte

$$\int f \triangleq \int f_+ - \int f_- \,. \tag{9}$$

Dacă f este mărginită cu suport compact ($f \in \mathcal{M}_c$) atunci f_+ , f_- au aceeaşi proprietate şi aplicând teorema 1.4 (a), se obţine o compatibilitate cu definiţia 1.4.

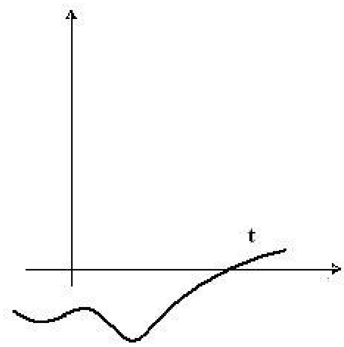


Fig. IV.5a

Un rezultat important în teoria integralei Lebesgue îl constituie

Teorema 1.8 (teorema lui BEPPO LEVI, 1875-1961, a convergenţei monotone). *Fie $0 \le f_0 \le f_1 \ldots$ un şir ascendent de funcţii măsurabile pozitive $\mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$, punctual convergent pe $\mathbb{R}^p$. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int (\lim_{n\to\infty} f_n) \quad \text{(integralele fiind luate pe } \mathbb{R}^p). \tag{10}$$

Demonstraţia este tehnică şi o omitem.

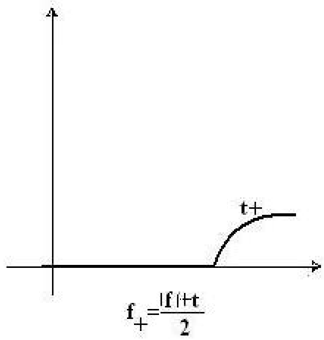


Fig. IV.5b

Corolar 1. *Fie $f : \mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}^p}$ o funcţie pozitivă integrabilă (în sensul definiţiei 1.8) şi $\{f_n\}_{n\ge 0}$ şirul de funcţii măsurabile pozitive definite prin*

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{dacă } f(x) \ge n \text{ şi } ||x|| \le n \\ 0 & \text{dacă } ||x|| > n \\ f(x) & \text{în rest.} \end{cases}$$

Atunci

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demonstraţie. Este suficient să observăm că $0 \le f_0 \le f_1 \le \ldots$, că $f_n \xrightarrow{PC} f$ pe $\mathbb{R}^p$ şi să aplicăm teorema 1.8.

Dăm şi proprietatea de liniaritate a integralei pentru integrale improprii, pentru funcţii integrabile în sensul definiţiei 1.9.

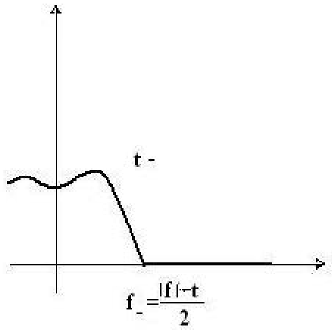


Fig. IV.5c

Corolar 2. *Dacă $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sunt funcţii integrabile, atunci funcţiile $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$ constant) sunt integrabile şi în plus,*

$$\int (f+g) = \int f + \int g, \quad \int (\lambda f) = \lambda \int f.$$

Corolar 3. *O funcţie $f : \mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$ este integrabilă dacă şi numai dacă $|f|$ este integrabilă.*

Demonstraţie. Dacă f este integrabilă, atunci f_+ şi f_- sunt integrabile, deci $|f| = f_+ + f_-$ este integrabilă conform corolarului 2. Reciproc, dacă $|f|$ este integrabilă, atunci cum $0 \le f_+ \le |f|$ şi $0 \le f_- \le |f|$, rezultă că f_+ şi f_- sunt integrabile conform (14), deci f este integrabilă conform definiţiei 1.9.

Corolar 4 (criteriu de comparaţie). *Dacă $f, g : \mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$ sunt funcţii măsurabile şi au proprietatea că $|f| \le g$, iar g este inetegrabilă, atunci f este integrabilă.*

Demonstraţie. Se aplică corolarul 3 şi relaţia (7).

Exemplu. Luăm $p = 1$, $f(x) = e^{-x^2}$ şi

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{dacă} \quad x \in (-\infty, 0) \\ e^{-x} & \text{dacă} \quad x \in (1, \infty) \\ 1 & \text{dacă} \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Evident, $0 \le f(x) \le g(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ şi în plus,

$$\int g = \int_{-\infty}^{0} e^x \mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}x + \int_1^{\infty} e^{-x} \mathrm{d}x = 2 + \frac{1}{e},$$

deci funcţia f este integrabilă pe $\mathbb{R}$. Aşadar, integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$$

este convergentă.

Corolar 5. *Fie $f_0 \geq f_1 \geq f_2 \leq \ldots \geq 0$ un şir descendent de funcţii măsurabile pozitive $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, punctual convergent pe $\mathbb{R}^p$. Dacă în plus f_0 este integrabilă, atunci are loc relaţia (10).*

Demonstraţie. Notăm $h_n = f_0 - f_n$, $(\forall) n \geq 0$. Aşadar, notând $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = f_0 - f$. Dar $0 \leq h_0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots$ şi aplicând relaţia (10) din teorema 1.8, se obţine

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n = \int \left(\lim_{n\to\infty} h_n\right),$$

adică

$$\int f_0 - \lim_{n\to\infty} \int f_n = \int (f_0 - \lim_{n\to\infty} f_n) = \int f_0 - \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Deoarece f_0 este integrabilă, rezultă că $\int f_0$ este un număr real şi scăzându-l din cei doi membri, se obţine relaţia (10).

Observaţie. Teorema 1.8 şi corolarul 5 se pot enunţa spunând că pentru şiruri monotone de funcţii măsurabile pozitive, luarea integralei comută cu limitele punctuale. Condiţia de pozitivitate poate fi înlocuită prin cea de mărginire la stânga printr-o funcţie integrabilă.

Condiţii mai generale în care are loc relaţia (10) sunt cuprinse în teorema care urmează.

Teorema 1.9 (teorema lui Lebesgue a convergenţei dominate). *Fie $\{f_n\}_{n\geq 0}$ un şir punctual convergent de funcţii măsurabile $\mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$, egal mărginite de o funcţie integrabilă. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right).$$

Exemplu. Condiţia ca funcţiile din teorema 1.9 să fie egal mărginite de o funcţie integrabilă este esenţială. De exemplu, presupunem $p = 1$ şi fie $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}$, $n \geq 1$, adică

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dacă } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases}, n \geq 1.$$

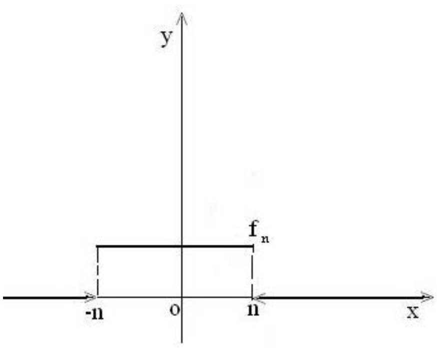


Fig. IV.6

Şirul $\{f_n\}_{n\geq 0}$ este PC pe $\mathbb{R}$, către funcţia $f = 0$, deci $\int \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right) = 0$. Pe de altă parte,

$$\int f_n = \int_{-n}^{n} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-n}^{n} \frac{1}{n}\mathrm{d}x = 2, \ (\forall) n \geq 1$$

şi ca atare, egalitatea (10) nu are loc şi teorema 1.9 nu se aplică. Se observă că funcţiile $\{f_n\}$ nu sunt egal mărginite de nici o funcţie integrabilă pe $\mathbb{R}$.

Demonstraţiile teoremelor antrioare se pot găsi în [5] sau [12].

Definiţia 1.10. *Fie $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime măsurabilă. O funcţie $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ se numeşte* **măsurabilă pe** *M dacă $(\forall) a \in \mathbb{R}$, mulţimea $\{x \in M | f(x) > a\}$ este măsurabilă. În acest caz, se poate defini funcţia $f_M : \mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$ prin*

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă} \quad x \in M \\ 0 & \text{dacă} \quad x \notin M \end{cases}, \text{deci } f_M = f \cdot \chi_M.$$

Funcţia f se numeşte **integrabilă pe** M *dacă* f_M *este integrabilă (definiţia 1.9); în acest caz, se notează* $\displaystyle\int_M f \triangleq \int f_M$.

Dacă f şi g sunt integrabile pe M şi $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci $f+g$, λf sunt integrabile pe M; se extind şi alte proprietăţi ale integralei pe mulţimi măsurabile (teorema 1.6). De asemenea, teoremele 1.8 şi 1.9 ca şi corolariile lor se extind fără dificultate.

În cele ce urmează, ne limităm la cazul $p = 1$ şi dăm câteva criterii de convergenţă a integralelor improprii.

Lemă. *Fie α un număr real fixat.*

a) *Integrala*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.

b) *Integrala*

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha},\ a < b$$

este convergentă dacă şi numai dacă $0 < \alpha < 1$.

Demonstraţie. a) Luăm $M = [1, \infty)$; aplicând definiţia, avem

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha},\ f_M(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha} & \text{dacă} \quad x \in M \\ 0 & \text{dacă} \quad x \notin M \end{cases}$$

deci

$$\int_M \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \lim_{\rho\to\infty} \int_1^\rho \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\rho\to\infty} (\rho^{1-\alpha} - 1)$$

şi această limită există în $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.

b) Se procedează similar.

Teorema 1.10. *Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie pozitivă integrabilă şi există în $\mathbb{R}$ limita*

$$l = \lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x), \quad \text{cu } \alpha \in \mathbb{R} \text{ convenabil.}$$

Dacă $\alpha > 1$ atunci integrala improprie

$$\int_a^\infty f \quad \text{este convergentă,}$$

iar dacă $\alpha \le 1$ şi $l \neq 0$, atunci aceeaşi integrală improprie nu este convergentă.

În particular, dacă $\displaystyle\int_a^\infty fC$, *atunci* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Demonstraţie. Putem presupune $a > 0$ de la început şi fie $\alpha > 1$. Alegem $\delta > a$ astfel încât $x^\alpha f(x) < l+1$, $(\forall) x > \delta$, deci $f(x) < \dfrac{l+1}{x^\alpha}$ pe intervalul $[\delta, \infty)$ şi aplicăm lema a) şi criteriul de comparaţie (corolarul 4 al teoremei 1.8); rezultă că integralele $\displaystyle\int_\delta^\infty f$, deci $\displaystyle\int_a^\infty f$ sunt convergente. Fie acum $\alpha \le 1$ şi $l \neq 0$, deci $l > 0$. Atunci se poate alege $\varepsilon > 0$ astfel încât $l - \varepsilon > 0$ şi atunci există δ astfel încât $x^\alpha f(x) > l - \varepsilon$ pentru orice $x > \delta$. Aşadar, $f(x) > \dfrac{l-\varepsilon}{x^\alpha}$ şi dacă $\displaystyle\int_a^\infty f$ ar fi convergentă, ar rezulta că $\displaystyle\int_a^\infty \frac{l-\varepsilon}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ este convergentă, ceea ce contravine lemei, a).

Teorema 1.11. *Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă şi pozitivă.*

a) *Dacă g este o altă funcţie pozitivă şi integrabilă pe $[a, b)$ şi în plus limita*

$$l = \lim_{x\to b,\, x<b} \frac{f(x)}{g(x)}$$

există, finită şi nenulă, atunci integralele $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ *sunt simultan convergente.*

b) *Alegem* α *astfel încât* $\lim_{x\to b,\, x<b} (b-x)^\alpha f(x)$ *să existe în* $\mathbb{R}$ *şi să fie nenulă.*

Dacă $\alpha < 1$, *atunci* $\int_a^b f$ *este convergentă, iar dacă* $\alpha \geq 1$, *atunci aceeaşi integrală nu este convergentă.*

Demonstraţie. a) Aşadar $l > 0$ şi ca atare, există $B < b$ astfel încât $(\forall)x \in [B, b)$, să avem

$$\frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3l}{2}.$$

Atunci au loc inegalităţile $0 \leq f < \frac{3l}{2} g$, $0 \leq g < \frac{2}{l} f$ şi se aplică corolarul 4 anterior.

b) Rezultă din punctul a) luând $g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ şi aplicând lema, b).

Observaţie. Un rezultat similar se probează în cazul intervalelor $(a, b]$, (a, b) unde a şi b aparţin lui $\bar{\mathbb{R}}$.

Exemple. 1) Dacă P şi Q sunt polinoame cu coeficienţi reali astfel încât Q nu se anulează pe intervalul $[a, \infty)$, atunci integrala

$$\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x$$

este convergentă dacă şi numai dacă $\mathrm{gr}\, Q - \mathrm{gr}\, P \geq 2$.

2) Integrala $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$ este convergentă, deoarece $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ este convergentă (cu valoarea 2) şi se aplică analogul teoremei 1.11 a) pentru intervalul $(0, 1]$.

În capitolul V vom da exemple de integrale multiple improprii. Ne oprim aici cu expunerea rezultatelor principale ale integrabilităţii Lebesgue, pentru redactarea căreia am utilizat lucrările [5], [6], [9], [12].

4.1.5 Exerciţii

1. Să se arate că funcţia

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 10 & \text{dacă} \quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 3 & \text{dacă} \quad 0 \leq x \leq 1,\ 1 < y \leq 3 \\ 0 & \text{dacă} \end{cases}$$

este o funcţie în scară pe $\mathbb{R}^2$ şi să se calculeze $I(\varphi)$.

2. Fie funcţia reală f definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{dacă} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se indice funcţii în scară $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $\varphi \leq f \leq \psi$ şi $I(\psi) - I(\varphi) < \frac{1}{2}$.

3. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime mărginită. Ea se numeşte *măsurabilă Jordan* dacă funcţia caracteristică χ_A este integrabilă Riemann. Să se arate că dacă Fr A este neglijabilă, atunci A este măsurabilă Jordan şi reciproc, iar dacă mulţimile mărginite A_1, A_2 sunt măsurabile Jordan, atunci $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cup A_2$ au aceeaşi proprietate.

4. Fie $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime mărginită şi măsurabilă astfel încât Fr M să fie neglijabilă. Dacă $f : M \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe M, atunci

$$\int_M f = \int_{\overset{\circ}{M}} f = \int_{\bar{M}} f.$$

5. Să se dea de o funcţie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabilă, care nu este continuă pe porţiuni şi nici monotonă.

Indicaţie. Se poate lua $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ dacă $0 < x \leq 1$, $f(0) = 0$.

6. a) Dacă $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este integrabilă (conform definiţiei 1.9) şi dacă $f = g$ a.p. să se arate că g este integrabilă şi că

$$\int g = \int f.$$

b) Dacă $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este o funcţie pozitivă, integrabilă şi dacă $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p} f = 0$, să se arate că $f = 0$ a.p.

7. Dacă $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sunt funcţii integrabile (în sensul definiţiei 1.9), să se arate că $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ sunt de asemenea integrabile.

Indicaţie. $\max(f,g) = \dfrac{1}{2}(f+g+|f+g|)$, $\min(f,g) = \dfrac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ etc.

8. Să se extindă teoremele 1.8 şi 1.9 la serii punctual convergente de funcţii măsurabile.

9. Se consideră şirul de funcţii $f_n : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ definite prin $f_n(x) = \dfrac{n}{x^2+n^2}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcţiile f_n sunt mărginite, $f_n \xrightarrow{PC} 0$ şi totuşi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \neq 0$. Este contrazisă teorema 1.9 ?

10. Să se decidă convergenţa integralelor improprii $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-\infty}^1 xe^{2x}\mathrm{d}x$,

$$\int_2^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x,\ \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)},\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{0,99}},\ \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{1,01}}.$$

11. Integralele

$$\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}t}{t},\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

nu sunt convergente şi totuşi $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|\Big|_{-1}^1 = 0$. Unde este greşeala ?

12. Să se arate că dacă $x \in [0,1]$, atunci $1 - \cos x \leq \dfrac{x}{2} \leq 3\,\mathrm{arctg}\,x$ şi dacă $x \in [1,\infty)$, atunci $1 - \cos x \leq 2 \leq 3\,\mathrm{arctg}\,x$ şi să se deducă inegalitatea

$$\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{3}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \quad (\forall) x \geq 0.$$

Totuşi, considerând integralele improprii

$$\int_0^\infty \frac{3}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\ \int_0^\infty \sin t\,\mathrm{d}t,$$

prima este convergentă şi cea de-a doua nu. Se contravine corolarului 4 al teoremei 1.8 ?

13. Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ o funcţie cu valori complexe astfel încât $u = \mathrm{Re}\,f$, $v = \mathrm{Im}\,f$ să fie integrabile; atunci se defineşte $\displaystyle\int_0^\infty f \triangleq \int_0^\infty u + i\int_0^\infty v$. Să se arate că dacă integrala $\displaystyle\int_0^\infty |f|$ este convergentă, atunci $\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{i\lambda\, t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ are aceeaşi proprietate. Calculaţi

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+ix)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad \int_0^\infty \frac{1}{|1+ix|^2}\,ddx.$$

14. Fie $f(x) = 2x\cos x^3 - \dfrac{\sin x^3}{x^2}$, $(\forall)x \geq 1$. Să se arate că integrala

$$\int_1^\infty f \quad \text{este convergentă, dar } \lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$$

(deci la integrale improprii nu se extinde criteriul necesar de convergenţă de la serii !).

15. Fie funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{dacă} \quad x \in \left[n, n + \dfrac{1}{n^2}\right] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se arate că deşi f este nemărginită, totuşi integrala $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

4.2 Integrala Stieltjes

4.2.1 Funcţii cu variaţie mărginită

Fixăm un interval $[a, b]$ pe dreapta reală şi o funcţie mărginită $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ cu valori vectoriale. Pentru orice diviziune $\Delta : a = x_0 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ a intervalului $[a, b]$ considerăm numărul real

$$V_\Delta(f) = \sum_{k=1}^n ||f(x_k) - f(x_{k-1})||.$$

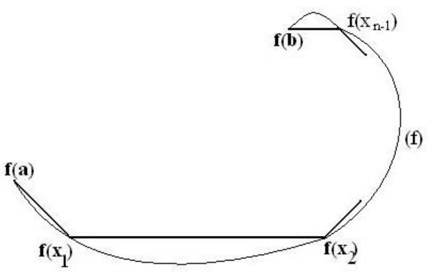


Fig. IV.7

Interpretare geometrică. Dacă $p = 2$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ este un drum parametrizat cu urma (f), atunci $V_\Delta(f)$ reprezintă lungimea liniei poligonale de vârfuri $f(a), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1}), f(b)$, situate pe (f) (fig. IV. 7).

Definiţia 2.1. *Funcţia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ *se numeşte* **cu variaţie mărginită pe intervalul** $[a, b]$ *dacă există un număr real* $M > 0$ *astfel încât* $V_\Delta(f) \leq M$, *pentru orice diviziune* Δ *a lui* $[a, b]$. *În acest caz, numărul real*

$$V_a^b f = \sup_\Delta V_\Delta(f)$$

se numeşte **variaţia lui** f **pe intervalul** $[a, b]$.

Dacă $f_1, \ldots, f_p$ sunt componentele funcţiei f, atunci se verifică uşor că $V_\Delta(f_i) \leq V_\Delta(f) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^p V_\Delta(f_i)$, $1 \leq i \leq p$, deci f este cu variaţie mărginită dacă şi numai dacă $f_1, \ldots, f_p$ sunt funcţii $[a, b] \to \mathbb{R}$ cu variaţie mărginită.

Exemple. 1) Orice funcţie monotonă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este cu variaţie mărginită. Presupunem de exemplu că f este crescătoare. Atunci pentru orice diviziune Δ ca mai sus avem

$$V_\Delta(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a)$$

şi ca atare, $V_a^b f = f(b) - f(a)$.

Se poate demonstra că orice funcţie cu variaţie mărginită $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se poate reprezenta ca diferenţă a două funcţii monoton cescătoare (teorema lui Jordan); [12].

2) Orice funcţie lipschitziană $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ (conform definiţiei III 2.4) este cu variaţie mărginită. Într-adevăr, prin ipoteză există $C > 0$ astfel încât $||f(x) - f(y)|| \leq C \cdot |x - y|$, pentru orice $x, y \in [a, b]$. De aici se deduce imediat că $V_\Delta(f) \leq C(b - a)$ pentru orice divizune Δ a lui $[a, b]$.

În particular, orice funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ de clasă C^1 este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$. În acest caz, variaţia lui f pe $[a, b]$ se mai numeşte **lungimea urmei drumului** (f), ceea ce corespunde intuiţiei noastre.

Se verifică imediat că dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ sunt funcţii cu variaţie mărginită şi $\lambda \in \mathbb{R}$ este o constantă, atunci $f + g$, λf au aceeaşi proprietate. De asemenea se poate verifica relaţia de aditivitate a variaţiei: $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$ pentru orice funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ cu variaţie mărginită şi pentru orice $a \le c \le b$.

4.2.2 Aplicaţii ale integralelor simple

Stabilim acum o teoremă utilă în aplicaţiile integralei simple, care în particular va lega conceptul de variaţie a unei funcţii de cel de lungime a unui drum. Această teoremă justifică preceptul după care "orice mărime geometrică sau fizică, aditivă ca funcţie de domeniu, se exprimă printr-o integrală". Sensul exact al acestei afirmaţii este dat în cadrul teoriei măsurii.

Teorema 2.1. *Fie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât pentru orice subinterval $J = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ să se poată asocia un număr real $\varphi(J)$ astfel încât*

$$m_J \le \frac{\varphi(J)}{\beta - \alpha} \le M_J, \tag{11}$$

unde $m_J = \inf_J g$, $M_J = \sup_J g$ şi pentru orice γ, $\alpha \le \gamma \le \beta$, să avem

$$\varphi(J) = \varphi(J_1) + \varphi(J_2), \quad \text{unde} \quad J_1 = [\alpha, \gamma],\ J_2 = [\gamma, \beta]. \tag{12}$$

Atunci pentru orice $J = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ are loc formula

$$\varphi(J) = \int_\alpha^\beta g. \tag{13}$$

Demonstraţie. Ştim deja că asocierea $J \mapsto \int_\alpha^\beta g$ are proprietăţile (11), (12) şi trebuie arătat că orice funcţie φ cu proprietăţile (11), (12) coincide cu luarea integralei. Fie $J = [\alpha, \beta]$; pentru orice $x \in J$ notăm

$$p(x) = \varphi([\alpha, x]) \quad \text{şi} \quad q(x) = \int_\alpha^x g.$$

Evident, pentru orice $x_0 \in J$, $x \in J$, $x \neq x_0$, avem (presupunând $x_0 < x$)

$$m_J \le m_{J'} \le \frac{\varphi([x_0, x])}{x - x_0} \le M_{J'} \le M_J, \quad \text{unde} \quad J' = [x_0, x] \subset J.$$

Deoarece

$$\frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0} = \frac{\varphi([\alpha, x]) - \varphi([\alpha, x_0])}{x - x_0} \overset{cf.(25)}{=} \frac{\varphi([x_0, x])}{x - x_0},$$

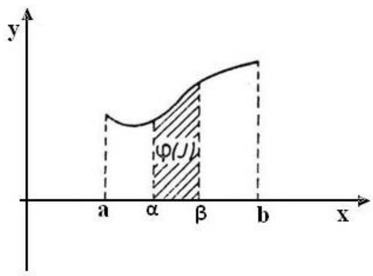


Fig. IV.8

atunci făcând $x \to x_0$ şi ţinând cont că g este continuă, rezultă că p este derivabilă în x_0 şi $p'(x_0) = g(x_0)$.

Pe de altă parte, q este derivabilă în x_0 şi $q'(x_0) = g(x_0)$, deci $p' = q'$ pe $[\alpha, \beta]$, adică $p - q = k$, constant pe $[\alpha, \beta]$. Dar $p(\alpha) = q(\alpha) = 0$ şi atunci rezultă $p = q$, în particular $p(\beta) = q(\beta)$, adică tocmai relaţia (13).

Corolar 1 (aria subgraficelor). *Fie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi pozitivă. Pentru orice subinterval $J = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$, notăm $\varphi(J) =$ aria subgraficului $\{\alpha \le x \le \beta, 0 \le y \le g(x)\}$ (în sens intuitiv). Atunci*

$$\varphi(J) = \int_\alpha^\beta g(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Conform teoremei 2.1 este suficient de observat că $\varphi(J)$ verifică condiţiile (11), (12) adică $(\beta-\alpha)m_J \le \varphi(J) \le (\beta-\alpha)M_J$ şi aditivitatea ariei, ceea ce este evident.

Corolar 2 (volume de rotaţie). *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi pozitivă. Pentru orice subinterval $J = [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ notăm $\varphi(J) =$ volumul de rotaţie în jurul lui Ox generat de subgraficul $\{\alpha \le x \le \beta, 0 \le y \le f(x)\}$,* **în sens intuitiv***. Atunci*

$$\varphi(J) = \pi \int_\alpha^\beta f(x)^2 \mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $g = \pi f^2$; evident, φ satisface (12) (adică aditivitatea volumului) şi pe de altă parte, notând $m_J = \inf\limits_J f$, $M_j = \sup\limits_J f$, rezultă evident inegalităţile $\pi m_J^2(\beta-\alpha) \le \varphi(J) \le \pi M_J^2(\beta-\alpha)$, adică se verifică şi condiţia (11). Atunci se poate aplica teorema 2.1 funcţiei g şi corolarul rezultă (trebuie remarcat că am considerat ca definit în prealabil volumul cilindrelor circulari drepţi). Similar:

Corolar 3 (lungimea drumurilor). *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ un drum parametrizat de clasă C^1. Pentru orice subinterval $J = [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ notăm $\varphi(J) =$ lungimea urmei drumului $f|J$, adică $\varphi(J) = V_\alpha^\beta f$. Atunci*

$$\varphi(J) = \int_\alpha^\beta ||f'|| = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt, \tag{14}$$

unde x, y sunt componentele lui f, adică $f(t) = (x(t), y(t))$, $(\forall) t \in [a,b]$.

Se poate demonstra un rezultat similar pentru drumuri în $\mathbb{R}^3$. Anume, dacă

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]$$

este un drum parametrizat de clasă $C^1_{[a,b]}$, atunci lungimea urmei acestui drum (numită şi lungimea arcului de curbă corespunzător) este

$$s_\gamma = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, \mathrm{d}t. \tag{15}$$

Se verifică imediat că două drumuri parametrizate echivalente au aceeaşi lungime, rezultat firesc.

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă $C^1_{[a,b]}$, atunci graficul lui f coincide cu urma drumului cu ecuaţiile parametrice

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b];$$

avem $x'(t) = 1$, $y'(t) = f'(t)$ şi formula (14) devine în acest caz

$$s_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x.$$

Exemple. 1) Circumferinţa cu centrul în origine, de rază $R > 0$, parcursă o singură dată, are reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

deci lungimea ei va fi

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\, \mathrm{d}t = 2\pi R.$$

În mod similar, bucla de cicloidă $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $R > 0$ are lungimea

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t = R \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, \mathrm{d}t =$$

$$= 2R \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t = -4R \cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8R.$$

2) Dacă $\rho = \rho(\theta)$, $\theta_0 \le \theta \le \theta_1$ este ecuaţia unei curbe plane în coordonate polare, atunci această curbă poate fi parametrizată punând $x = \rho(\theta) \cos \theta$, $y = \rho(\theta) \sin \theta$; se obţine $x'(\theta) = \rho' \cos \theta - \rho \sin \theta$, $y'(\theta) = \rho' \sin \theta + \rho \cos \theta$ şi $x'(\theta)^2 + y'(\theta^2) = \rho^2 + \rho'^2$ deci lungimea arcului corespunzător va fi

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, \mathrm{d}\theta.$$

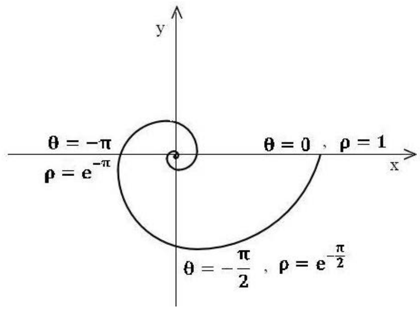


Fig. IV.9

De exemplu, "spirala logaritmică" $\rho = e^\theta$, $k \le \theta \le 0$ are lungimea

$$s = \int_k^0 \sqrt{e^{2\theta} + e^{2\theta}}\, \mathrm{d}\theta = \sqrt{2}(1 - e^k).$$

Pentru $k \to -\infty$, această lungime este finită, un rezultat ciudat la prima vedere.

4.2.3 Integrala Stieltjes în raport cu o funcţie crescătoare

Fixăm o funcţie monoton crescătoare $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, neconstantă şi o funcţie mărginită $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Fie $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ şi $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $1 \le i \le n$. Se pot atunci considera sumele Stieltjes-Darboux

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^n m_i [g(x_i) - g(x_{i-1})], \quad S_\Delta = \sum_{i=1}^n M_i [g(x_i) - g(x_{i-1})].$$

Este evident că $s_\Delta \le S_\Delta$ pentru orice diviziune Δ a lui $[a, b]$ şi în plus, oricare ar fi altă diviziune Δ' a intervalului $[a, b]$, avem $s_\Delta \le S'_\Delta$. De aici rezultă

$$\sup_\Delta s_\Delta \le \inf_\Delta S_\Delta. \tag{16}$$

Definiţia 2.2. *Funcţia f se numeşte* **integrabilă Stieltjes în raport cu g pe intervalul** $[a, b]$ *dacă inegalitatea (16) este egalitate, valoarea comună acelor doi membri notându-se*

$$\int_a^b f\, \mathrm{d}g \quad \text{(numită } \textbf{integrala Stieltjes a lui } f \textbf{ în raport cu } g\text{).}$$

Această noţiune extinde pe cea de integrală Riemann simplă, care se regăseşte luând $g(x) = x$ (inegalitatea (16) se probează exact ca în acest caz particular). Ideaa acestei extinderi a aparţinut matematicianului olandez T. STIELTJES (1856-1894). Integrala Stieltjes poate fi prezentată în condiţii mai generale, în sens Lebesgue.

Teorema 2.2. *Orice funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Stieltjes în raport cu g.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Conform teoremei III. 2. 12, există $\delta > 0$ astfel încât alegând o diviziune $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ cu toate lungimile intervalelor $x_i - x_{i-1}$ mai mici decât δ, să rezulte că $M_i - m_i < \dfrac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$ pentru orice i, $1 \le i \le n$. Atunci

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \le$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - g(x_{i-1})] = \varepsilon,$$

deci $0 \leq \inf\limits_{\Delta} S_\Delta - \sup\limits_{\Delta} s_\Delta < \varepsilon$, adică inegalitatea (16) devine egalitate şi ca atare, f rezultă integrabilă Stieltjes în raport cu g.

Fără dificultate se extind proprietăţile de liniaritate şi monotonie în condiţii lesne de descris:

$$\int_a^b (\lambda f_1 + \mu f_2)\mathrm{d}g = \lambda \int_a^b f_1 \mathrm{d}g + \mu \int_a^b f_2 \mathrm{d}g \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

$$\int_a^b f_1 \mathrm{d}g \leq \int_a^b f_2 \mathrm{d}g \quad \text{(de îndată ce } f_1 \leq f_2\text{)}.$$

De asemenea dacă g_1, g_2 sunt funcţii crescătoare şi f este integrabilă Stieltjes în raport cu g_1 şi g_2, atunci f este integrabilă Stieltjes în raport cu $g_1 + g_2$ şi în plus,

$$\int_a^b f\mathrm{d}(g_1 + g_2) = \int_a^b f\mathrm{d}g_1 + \int_a^v f\mathrm{d}g_2.$$

Dacă funcţia g ar fi constantă, atunci

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = 0, \quad \text{prin definiţie; de asemenea } \int_a^a f\mathrm{d}g = 0.$$

Exemple. 1) Dacă $f = k$ este o funcţie constantă, atunci

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = k[g(b) - g(a)].$$

2) Considerăm funcţia crescătoare $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & \text{dacă} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

şi fie $f = g$. Pentru *orice* diviziune $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2$ a intervalului $[0, 2]$, există p astfel încât $x_{p-1} < 1 \leq x_p$, deci $m_p = 0$, $M_p = 3$ şi ca atare, $S_\Delta - s_\Delta = 3[g(x_p) - g(x_{p-1})] = 9$, deci $\sup\limits_{\Delta} s_\Delta \neq \inf\limits_{\Delta} S_\Delta$, adică g nu este integrabilă Stieltjes în raport cu g.

Observaţie. Dacă $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie cu variaţie mărginită (definiţia 2.1), atunci există două funcţii crescătoare $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $G = g_1 - g_2$. O funcţie mărginită $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numeşte **integrabilă Stieltjes în raport cu** G dacă f este integrabilă Stieltjes în raport cu g_1 şi g_2 şi în plus, se pune

$$\int_a^b f\mathrm{d}G \triangleq \int_a^b f\mathrm{d}g_1 - \int_a^b f\mathrm{d}g_2.$$

Independenţa de reprezentarea lui G este imediată, căci dacă $G = h_1 - h_2$ cu h_1, h_2 crescătoare, şi dacă f este integrabilă Stieltjes în raport cu h_1, h_2 atunci $g_1 + h_2 = h_2 + h_1$ şi ca atare,

$$\int_a^b f\mathrm{d}g_1 + \int_a^b f\mathrm{d}h_2 = \int_a^b f\mathrm{d}g_2 + \int_a^b f\mathrm{d}h_1, \quad \text{deci}$$

$$\int_a^b f\mathrm{d}g_1 - \int_a^b f\mathrm{d}g_2 = \int_a^b f\mathrm{d}h_1 - \int_a^b f\mathrm{d}h_2.$$

Remarcăm în fine, fără a da demonstraţia, că dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, iar $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1 (deci g este cu variaţie mărginită), atunci

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x. \tag{17}$$

4.2.4 Exerciţii

1. Să se dea un exemplu de funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu variaţie mărginită, care nu este monotonă.

2. Să se arate că funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{\pi}{2x} & \text{dacă} \quad 0 < x \leq 1 \\ 3 & \text{dacă} \quad x = 0 \end{cases}$$

este continuă, dar nu are variaţie mărginită.

Indicaţie. Pentru orice întreg $N \geq 1$ se consideră diviziunea

$$\Delta : 0 = x_0 < \frac{1}{4N} < \frac{1}{4N - 1} < \ldots < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < x_{4N} = 1,$$

atunci

$$V_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{4N} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = 2 \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k}$$

şi cum N este arbitrar, rezultă că $\sup\limits_{\Delta} V_\Delta(f) = \infty$.

3. Să se calculeze lungimea arcului de parabolă $y = 1 + x^2$, $0 \leq x \leq 1$, ca şi lungimea urmelor drumurilor

$$\gamma_1 : [0, 2] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t, t^2),\ \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos 10t, \sin 10t).$$

4. Să se calculeze lungimea urmelor drumurilor

$$\bar{r}(t) = \cos t i + \sin t \bar{\jmath} + t \bar{k}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{şi}$$

$$\bar{r}(t) = t \cos t \bar{\imath} + t \sin t \bar{\jmath} + t \bar{k}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{şi}$$

(spaţiul $\mathbb{R}^3$ fiind identificat cu $\mathcal{V}_3$, relativ la un reper ortogonal $Oxyz$ de versori $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$).

5. Să se calculeze

$$\int_0^{2\pi} x \mathrm{d}g \quad \text{şi} \quad \int_0^{2\pi} \sin x \mathrm{d}g, \quad \text{unde} \quad g(x) = x^2, \quad (\forall) x \in [0, 2\pi].$$

6. Să se arate că pentru orice $n \geq 1$

$$\int_0^1 x^n \mathrm{d}x^n = \frac{1}{2}.$$

4.3 Integrale curbilinii

Dăm acum o altă extindere a integralei simple, în care nu intervenim asupra integrantului (ca în cazul integralei Stieltjes), ci asupra domeniului de integrare. Anume, intervalul $[a, b]$ va fi înlocuit cu urma unui drum parametrizat din $\mathbb{R}^3$ (teoria fiind similară în cazul $\mathbb{R}^p$, $p \geq 2$). Integralele curbilinii au fost concepute de A.C. CLAIRAUT (1713-1765). Mai multe noţiuni din fizică (lucru mecanic, circulaţia unui câmp vectorial, energia unui sistem termic etc.) sunt exprimate prin integrale curbilinii.

4.3.1 Definiţia integralelor curbilinii

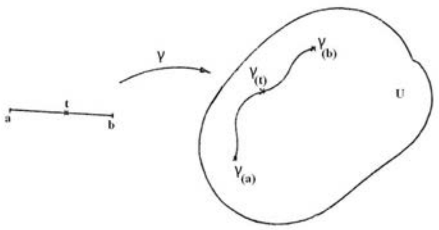


Fig. IV.10

Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un drum parametrizat neted (conform definiţiei III 5.7.). Aşadar, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $(\forall)t \in [a, b]$, unde funcţiile x, y, z sunt funcţii de clasă $C^1_{[a,b]}$ şi $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \neq 0$, $(\forall)t \in [a, b]$.

Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ un deschis astfel încât urma lui γ să fie conţinută în U. Se mai spune că γ este un *drum* în U (deoarece $(\forall)t \in [a, b]$, avem $\gamma(t) \in U$). Fie $P(x, y, z)$, $P : U \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă; atunci se poate considera compunerea $P \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$, definită prin $(P \circ \gamma)(t) = P(\gamma(t)) = P(x(t), y(t), z(t))$ şi aceasta este funcţie continuă.

Definiţia 3.1. *Se numeşte* **integrala curbilinie a lui** P **în lungul lui** γ **în raport cu** x *şi se notează cu*

$$\int_\gamma P(x, y, z)\,dx,$$

numărul real definit de următoarea integrală simplă a unei funcţii continue, anume

$$\int_a^b (P \circ \gamma)x' = \int_a^b P(x(t), y(t), z(y)) \cdot x'(t)\mathrm{d}t. \tag{18}$$

Aşadar, conform (17), integrala curbilinie anterioară coincide cu o integrală Stieltjes, anume

$$\int_\gamma P(x, y, z)\mathrm{d}z = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))\mathrm{d}x(t).$$

Exemplu. Calculăm integrala curbilinie

$$I = \int_\gamma (x^2 + y + z)\mathrm{d}x$$

în lungul elicei cilindrice

$$\gamma : \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \qquad (r > 0, h > 0 \text{ constante}),\ (\forall)\, t \in [0, 2\pi]. \\ z = ht \end{cases}$$

Conform (18), avem

$$I = \int_0^{2\pi} (r^2\cos^2 t + r\sin t + ht) \cdot (-r\sin t)\,\mathrm{d}t = -r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t -$$

$$-r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t\mathrm{d}t - hr\int_0^{2\pi} t\sin t\,\mathrm{d}t = \pi r(2h - r), \text{ după calcule imediate.}$$

Dacă Q şi R sunt alte funcţii continue $U \to \mathbb{R}$, atunci se definesc

$$\int_\gamma Q(x, y, z) \triangleq \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t)\mathrm{d}t \quad \text{şi}$$

$$\int_\gamma R(x, y, z) \triangleq \int_a^b R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)\mathrm{d}t.$$

Definiţia 3.2. *Fie* $\bar{v} : U \to \mathcal{V}_3$, $\bar{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{\imath} + Q(x, y, z)\bar{\jmath} + R(x, y, z)\bar{k}$ *un câmp vectorial pe un deschis* $U \in \mathbb{R}^3$, *deci componentele lui* $\bar{v}$, P, Q, R *sunt continue pe* U *(se subînţelege că este fixat un reper ortogonal* $Oxyz$ *de versori* $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$*). Se numeşte* **circulaţie a lui** $\bar{v}$ **în lungul lui** γ *şi se notează*

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz \quad \textit{(sau echivalent } \int_\gamma \bar{v} \cdot d\bar{r}\textit{)},$$

numărul real

$$\int_a^b [P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t)) \cdot y'(t) + R(\gamma(t)) \cdot z'(t)]\mathrm{d}t. \tag{19}$$

Aşadar, rezultă că

$$\int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_\gamma P\mathrm{d}x + \int_\gamma Q\mathrm{d}y + \int_\gamma R\mathrm{d}z.$$

În cazul când $\bar{v}$ este un câmp de forţe, circulaţia lui $\bar{v}$ în lungul lui γ se numeşte *lucrul mecanic* al lui $\bar{v}$ în lungul drumului γ. Aceasta generalizează noţiunea de lucru mecanic al unei forţe care acţionează asupra unei particule materiale constrânse să parcurgă o traiectorie fixată.

4.3.2 Proprietăţi ale integralelor curbilinii şi ale circulaţiei

Teorema 3.1. *Integrala curbilinie a unei funcţii continue este aceeaşi în lungul a două drumuri netede parametrizate echivalente cu aceeaşi orientare; aceeaşi proprietate o are circulaţia unui câmp vectorial continuu.*

Demonstraţie. Dacă $P(x,y,z)$, $P : U \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe un deschis $U \subset \mathbf{R}^3$ şi dacă $\gamma : [a,b] \to U$, $\gamma_1 : [c,d] \to U$ sunt două drumuri în U, netede echivalente (conform definiţiei III 5.8), atunci ele au parametrizări

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]; \quad \gamma_1 : \begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ z = z(u) \end{cases}, \quad u \in [c,d]$$

şi în plus, schimbarea de parametru $u = u(t)$ este o bijecţie strict crescătoare de clasă C^1, $u : [a,b] \to [c,d]$, astfel încât $\gamma(t) = \gamma_1(u(t))$, $(\forall)t \in [a,b]$. Avem de arătat că

$$\int_\gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x = \int_{\gamma_1} P(x,y,z)\mathrm{d}x,$$

adică, aplicând relaţia (18) de definiţie,

$$\int_a^b P(x(t),y(t),z(t)) \cdot x'(t)\mathrm{d}t = \int_c^d P(x(u),y(u),y(u)) \cdot x'(u)\mathrm{d}u,$$

ceea ce rezultă direct din formula de substituţie pentru integrala simplă (substituind $u = u(t)$ în membrul drept).

În mod similar se procedează pentru integralele curbilinii în raport cu y şi z şi adunând rezultatele obţinute, rezultă că dacă $\bar{v} = P(x,y,z)\bar{\imath} + Q(x,y,z)\bar{\jmath} + R(x,y,z)\bar{k}$ este un câmp vectorial continuu, atunci

$$\int_\gamma \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = \int_{\gamma_1} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r}, \tag{20}$$

deci circulaţia lui $\bar{v}$ în lungul drumurilor netede echivalente γ, γ_1 este aceeaşi.

Reamintim că două drumuri echivalente au aceeaşi urmă; proprietatea de mai sus nu este banală şi arată că de fapt integrala curbilinie (18) este independentă de parametrizare şi deci este asociată curbei parametrizate orientate definită de γ (definiţia 5.9).

Teorema 3.2. *Fie $\gamma : [a,b] \to U$ un drum neted într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$ şi $\bar{v}$ un câmp vectorial continuu în U. Atunci*

$$\int_\gamma \bar{v} \cdot d\bar{r} = -\int_{\gamma^-} \bar{v} \cdot d\bar{r}, \tag{21}$$

γ^- fiind drumul opus lui γ.

Demonstraţie. Fie $\bar{v} = P(x, y, z)\bar{\imath} + Q(x, y, z)\bar{\jmath} + R(x, y, z)\bar{k}$. Vom arăta mai întâi că

$$\int_{\gamma} P(x, y, z)\mathrm{d}x = -\int_{\gamma^-} P(x, y, z)\mathrm{d}x. \tag{22}$$

Reamintim că $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$, $(\forall)t \in [a, b]$. Atunci conform (18),

$$\int_{\gamma} P(x, y, z)\mathrm{d}x = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'\mathrm{d}t \quad \text{şi}$$

$$\int_{\gamma^-} P(x, y, z)\mathrm{d}x = -\int_a^b P(x(a+b-t), y(a+b-t), z(a+b-t)) \cdot x'(a+b-t)\mathrm{d}t.$$

Notând $u = a + b - t$, rezultă

$$\int_{\gamma^-} P(x, y, z)\mathrm{d}x = -\int_a^b P(x(u), y(u), z(u)) \cdot x'(u)\mathrm{d}u$$

şi formula (22) este probată. Scriind formula similară pentru Q, R (în raport cu y, z respectiv) şi adunând relaţiile obţinute, se va proba relaţia (21).

Teorema 3.3. *Dacă $\gamma : [a, b] \to U$ este un drum neted într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$ şi dacă $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ sunt două câmpuri vectoriale continue în U iar λ_1, λ_2 sunt constante reale oarecare, atunci*

$$\int_{\gamma} (\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2) \cdot \mathrm{d}\bar{r} = \lambda_1 \int_{\gamma} \bar{v}_1 \cdot \mathrm{d}\bar{r} + \lambda_2 \int_{\gamma} \bar{v}_2 \cdot \mathrm{d}\bar{r},$$

Demonstraţia rezultă direct din definiţia circulaţiei unui câmp vectorial şi din proprietatea de liniaritate a integralei simple.

Definiţia 3.3. *Fie $\gamma : [a, b] \to U$ un drum neted pe porţiuni (conform definiţiei III 5.7), situat într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$; aşadar, γ este obţinut prin juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ situate în U (adică există puncte $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$ astfel încât $\gamma : [a, b] \to U$ să fie funcţie continuă şi γ_1 să fie restricţia lui γ la $[t_{i-1}, t_i] \le i \le p$). Se numeşte* **circulaţia în lungul lui γ a unui câmp vectorial continuu** *$\bar{v}$ pe U numărul real*

$$\int_{\gamma} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r} \triangleq \sum_{i=1}^{p} \int_{\gamma_i} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r},$$

Definind în mod natural echivalenţa drumurilor netede pe porţiuni ca şi opusul unui drum neted pe porţiuni, se extind fără dificultate teoremele anterioare. Dacă γ este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede pe porţiuni $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$, atunci circulaţia unui câmp vectorial în lungul lui γ este suma circulaţiilor acelui câmp în lungul drumurilor $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$.

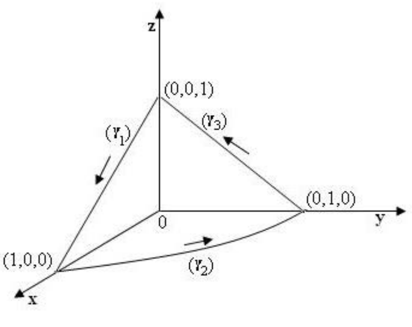


Fig. IV.11

Exemplu. Calculăm circulaţia lui $\bar{v} = x\bar{\imath} + \bar{\jmath} - xz\bar{k}$, unde γ este drumul obţinut prin juxtapunerea drumurilor $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (având urmele indicate în fig. IV. 11).

Calculăm

$$I_1 \triangleq \int_{\gamma_1} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r},$$

considerând reprezentarea parametrică

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in [0, 1].$$

Aşadar,

$$I_1 = \int_{\gamma_1} x\mathrm{d}x + \mathrm{d}y - xz\mathrm{d}z = \int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_0^1 0\mathrm{d}t + \int_0^1 t(1-t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (2t - t^2)\mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$

Pentru γ_2 se poate considera reprezentarea parametrică

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \quad , u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ z = 0 \end{cases}$$

şi atunci

$$I_2 \triangleq \int_{\gamma_2} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = \int_{\gamma_2} x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y - xz\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos u(-\sin u) + \cos u]\mathrm{d}u = \frac{1}{2}.$$

În sfârşit,

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - v \quad , v \in [0, 1] \\ z = v \end{cases}$$

şi

$$I_3 \triangleq \int_{\gamma_3} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = \int_{\gamma_2} x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y - xz\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (-\mathrm{d}v) = -1.$$

Din definiţia 3.3, rezultă că

$$\int_{\gamma} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{6}.$$

Observaţie. Definiţiile şi rezultatele anterioare se extind la cazul drumurilor parametrizate $[a, b] \to \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$ fiind fixat. Deosebit de important este cazul $p = 2$. Fie U un deschis din $\mathbb{R}^2$ (raportat la un reper ortogonal xOy de versori $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$) şi $\bar{v} = P(x, y)\bar{\imath} + Q(x, y)\bar{\jmath}$ un câmp vectorial continuu în U, adică P şi Q sunt funcţii continue pe U. Dacă $\gamma : [a, b] \to U$ este un drum neted pe porţiuni, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, atunci se defineşte **circulaţia lui $\bar{v}$ în lungul lui** γ va fiind numărul real

$$\int_{\gamma} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y \triangleq \int_a^b [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)]\mathrm{d}t$$

notat în mod echivalent

$$\int_{\gamma} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r}.$$

Exemplu. Circulaţia câmpului $\bar{v} = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\bar{\imath} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\bar{\jmath}$ în lungul circumferinţei unitate $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ este egală cu

$$\int_{\gamma} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = \int_0^{2\pi} \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \sin t + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t\right] \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi.$$

Pentru un drum neted $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $(\forall)t \in [a, b]$ se poate defini un alt tip de integrală curbilinie; anume, pentru orice funcţie $P(x, y)$ continuă într-un deschis din $\mathbb{R}^2$ care conţine urma lui γ, se defineşte

$$\int_{\gamma} P(x, y)\mathrm{d}s \triangleq \int_a^b P(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{23}$$

În particular, dacă $P = 1$, atunci

$$\int_{\gamma} \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

adică

$$\int_\gamma \mathrm{d}s = L(\gamma), \quad \text{lungimea urmei lui } \gamma \text{ (conform formulei (14).}$$

Dacă în plus γ ar fi jordanian, atunci considerând o diviziune $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$ a intervalului $[a, b]$, sunt determinate puncte $M_0, M_1, \ldots, M_p$ pe urma (γ). Dacă (ξ_k, η_k), $1 \leq k \leq p$ sunt puncte pe (γ) situate pe arcele $\widehat{M_{k-1}M_k}$, atunci se poate arăta că integrala (23) poate fi definită în mod echivalent ca limita sumelor $\sum_{k=1}^{p} P(\xi_k, \eta_k) \cdot L(\widehat{M_{k-1}M_k})$ când $\max_{1 \leq k \leq p}(t_k - t_{k-1})$ tinde către zero.

O discuţie similară are loc în cazul drumurilor netede în $\mathbb{R}^3$. Se obţine astfel o justificare în plus a denumirii de integrală curbilinie.

Din consideraţii de mecanică, se poate arăta că dacă se consideră un fir material omogen greu, inextensibil, asimilat cu urma unui drum neted γ ca mai sus, atunci *coordonatele centrului de greutate al firului* sunt

$$x = \frac{\int_\gamma x\mathrm{d}s}{L(\gamma)}, \quad y = \frac{\int_\gamma y\mathrm{d}s}{L(\gamma)}. \tag{24}$$

Observaţie. Dacă U este un deschis din planul complex şi dacă $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, $z = x + iy$ este o funcţie complexă continuă $f : U \to \mathbb{C}$ (adică $P = \mathrm{Re}\, f$, $Q = \mathrm{Im}\, f$ sunt funcţii continue pe U), atunci pentru orice drum neted în U $\gamma : [a, b] \to U$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $(\forall)t \in [a, b]$, se poate defini numărul complex

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \triangleq \int_\gamma (P + iQ)(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) \triangleq \left(\int_\gamma P\,\mathrm{d}x - Q\,\mathrm{d}y\right) +$$

$$+i\left(\int_\gamma Q\,\mathrm{d}x + P\,\mathrm{d}y\right),$$

numit *integrala lui f în lungul lui* γ. Se pot reface pentru cazul complex proprietăţile probate mai sus (independenţa de parametrizare, integrala în lungul drumului opus, liniaritatea, aditivitatea etc.). Integralele curbilinii complexe sunt studiate în cadrul teoriei funcţiilor de variabilă complexă.

Integrala curbilinie poate fi definită mai general, folosind integrala Lebesgue, dar am preferat să subliniem doar ideea principală şi semnificaţia fizică a acestui concept.

4.3.3 Exerciţii

1. Să se calculeze

$$\int_{\gamma_1} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad \int_{\gamma_2} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$$

în lungul drumurilor $\gamma_1(t) = (t, t^2)$ şi $\gamma_2(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$.

2. Să se calculeze

$$I = \int_\gamma \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$$

în lungul circumferinţei unitate $\gamma(t) = (\cos nt, \sin nt)$, $t \in [0, 2\pi]$, parcursă pozitiv de n ori ($n \in \mathbb{Z}$ fixat).

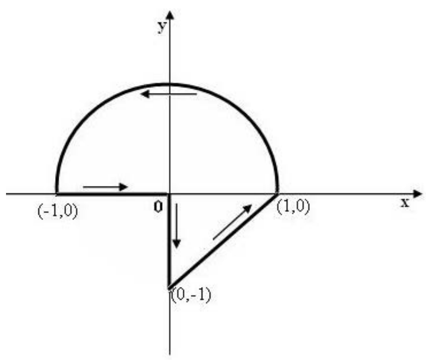


Fig. IV.12

3. Se consideră drumul neted pe porţiuni din figura IV. 12, juxtapunerea a patru drumuri netede. Să se calculeze circulaţia câmpului $\overline{v} = x^2\overline{\imath} - xy\overline{\jmath}$ în lungul acestui drum.

4. În cazul când $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ este un drum parametrizat neted *închis*, (adică $\gamma(a) = \gamma(b)$), se notează

$$\curvearrowleft \oint_\gamma \quad \text{în loc de} \quad \int_\gamma$$

indicând sensul de parcurs pe γ când parametrul creşte de la a la b. Să se calculeze

$$I_1 = \curvearrowleft \oint_\gamma x^2 \mathrm{d}y \quad \text{şi} \quad I_2 = \curvearrowleft \oint_{\gamma^-} x^2 \mathrm{d}y$$

unde $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (2\cos 2\pi t, 3\sin 2\pi t)$.

Indicaţie. Evident $I_2 = -I_1$, iar

$$I_1 = \int_0^1 (4\cos^2 2\pi t)(6\pi \cos 2\pi t)\mathrm{d}t = 24\pi \int_0^1 \cos^3 2\pi t \mathrm{d}t \ \textit{etc.}$$

5. Să se calculeze circulaţia câmpului $\bar{v} = x\bar{\imath} + xy\bar{\jmath} + zyz\bar{k}$ în lungul fiecăruia din drumurile

$$\begin{aligned}
&\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^3 && \gamma(t) = (t, t^2, t^3)\\
&\gamma_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3 && \gamma_1(t) = (t\cos t, t\sin t, t)\\
&\gamma_2 : [-2,1] \to \mathbb{R}^3 && \gamma_2(t) = (t, 1, 2-t)
\end{aligned}$$

6. Să se calculeze integralele curbilinii:
a)

$$\int_\gamma x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z - c\,\mathrm{d}t$$

în lungul drumului $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^4$, $u \mapsto (\cos u, \sin u, u, u)$, unde c este o constantă reală;
b)

$$\int_\gamma x_1 \mathrm{d}x_1 + \ldots + x_p \mathrm{d}x_p$$

în lungul drumului $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^p$, $t \mapsto (t+1, t+2, \ldots, t+p)$.

Răspuns. a) $\dfrac{\pi^2 - 2c\pi}{2}$; b) $\dfrac{p^2 + 2p}{2}$.

7. Să se calculeze:
a)

$$\int_\gamma xy\,\mathrm{d}s \quad \text{şi} \quad \int_\gamma \mathrm{d}s$$

în lungul drumului $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t, 2-t)$;
b)

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{d}s \quad \text{şi} \quad \int_{\gamma_1} (x+y+z)\mathrm{d}s$$

în lungul drumului $\gamma_1 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$.

4.4 Integrale cu parametri

Studiul integralelor cu parametri este strâns legat de cel al reprezentărilor integrale ale funcţiilor. În descrierea matematică a multor procese fizice sau fenomene tehnice, transformarea Fourier, transformarea Laplace, reprezentările integrale ale potenţialelor etc. sunt utilizate în mod curent; în acest paragraf sunt date rezultatele matematice de bază şi se subliniază foarte succint câteva aplicaţii posibile ale acestora.

4.4.1 Punerea problemei

Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime măsurabilă, $U \subset \mathbb{R}^p$ un deschis şi $f(x, \alpha)$, $f : M \times U \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă fixată.

Definiţia 4.1. *Presupunem că pentru orice $\alpha \in U$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ există integrala*

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = \int_M f(\underline{x}, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) d\underline{x},$$

care depinde de $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$; se spune în acest caz că **se defineşte o integrală cu p parametri reali** *(sau că* **funcţia F este reprezentată printr-o integrală***).* Se mai notează pe scurt

$$F(\alpha) = \int_M f(\underline{x}, \alpha)\mathrm{d}\underline{x}, \quad \text{unde } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p). \tag{25}$$

Cazurile cele mai des întâlnite sunt $p = 1$ şi $p = 2$ (integrale cu un parametru real şi respectiv cu doi parametri reali). În cele ce urmează, vom studia transferul de proprietăţi de la funcţia $f(\underline{x}, \alpha)$ la funcţia $F(\alpha)$, adică de la integrant la integrală.

Teorema 4.1. *Cu notaţiile anterioare, presupunem că există o funcţie $h(\underline{x})$, $h : M \to \mathbb{R}$ integrabilă astfel încât*

$$|f(\underline{x}, \alpha)| \leq h(\underline{x}) \quad \textit{pentru orice} \quad \underline{x} \in M,\ \alpha \in U. \tag{26}$$

Atunci funcţia $F : U \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(\alpha) = \int_M f(\underline{x}, \alpha) d\underline{x}$$

este continuă pe U.

Demonstraţie. Fixăm $a \in U$ arbitrar şi fie orice şir $\alpha_n \xrightarrow{\text{în } U} a$. Atunci pentru orice $\underline{x} \in M$ avem $f(\underline{x}, \alpha_n) \to f(\underline{x}, a)$ şi în plus, $|f(\underline{x}, \alpha_n)| \leq h(\underline{x})$, conform (26). Aplicând teorema 1.9, extinsă, aşa cum am indicat în cele spuse imediat după definiţia 1.10, se va obţine

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f(\underline{x}, \alpha_n)\mathrm{d}\underline{x} = \int_M f(\underline{x}, a)\mathrm{d}\underline{x},$$

adică $F(\alpha_n) \to F(a)$ pentru $n \to \infty$.

Considerând $M = [a, b] \subset \mathbb{M}$, rezultă direct următorul

Corolar. *Fie $f(x, \alpha)$, $f : [a, b] \times U \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci funcţia*

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$$

este continuă pe U.

4.4.2 Derivarea integralelor cu parametri

Demonstrăm acum rezultate privind transferul proprietăţii de derivabilitate de la integrant la integrală, sau cu o terminologie mai sugestivă, vom da câteva reguli de derivare sub semnul integrală.

Teorema 4.2. *Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime măsurabilă, $U \subset \mathbb{R}^p$ un deschis şi $f(\underline{x}, \alpha)$, $f : M \times U \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă în variabilele $\underline{x}$ şi $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pentru care $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_k}$ există şi este continuă pe $M \times U$, k fiind fixat ($1 \leq k \leq p$).*

Presupunem că există funcţiile $u(\underline{x}), v(\underline{x})$ pozitive, integrabile pe M, cu valori reale astfel încât

$$|f(\underline{x}, \alpha)| \leq u(\underline{x}) \text{ şi } \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha_k}(\underline{x}, \alpha)\right| \leq v(\underline{x}),\ (\forall)\underline{x} \in M,\ (\forall)\alpha \in U.$$

Atunci funcţia

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = \int_M f(\underline{x}, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) d\underline{x}$$

este derivabilă parţial în raport cu α_k pe U şi în plus,

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_k}(\alpha) = \int_M \frac{\partial f}{\partial \alpha_k}(\underline{x}, \alpha) \mathrm{d}\underline{x}, \quad (\forall)\alpha \in U. \tag{27}$$

Demonstraţie. Fixăm $a \in U$ arbitrar şi arătăm că F este derivabilă parţial în raport cu α_k în punctul a. Pentru aceasta, avem de arătat că raportul

$$\frac{F(a + te_k) - F(a)}{t} = \int_M \frac{f(\underline{x}, a + te_k) - f(\underline{x}, a)}{t} \mathrm{d}x,\ t \neq 0,$$

unde $e_1, \ldots, e_p$ este baza canonică în $\mathbb{R}^p$, are limită când $t \to 0$. Fie $t_n \to 0$, $t_n \neq 0$ un şir oarecare şi $f_n(\underline{x}) = \dfrac{f(\underline{x}, a + t_n e_k) - f(\underline{x}, a)}{t_n}$, $n \geq 0$ ($\underline{x} \in M$, $1 \leq k \leq n$ fiind fixate).

Avem $f_n \xrightarrow{PC} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_k}$ şi cum $f_n(\underline{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_k}(\underline{x}, a + \tau_n e_k)$, cu τ_n situat între a şi $a + t_n e_k$, rezultă $|f_n| \leq v$. Putem aplica atunci teorema 1.9 şi obţinem

$$\lim_{n \to \infty} \int_M f_n(\underline{x}) \mathrm{d}\underline{x} = \int_M \frac{\partial f}{\partial \alpha_k}(\underline{x}, \alpha) \mathrm{d}\underline{x}.$$

Aplicând liniaritatea integralei, membrul stâng devine

$$\lim_{n \to \infty} \int_M \frac{f(\underline{x}, a + t_n e_k) - f(\underline{x}, a)}{t_n} \mathrm{d}\underline{x} = \lim_{n \to \infty} \frac{F(a + t_n e_k) - F(a)}{t_n}.$$

Aşadar, funcţia F este derivabilă parţial în raport cu α_k în punctul α şi în plus, are loc formula (27).

Corolar. *Fie $f(x, \alpha)$, $f : [a, b] \times U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$ deschis, o funcţie continuă astfel încât $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$ să fie continuă pe $[a, b] \times U$. Atunci funcţia*

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$$

este derivabilă în raport cu α şi în plus,

$$F'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \mathrm{d}x, \quad (\forall)\alpha \in U.$$

Demonstraţie. Pentru orice deschis mărginit V din $\mathbb{R}$ astfel încât $\bar{V} \subset U$, funcţiile continue f şi $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$ sunt mărginite pe compactul $[a, b] \times \bar{V}$ şi sunt verificate condiţiile teoremei 4.2; se poate aplica formula (27) în orice punct $\alpha \in V$, deci şi în orice punct $\alpha \in U$.

Exemple. 1) Fie $-a < b < a$; se verifică uşor

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{a + b \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

o integrală cu doi parametri reali, anume a, b. Aceasta se poate interpreta şi astfel: pentru funcţia $f(x,y) = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-y^2}}$, definită pentru $x^2 > y^2$, are loc reprezentarea integrală

$$f(x,y) = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{x + y\cos t}.$$

Aplicând corolarul precedent, rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_0^\pi \frac{\sin t}{(x+y\cos t)^2}\mathrm{d}t, \quad \text{adică} \quad \frac{\pi y}{(x^2-y^2)^{3/2}} = \int_0^\pi \frac{\sin t\mathrm{d}t}{(x+y\cos t)^2}.$$

2) Pentru a calcula integrala

$$I_n(a) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}, \quad n \geq 0,\ a \neq 0$$

se poate considera a ca parametru real şi aplicând corolarul anterior, rezultă

$$I_n'(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^n \mathrm{d}x = -2na \cdot I_{n+1}(a),$$

adică formula de recurenţă $I_{n+1}(a) = -\frac{1}{2na}I_n'(a)$.

De exemplu, se observă că $I_1(a) = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{1}{a}$, $I_2(a) = -\frac{1}{2a}I_1'(a)$ etc.

3) Fie

$$F(\alpha) = -\int_2^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{x}\mathrm{d}x,$$

unde $\alpha > 0$ este un parametru real. Aplicând teorema 4.2 rezultă

$$F'(\alpha) = \int_2^\infty e^{-\alpha x}\mathrm{d}x = -\left.\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\right|_2^\infty = \frac{e^{-2\alpha}}{\alpha}.$$

Teorema 4.3. *Presupunem că $f(x,y)$ este o funcţie continuă, o dată cu $\frac{\partial f}{\partial y}$ într-o mulţime de forma $[a,b] \times U$, unde $U \subset \mathbb{R}$ este un deschis. Presupunem de asemenea că $u(y)$, $v(y)$ sunt două funcţii de clasă $C^1(U)$ astfel încât $a \leq u(y) \leq b$ şi $a \leq v(y) \leq b$ pentru orice $y \in U$. Atunci notând*

$$g(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx, \tag{28}$$

funcţia g este derivabilă în U şi în plus,

$$g'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x + v'(y)\cdot f(v(y),y) - u'(y)\cdot f(u(y),y),\ (\forall)y \in U. \tag{29}$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia de două variabile reale

$$\Phi(x,y) = \int_a^x f(t,y)\mathrm{d}t.$$

Evident,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = f(x,y),\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\mathrm{d}t \tag{30}$$

(cf. corolarului teoremei 4.2). Pe de altă parte, conform (28)

$$g(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(t,y)\mathrm{d}t = \int_a^{v(y)} f(t,y)\mathrm{d}t - \int_a^{u(y)} f(t,y)\mathrm{d}y =$$

$$= \Phi(v(y), y) - \Phi(u(y), y).$$

Aşadar,

$$g'(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(v(y), y) \cdot v'(y) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(v(y), y) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u(y), y) \cdot u'(y) -$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}(u(y), y) \overset{cf.(30)}{=} f(v(y), y) \cdot v'(y) - f(u(y), y) \cdot u'(y) +$$

$$+\frac{\partial \Phi}{\partial y}(v(y), y) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(u(y), y).$$

Pentru a proba relaţia (29), este suficient (aplicând (30)) să observăm că

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(v(y), y) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(u(y), y) = \int_a^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\mathrm{d}t -$$

$$-\int_a^{u(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\mathrm{d}t = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\mathrm{d}t,$$

Exemple. 1) Fie $g(y) = \int_y^{y^2} e^{x^2 y}\mathrm{d}x$, $y > 1$. Atunci conform formulei (29),

$$g'(y) = \int_y^{y^2} x^2 \cdot e^{x^2 y}\mathrm{d}x + 2ye^{y^5} - e^{y^2}.$$

2) Fie $f(t)$, $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi pentru $0 \le t \le x \le a$, definim

$$g(y) = \int_0^x f(t) \cdot (x - t)^{n-1}\mathrm{d}t, \ n \ge 1 \text{ întreg.}$$

Calculăm derivata de ordin n a lui g. Aplicând formula (29), avem

$$g'(x) = \int_0^x f(t) \cdot (n - 1)(x - t)^{n-2}\mathrm{d}t,$$

adică

$$g'(x) = (n - 1) \int_0^x f(t)(x - t)^{n-2}\mathrm{d}t.$$

Se verifică imediat că în punctul curent x din $[0, a]$ avem

$$g''(x) = (n - 1)(n - 2) \int_0^x f(t)(x - t)^{n-3}\mathrm{d}t, \dots, g^{(n-1)}(x) = (n - 1)! \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

şi $g^{(n)}(x) = (n-1)!f(x)$. În concluzie, o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale $y^{(n)} = f(x)$ pe intervalul $[0, a]$ este

$$y(x) = \frac{1}{(n - 1)!} \int_0^x f(t) \cdot (x - t)^{n-1}\mathrm{d}t.$$

4.4.3 Funcţiile B (Beta) şi Γ (Gama)

Funcţia Γ este foarte utilizată în diverse aplicaţii ale Analizei matematice, iar valorile ei sunt tabelate. Deşi este definită printr-o integrală, fiind deci neelementară, funcţia Γ, ca şi funcţia B strâns legată de ea, sunt considerate funcţii speciale fundamentale şi ulterior vor fi extinse în domeniul complex.

Teorema 4.4. (a) *Integrala improprie cu doi parametri reali*

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1}dx \tag{31}$$

există pentru orice $p > 0$, $q > 0$.

(b) *Integrala improprie cu un parametru real*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx. \tag{32}$$

există pentru orice $x > 0$.

Demonstraţie. (a) Fie $g(x) = x^{p-1} + (1-x)^{q-1}$; evident, dacă $p > 0$ şi $q > 0$, atunci integrala $\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ există şi are valoarea $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$. Vom proba că

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq 2g(x), \quad (\forall) x \in (0,1) \tag{33}$$

şi afirmaţia din teoremă va rezulta aplicând criteriul de comparaţie (corolarul 4 al teoremei 1.8, extins prin definiţia 1.10). Pentru a proba (33) este suficient să observăm că dacă $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$, atunci $(1-x)^{q-1} = (1-x)^q \dfrac{1}{1-x}$ şi cum $0 < 1-x \leq 1$, $0 < \dfrac{1}{1-x} \leq 2$, rezultă $(1-x)^{q-1} \leq 2$, deci $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq 2x^{p-1} \leq 2g(x)$; iar dacă $x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, atunci $0 < x^{p-1} = \dfrac{x^p}{x} \leq 2$, deci $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq 2(1-x)^{q-1} \leq 2g(x)$.

(b) Fie $h(x) = x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}$, $x > 0$. Pentru $x \in (0,1]$ avem $0 < h(x) \leq x^{\alpha-1}$ şi conform criteriului de comparaţie, rezultă că h este integrabilă pe $(0,1]$ (deoarece $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}$ pentru $\alpha > 0$). Pe de altă parte, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 h(x) = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1}e^{-x} = 0$, deci există un număr real $M > 0$ astfel încât $0 < h(x) \leq \dfrac{M}{x^2}$ pentru orice $x \in [1,\infty)$. Atunci h este integrabilă şi pe $[1,\infty)$ (din nou folosind criteriul de comparaţie, deoarece $\displaystyle\int_1^\infty \frac{M}{x^2}\mathrm{d}x = M$).

Definiţia 4.2. *Funcţia $B : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin relaţia (31) se numeşte* **funcţia beta**, *iar funcţia $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin relaţia (33) se numeşte* **funcţia gama**. *Funcţiile B şi Γ au fost introduse de Euler şi de aceea se mai numesc* **integrale euleriene**.

Câteva proprietăţi ale funcţiilor B, Γ sunt date în teorema următoare.

Teorema 4.5.
a) $\Gamma(1) = 1$;
b) *Pentru orice $\alpha > 0$ real,* $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ *şi* $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$;
c) $B(p,q) = B(q,p)$ *pentru orice* $p > 0$, $q > 0$;
d) *Avem* $\Gamma(\alpha) > 0$ *pentru orice* $\alpha > 0$ *şi* $B(p,q) > 0$ *pentru orice* $p > 0$, $q > 0$.

Demonstraţie. a) Avem conform (32)

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = 1.$$

b) Integrând prin părţi pe orice interval compact $[a,b] \subset (0,\infty)$ rezultă că

$$\int_a^b x^\alpha e^{-x}\mathrm{d}x = -x^\alpha e^{-x}|_a^b + \alpha \int_a^b x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

şi făcând $a \to 0$, $b \to \infty$ se obţine formula $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, pentru orice $\alpha > 0$. Relaţia $\Gamma(n+1) = n!$, $n \geq 0$ rezultă atunci imediat prin inducţie după n.

c) Avem deci de probat că

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}\mathrm{d}x$$

ceea ce rezultă făcând schimbarea de variabilă $x = 1 - t$.

Afirmaţia d) este evidentă folosind formulele definitorii (31), (32).

Teorema 4.6. *Funcţia* $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *este o funcţie convexă de clasă* C^∞.

Demonstraţie. Fie $I_1 = (0, 1]$ şi $I_2 = [1, \infty)$. Alegem numere u, v arbitrare fixate, astfel încât $0 < u < v$. Dacă $\alpha \in (u, v)$ şi $x \in I_1$, atunci $0 \le x^{\alpha-1}e^{-x} \le x^{u-1}$, iar funcţia $x \mapsto x^{u-1}$ este integrabilă pe I_1. Atunci conform teoremei 4.1 funcţia $\Gamma_1 : (u, v) \to \mathbb{R}$ defintă prin

$$\Gamma_1(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

este continuă. Pe de altă parte, $\lim\limits_{x\to\infty} x^{v+1}e^{-x} = 0$ deci există $M > 0$ astfel încât $0 < x^{v+1}e^{-x} \le M$ pentru orice $x \in I_2$, adică $0 \le x^{\alpha-1}e^{-x} \le \dfrac{M}{x^2}$ pentru orice $\alpha \in (u, v)$ şi $x \in I_2$; ca atare, funcţia $\Gamma_2 : (u, v) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\Gamma_2(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

este continuă. Am probat astfel că funcţia $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ este continuă pe orice interval $(u, v) \subset (0, \infty)$, deci este continuă pe $(0, \infty)$.

Aplicând succesiv teorema 4.2 se demonstrează că Γ este chiar de clasă C^∞. În plus, conform (32),

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x\mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad \Gamma''(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^2 x\mathrm{d}x,$$

deci $\Gamma''(\alpha) > 0$ pentru orice $\alpha > 0$. Aşadar, funcţia Γ este convexă pe intervalul $(0, \infty)$.

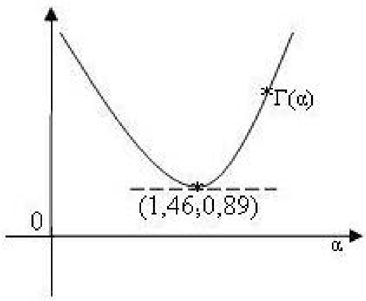


Fig. IV.13

Observaţie. Se poate arăta că graficul funcţiei Γ are forma indicată în figura IV. 13. Legătura dintre funcţiile Γ şi B este dată de

Teorema 4.7. *Pentru orice* $p > 0$, $q > 0$, *are loc formula (nebanală !)*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

În particular, funcţia B *este de clasă* C^∞ *pe deschisul* $[0, \infty) \times (0, \infty)$ *din* $\mathbb{R}^2$.

Corolar. *Avem* $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ *şi* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Demonstraţie. Aplicând relaţia $B(p, q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ pentru $p = q = \dfrac{1}{2}$, se obţine

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \Gamma(1) \cdot B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Dar $\Gamma(1) = 1$ şi în plus conform (31)

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\sin t\cos t} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \pi,$$

efectuând substituţia $x = \sin^2 t$. Atunci relaţia devine $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \pi$ şi cum $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$, rezultă că $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Conform (32), de-aici se obţine

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

şi făcând substituţia $x = t^2$, rezultă

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ şi } \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi} \tag{34}$$

4.4.4 Noţiunea de transformare integrală

Fie $K(x,y)$ o funcţie continuă de două variabile reale, $K : I \times U \to \mathbb{R}$ fixată, unde I este un interval pe dreapta reală şi $U \subset \mathbb{R}$ o mulţime deschisă; o astfel de funcţie este numită ad-hoc *nucleu*. Oricărei funcţii reale f astfel încât $(\forall) y \in U$, funcţia $x \mapsto f(x) \cdot K(x,y)$ să fie integrabilă pe I, i se poate asocia funcţia reală $g : U \to \mathbb{R}$, definită prin

$$g(y) = \int_I f(x) \cdot K(x,y) \mathrm{d}x; \tag{35}$$

se mai scrie

$$f \overset{K}{\mapsto} g$$

şi se spune că g este *transformata lui f prin nucleul K* sau că g este *imaginea funcţiei f* (numită *funcţie -original*) *prin transformarea integrală definită de K*. Cele spuse mai sus se extind fără dificultate la cazul când funcţiile K, f au valori complexe.

Ideea considerării unor transformări integrale de tipul $f \mapsto g$ este de a transforma o problemă enunţată cu ajutorul funcţiilor-original de tip f într-o problemă enunţată în termeni de funcţii-imagine de tip g, care poate fi rezolvată mai simplu. De exemplu, se va vedea că transformarea integrală Laplace transformă rezolvarea unor clase de ecuaţii diferenţiale într-o problemă pur algebrică. Fără a intra în detalii, menţionăm că formula (35) trebuie însoţită de o formulă corespunzătoare de inversare, adică de recuperare a funcţiei f de îndată ce se cunoaşte g.

Dăm un exemplu de transformare integrală ca o ilustrare a integralelor cu parametri; studiul aprofundat al acestora va fi făcut în cadrul unui capitol extrem de important numit Calculul operaţional, continuare firească a Analizei matematice şi va fi însoţit de numeroase aplicaţii la cursurile de specialitate.

Exemplu. Considerăm $I = (-\infty, \infty)$, $U = \mathbb{R}$ şi fie $K(x,y) = e^{-ixy}$. Pentru orice funcţie integrabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se defineşte **transformata Fourier** (J. FOURRIER, 1768-1830) **a lui** f ca fiind funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definită prin

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ixy} \mathrm{d}x.$$

Integrala din membrul drept există pentru orice $y \in \mathbb{R}$ fixat deoarece $(\forall) x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)e^{-ixy}| = |f(x)| \cdot |\cos xy - i \sin xy| = |f(x)| \cdot \sqrt{\cos^2 xy + \sin^2 xy} = |f(x)|$$

şi aplicăm criteriul de comparaţie. Remarcăm că funcţia g este continuă şi în plus,

$$|g(y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x, \quad (\forall) y \in \mathbb{R},$$

deci g este o funcţie mărginită.

Fie $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ considerată ca o mulţime de momente şi $f(t)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă (pe care o numim *semnal L^1 în timp*). Pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$ se poate atunci defini numărul complex

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t.$$

Funcţia $g(\omega)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ astfel definită, adică transformata Fourier a lui f, se mai numeşte **spectrul în frecvenţă al semnalului** f, iar teoria transformării Fourier modelează dualitatea fizică timp-frecvenţă.

4.4.5 Exerciţii

1. Să se calculeze

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x, \mathrm{d}x,\ \lim_{r\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin x}\mathrm{d}x,\ \lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}\exp\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}x.$$

2. Să se calculeze

$$g(y)=\int_0^\infty \frac{y}{1+x^2y}\mathrm{d}x$$

şi să se arate că deşi integrantul este continuu, funcţia g nu are această proprietate.

3. Fie

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)\mathrm{d}\theta,\quad x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Să se arate că $x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-x^2)J_n(x)=0$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$. (Funcţia J_n se numeşte *funcţia Bessel de indice n întreg*, F.W. BESSEL, 1784-1846).

4. Să se calculeze $F'(\alpha)$ pentru

$$F(\alpha)=\int_\alpha^{\alpha^2}\sin(x+\alpha)\cos(x-\alpha)\mathrm{d}x \quad \text{şi pentru}$$

$$F(\alpha)=\int_1^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\mathrm{d}x \quad (\alpha>1).$$

5. Se consideră integrala cu parametru

$$I(\alpha)=\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2),\quad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}.$$

Să se calculeze $I'(\alpha)$ şi apoi să se deducă valoarea lui $I(\alpha)$.

Răspuns. $I(\alpha)=2\pi\ln|\alpha|$ dacă $\alpha^2>1$ şi $I(\alpha)=0$ dacă $\alpha^2<1$.

6. Câmpul newtonian creat într-un punct α de o masă materială distribuită uniform într-un interval $I\subset\mathbb{R}$ este exprimat prin integrala

$$v(\alpha)=k\int_I \frac{x-\alpha}{|x-\alpha|^3}\,\mathrm{d}x,\ k \text{ fiind o constantă reală.}$$

Să se studieze convergenţa acestei integrale pentru diverse intervale I şi să se calculeze $v''(\alpha)$ în ipoteza că $\alpha\notin I$.

7. Să se arate că $0<a<b$, atunci

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\ln\frac{b}{a}.$$

Indicaţie. Integrala este egală cu

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\int_a^b e^{-yx}\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^\infty e^{-yx}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\ln\frac{b}{a}.$$

8. Să se verifice relaţiile:

a) $\Gamma(\alpha+n)=(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)$, $\alpha>0$, $n\geq 1$;

b) $B(p,q)=\dfrac{1}{2^{2p-1}}B\left(\dfrac{1}{2},p\right)$, $p>0$ şi $\Gamma(p)\Gamma\left(p+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$.

9. Să se calculeze, folosind B,Γ, integralele

a) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\mathrm{d}x$ $(p,q,m>0)$;

b) $\int_0^\infty x^p \exp(-x^q)\mathrm{d}x$ $(p>-1,\ q>0)$;

c) $\int_1^\infty x^p \ln 9\mathrm{d}x$ $(p<-1),\ q>-1$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\cos^q x\mathrm{d}x$ $(p>-1,\ q>-1)$.

10. a) Să se arate că pentru orice constante l,m reale, $t>0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-l(x+m)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{l}}.$$

b) Fie $g(y) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos xy\mathrm{d}x$, $y\in\mathbb{R}$. Să se arate că $g'(y) = -\frac{1}{2}yg(y)$, $y\in\mathbb{R}$ şi să se determine $g(y)$.

4.5 Aplicaţii

Dăm câteva aplicaţii semnificative ale integralelor curbilinii ca şi ale integralelor cu parametri în teoria câmpului şi în modelarea matematică a unor procese termice.

4.5.1 Forme diferenţiale de gradul I. Caracterizarea câmpurilor de gradienţi

Fie $U\subset\mathbb{R}^n$ un deschis fixat şi $\underline{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ punctul curent în $\mathbb{R}^n$; *o formă diferenţială* de gradul I în U este o expresie de tipul

$$\omega = P_1(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1+\ldots+P_n(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_n, \tag{36}$$

unde $P_1,\ldots,P_n$ sunt funcţii $U\to\mathbb{R}$, numite *coeficienţi formei* ω. Două astfel de forme $\omega = P_1\mathrm{d}x_1+\ldots+P_n\mathrm{d}x_n$, $\omega_1 = Q_1\mathrm{d}x_1+\ldots+Q_n\mathrm{d}x_n$ se consideră *egale* dacă $P_1=Q_1,\ldots,P_n=Q_n$; se definesc de asemenea *suma* $\omega+\omega_1 \triangleq (P_1+Q_1)\mathrm{d}x_1+\ldots+(P_n+Q_n)\mathrm{d}x_n$ şi *produsul cu o funcţie* $\lambda: U\to\mathbb{R}$, $\lambda\omega\triangleq(\lambda P_1)\mathrm{d}x_1+\ldots+(\lambda P_n)\mathrm{d}x_n$. Reţinem aşadar că o formă diferenţială de gradul I este determinată prin coeficienţii ei.

Exemple. 1) Dacă $f(x_1,\ldots,x_n)$, $f\to\mathbb{R}$ este o funcţie de clasă $C^1(U)$, atunci diferenţiala lui f în punctul curent din U

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

este o formă diferenţială de gradul I, numită *forma exactă asociată funcţiei f*.

2) Pentru $n=2$ formele diferenţiale sunt expresii de forma $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ cu coeficienţii P,Q funcţii date. De exemplu, $\omega = 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$ este o formă exactă în $\mathbb{R}^2$, deoarece $\omega=\mathrm{d}(x^2y)$.

3) Formele diferenţiale de gradul I pentru $n=3$ sunt expresii de forma $\omega = P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$, cu P,Q,R funcţii definite pe un deschis din $\mathbb{R}^3$. Oricărui câmp vectorial $\bar{v} = P(x,y,z)\bar{\imath}+Q(x,y,z)\bar{\jmath}+R(x,y,z)\bar{k}$ în $\mathcal{V}_3$ îi corespunde o formă diferenţială ca mai sus.

Definiţia 5.1. *O formă diferenţială de tipul (34) într-un deschis* $U\subset\mathbb{R}^n$ *se numeşte* **de clasă** C^p *dacă funcţiile* $P_1,\ldots,P_n$ *sunt de clasă* $C^p(U)$. *Forma* ω *se numeşte* **exactă** *dacă există o funcţie* $f\in C^1(U)$ *astfel încât* $\omega = df$, *adică*

$$P_i(\underline{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}),;(\forall)\underline{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in U,\ 1\le i\le n. \tag{37}$$

Forma ω se numeşte **închisă** *dacă este de clasă C^1 şi în plus*

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(\underline{x}) = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(\underline{x}),\ (\forall)\underline{x} \in U,\ 1 \le i, j \le n. \tag{38}$$

Este evident că dacă $\omega = \mathrm{d}f$ şi $\omega = \mathrm{d}y$ cu $f, g \in C^1(U)$, atunci $\mathrm{d}(f - g) = 0$. Dacă în plus, U este conex, atunci rezultă că funcţia $f - g$ este constantă în U (o funcţie local constantă, continuă pe un deschis conex, este constantă!).

Exemple. 1) Pentru $n = 2$, forma $\omega = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^2$ este exactă dacă şi numai dacă există $f(x, y)$, $f : U \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $\omega = \mathrm{d}f$, adică au loc egalităţile $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q$ în fiecare punct din U. Aceeaşi formă este închisă dacă şi numai dacă este de clasă C^1 şi $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$, $(\forall)(x, y) \in U$.

2) Fie $\bar{v} = P(x, y, z)\bar{\imath} + Q(x, y, z)\bar{\jmath} + R(x, y, z)\bar{k}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$ şi $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ forma diferenţială asociată. Aceasta este exactă dacă şi numai dacă există o funcţie $f \in C^1(U)$ astfel încât $P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $R = \dfrac{\partial f}{\partial z}$. În acest caz, $\bar{v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\bar{\imath} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\bar{\jmath} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$, adică $\bar{v} = \operatorname{grad} f$ în U; se spune atunci că $\bar{v}$ este un **câmp de gradienţi în** U.

Forma ω este închisă dacă şi numai dacă P, Q, R sunt de clasă $C^1(U)$ şi dacă $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$ în U; în acest caz câmpul $\bar{v} = P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k}$ se numeşte **conservativ în** U.

Teorema 5.1. *Orice formă diferenţială exactă $\omega = df$, $f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ fiind un deschis, este închisă.*

Demonstraţie. Dacă $\omega = P_1\mathrm{d}x_1 + \ldots + P_n\mathrm{d}x$, atunci conform ipotezei rezultă că $P_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, P_n = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ în U; $\dfrac{\partial P_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}(P_i) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ şi $\dfrac{\partial P_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ în fiecare punct din U, deci aplicând teorema lui Schwartz (III 4.8), rezultă $\dfrac{\partial P_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial P_j}{\partial x_i}$ în U, $1 \le i, j \le n$, deci forma ω este închisă.

Corolar. *Orice câmp de gradienţi într-un deschis din $\mathbb{R}^3$ este conservativ.*

Vom vedea că reciproca teoremei 5.1 (ca şi a corolarului anterior) este falsă şi vom da condiţii suplimentare în care o reciprocă are totuşi loc (teorema 5.3).

Definiţia 5.2. *Fie $\gamma : [a, b] \to U$ un drum parametrizat de clasă C^1 într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^n$, având reprezentarea parametrică $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$, $(\forall)t \in [a, b]$. Dacă $\omega = P_1 dx_1 + \ldots + P_n dx_n$ este o formă diferenţială de gradul I continuă în U (adică funcţiile $P_1, \ldots, P_n$ sunt continue în U), se numeşte* **integrala lui** ω **în lungul lui** γ *numărul real*

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega = \int_\gamma P_1\mathrm{d}x_1 + \ldots + P_n\mathrm{d}x_n \triangleq \int_a^b [P_1(x_1(t) + \ldots + x_n(t))x_1'(t) + \\ + \ldots + P_n(x_1(t), \ldots, x_n(t))x_n'(t)]\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{39}$$

În cazul $n = 3$ se regăseşte definiţia 3.2 a circulaţiei unui câmp vectorial continuu în lungul unui drum parametrizat de clasă C^1. Definiţia se extinde evident la drumuri C^1 pe porţiuni. Pentru $n = 2$ drumul $\gamma : [a, b] \to U$ are o reprezentare parametrică de forma $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(\forall)t \in [a, b]$ şi dacă $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, atunci

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\mathrm{d}t.$$

Exemple. 1) Dacă $\omega = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ şi dacă γ este circumferinţa unitate parcursă de k ori ($k \in \mathbb{Z}$), atunci $x = \cos kt$, $y = \sin kt$, $t \in [0, 2\pi]$ şi

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\sin kt}{\sin^2 kt + \cos^2 kt}(-k \sin kt) + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos kt}{\sin^2 kt + \cos^2 kt}(k \cos kt) \right] \mathrm{d}t = 2\pi k.$$

2) Dacă $\gamma : [a, b] \to U$ este un drum de clasă C^1 şi $\omega = \mathrm{d}f$ este o formă diferenţială exactă, atunci conform (39), rezultă

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), \ldots, x_n(t)) x_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t), \ldots, x_n(t)) x_n'(t) \right] \mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \mathrm{d}t = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \Big|_{t=a}^{t=b} =$$

$$= f(x_1(b), \ldots, x_n(b)) - f(x_1(a), \ldots, x_n(a)),$$

adică

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \mathrm{d}f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \tag{40}$$

Formula (40) poate fi numită *formula Leibniz-Newton pentru forme diferenţiale exacte.*

Proprietăţile integralelor curbilinii date în §3 se extind direct la cazul integralelor curbilinii ale formelor diferenţiale.

Teorema 5.2. (caracterizarea formelor diferenţiale exacte). *Fie $U \subset \mathbb{R}^n$ un deschis conex şi $\omega = P_1 dx_1 + \ldots + P_n dx_n$ o formă diferenţială de grad I continuu în U. Atunci sunt echivalente afirmaţiile*:

(a) *ω este exactă*;

(b) *pentru orice drum γ parametrizat de clasă C^1 pe porţiuni situat în U şi închis,*

$$\int_\gamma \omega = 0;$$

(c) *dacă A şi B sunt două puncte oarecare din U, atunci pentru orice două drumuri parametrizate γ_1, γ_2 de clasă C^1 pe porţiuni situate în U, având capetele A şi B, are loc relaţia*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

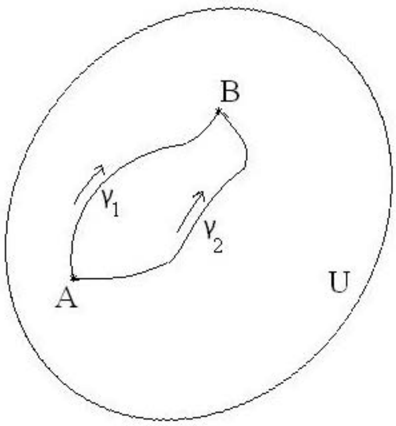


Fig. IV.14

Afirmaţia (c) se enunţă spunând că integrala formei ω *este independentă de drumul de integrare* (depinzând numai de capetele drumului).

Demonstraţia. (a) $\Rightarrow$ (b). Presupunem că ω este exactă, $\omega = \mathrm{d}f$ cu $f \in C^1(U)$. Atunci, conform formulei Leibniz-Newton (40),

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0,$$

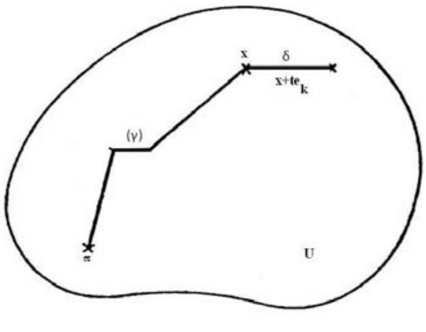


Fig. IV.15

folosind faptul că γ este drum închis, adică $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Într-adevăr, considerând juxtapunerea $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$, acest drum γ rezultă închis şi atunci conform ipotezei (b), avem

$$\int_\gamma \omega = 0, \text{ adică } \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2^-} \omega = 0, \text{ deci } \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

(c) $\Rightarrow$ (a). Fixăm un punct $a \in U$. Pentru orice punct $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in U$ alegem un drum poligonal γ unind a şi x, situat în U.

Definim funcţia $f : U \to \mathbb{R}$, punând

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_\gamma \omega.$$

Conform ipotezei (c), această integrală nu depinde de alegerea lui γ şi astfel funcţia f este bine definită. Vom arăta că $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = P_k$, $1 \le k \le n$, în fiecare punct $x \in U$. Dar

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{f(x+te_k) - f(x)}{t}, \quad 1 \le k \le n \tag{41}$$

($e_1, \ldots, e_n$ fiind baza canonică în $\mathbb{R}^n$). Notând cu δ segmentul lui U care uneşte punctele $x, x+te_k$, rezultă că

$$f(x+te_k) - f(x) = \int_\delta \omega.$$

Pe drumul δ, $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ sunt constante iar coordonata k variază de la x_k la $x_k + t$, deci conform (39)

$$f(x+te_k) - f(x) = \int_0^t P_k(x+te_k)\mathrm{d}t = tP_k(x+\theta e_k),$$

$0 < \theta < t$, conform formulei de medie. Înlocuind în relaţia (41), rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \lim_{t\to 0} P_k(x+\theta e_k) = P_k(x), \quad (\forall) x \in U, \quad 1 \le k \le n.$$

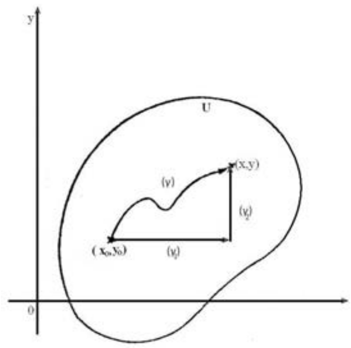


Fig. IV.16

Corolar (caracterizarea câmpurilor de gradienţi). *Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ un deschis conex şi $\bar{v}$ un câmp vectorial de clasă $C^1(U)$. Atunci sunt echivalente afirmaţiile*:

(a) *$\bar{v}$ este un câmp de gradienţi în U*;

(b) *circulaţia lui $\bar{v}$ în lungul oricărui drum de clasă C^1 pe porţiuni situat în U şi închis este nulă*;

(c) *circulaţia pe orice două drumuri parametrizate de clasă C^1 pe porţiuni situate în U şi având aceleaşi capete este aceeaşi.*

Demonstraţia rezultă direct din teorema 5.2 şi din legătura directă între forme diferenţiale şi câmpuri vectoriale.

Un rezultat similar are loc pentru câmpuri plane. Dacă $\bar{v} = \text{grad } f$ este un câmp de gradienţi în deschisul conex U, funcţia f (care este unic determinată până la o constantă aditivă) se numeşte *potenţial scalar al lui $\bar{v}$*; de aceea se mai spune că $\bar{v}$ "derivă dintr-un potenţial".

Iată cum s-ar putea determina un potenţial scalar f al unui câmp vectorial $\bar{v} = P(x,y)\bar{\imath} + Q(x,y)\bar{\jmath} = \text{grad } f$. Aşadar, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q$ şi pentru $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, avem $\omega = \mathrm{d}f$. Atunci $f(x,y) = \displaystyle\int_\gamma \omega$ unde γ este orice drum care uneşte un punct fixat $(x_0, y_0) \in U$ şi punctul curent (x,y) din U.

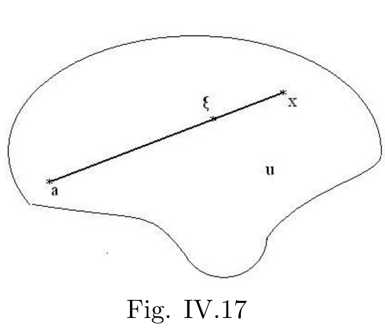


Fig. IV.17

Din teorema 5.2, implicaţia (a) $\Rightarrow$ (c), rezultă că notând cu γ_1, γ_2 segmentele paralele cu axele (ca în figura IV. 17), avem

$$f(x,y) = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{\gamma_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \overset{cf.(39)}{=}$$

$$\overset{cf.(39)}{=} \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

Exemplu. Dacă A este un punct material fixat cu masa m şi dacă M este un alt punct material cu masa m_1, atunci notând $\bar{r} = \overline{AM}$, versorul lui $\bar{r}$ este $\dfrac{\bar{r}}{r}$, iar forţa de atracţie exercitată de A asupra lui M are mărimea $k_1\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, unde k_1 este o constantă şi $r = ||\bar{r}|| = \mathrm{d}(A, M)$. Atunci câmpul atracţiilor newtoniene realizate de punctul A are în punctul curent M valoarea $\bar{v}(M) = -k_1\dfrac{m_1 m_2 \bar{r}}{r^2 r}$ şi notând $k = -k_1 m_1 m_2$, rezultă $\bar{v} = \dfrac{k}{r^3}\bar{r}$. Se obervă că în deschisul $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{A\}$, câmpul $\bar{v}$ este un câmp de gradienţi, anume $\bar{v} = \operatorname{grad}\left(-\dfrac{k}{r}\right)$, adică derivă din potenţialul newtonian $-\dfrac{k}{r}$.

Teorema 5.3. *Fie $U \subset \mathbb{R}^n$ un deschis stelat relativ la un punct $a \in U$. Orice formă diferenţială în U închisă este exactă.*

Demonstraţie. Fie $\omega = P_1\mathrm{d}x_1 + \ldots + P_n\mathrm{d}x_n$ o formă închisă, adică au loc relaţiile (38). Conform ipotezei asupra deschisului U, pentru orice punct $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, segmentul $[a, x]$ este situat în U. Putem atunci defini funcţia $f : U \to \mathbb{R}$ punând

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 [&P_1(\xi)(x_1 - a_1) + P_2(\xi)(x_2 - a_2) + \ldots + \\ &+ P_n(\xi)(x_n - a_n)]\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{42}$$

unde $\xi = a + t(x - a)$, $0 \le t \le 1$ este punctul curent pe segmentul $[a, x]$, iar $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Conform teoremei de derivare sub integrală (teorema 4.2), rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 \Bigg\{ &\frac{\partial P_1}{\partial x_k}(\xi) \cdot t \cdot (x_1 - a_1) + \ldots + \left[\frac{\partial P_k}{\partial x_k}(\xi) \cdot t(x_k - a_k) + P_k(\xi)\right] + \\ &+ \ldots + \frac{\partial P_n}{\partial x_k}(\xi) \cdot t \cdot (x_n - a_n)\Bigg\}\mathrm{d}t; \end{aligned}$$

folosind relaţiile (36), avem $\dfrac{\partial P_1}{\partial x_k} = \dfrac{\partial P_k}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial P_2}{\partial x_k} = \dfrac{\partial P_k}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial P_n}{\partial x_k} = \dfrac{\partial P_k}{\partial x_n}$, deci

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 \Bigg\{ t\Bigg[&\frac{\partial P_k}{\partial x_1}(\xi) \cdot (x_1 - a_1) + \ldots + \frac{\partial P_k}{\partial x_k}(\xi) \cdot (x_k - a_k) + \ldots + \\ &+ \ldots + \frac{\partial P_k}{\partial x_n}(\xi) \cdot (x_n - a_n)\Bigg] + P_k(\xi)\Bigg\}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t \cdot P_k(\xi)]\mathrm{d}t = \\ = \int_0^1 &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t \cdot P_k(a + t(x - a))]\mathrm{d}t = t \cdot P_k(a + t(x - a))\Bigg|_0^1 = P_k(x), \end{aligned}$$

deci $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = P_k$ în U, $1 \le k \le n$. În concluzie, $\omega = P_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + P_n\,\mathrm{d}x_n = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n$, adică $\omega = \mathrm{d}f$, deci ω este exactă.

Corolar 1. *Fie $P(x, y)$, $Q(x, y)$ două funcţii de clasă C^1 pe un deschis stelat $U \subset \mathbb{R}^2$, astfel încât $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ în U. Atunci forma diferenţială $\omega = P\,dx + Q\,dy$ este exactă ($\omega = df$) şi soluţia $y = y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale $P\,dx + Q\,dy = 0$ are proprietatea că $f(x, y) = C$, constantă.*

Demonstraţie. Din condiţia $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ rezultă că forma ω este închisă, deci conform teoremei 5.3 este exactă. Aşadar, există $f \in C^1(U)$ astfel încât $\omega = \mathrm{d}f$. În fine, ecuaţia $\mathrm{d}f = 0$ are în U soluţia $f(x, y) = C$, C fiind o constantă arbitrară.

Corolar 2. *Într-un deschis stelat, un câmp este conservativ dacă şi numai dacă el este un câmp de gradienţi.*

Demonstraţia este evidentă.

Exemple. 1) Fie $\bar{v} = 2xy\bar{\imath} + (x^2 + z)\bar{\jmath} + y\bar{k}$ în U. Se verifică imediat că $\bar{v}$ este conservativ, deci $\bar{v}$ este un câmp de gradienţi în U, $\bar{v} = \mathrm{grad}\, f$. Funcţia f se poate determina, până la o constantă aditivă, conform formulei (42). Alegem $a = (0,0,0)$, deci $\xi = (tx, ty, tz)$. Atunci

$$f(x,y,z) = \int_0^1 [2t^2xy \cdot x + (t^2x^2 + tz) \cdot y + ty \cdot z]\mathrm{d}t = x^2y + yz.$$

2) Fie $U = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ şi $\bar{v} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\bar{\imath} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\bar{\jmath}$ un câmp vectorial în U. Evident, $\bar{v}$ este un câmp conservativ, deoarece

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right), \quad (\forall)(x,y) \in U.$$

Dar $\bar{v}$ nu este un câmp de gradienţi în U, deoarece în caz contrar, circulaţia lui $\bar{v}$ în lungul circumferinţei unitate parcursă pozitiv o dată ar fi nulă. Dar această circulaţie este

$$\int_\gamma \omega = 2\pi,$$

conform exemplului 1 care succede definiţiei 5.2. Aşadar, $\bar{v}$ nu este câmp de gradienţi deşi este conservativ. Se contravine corolarului teoremei 5.3? Nu, deoarece deschisul $U = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ nu este stelat!

Rezultatele probate mai sus (teoremele 5.1, 5.2, 5.3) sunt cazuri particulare ale unei teoreme generale a lui H. POINCARÉ (1854-1912) privind formele diferenţiale de orice grad în deschişi din $\mathbb{R}^n$. În capitolul următor vom considera forme diferenţiale de grad superior şi câteva aplicaţii ale lor în teoria câmpului.

4.5.2 Aplicaţii în termodinamică

O problemă de mare însemnătate teoretică şi practică este cea a relaţiilor între energia termică şi alte forme de energie (electrică, mecanică etc.). Un model matematic acceptat în fizica modernă pentru descrierea sistemelor termodinamice este cel expus în continuare.

Presupunem că $x_1, \ldots, x_n$ sunt parametri de stare ai unui sistem termodinamic $\mathcal{S}$ (care pot reprezenta o energie, un volum etc.); asimilăm $s = (x_1, \ldots, x_n)$ cu un punct din $\mathbb{R}^n$ numit *stare* şi presupunem că mulţimea acestor puncte este o mulţime deschisă C, $0 \in \bar{C}$ şi în plus, C este un con convex ($s \in C$, $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda s \in C$). Se fixează o formă diferenţială de gradul I

$$\omega = \mathrm{d}x_1 + P_2(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_2 + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_n \tag{43}$$

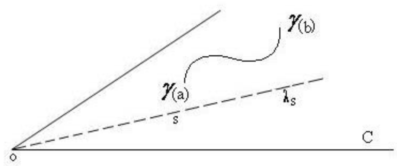


Fig. IV.18

unde coeficienţii $P_2, \ldots, P_n$ sunt funcţii continue, omogene de grad zero în C (deci $P_k(\lambda s) = P_k(s)$, $(\forall)\lambda > 0$, $(\forall)s \in C$, $2 \leq k \leq n$), iar primul coeficient este constant, egal cu 1 în C.

Prespunem că x_1 reprezintă energia totală a sistemului şi că stările sistemului $\mathcal{S}$ variază într-un interval de timp $[a,b]$, anume $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$, $(\forall)t \in [a,b]$, astfel încât să fie definit un drum parametrizat $\gamma : [a,b] \to C$, a cărui urmă (γ) poate fi numită *evoluţia sistemului.* Integrala

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \mathrm{d}x_1 + \int_\gamma P_2\mathrm{d}x_2 + \ldots + P_n\mathrm{d}x_n \tag{44}$$

reprezintă energia calorică transferată sistemului din afară; primul termen este $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{d}x_1 = \int_a^b x_1'(t)\mathrm{d}t = x_1(b) - x_1(a)$ şi reprezintă variaţia energiei totale a sistemului în lungul lui γ iar $\displaystyle\int_\gamma P_2\mathrm{d}x_2 + \ldots + P_n\mathrm{d}x_n$ se poate interpreta ca lucrul mecanic efectuat în lungul evoluţiei (γ) a sistemului.

Drumul γ se numeşte **adiabatic** dacă

$$\begin{aligned} x_1'(t) + P_2(x_2(t), \ldots, x_n(t))x_2'(t) + \ldots + P_n(x_1(t), \ldots, \\ +x_n(t))x_n' = 0,\ (\forall)t \in [a, b]. \end{aligned} \tag{45}$$

În acest caz, rezultă că $\int_\gamma \omega = 0$ deci sistemul $\mathcal{S}$ nu are schimb cu exteriorul în lungul oricărui drum adiabatic γ.

Primul principiu al termodinamicii se poate enunţa astfel: *Dacă $s_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $s_f = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sunt două stări oarecare ale sistemului $\mathcal{S}$ (iniţială şi finală), dacă $\gamma : [a, b] \to C$ este un drum adiabatic care le uneşte (adică $\gamma(a) = s_0$, $\gamma(b) = s_f$) şi în plus $(a_2, \ldots, a_n) = (b_2, \ldots, b_n)$, atunci $a_1 = b_1$.*

Aşadar, energia sistemului este aceeaşi ($a_1 = b_1$) în stările s_0, s_f, de îndată ce ceilalţi parametri de stare coincid la capetele drumului adiabatic γ.

Principiul al doilea al termodinamicii se enunţă astfel: *forma diferenţială (43) poate fi reprezentată ca produsul unei funcţii $T(x_1, \ldots, x_n)$ (numită* **temperatura termodinamică***) cu o formă diferenţială exactă dS (unde funcţia $S(x_1, \ldots, x_n)$ este numită* **entropia sistemului***).*

Aşadar,

$$\omega = T \cdot \mathrm{d}S. \tag{46}$$

Funcţia T se consideră ca fiind o funcţie de clasă C^1, strict pozitivă şi depinzând monoton crescător de temperatura sistemului.

Drumurile adiabatice $\gamma : [a, b] \to C$ au proprietatea definitorie (45) şi conform (46), avem $1 = T \cdot \dfrac{\partial S}{\partial x_1}$, $P_2 = T \cdot \dfrac{\partial S}{\partial x_2}, \ldots, P_n = T \cdot \dfrac{\partial S}{\partial x_n}$, deci

$$\begin{aligned} x_1'(t) + T \cdot \frac{\partial S}{\partial x_2}(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \cdot x_2'(t) + \ldots + \\ +T \cdot \frac{\partial S}{\partial x_n}(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \cdot x_n'(t) = 0,\ (\forall)t \in [a, b], \end{aligned}$$

adică înlocuind $T = 1/\dfrac{\partial S}{\partial x_1}$,

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \cdot x_1'(t) + \ldots + \frac{\partial S}{\partial x_n}(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \cdot x_n'(t) = 0,$$

$(\forall)t \in [a, b]$, deci $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = 0$, $(\forall)t \in [a, b]$, adică $S(\gamma(t)) = k$, constant, $(\forall)t \in [a, b]$. Aşadar, din principiul al doilea rezultă că entropia S a sistemului este constantă în lungul evoluţiilor adiabatice.

4.5.3 Exerciţii

1. Se consideră forma $\omega = (2xy + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 + 2xy)\mathrm{d}y$ în $\mathbb{R}^3$. Să se determine o funcţie $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ astfel încât $\omega = \mathrm{d}f$. Acelaşi lucru pentru $\omega = y^2 z\mathrm{d}x + (2xyz + 1)\mathrm{d}y + xy^2\mathrm{d}z$ în $\mathbb{R}^3$.

2. Se consideră câmpul vectorial $\bar{v} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}\bar{\imath} + \dfrac{2y}{x^2 + y^2}\bar{\jmath} + 2z\bar{k}$. Să se arate că $\bar{v}$ este conservativ în deschisul $U = \{x \neq 0, y \neq 0\}$ din $\mathbb{R}^3$ şi să se calculeze circulaţia lui $\bar{v}$ în lungul cercului $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$, "parcurs o dată pozitiv în raport cu semiaxa Oz".

3. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie reală continuă pe un interval deschis $I \subset \mathbb{R}$ şi forma $\omega = yf(x)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ definită în banda $I \times \mathbb{R}$. Să se arate că dacă F este o primitivă a lui f, atunci forma $e^F \cdot \omega$ este exactă. În ce caz ω este exactă?

Analiza vectorială şi calculul diferenţial exterior pe varietăţi confirmă legătura profundă între conceptele de derivabilitate şi integrabilitate

(J. DIEUDONNÉ)

Capitolul 5

Integrale multiple şi câmpuri

Introducere

Acest capitol este de cea mai mare importanţă pentru pregătirea matematică a viitorului inginer. Se poate afirma că toate noţiunile definite aici îşi au sursa în studiul unor modele fizice de mare însemnătate teoretică şi practică. *Teoria câmpurilor* scalare sau vectoriale constituie un domeniu de cercetare, cu cele mai diverse aplicaţii în mecanică, electrotehnică, electronică etc. În paragraful 2 al capitolului stabilim formulele fundamentale de legătură între integrale multiple, integrale curbilinii, integrale de suprafaţă etc. (formulele Green-Riemann, Stokes, Gauss-Ostrogradski), care au numeroase consecinţe, unele prezentate în paragraful 3. În încheiere este făcut studiul coordonatelor curbilinii şi sunt date câteva aplicaţii dintre cele mai semnificative, care nu angajează dezvoltări teoretice ample. Se poate spune că în acest capitol sunt fixate terminologia şi primele rezultate din teoria câmpurilor, care vor fi ilustrate şi adâncite ulterior în cadrul disciplinelor tehnice de bază şi de specialitate.

5.1 Calculul integralelor multiple

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, iar F este o primitivă a lui f, atunci formula Leibniz-Newton

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

se află în strânsă legătură cu forma simplificată a frontierei domeniului de integrare $[a, b]$, această frontieră fiind redusă la cele două puncte a, b; în cazul integralelor multiple, domeniile de integrare pot avea o frontieră mult mai complicată şi o formulă ca mai sus nu poate avea loc. În acest paragraf, indicăm modul de calcul al integralelor multiple, ca succesiune de integrale simple (teorema lui Fubini), precum şi câteva aplicaţii geometrice şi fizice importante ale integralelor multiple.

5.1.1 Integralele multiple ca succesiuni de integrale simple

În capitolul IV am dat definiţia şi proprietăţile integralelor multiple pe mulţimi măsurabile din $\mathbb{R}^n$, dar nu şi modul de calcul. Reamintim pe scurt câteva din etapele esenţiale legate de introducerea acestei noţiuni.

Dacă $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi = \{M_k, c_k\}_{1\leq k\leq p+1}$ este o funcţie din S, adică o funcţie în scară (constantă cu valoarea c_k pe fiecare din mulţimile măsurabile

M_k, $1 \le k \le p$ şi nulă pe $M_{p+1} = \mathbb{R}^n \setminus (M_1 \cup \ldots \cup M_p)$, atunci s-a pus $I(\varphi) = \sum_{k=1}^{p} c_k(M_k)$ (definiţia IV. 1.2.).

Dacă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită cu suport compact, s-au definit integralele inferioară şi superioară ale lui f pe $\mathbb{R}^n$

$$\underline{\int} f = \sup_{\varphi \in S, \varphi \le f} I(\varphi) \quad \text{şi} \quad \overline{\int} f = \inf_{\psi \in S, f \le \psi} I(\psi)$$

şi funcţia f s-a numit integrabilă pe $\mathbb{R}^n$ dacă

$$\underline{\int} f = \overline{\int} f,$$

valoarea comună notându-se cu

$$\iint_{\mathbb{R}^n} \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \ \text{ sau simplu cu } \int f$$

(definiţia IV §1.4). Această definiţie este compatibilă cu cea anterioară, în sensul că dacă $\varphi \in S$, atunci φ este integrabilă pe $\mathbb{R}^n$ şi $\int \varphi = I(\varphi)$.

Dacă $M \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime mărginită şi măsurabilă şi dacă $f : M \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită, iar f_M este prelungirea lui f la $\mathbb{R}^n$ nulă în afara lui M, atunci f_M este o funcţie mărginită cu suport compact şi funcţia f este prin definiţie *integrabilă pe* M dacă f_M este integrabilă pe $\mathbb{R}^n$; îi acest caz

$$\begin{aligned} &\iint_M \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \triangleq \\ &\triangleq \iint_{\mathbb{R}^n} \ldots \int f_M(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int f_M \end{aligned} \tag{1}$$

Proprietăţile principale ale integralelor pe mulţimi măsurabile mărginite (liniaritate, monotonie, limitarea modulului, anulare pe mulţimi neglijabile, aditivitate, expresia integrală a măsurii etc.) au fost demonstrate în teorema IV. 1.6. De asemenea s-a arătat că funcţiile mărginite măsurabile şi în particular funcţiile continue pe M sunt integrabile (teorema IV. 1.7).

Punctul central în deducerea formulelor de calcul efectiv al integralelor multiple îl constituie

Teorema 1.1. *Fie $P \subset \mathbb{R}^n$, $Q \subset \mathbb{R}^q$ două paralelipipede închise şi $f(x, y)$, $f : P \times Q \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci funcţia*

$$\lambda_Q : P \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_Q f(x, y)\, dy$$

este integrabilă pe P şi în plus,

$$\int_{P \times Q} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_P \lambda_Q(x)\mathrm{d}x = \int_P \mathrm{d}x \int_Q f(x, y)\mathrm{d}y. \tag{2}$$

(*am notat* $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_q)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_p$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_q$); (fig. V. 1).

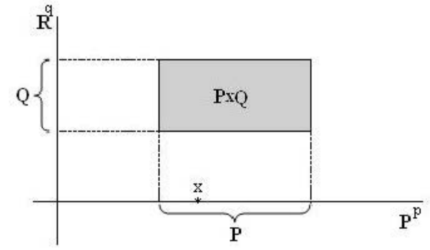


Fig. V.1

Observaţie. În mod similar cu relaţia (2), are loc relaţia

$$\int_{P \times Q} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_Q \mathrm{d}y \int_P f(x, y)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Relaţiile (2) şi (3) se scriu explicit astfel

$$\iint \ldots \int_{P \times Q} f(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_p\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_q =$$

$$\int_P \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_p \int_Q f(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_q =$$

$$\int_Q \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_q \int_P f(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_p$$

şi se justifică astfel de ce teorema 1.1 este numită uneori teorema de intervertire a ordinei de integrare; ea este un caz particular al unei teoreme mai generale a lui G. FUBINI (1879-1943). În fond, teorema 1.1 extinde la integrale o proprietate binecunoscută a sumelor finite: dacă $\{a_{ij}\}_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}}$ este un şir finit în $\mathbb{R}$, atunci

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right).$$

Exemple. 1) Fie funcţia $f(x,y) = x^2y$ considerată pe dreptunghiul $D = [1,2]\times[-1,3]$. Atunci

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{-1}^{3} x^2y\,\mathrm{d}y.$$

În acest caz,

$$\lambda_Q(x) = \int_{-1}^{3} x^2y\,\mathrm{d}y = x^2\int_{-1}^{3} y\,\mathrm{d}y = 4x^2$$

şi ca atare,

$$\iint_D x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 4x^2\,\mathrm{d}x = \frac{28}{3}.$$

2) Calculăm integrala triplă

$$I = \iiint_\pi (xy+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

unde $\pi = [1,2]\times[0,3]\times[-1,1]$. Notând $P = [1,2]\times[0,3]$ şi $Q = [-1,1]$ şi aplicând teorema 1.1 obţine

$$I = \iint_P \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_Q (xy+z)\,\mathrm{d}z = \iint_P \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{-1}^{1} (xy+z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \iint_P 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_1^2 x\,\mathrm{d}x \int_0^3 y\,\mathrm{d}y = \frac{27}{2}.$$

Dăm câteva consecinţe foarte importante ale teoremei anterioare, care constituie formule explicite de calcul al integralelor duble, triple etc.

Teorema 1.2. *Fie g_1, g_2 două funcţii continue $[a,b]\to\mathbb{R}$ astfel încât $g_1 \le g_2$. Atunci mulţimea*

$$M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | a\le x\le b \quad \text{şi} \quad g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$$

este măsurabilă în $\mathbb{R}^2$ şi pentru orice funcţie continuă $f: M\to\mathbb{R}$ are loc formula

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

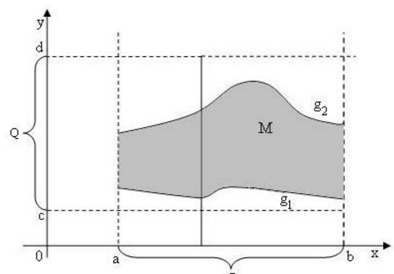


Fig. V.2

Demonstraţie. Mulţimea M este evident închisă şi mărginită, deci este compactă şi conform teoremei III 3.2, măsurabilă.

Alegem $c<d$ astfel încât $M\subset[a,b]\times[c,d] = P\times Q$. Atunci

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} f_M(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{P\times Q} f_M(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

ultima relaţie decurgând din faptul că f_M se anulează în afara dreptunghiului $P\times Q$. Aşadar, aplicând teorema 1.1, obţinem

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_P \mathrm{d}x \int_Q f_M(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f_M(x,y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \left[\underbrace{\int_c^{g_1(x)} f_M(x,y)\mathrm{d}y}_{I_1} + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_M(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{g_2(x)}^{d} \underbrace{f_M(x,y)\,\mathrm{d}y}_{I_2} \right]$$

şi cum funcţia f_M se anulează în afara mulţimii M, rezultă că integralele I_1 şi I_2 sunt nule, deci

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_M(x,y)\,\mathrm{d}y$$

şi cum $f_M = f$ pe M, se obţine formula (4).

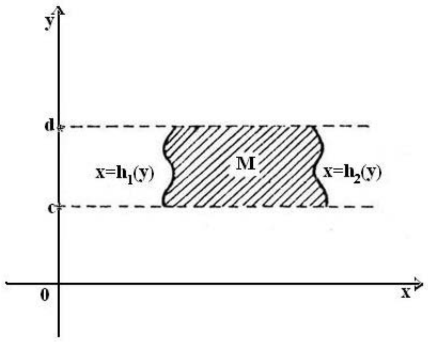


Fig. V.3

Observaţii. Un enunţ similar teoremei 1.2 se poate da pentru mulţimi de forma

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | c \le y \le d \quad \text{şi} \quad h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

cu $h_1 \le h_2$ funcţii continue $[c,d] \to \mathbb{R}$, anume

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \text{(vezi fig. V.3)},$$

pentru orice funcţie continuă $f : M \to \mathbb{R}$.

Mulţimile de forma indicată mai sus vor fi numite ad-hoc *intergrafice proiectabile pe Ox* (şi respectiv pe Oy). Aplicând proprietatea de aditivitate a integralelor multiple, dacă o mulţime măsurabilă $M \subset \mathbb{R}^2$ poate fi reprezentată ca reuniune finită de intergrafice proiectabile pe Ox având două câte două intersecţii neglijabile, atunci integrala dublă a oricărei funcţii continue pe M revine la calculul integralelor corespunzătoare pe intergraficele respective; un fapt similar are loc în cazul când M este reuniune finită de intergrafice proiectabile pe Oy.

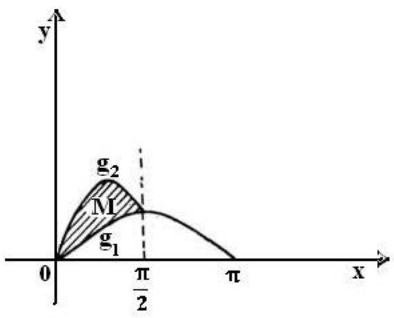


Fig. V.4

Exemple. 1) Calculăm aria intergraficului M definit de $g_1(x) = \sin x$, $g_2(x) = \sin x + \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Aşadar,

$$\text{aria } M = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{(fig. V. 4)}.$$

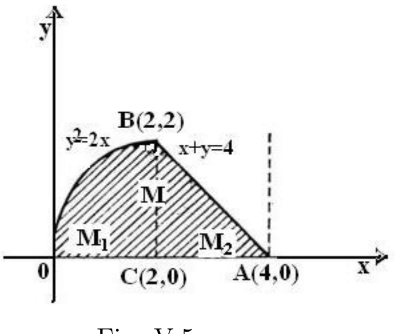


Fig. V.5

2) Calculăm integrala dublă

$$I = \iint_M (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

pe mulţimea M indicată în figura alăturată (fig. V.5).

Mulţimea M se poate descompune în două intergrafice proiectabile pe Ox şi avem

$$I = \iint_{M_1} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{M_2} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x}} (x+y)\,\mathrm{d}y +$$

$$+ \int_2^4 \mathrm{d}x \int_0^{4-x} (x+y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 (x\sqrt{2x} + x)\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_2^4 \left[x(4-x) + \frac{(4-x)^2}{2} \right] \mathrm{d}x = \frac{178}{15}.$$

Dar aceeaşi mulţime M este şi un intergrafic proiectabil pe Oy şi atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} (x+y)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{d}y \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Bigg|_{x=\frac{y^2}{2}}^{x=4-y} = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{16-8y+y^2}{2} + 4y - y^2 - \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{2}\right) \mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{8}\int_0^2 (64 - 4y^2 - 4y^3 - y^4)\,\mathrm{d}y = \frac{178}{15}. \end{aligned}$$

În cazul $n = 3$, adică pentru integrale triple, este fundamentală următoarea

Teorema 1.3. *Fie g_1, g_2 două funcţii continue $D \to \mathbb{R}$, unde D este o mulţime mărginită măsurabilă din $\mathbb{R}^2$, astfel încât $g_1 \leq g_2$. Atunci mulţimea*

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in D \quad \text{şi} \quad g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$$

este măsurabilă în $\mathbb{R}^3$ şi pentru orice funcţie continuă $f : M \to \mathbb{R}$ are loc formula

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z. \tag{5}$$

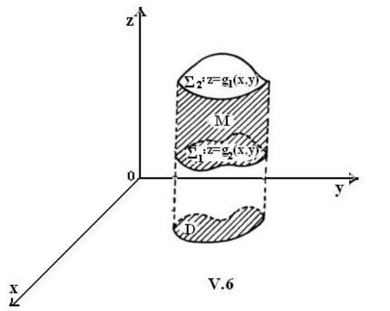


Fig. V.6

În particular, volumul lui M este

$$V(M) = \iiint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D [g_2(x,y) - g_1(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Demonstraţie. Alegem un paralelipiped $P \times Q$ din $\mathbb{R}^3$ astfel încât P să fie un dretpunghi din $\mathbb{R}^2$, Q un interval în $\mathbb{R}$ şi $D \subset P \times Q$. Evident,

$$\begin{aligned} &\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\mathbb{R}^2} f_M(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\ &= \iiint_{P\times Q} f_M(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_P \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_Q f_M(x,y,z)\,\mathrm{d}x = \\ &= \iint_P \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f_M(x,y,z)\,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

ultima relaţie decurgând din faptul că intervalul $[g_1(x,y), g_2(x,y)]$ este conţinut în Q, oricare ar fi $(x,y) \in P$. Deoarece $f_M = f$ pe M şi $f_M(x,y,z) = 0$ pentru orice $(x,y) \in P \setminus D$, integrala dublă poate fi considerată numai pe D şi se găseşte formula (5).

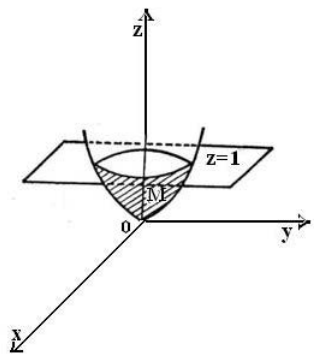


Fig. V.7

Exemple. 1) Calculăm volumul $V(M)$ al "corpului" M limitat de paraboloidul $z = x^2 + y^2$ şi de planul $z = 1$ (fig. V. 7).

Avem

$$V(M) = \iiint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{x^2+y^2}^1 \mathrm{d}z$$

unde D = proiecţia lui M pe planul xOy. Aşadar, D este discul $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ în planul xOy, deci

$$V(M) = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2},$$

după calcule uşoare.

2) Mulţimile M de forma indicată în teorema 1.3 pot fi numite intergrafice proiectabile pe planul xOy; prin aditivitate se calculează integrale triple pe mulţimi care sunt reuniuni de astfel de intergarfice. O discuţie similară are

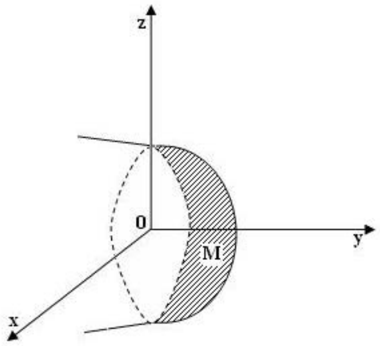


Fig. V.8

loc pentru intergrafice proiectabile pe planul yOz sau pe planul zOx. Ca un exemplu, ne propunem să calculăm integrala triplă

$$I = \iiint_M x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

unde $M = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$, fig. V. 8.

În acest caz, M este in intergarfic proiectabil pe planul xOz şi avem

$$I = \iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \int_0^{1-x^2-z^2} \mathrm{d}y = \iint_D x(1 - x^2 - z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

unde $D = \{x^2 + z^2 \leq 1$ în planul $xOz\}$, deci

$$I = \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - z^2)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \left(z - x^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Bigg|_{z=-\sqrt{1-x^2}}^{z=\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{4}{3} \int_{-1}^{1} x(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \text{adică } I = 0,$$

deoarece integrantul este funcţie impară.

Un rezultat general privind calculul integralelor multiple este stabilit în teorema următoare.

Teorema 1.4. *Fie $M \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ o mulţime mărginită măsurabilă şi*

$$M' = \{x \in \mathbb{R}^p |\ (\exists)\ y \in \mathbb{R}^q,\ (x, y) \in M\}, \quad M_x = \{y \in \mathbb{R}^q | (x, y) \in M\},$$

unde $x \in M'$ este fixat. Dacă $f(x, y)$, $f : M \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci

$$\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{M'} \mathrm{d}x \int_{M_x} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

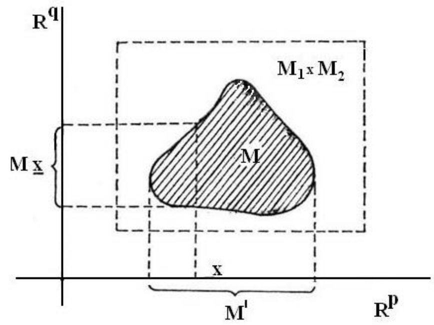


Fig. V.9

Demonstraţie. Alegem un paralelipiped $M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ astfel încât $M \subset M_1 \times M_2$. Evident, $\chi_M(x, y) = \chi_{M'}(x) \cdot \chi_{M_x}(y)$, deci

$$\int_M f = \int_{M_1 \times M_2} \chi_M(x, y) \cdot f = \int_{M_1} \mathrm{d}x \int_{M_2} \chi_{M'}(x) \cdot \chi_{M_x}(y) \cdot f(x, y)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{M_1} \chi_{M'}(x)\,\mathrm{d}x \int_{M_2} \chi_{M_x}(y) \cdot f(x, y)\mathrm{d}y = \int_{M'} \mathrm{d}x \int_{M_x} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

5.1.2 Aplicaţii geometrice şi fizice ale integralelor multiple

Un precept util, ilustrat deja prin noţiunile de arie, volum etc. este acela după care orice mărime geometrică (sau fizică) care este aditivă de mulţime se poate exprima printr-o integrală. Această afirmaţie nu este desigur o teoremă, dar circumscrie gama de aplicaţii ale integralelor.

Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime măsurabilă (mărginită). Am văzut că volumul lui M este dat prin

$$V(M) = \int_M 1 = \int_M \mathrm{d}x = \int_M \ldots \int \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

De exemplu, pentru $n = 2$ se obţine aria mulţimilor plane măsurabile mărginite, anume

$$\text{aria } M = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

iar pentru $n = 3$, se obţine volumul

$$V(M) = \iiint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Fie $\mu : M \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi pozitivă. În cele ce urmează, este comod să numim M - corp şi μ - densitate specifică a lui M. Numărul real

$$m = \int_M \mu(x)\,\mathrm{d}x$$

se numeşte *masa lui M*, iar punctul $G \in \mathbb{R}^n$ de coordonate

$$\frac{1}{m}\int_M x_1\mu(x)\,\mathrm{d}x,\ \frac{1}{m}\int_M x_2\mu(x)\,\mathrm{d}x, \dots, \frac{1}{m}\int_M x_n\mu(x)\,\mathrm{d}x,$$

se numeşte *centrul de greutate al lui M*. Dacă μ este funcţie constantă, se spune că M este un corp *omogen*.

De exemplu, pentru o "placă" plană omogenă $M \subset \mathbb{R}^2$, coordonatele centrului de greutate sunt

$$x = \frac{\iint_M x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \quad y = \frac{\iint_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y},$$

iar pentru un corp omogen $M \subset \mathbb{R}^3$, centrul de greutate are coordonatele

$$x = \frac{1}{V(M)}\iiint_M x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \quad y = \frac{1}{V(M)}\iiint_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$z = \frac{1}{V(M)}\iiint_M z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Pentru orice punct fixat $a \in \mathbb{R}^n$, numărul

$$\int_M ||x-a||^2\mu(x)\,\mathrm{d}x$$

se numeşte *momentul de inerţie al lui M în raport cu a*, iar dacă $F \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime închisă şi $\mathrm{d}(x)$ este distanţa de la punctul curent x la F, atunci numărul real

$$\int_M \mathrm{d}(x)^2 \cdot \mu(x)\,\mathrm{d}x$$

se numeşte *momentul de inerţie al lui M în raport cu F*. De exemplu momentul de inerţie al unei plăci omogene $M \subset \mathbb{R}^2$ în raport cu Ox (respectiv Oy) este $\iint_M y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (respectiv $\iint_M x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$).

Aceste definiţii sunt motivate şi materializate în cursul de mecanică.

5.1.3 Schimbări de variabile în integrale multiple

În teorema III 5.2. formula (44) am stabilit modul cum se modifică volumul unui paralelipiped închis din $\mathbb{R}^n$ printr-o transformare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ liniară. Aceeaşi formulă are loc evident şi pentru faguri şi apoi pentru mulţimi compacte oarecare din $\mathbb{R}^n$; într-adevăr, dacă $K \subset \mathbb{R}^n$ este un compact, atunci se pot alege faguri $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ astfel încât $K = F_1 \cap F_2 \cap \dots$ şi $V(K) = \lim\limits_{n\to\infty} V(F_n)$. Avem $T(F_1) \supset T(F_2) \supset \dots, T(K) = T(F_1) \cap T(F_2) \cap \dots$ şi $V(T(K)) = \lim\limits_{n\to\infty} V(T(F_n))$ şi cum $V(T(F_n)) = |\det T| \cdot V(F_n)$, se obţine $V(T(K)) = |\det T| \cdot V(K)$ sau $\mu(T(K)) = |\det T| \cdot \mu(K)$, notând cu μ luarea volumului. Acest fapt va fi generalizat înlocuind transformarea liniară printr-o transformare punctuală oarecare de clasă C^1, indicând de asemenea efectul unei schimbări de coordonate asupra integralelor multiple.

Fie $U, V \subset \mathbb{R}^n$ deschişi fixaţi, $F : U \to V$ un difeomorfism cu jacobianul J_F şi $g : V \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Rezultatul principal este cuprins în următoarea

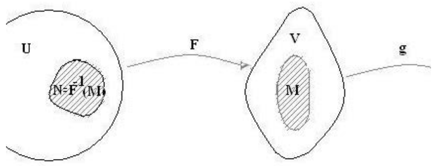


Fig. V.10

Teorema 1.5 (schimbarea de variabile în integrala multiplă). *Dacă $M \subset V$ este o submulţime măsurabilă, atunci g este integrabilă pe M dacă şi numai dacă funcţia $(g \circ F) \cdot |J_F|$ este integrabilă pe $F^{-1}(M)$ şi are loc relaţia*

$$\int_M g = \int_{F^{-1}(M)} (g \circ F) \cdot |J_F|. \tag{6}$$

Demonstraţia acestei teoreme nu este simplă şi ne restrângem la comentarii şi aplicaţii. În unele situaţii, teorema 1.5 este aplicată local şi rezultatele se asamblează global.

Corolar. *În condiţiile teoremei 1.5, fie $N \subset U$ o mulţime măsurabilă oarecare; atunci*

$$\mu(F(N)) = \int_N |J_F|. \tag{7}$$

Demonstraţie. Este suficient să luăm $M = F(N)$ şi $g = 1$ în relaţia (6).

Observaţie. Dacă aplicaţia F este $\mathbb{R}$-liniară, atunci J_F este o constantă (chiar determinantul matricii asociate lui F notat cu $\det F$) şi se regăseşte formula (44) din capitolul III. Relaţia (7) are o interpretare "infinitezimală", folosită în unele raţionamente inginereşti: aplicând teorema de medie în membrul drept al relaţiei (7) rezultă că dacă N este un paralelipiped, atunci există $\xi \in N$ astfel încât $\mu(F(N)) = |J_F|(\xi) \cdot \mu(N)$ şi dacă N este "mic" de dimensiuni $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, centrat într-un punct a, atunci $\mu(N) = \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ este numit *element de volum* notat $\Delta\omega$, deci formula aproximativă $\mu(F(N)) \simeq |J_F(a)| \cdot \Delta\omega$ indică modul în care se transformă elementul de volum prin F.

Exemple. a) *Trecerea la coordonate polare în plan.*
Considerăm deschişii $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ şi $V = \mathbb{R}^2 \setminus$ semiaxa pozitivă Ox din $\mathbb{R}^2$ şi fie aplicaţie

$$F : U \to V, \quad (\rho, \theta) \mapsto (x, y)$$

unde ρ, θ sunt coordonatele polare ale punctului (x, y), deci $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. În acest caz, $J_F = \rho$ şi formula (6) aplicată local arată că pentru orice mulţime măsurabilă $M \subset V$ avem

$$\iint_M g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_{F^{-1}(M)} g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta.$$

De exemplu, dacă $M =$ discul $\{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ şi dacă $g(x, y) = x + y + 1$, atunci

$$\iint_M (x + y + 1)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + 1)\, \rho\, \mathrm{d}\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^3}{3}\cos\theta + \frac{R^3}{3}\sin\theta + \frac{R^2}{2}\right) \mathrm{d}\theta = \pi R^2$$

(de fapt discul M nu este conţinut în V, dar mulţimea $M \setminus V$ este neglijabilă). De asemenea, ne propunem să aflăm momentul de inerţie al discului $x^2 + y^2 - 2Rx \leq 0$ (presupus omogen cu densitatea 1) în raport cu originea. Acesta este egal cu

$$\iint_{x^2+y^2-2Rx\leq 0} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{F^{-1}(M)} \rho^2 \cdot \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2R\cos\theta} \rho^3\mathrm{d}\rho =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4R^2\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta = 8R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, \mathrm{d}\theta = \frac{3}{2}\pi R^4.$$

b) Există situaţii fizice care prezintă simetrii remarcabile. Pentru o exprimare matematică mai convenabiă a acestor simetrii se recomandă schimbări de variabilă, de exemplu înlocuirea coordonatelor carteziene prin alte sisteme de coordonate. Astfel, în probleme cu simetrie axială (în raport cu o dreaptă) se recomandă coordonatele cilindrice, iar în probleme cu simetrie centrală (în raport cu un punct), coordonatele sferice.

Trecerea la coordonatele cilindrice este legată de un difeomorfism $F : (\rho, \varphi, z) \mapsto (x, y, z)$ unde $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$ (între deschişi din $\mathbb{R}^3$) cu jacobianul $J_F = \rho$, iar trecerea la coordonate sferice este $(r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$ unde $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, cu jacobianul $r^2\sin\theta$. Pentru exemplificare, calculăm volumul sferei $M = \{x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ folosind coordonatele sferice; acesta este

$$V = \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq R^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{F^{-1}(M)} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \rho^3\mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{R} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{R^3}{3}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2R^3}{3}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

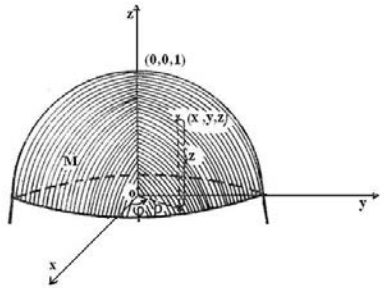


Fig. V.11

În mod similar, calculăm integrala triplă

$$I = \iiint_M xy\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \text{ unde } M = \{1 - z \geq x^2 + y^2,\ z \geq 0\};\ (\text{fig. V. } 11)$$

Aplicăm coordonate cilindrice (ţinând cont de simetria lui M în raport cu axa Oz); se obţine

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{F^{-1}(M)} \rho^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\ &= \int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}\rho^3\mathrm{d}z = \\ &= \int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1(\rho^3-\rho^5)\mathrm{d}\rho = 0. \end{aligned}$$

5.1.4 Integrale multiple improprii

Reamintim că o funcţie mărginită, măsurabilă, pozitivă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este integrabilă în $\mathbb{R}^n$ dacă limita

$$\lim_{r\to\infty}\int_{B_r} f$$

există şi este finită, unde $B_r = \{||x|| \leq r\}$, $r > 0$, această limită fiind notată $\int_{\mathbb{R}^n} f$.

Dacă $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ este o funcţie măsurabilă şi pozitivă (dar nu neapărat mărginită), atunci funcţia f este integrabilă dacă există limita

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda,\ \text{unde } f_\lambda = \min(f, \lambda),\ \lambda > 0,\ \text{notată } \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

În fine, o funcţie măsurabilă $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ nu neapărat pozitivă se numeşte integrabilă în $\mathbb{R}^n$ dacă funcţiile pozitive $f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = \max(-f, 0)$ sunt integrabile în sensul anterior. În acest caz, $\int_{\mathbb{R}^n} f \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} f_+ - \int_{\mathbb{R}^n} f_-$. Dacă $M \subset \mathbb{R}^n$ este măsurabilă, o funcţie măsurabilă $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ este integrabilă pe M dacă $f_M = f \cdot \chi_M$ este integrabilă în $\mathbb{R}^n$. Aceste noţiuni au fost introduse prin definiţiile 1.7-1.10 din capitolul IV.

Exemple. 1) Funcţia $f(x,y)=x$, nemărginită şi având semn variabil, nu este integrabilă în $\mathbb{R}^2$, deoarece $f_+(x,y)=\begin{cases} x & \text{dacă} \quad x\geq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x<0 \end{cases}$ nu este integrabilă; într-adevăr, în acest caz, $f_\lambda(x,y)=\begin{cases} x & \text{dacă} \quad 0\leq x<\lambda \\ \lambda & \text{dacă} \quad 0\leq x<\lambda \end{cases}$, pentru orice $\lambda>0$ fixat (nulă în rest) şi calculăm

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_\lambda(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{r\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq r^2} f_\lambda(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$\lim_{r\to\infty}\left[\int_0^\lambda \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} x\,\mathrm{d}y+\int_\lambda^r \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\lambda\,\mathrm{d}y\right]=$$

$$\lim_{r\to\infty}\left[2\int_0^\lambda x\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x+2\lambda\int_\lambda^r\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x\right]=\infty,$$

deci f_λ nu este integrabilă pe $\mathbb{R}^2$.

2) Funcţia continuă, mărginită şi pozitivă $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ este integrabilă pe $\mathbb{R}^2$ deoarece există limita

$$\lim_{r\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq r^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$$

aceasta se poate calcula trecând la coordonate polare, anume este egală cu

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r e^{-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\lim_{r\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right)\Big|_0^r d\theta=\pi\lim_{r\to\infty}(1-e^{-r^2})=\pi.$$

Totodată deducem din teorema 1.1 că

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\pi,\quad \text{adică regăsim faptul că}\quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.$$

3) Fie discul $M=\{x^2+y^2\leq R^2\}$ şi funcţia pozitivă nemărginită $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$, unde $\alpha>0$ este constantă reală. Se observă că punând $f(0,0)=\infty$ avem o funcţie $f:M\to\bar{\mathbb{R}}$; f este integrabilă pe M dacă şi numai dacă prelungind f cu 0 în afara lui M se obţine o funcţie integrabilă pe $\mathbb{R}^n$. În acest caz, pentru orice $\lambda>0$ avem

$$f_\lambda(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{-\alpha} & \text{dacă} \quad (x^2+y^2)^{-\alpha}\leq\lambda \text{ şi } x^2+y^2\leq R^2\\ \lambda & \text{dacă} \quad (x^2+y^2)^{-\alpha}>\lambda \text{ şi } x^2+y^2\leq R^2\\ 0 & \text{în rest}\end{cases}$$

şi

$$\lim_{\lambda\to\infty}\iint f_\lambda(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}}(x^2+y^2)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\lambda^{-\frac{1}{2\alpha}}}\rho^{1-2\alpha}\mathrm{d}\rho=2\pi\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda^{-\frac{1}{2\alpha}}}\rho^{1-2\alpha}\mathrm{d}\rho,$$

trecând la coordonate polare.

Integrala există dacă şi numai dacă $2\alpha-1<1$, adică $0<\alpha<1$ (conform IV §1, 4, lema b) şi în acest caz limita anterioară este egală cu $2\pi\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}=0$.

Aşadar, funcţia $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $\alpha>0$ este integrabilă în M dacă şi numai dacă $\alpha<1$.

În mod similar, folosind coordonatele sferice, se vede că funcţia $f(x,y,z)=\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$, $\alpha>0$ este integrabilă în bila $M=\{x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$ dacă şi numai dacă $\alpha<\dfrac{3}{2}$.

Pentru integralele multiple improprii se pot reface unele proprietăţi din cazul integralelor simple improprii ca: liniaritatea, aditivitatea, criterii de comparaţie, valoare principală Cauchy etc.

Integralele multiple improprii apar efectiv în unele consideraţii fizice. Astfel, dacă $M \subset \mathbb{R}^3$ este un corp material cu densitatea de volum $\mu(x,y,z)$, asimilat cu o mulţime compactă, atunci pentru orice punct $P(u,v,w)$ din $\mathbb{R}^3$, se defineşte *potenţialul* atracţiei newtoniene realizate de corpul M în punctul P ca fiind

$$U(u,v,w) \triangleq \iiint_M \frac{\mu(x,y,z)}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Funcţia U este de clasă C^∞ în $\mathbb{R}^3 \setminus M$ (căci dacă $(u,v,w) \notin M$, atunci se poate deriva sub integrală de oricâte ori în raport cu u,v,w). Mai mult se poate verifica imediat că $\dfrac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial w^2} = 0$ în fiecare punct din $\mathbb{R}^3 \setminus M$, adică U este funcţia armonică în deschisul $\mathbb{R}^3 \setminus M$. Dar dacă punctul P aparţine lui M, atunci integrala triplă anterioară este improprie; ea este convergentă (ceea ce se vede utilizând coordonate sferice în P), dar prin derivare sub integrală în raport cu u,v,w se obţin integrale divergente, astfel că U nu este derivabilă în punctele lui M.

5.1.5 Exerciţii

1. Să se calculeze integralele

$$\iint_{P_1} (x+y+xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \iiint_{P_2} (xyz+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

unde $P_1 = [-1,1] \times [0,3]$ şi respectiv $P_2 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

2. Să se calculeze

a) $\displaystyle\iint_{x^2 \le x^2+y \le 1} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ şi $\displaystyle\iint_{y^2 \le x, x+y \le 2} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

b) $\displaystyle\iiint_{x+y+z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\displaystyle\iiint_{0 \le z \le 1-x^2-y^2} (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

3. Dacă f_1, f_2 sunt funcţii continue, $f_1 : I \to \mathbb{R}$, $f_2 : J \to \mathbb{R}$ (I, J intervale compacte din $\mathbb{R}$), să se arate că

$$\iint_{I \times J} f_1(x) \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_I f_1(x)\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_J f_2(y)\mathrm{d}y\right).$$

Generalizare,

4. Se consideră mulţimea $D = [1,\infty) \times [1,\infty)$ din $\mathbb{R}^2$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}.$$

Să se arate că

$$\int_1^\infty \mathrm{d}y \int_1^\infty f(x,y)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \quad \text{şi că} \quad \int_1^\infty \mathrm{d}x \int_1^\infty f(x,y)\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}.$$

Se contravine astfel teoremei 1.1?

5. Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită măurabilă şi $f : M \to \mathbb{R}$ o funcţie uniform continuă. Să se arate că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice partiţie $\{N_i\}_{1 \le i \le p}$ a lui M cu mulţimi măsurabile de diametru cel mult δ şi pentru orice puncte $\xi_i \in N_i$, $1 \le i \le p$, să avem

$$\left| \int_M f - \sum_{i=1}^p f(\xi_i) \cdot V(N_i) \right| < \varepsilon.$$

Indicaţie. Dacă $V(M) = 0$, concluzia este imediată. Presupunem că $V(M) \neq 0$ şi fixăm $\varepsilon > 0$ arbitrar. Atunci există $\delta(\varepsilon)$ astfel încât de îndată ce $||x - x'|| < \delta$ şi $x, x' \in M$ să rezulte că $|f(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{V(M)}$; ca atare,

$$\left| \int_M f - \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i) \cdot V(N_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{p} \int_{N_i} f - \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i) \cdot V(N_i) \right| =$$
$$= \left| \sum_{i=1}^{p} \left[\int_{N_i} f - f(\xi_i) \cdot V(N_i) \right] \right| \leq \sum_{i=1}^{p} \left| \int_{N_i} f - f(\xi_i) \cdot V(N_i) \right| =$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \left| \int_{N_i} f - \int_{N_i} f(\xi_i) \right| = \sum_{i=1}^{p} \left| \int_{N_i} [f - f(\xi_i) \right| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{p} \frac{\varepsilon}{V(M)} \cdot V(N_i) = \frac{\varepsilon}{V(M)} \sum_{i=1}^{p} V(N_i) = \varepsilon.$$

(Acest exerciţiu se referă la aproximarea integralelor multiple prin sume Riemann).

6. a) Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene de semicerc $M = \{x^2 + y^2 \leq R^2,\ y \geq 0\}$ şi momentul de inerţie al lui M în raport cu originea.
b) Aceeaşi problemă pentru emisfera $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq 0\}$.

7. Să se calculeze masa corpului $M = \{0 < z \leq 1 - |x| - |y|,\ x^2 \leq y\}$, cu densitatea $\mu(x, y, z) = \dfrac{1}{1 - |x| - |y|}$.

8. Să se calculeze masa, coordonatele centrului de greutate şi momentul de inerţie faţă de origine ale elipsoidului omogen $M = \{x^2/4 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Acelaşi lucru pentru "titirezul" $M = \{x^2 + y^2 \leq z,\ 0 \leq z \leq h\}$, $h > 0$ dat.

9. Să se calculeze

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} e^x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z, \quad \text{şi} \quad \iiint_{1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9} x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

trecând la coordonate sferice.

10. Să se calculeze volumul definit de

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \leq 1 \quad \text{în} \quad \mathbb{R}^4.$$

11. Să se studieze convergenţa integralelor multiple improprii

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{(x^2 + y^2)^{\alpha}}, \quad \iint_{x^2+y^2-2y<0} \frac{x^2}{y} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \quad \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 3 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{2x}}} \frac{xy + 2y}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\ln(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

unde $\alpha > 0$ este o constantă.

5.2 Câmpuri scalare, vectoriale. Formule integrale

În acest paragraf prezentăm câteva noţiuni introductive din teoria clasică a câmpului şi din calculul exterior care au multiple consecinţe şi aplicaţii. Aceste noţiuni sunt adâncite în cadrul teoriei formelor diferenţiale şi analizei matematice pe varietăţi.

5.2.1 Gradientul unui câmp scalar

Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ un deschis fixat; reamintim că prin *câmp scalar definit pe U* se înţelege orice funcţie $\varphi(x, y, z) : U \to \mathbb{R}$, iar un *câmp vectorial de componente P, Q, R în U* este o asociere de forma $\bar{v} : U \to \mathcal{V}_3$, $\bar{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{\imath} + Q(x, y, z)\bar{\jmath} + R(x, y, z)\bar{k}$, presupunând că este fixat un reper ortogonal în $\mathbb{R}^3$ de versori $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$. Aşadar, a defini un câmp scalar (respectiv vectorial) acţionând în U revine la a asocia fiecărui punct din U un anumit scalar (respectiv vector). Câmpurile scalare sunt pur şi simplu funcţii reale de trei variabile reale, iar câmpurile vectoriale se identifică prin triplete de câmpuri scalare componente. Dacă funcţia φ este de clasă $C^p(U)$ (respectiv, dacă P, Q, R au această proprietate) $0 \leq p \leq \infty$, se spune că φ (respectiv $\bar{v}$) este un câmp de clasă $C^p(U)$.

Exemple. 1) Dacă U este o submulţime deschisă conţinută într-o anumită regiune din spaţiu, câmpul scalar al temperaturilor în U este funcţia care asociază oricărui punct din U temperatura măsurată în acel punct, într-un anumit sistem de unităţi. În mod similar, se definesc câmpul presiunilor, al umidităţilor etc. Condiţia ca mulţimea U să fie deschisă este necesară pentru definirea riguroasă a anumitor condiţii de regularitate asupra câmpului (continuitate, clasă C^1 etc.).

2) Un exemplu tipic de câmp vectorial îl constituie câmpul vitezelor particulare (asimilate cu puncte) ale unui fluid dintr-un recipient.

3) Dacă O este un punct material fixat, atunci în mulţimea $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ se poate defini câmpul vectorial al atracţiilor newtoniene realizate de O. Anume, pentru orice punct $M \neq O$ se notează $\bar{r} = \overline{OM}$ şi atunci vectorul corespunzător al atracţiei realizate de O în punctul M este

$$\bar{v}(M) = -\frac{k}{r^2}\bar{\rho}, \text{ unde } \bar{\rho} = \text{versorul lui } \overline{OM} \left(= \tfrac{\bar{r}}{r}\right), \text{ adică } \bar{v}(M) = -\frac{k}{r^3}\bar{r}.$$

Alegând un reper ortogonal $Oxyz$ de versori $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$, dacă punctul M are coordonatele x, y, z, rezultă că

$$\bar{v}(x, y, z) = -\frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}),$$

pentru $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Aşadar, câmpul newtonian este un câmp vectorial de clasă C^∞ în deschisul $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$.

Fixăm un câmp scalar φ de clasă $C^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^3$ fiind un deschis. Pentru orice număr real c se numeşte *suprafaţă de nivel* asociată perechii (φ, c) suprafaţa S_c de ecuaţie carteziană $\varphi(x, y, z) = c$ (definiţia 5.13 din cap. III).

Aşadar, pe întreaga suprafaţă S_c câmpul φ are o valoare constantă, anume c. Evident, prin orice punct $(x_0, y_0, z_0) \in U$ trece o unică suprafaţă de nivel, anume S_c, unde $c = \varphi(x_0, y_0, z_0)$. În cazul când φ este câmpul temperaturilor (respectiv al presiunilor) dintr-o regiune fixată, suprafeţele de nivel corespunzătoare se numesc *izoterme* (respectiv *izobare*).

Definiţia 2.1. *Fie $\varphi(x, y, z)$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă $C^1(U)$ unde $U \subset \mathbb{R}^3$ este un deschis. Pentru orice punct $a = (x_0, y_0, z_0) \in U$* **gradientul câmpului φ în punctul** *a este vectorul*

$$\operatorname{grad}_a \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a)\bar{\imath} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a)\bar{\jmath} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(a)\bar{k}. \tag{8}$$

Asocierea $U \to \mathcal{V}_3$, $a \mapsto \operatorname{grad}_a \varphi$ este un câmp vectorial notat grad φ *şi numit* **câmpul de gradienţi asociat lui φ**.

Această definiţie depinde de fixarea unui reper ortogonal în $\mathbb{R}^3$ (de versori $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ şi constituie un caz particular al conceptului introdus în capitolul III, §4; vom vedea că $\operatorname{grad}_a \varphi$ depinde numai de φ şi a.

Exemple. Dacă $\varphi(x, y, z) = x^2 + yz$, atunci $\operatorname{grad} \varphi = 2x\bar{\imath} + z\bar{\jmath} + y\bar{k}$, iar dacă $\psi(x, y, z) = x + yz + xyz$ şi $a = (1, 0, 3)$, atunci $\operatorname{grad}_a \psi = \bar{\imath} + 6\bar{\jmath}$.

Notăm în cele ce urmează cu $\mathcal{S}_p$ (respectiv $\mathcal{V}_p$) mulţimea câmpurilor scalare (vectoriale). Atunci luarea gradientului defineşte o asociere

$$\mathcal{S}_p \to \mathcal{V}_{p-1}.$$

Proprietăţi de calcul ale gradientului

Proprietăţile care urmează rezultă direct din proprietăţi ale derivatelor parţiale şi demonstraţia lor este imediată.

a) *Dacă φ, ψ sunt câmpuri scalare din $C^1(U)$ şi dacă α este o constantă reală, atunci pentru orice punct $a \in U$,* $\operatorname{grad}_a \alpha = 0$, $\operatorname{grad}_a(\alpha\varphi) = \alpha \operatorname{grad}_a \varphi$, $\operatorname{grad}_a(\varphi+\psi) = \operatorname{grad}_a\varphi + \operatorname{grad}_a\psi$, $\operatorname{grad}_a(\varphi\psi) = \varphi(a)\cdot\operatorname{grad}_a\psi + \psi(a)\cdot\operatorname{grad}_a\varphi$, *iar dacă $\psi(a) \neq 0$, atunci*

$$\operatorname{grad}_a\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \frac{\psi(a)\cdot\operatorname{grad}_a\varphi - \varphi(a)\cdot\operatorname{grad}_a\psi}{\psi(a)^2}.$$

În punctul curent din U aceste relaţii se scriu $\operatorname{grad}\alpha\varphi = \alpha\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{grad}(\varphi+\psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi$, $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi$ etc.

b) *Fie $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \xrightarrow{u} \mathbb{R}$ funcţii de clasă C^1. Atunci*

$$\operatorname{grad}_a(u\circ\varphi) = u'(\varphi(a))\cdot\operatorname{grad}_a\varphi,$$

pentru orice $a \in U$, iar în punctul curent, $\operatorname{grad} u(\varphi) = u'(\varphi)\cdot\operatorname{grad}\varphi$.

c) *Fie $\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$ vectorul de poziţie al punctului curent şi $\bar{a} = a_1\bar{\imath} + a_2\bar{\jmath} + a_3\bar{k}$ un vector constant. Atunci produsul scalar $\varphi = \bar{a}\cdot\bar{r} = a_1x + a_2y + a_3z$ are gradientul*

$$\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k} = a_1\bar{\imath} + a_2\bar{\jmath} + a_3\bar{k} = \bar{a},$$

adică

$$\operatorname{grad}(\bar{a}\cdot\bar{r}) = \bar{a}. \tag{9}$$

În mod similar,

$$\operatorname{grad} r = \operatorname{grad}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{\imath} +$$

$$+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{\jmath} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{k} = \frac{\bar{r}}{r}$$

în orice punct din $\mathbb{R}^3$, distinct de origine. Aşadar, reţinem formula

$$\operatorname{grad} r = \frac{\bar{r}}{r}. \tag{10}$$

Dacă u este o funcţie de clasă C^1, atunci

$$\operatorname{grad} u(r) = u'(r)\cdot\operatorname{grad} r = u'(r)\cdot\frac{\bar{r}}{r} \quad \text{şi} \quad \operatorname{grad} u(\bar{a}\cdot\bar{r}) = u'(\bar{a}\cdot\bar{r})\cdot\bar{a}.$$

d) *Dacă $\varphi \in C^1(U)$, $a \in U$ şi dacă $\bar{s}$ este un versor fixat, atunci*

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}(a) = \bar{s}\cdot\operatorname{grad}_a\varphi \quad \text{şi} \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \bar{s}\cdot\operatorname{grad}\varphi, \tag{11}$$

în punctul curent din U.

Această relaţie rezultă direct din teorema III 4.6.

e) *Vectorul* $\operatorname{grad}_a\varphi$ *are direcţia normalei la suprafaţa de nivel S a câmpului scalar $\varphi \in C^1(U)$, care trece prin punctul a.*

Acest fapt a fost probat în condiţii mai generale (teorema III 5.7). Iată o demonstraţie mai directă: Fie

$$(C):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad ,t\in I \\ z = z(t)\end{cases}$$

o curbă parametrizată *oarecare* de clasă C^1 trecând prin a şi situată pe S.

Aşadar, $\varphi(x(t),y(t),z(t)) = \varphi(a)$, pentru orice $t\in I$ şi derivând în raport cu t se obţine

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\gamma(t))x'(t)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\gamma(t))y'(t)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\gamma(t))z'(t)=0,\quad (\forall)\, t\in I, \qquad (12)$$

unde am notat $\gamma(t) = (x(t),y(t),z(t))$. Deoarece există $t_0\in I$ astfel încât $\gamma(t_0) = a$ (deoarece punctul a aparţine urmei curbei (C)), rezultă din (12) că

$$\operatorname{grad}_a\varphi\cdot\bar\tau = 0,\quad \text{deci}\quad \operatorname{grad}_a\varphi\perp\bar\tau,$$

unde $\bar\tau = x'(t_0)\bar\imath+y'(t_0)\bar\jmath+z'(t_0)\bar k$ este tocmai un vector tangent la (C). Aşadar $\operatorname{grad}_a\varphi$ este ortogonal planului tangent la suprafaţa S în punctul a; fig. V.12.

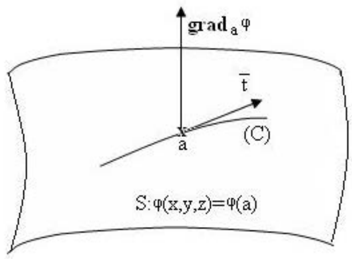


Fig. V.12

Indicăm o ultimă proprietate a gradientului care arată rolul deosebit al acestuia în studiul variaţiei câmpurilor scalare şi constituie totodată ideea de bază în elaborarea metodelor de gradient (vezi III, §6, aplicaţia 2): dacă $\varphi\in C^1(U)$ şi $a\in U$ sunt fixate, atunci dintre toţi versorii $\bar s$, cel pentru care $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}(a)$ este extremă este unul din versorii vectorului $\operatorname{grad}_a\varphi$. Acest fapt a fost probat în teorema III 5.8 sau rezultă direct din formula (11), observând că $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}(a) = 1\cdot||\operatorname{grad}_a\varphi||\cdot\cos\theta$ unde θ este unghiul dintre vectorii $\bar s$ şi $\operatorname{grad}_a\varphi$, deci extremele lui $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}(a)$ se obţin atunci când $\cos\theta=\pm1$, adică $\bar s$ este coliniar cu $\operatorname{grad}_a\varphi$.

Observaţie. Cele spuse anterior se refac fără dificultate pentru câmpuri scalare plane (definite în deschişi din $\mathbb{R}^2$). În acest caz se definesc curbe de nivel, gradientul are direcţia normalei etc.

5.2.2 Divergenţa şi rotorul unui câmp vectorial. Operatorul ∇ (Nabla)

Dacă se fixează un reper ortogonal plan xOy de versori $\bar\imath,\bar\jmath$ şi dacă $\bar v(x,y) = P(x,y)i+Q(x,y)j$ este un câmp vectorial de clasă $C^1(U)$, unde $U\subset\mathbb{R}^2$ este un deschis, atunci se pot defini, pentru orice punct $a\in U$:

$$\operatorname{div}_a\bar v \triangleq \frac{\partial P}{\partial x}(a)+\frac{\partial Q}{\partial y}(a),\quad \text{divergenţa lui } \bar v \text{ în punctul } a,$$

$$\operatorname{rot}_a\bar v \triangleq \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(a)-\frac{\partial P}{\partial y}(a)\right)(\bar\imath\times\bar\jmath) \text{ rotorul lui } \bar v \text{ în punctul } a,$$

precum şi forma diferenţială de gradul I în U

$$\omega = P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

Câmpul $\bar v$ se numeşte *câmp de gradienţi în* U dacă există un câmp scalar $\varphi\in C^1(U)$ numit *potenţial scalar al lui* $\bar v$ astfel încât $\bar v = \operatorname{grad}\varphi$, adică, $P = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ în fiecare punct din U. Dacă în plus $\varphi\in C^2(U)$, atunci

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]\cdot(\bar\imath\times\bar\jmath) = 0$$

şi

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Delta\varphi$$

(*laplacianul lui* φ). Câmpurile de gradienţi se mai numesc *câmpuri derivând dintr-un potenţial.*

Exemple. 1) Orice câmp constant $\bar{v}(x,y) = \bar{a} = a_1 i + a_2 \bar{\jmath}$ este un câmp de gradienţi, deoarece luând $\varphi(x,y) = a_1 x + a_2 j$, avem $\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi$.

2) Pentru câmpul plan newtonian $\bar{v} = -k\dfrac{\bar{r}}{r^3}$ (unde $\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $k > 0$ constant) definit în $U = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ avem $\operatorname{div}\bar{v} = \dfrac{k}{r^3}$, $\operatorname{rot}\bar{v} = 0$ şi $\bar{v} = \operatorname{grad}\left(\dfrac{k}{r}\right)$ în fiecare punct din U. Verificările sunt imediate.

În capitolul IV am dat caracterizarea câmpurilor de gradienţi (corolarul teoremei 5.2). Adăugăm că potenţialul scalar φ este unic determinat până la o constantă aditivă, dacă U este un deschis conex, deoarece dacă $\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi_1$, $\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi_2$ în U, atunci $\operatorname{grad}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, deci $\varphi_1 - \varphi_2 =$ constant.

Reluăm cele de mai sus pentru cazul spaţiului $\mathbb{R}^3$, raportat la un reper ortogonal $Oxyz$ de versori $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$.

Definiţia 2.2. *Fie $\bar{v} = P(x,y,z)\bar{\imath} + Q(x,y,z)\bar{\jmath} + R(x,y,z)\bar{k}$ un câmp de clasă $C^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^3$ fiind un deschis fixat.*

Pentru orice punct $a \in U$ se definesc scalarul

$$div_a\bar{v} \triangleq \frac{\partial P}{\partial x}(a) + \frac{\partial P}{\partial y}(a) + \frac{\partial R}{\partial z}(a), \tag{13}$$

numit **divergenţa lui** $\bar{v}$ **în** a *şi vectorul următor, numit* **rotorul lui** $\bar{v}$ **în** a

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_a\bar{v} \triangleq \left[\frac{\partial R}{\partial y}(a) - \frac{\partial Q}{\partial z}(a)\right]\bar{\imath} + \left[\frac{\partial P}{\partial z}(a) - \frac{\partial R}{\partial x}(a)\right]\bar{\jmath} + \\ + \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial y}(a)\right]\bar{k},\end{aligned} \tag{14}$$

care poate fi scrisă sugestiv astfel

$$\operatorname{rot}_a\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

("dezvoltând" acest determinant simbolic după linia întâi).

Aparent, $\operatorname{div}_a\bar{v}, \operatorname{rot}_a\bar{v}$ depind de alegerea reperului ortogonal; vom vedea ulterior că în realitate aceste entităţi sunt intrinseci şi depind numai de vectorul $\bar{v}$ şi de punctul a.

Proprietăţi de calcul ale divergenţei şi rotorului

a) *Fie $\bar{v}$ şi $\bar{w}$ două câmpuri vectoriale de clasă C^1 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. Atunci pentru orice punct $a \in U$,*

$$\operatorname{div}_a(\bar{v} + \bar{w}) = \operatorname{div}_a\bar{v} + \operatorname{div}_a\bar{w}, \quad \operatorname{rot}_a(\bar{v} + \bar{w}) = \operatorname{rot}_a\bar{v} + \operatorname{rot}_a\bar{w}$$

iar dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ este constant, atunci

$$\operatorname{div}_a(\lambda\bar{v}) = \lambda\operatorname{div}_a\bar{v}, \quad \operatorname{rot}_a(\lambda\bar{v}) = \lambda\operatorname{rot}_a\bar{v}.$$

În punctul curent din U aceste relaţii se scriu

$$\operatorname{div}(\bar{v} + \bar{w}) = \operatorname{div}\bar{v} + \operatorname{div}\bar{w}, \quad \operatorname{rot}(\bar{v} + \bar{w}) = \operatorname{rot}\bar{v} + \operatorname{rot}\bar{w},$$

$$\operatorname{div}\lambda\bar{v} = \lambda\operatorname{div}\bar{v}, \quad \operatorname{rot}\lambda\bar{v} = \lambda\operatorname{rot}\bar{v}.$$

b) *Dacă* $\bar{c}$ *este un vector constant, atunci* $\operatorname{div}\bar{c} = 0$, $\operatorname{rot}\bar{c} = 0$, *în fiecare punct din* $\mathbb{R}^3$. *Dacă se notează ca de obicei,* $\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$ *(vectorul de poziţie), atunci*

$$\operatorname{div}\bar{r} = 3, \quad \operatorname{rot}\bar{r} = 0, \quad \operatorname{div}(\bar{c}\times\bar{r}) = 0, \quad \operatorname{rot}(\bar{c}\times\bar{r}) = 2\bar{c}. \qquad (15)$$

Verificarea formulelor (15) se face direct, considerând componentele produsului vectorial $\bar{c}\times\bar{r}$.

c) *Fie* φ *un câmp scalar şi* $\bar{v}$ *un câmp vectorial, ambele de clasă* C^1 *într-un deschis* $U \subset \mathbb{R}^3$. *Atunci pentru orice* $a \in U$ *au loc relaţiile*

$$\operatorname{div}_a(\varphi\bar{v}) = \varphi(a)\operatorname{div}_a\bar{v} + \bar{v}(a)\cdot\operatorname{grad}_a\varphi,$$

$$\operatorname{rot}_a(\varphi\bar{v}) = \varphi(a)\operatorname{rot}_a\bar{v} - \bar{v}(a)\times\operatorname{grad}_a\varphi,$$

şi în punctul curent din U,

$$\operatorname{div}(\varphi\bar{v}) = \varphi\operatorname{div}\bar{v} + \bar{v}\cdot\operatorname{grad}\varphi, \quad \operatorname{rot}(\varphi\bar{v}) = \varphi\operatorname{rot}\bar{v} - \bar{v}\times\operatorname{grad}\varphi. \qquad (16)$$

Pentru demonstraţie, presupunem că $\bar{v} = P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k}$, deci

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\varphi\bar{v}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi P) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi Q) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi R) = P\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial P}{\partial x} + \\ &+ Q\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial Q}{\partial y} + R\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varphi\frac{\partial R}{\partial z} = \varphi\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + \\ &+ P\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Q\frac{\partial\varphi}{\partial y} + R\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \varphi\operatorname{div}\bar{v} + \bar{v}\cdot\operatorname{grad}\varphi \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Exemple. 1) Fie câmpul vectorial $\bar{v} = x^2y\bar{\imath} + yz\bar{\jmath} - 2xyz\bar{k}$ de clasă C^∞ în $\mathbb{R}^3$. În punctul curent avem

$$\operatorname{div}\bar{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz) = z,$$

$$\operatorname{rot}\bar{v} = \begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & yz & -2xyz\end{vmatrix} = -(2xz + y)\bar{\imath} + 2yz\bar{\jmath} - x^2\bar{k}.$$

2) Pentru câmpul newtonian $\bar{v} = -k\dfrac{\bar{r}}{r^3}$ ($k > 0$ constant) avem $\bar{v} = \varphi\bar{r}$ unde $\varphi = -\dfrac{k}{r^3}$, deci $\operatorname{div}\bar{v} = \operatorname{div}(\varphi\bar{r}) = \varphi\operatorname{div}\bar{r} + \bar{r}\cdot\operatorname{grad}\varphi$ şi deoarece $\operatorname{grad}\varphi = -k\operatorname{grad}(r^{-3}) = 3k\cdot r^{-4}\dfrac{\bar{r}}{r} = \dfrac{3k}{r^5}\bar{r}$, rezultă $\operatorname{div}\bar{v} = 3\left(-\dfrac{k}{r^3}\right) + \dfrac{3k}{r^5}(\bar{r}\cdot\bar{r})$ şi cum $\bar{r}\cdot\bar{r} = r^2$, rezultă că $\operatorname{div}\bar{v} = 0$. Pe de altă parte,

$$\operatorname{rot}\bar{v} = \operatorname{rot}(\varphi\bar{r}) = \varphi\operatorname{rot}\bar{r} - \bar{r}\times\operatorname{grad}\varphi = -\bar{r}\times\operatorname{grad}\varphi =$$

$$= -\bar{r}\times\left(\frac{3k}{r^5}\bar{r}\right) = -\frac{3k}{r^5}(\bar{r}\times\bar{r}) = 0.$$

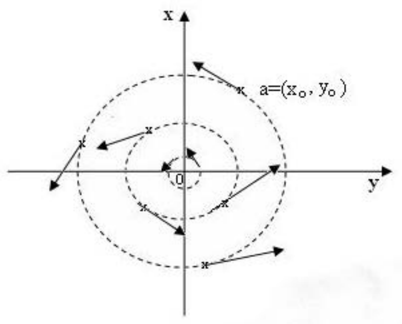


Fig. V.13

Câmpul vectorial $\bar{v} = -y\bar{\imath} + x\bar{\jmath}$ este un "câmp de vârtejuri" deoarece el este de forma $\bar{v} = \operatorname{rot}\bar{w}$ (de exemplu luând $\bar{w} = xz\bar{\imath} + yz\bar{\jmath}$). Terminologia este aici motivată de faptul că în fiecare punct $a = (x_0, y_0)$ vectorul $\bar{v}(x_0, y_0) = -y_0\bar{\imath} + x_0\bar{\jmath}$ cu punctul de aplicaţie în a, este tangent la cercul cu centrul în origine trecând prin punctul a (fig. V.13).

Gradientul, divergenţa, rotorul se mai numesc *operatorii diferenţiali de ordinul I în teoria câmpurilor*. Am văzut că gradientul defineşte o asociere $\operatorname{grad}: \mathcal{S}_p \to \mathcal{V}_{p-1}$. În mod similar, divergenţa şi rotorul definesc asocieri

$$\operatorname{div}: \mathcal{V}_p \to \mathcal{S}_{p-1}, \quad \operatorname{rot}: \mathcal{V}_p \to \mathcal{V}_{p-1},$$

O tratare unitară a acestor asocieri este realizată în cadrul teoriei formelor diferenţiale. Există însă o posibilitate de unificare a proprietăţilor de calcul ale gradientului, divergenţei şi rotorului, pentru câmpuri de clasă C^1, cu ajutorul unui operator simbolic

$$\nabla = \bar{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{17}$$

numit *operatorul nabla* (sau *vectorul nabla*, având drept componente operatorii de derivare parţială). Facem convenţiile de a considera $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi$ ca produs între câmpul scalar φ şi vectorul ∇, $\operatorname{div}\bar{v} = \nabla\cdot\bar{v}$ ca produs scalar între vectorul ∇ şi vectorul $\bar{v}$ şi $\operatorname{rot}\bar{v} = \nabla\times\bar{v}$ ca produs vectorial între vectorul ∇ şi vectorul $\bar{v}$. De fapt convenind să definim produsul lui $\frac{\partial}{\partial x}$ (respectiv $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$) cu un câmp scalar φ ca fiind $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ (respectiv $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$), rezultă

$$\nabla\varphi = \left(\bar{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \bar{\imath}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{\jmath}\frac{\partial}{\varphi}\partial y + \bar{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \operatorname{grad}\varphi$$

şi dacă $\bar{v} = P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k}$, atunci

$$\nabla\cdot\bar{v} = \left(\bar{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k}) =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\bar{v}$$

$$\nabla\times\bar{v} = \left(\bar{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\bar{v}.$$

Se verifică imediat că în fiecare din cele trei ipostaze, ∇ este liniar adică

$$\nabla(\varphi_1 + \varphi_2) = \nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2,\ \nabla(\lambda\varphi) = \lambda\nabla\varphi,\ \nabla\cdot(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \nabla\cdot\varphi_1 + \nabla\cdot v_2,$$

$$\nabla\cdot(\lambda\bar{v}) = \lambda\nabla\cdot\bar{v},\ \nabla\times(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \nabla\times\bar{v}_1 + \nabla\times\bar{v}_2,\ \nabla\times(\lambda\bar{v}) = \lambda\nabla\times\bar{v},$$

cu notaţii transparente. De asemenea, în fiecare din ele trei ipostaze, ∇ aplicat unui produs de doi factori are ca rezultat o sumă de doi termeni în fiecare din aceştia ∇ acţionând câte o dată (ca în cazul derivării uzuale). Datorită caracterului vectorial al lui ∇, operaţiile în care el intervine (în fiecare din cele trei ipostaze) se fac cu respectarea proprietăţilor de algebră vectorială. Trebuie adăugat că entităţile cărora li se aplică ∇ sunt scrise la dreapta acestuia.

Remarcăm în sfârşit că derivata după un versor $\bar{s} = \alpha\bar{\imath} + \beta\bar{\jmath} + \gamma\bar{k}$ se exprimă de asemenea cu ajutorul lui ∇, anume

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \bar{s}\cdot(\nabla\varphi) = (\bar{s}\cdot\nabla)\varphi,$$

ultima relaţie decurgând din faptul că

$$\bar{s}\cdot\nabla = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{şi deci}$$

$$(\bar{s}\cdot\nabla)\varphi = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \bar{s}\cdot(\nabla\varphi).$$

Aşadar, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \bar{s}\cdot\nabla$.

Iată câteva reguli de calcul cu nabla.

$\nabla c = 0$ (dacă c este o constantă scalară);
$\nabla \cdot \bar{c} = 0$, $\nabla \times \bar{c} = 0$ (dacă $\bar{c}$ este un vector constant);
$\nabla \cdot (\varphi \bar{v}) = \nabla \cdot (\overset{\downarrow}{\varphi}\, \bar{v}) + \nabla \cdot (\varphi\, \overset{\downarrow}{\bar{v}}) = \bar{v} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi(\nabla \cdot \bar{v}) = \bar{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \bar{v}$;
$\nabla \times (\varphi \bar{v}) = \nabla \times (\overset{\downarrow}{\varphi}\, \bar{v}) + \nabla \times (\varphi\, \overset{\downarrow}{\bar{v}}) = -\bar{v} \times (\nabla \varphi) + \varphi(\nabla \times \bar{v}) = -\bar{v} \times \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{rot} \bar{v}$
săgeata $\downarrow$ indică factorul pe care se aplică ∇); motivaţia acestor calcule se află în formulele (31); apoi,

$\nabla \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \nabla \cdot (\overset{\downarrow}{\bar{v}} \times \bar{w}) + \nabla \cdot (\bar{v} \times \overset{\downarrow}{\bar{w}}) = \bar{w} \cdot (\nabla \times \bar{v}) - \bar{v} \cdot (\nabla \times \bar{w})$,
adică $\operatorname{div}(\bar{v} \times \bar{w}) = \bar{w} \cdot \operatorname{rot} \bar{v} - \bar{v} \cdot \operatorname{rot} \bar{w}$; în particular, $\nabla \cdot (\bar{c} \times \bar{r}) = \bar{r} \cdot \operatorname{rot} \bar{c} - \bar{c} \cdot \operatorname{rot} \bar{r} = 0$ dacă $\bar{c}$ este vector constant, iar $\bar{r}$ este vectorul de poziţie etc.

Exemplu. Calculăm cu ajutorul lui ∇ divergenţa şi rotorul câmpului vectorial $\bar{v} = \dfrac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} \bar{r}$ de clasă C^∞ în $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$, unde $\bar{c}$ este un vector constant, iar $\bar{r}$ vectorul de poziţie. Avem

$$\operatorname{div} \bar{v} = \nabla \cdot \bar{v} = \nabla \cdot \left(\frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} \cdot \bar{r} \right) + \left(\frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} \cdot \bar{r} \right) = \bar{r} \cdot \left(\nabla \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} \right) + \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} (\nabla \cdot \bar{r}) =$$

$$\bar{r} \cdot \operatorname{grad} \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} + 3 \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} = \bar{r} \cdot \frac{\bar{c} \cdot r^4 - (\bar{c} \cdot \bar{r}) \cdot 4r^3 \dfrac{\bar{r}}{r}}{r^8} + 3 \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} =$$
$$= \frac{(\bar{r} \cdot \bar{c}) r^4 - (\bar{c} \cdot \bar{r}) \cdot 4r^2 (\bar{r} \cdot \bar{r})}{r^8} + 3 \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} = 0,$$

deoarece $\bar{r} \cdot \bar{r} = r^2$; apoi,

$$\operatorname{rot} \bar{v} = \nabla \times \bar{v} = \nabla \times \left(\frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} \cdot \bar{r} \right) + \nabla \times \left(\frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} \cdot \bar{r} \right) = -\bar{r} \times \operatorname{grad} \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} +$$

$$+ \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} \operatorname{rot} \bar{r} = -\bar{r} \times \operatorname{grad} \frac{\bar{c} \cdot \bar{r}}{r^4} = -\bar{r} \times \frac{\bar{c} \cdot r^4 - (\bar{c} \cdot \bar{r}) \cdot 4r^2 \bar{r}}{r^8} = \frac{1}{r^4} (\bar{c} \times \bar{r}).$$

Dacă φ este un câmp scalar de clasă C^2 iar $\bar{v} = P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k}$ un câmp vectorial de clasă C^2 (într-un anumit deschis din $\mathbb{R}^3$), atunci au sens următoarele 5 combinaţii:

$$\operatorname{grad} (\operatorname{div} \bar{v}),\ \operatorname{div} (\operatorname{rot} \bar{v}),\ \operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi), \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi) \text{ şi } \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \bar{v}).$$

Folosind teorema lui Schwartz (teorema III 4.8), avem

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \bar{v}) = \operatorname{div} \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{div} \left[\bar{\imath} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \right.$$

$$\left. - \bar{\jmath} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) =$$
$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0$$

şi similar,

$$\operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi) = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \bar{\imath} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) -$$

$$-\bar{\jmath}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\right)+\bar{k}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)=0.$$

Pe de altă parte,

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)=\mathrm{div}\,\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{\imath}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{\jmath}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta\varphi.$$

Se verifică de asemenea uşor că

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\bar{v})=\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\bar{v})-\left(\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial z^2}\right),$$

unde derivata unui câmp vectorial se calculează pe componente.

Cele 5 combinaţii anterioare au fost obţinute prin repetarea lui ∇. Faptul că $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\bar{v})=0$, $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)=0$ revine în limbajul operatorului nabla la relaţiile $\nabla\cdot(\nabla\times\bar{v})=0$, $\nabla\times(\nabla\cdot\varphi)=0$, care sunt consecinţe directe ale unor reguli elementare de algebră vectorială.

5.2.3 Integrale de suprafaţă: fluxul unui câmp vectorial printr-o porţiune de suprafaţă

Fie Δ un deschis conex în $\mathbb{R}^2$ şi $s:\Delta\to\mathbb{R}^3$ o pânză de suprafaţă parametrizată de clasă C^1 (cap. III, definiţia 5.11), având ecuaţii parametrice $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, $(u,v)\in\Delta$. Vom presupune în plus că pânza de suprafaţă s este injectivă (adică $(u,v)\neq(u',v')$ în Δ implică $s(u,v)\neq s(u',v')$) şi nesingulară (adică $\bar{r}_u\times\bar{r}_v\neq 0$ în fiecare punct $(u,v)\in\Delta$).

Definiţia 2.3. *Pentru orice submulţime măsurabilă $M\subset\Delta$, se numeşte* **aria porţiunii de suprafaţă** $s(M)$ *numărul real pozitiv*

$$\text{aria}\,s(M)\triangleq\iint_M||\bar{r}_u\times\bar{r}_v||\mathrm{d}u\cdot\mathrm{d}v. \tag{18}$$

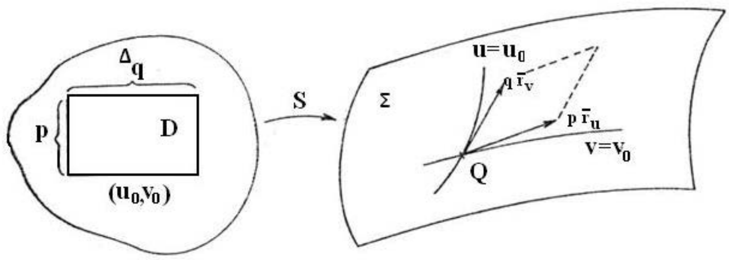


Fig. V.14

O justificare a acestei definiţii este următoarea: fixăm $(u_0,v_0)\in\Delta$ şi alegem un dreptunghi D conţinut în Δ, cu lungimile laturilor p,q şi fie $Q(x_0,y_0,z_0)$ punctul $s(u_0,v_0)$ de pe urma $\Sigma=s(\Delta)$ a pânzei s.

Fie $v=v_0$ (respectiv $u=u_0$) curbele parametrice care trec prin Q şi sunt situate pe Σ şi $\bar{r}_u=\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u}$ (respectiv $\bar{r}_v=\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial v}$) vectorii tangenţi în Q la aceste curbe. Planul tangent în punctul Q la Σ este identificat cu subspaţiul vectorial real bidimensional $T_Q\subset\mathbb{R}^3$, generat de vectorii liniar independenţi

$$\bar{r}_u=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right),\quad \bar{r}_v=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

cu derivatele parţiale calculate în punctul (u_0,v_0). Aria paralelogramului construit pe vectorii $p\bar{r}_u$, $q\bar{r}_v$ este $pq||\bar{r}_u\times\bar{r}_v||$ şi aceasta "aproximează" aria $s(D)$, adică aria $s(D)\simeq||\bar{r}_u\times\bar{r}_v||$ aria D; fig. V. 14. Această formulă aproximativă se extinde la faguri conţinuţi în Δ şi sugerează formula (18).

Exemple. 1) Considerăm octantul de sferă $(\Sigma) : x^2+y^2+z^2=R^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, parametrizat prin $\bar{r}=R\sin u\cos v\bar{\imath}+R\sin u\sin v\bar{\jmath}+R\cos u\bar{k}$, $0<u<\frac{\pi}{2}$, $0<v<\frac{\pi}{2}$. Aici $\Delta=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi curbele parametrice $v=$ constant, $u=$ constant sunt respectiv arce de meridiane şi paraleli pe sferă; în plus, se găseşte că $||\bar{r}_u\times\bar{r}_v||=R^2\sin u$; fig. V. 15.

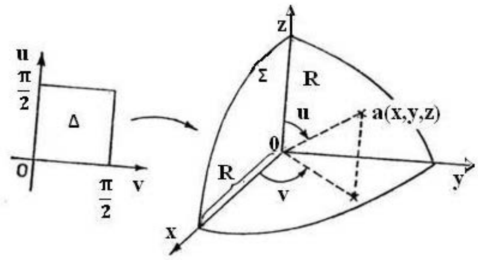


Fig. V.15

Atunci aplicând formula (18) rezultă

$$\text{aria}\Sigma=\iint_\Delta ||\bar{r}_u\times\bar{r}_v||\mathrm{d}u\mathrm{d}v=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\mathrm{d}u=\frac{\pi R^2}{2}$$

şi aria întregii sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$ va fi $8\cdot\frac{\pi R^2}{2}=4\pi R^2$.

2) Fie $z=f(x,y)$ o suprafaţă definită explicit (proiectabilă pe planul xOy) unde $f:\Delta\to\mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1 pe un deschis $\Delta\subset\mathbb{R}^2$. Fie $M\subset\Delta$ o mulţime măsurabilă şi (Σ) porţiunea corespunzătoare din suprafaţă, având parametrizarea $\bar{r}(x,y)=x\bar{\imath}+y\bar{\jmath}+f(x,\bar{y})k$, $(x,y)\in M$; fig. V. 16.

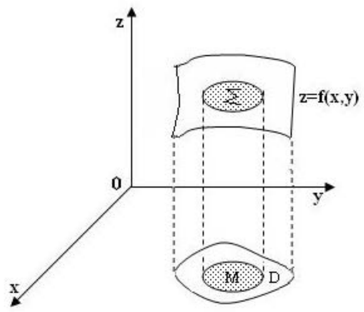


Fig. V.16

Deoarece $\bar{r}_x=\bar{\imath}+\frac{\partial f}{\partial x}\bar{k}$, $\bar{r}_y=\bar{\jmath}+\frac{\partial f}{\partial y}\bar{k}$, rezultă $\bar{r}_x\times\bar{r}_y=-\frac{\partial f}{\partial x}\bar{\imath}-\frac{\partial f}{\partial y}\bar{\jmath}+\bar{k}$ şi $||\bar{r}_u\times\bar{r}_v||=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$. În concluzie,

$$\text{aria}\,\Sigma=\iint_M\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{19}$$

Ca un exemplu concret, calculăm aria decupată din emisfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z>0$ de către "nitul" cilindric $x^2+y^2-Ry=0$ (fig. V. 17). În acest caz, $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ şi

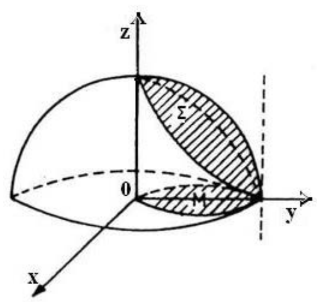


Fig. V.17a

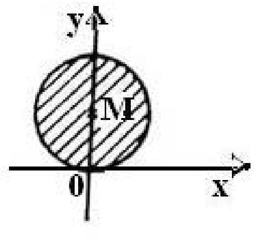


Fig. V.17b

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}=$$

$$=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \text{deci}\quad \text{aria}\,\Sigma=R\iint_M\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

şi trecând la coordonate polare, rezultă

$$\text{aria}\,\Sigma=R\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{R\sin\theta}\frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=-R\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\sqrt{R^2-\rho^2}\Big|_0^{R\sin\theta}=$$

$$=R^2\int_0^\pi(1-|\cos\theta|)\mathrm{d}\theta=\pi R^2-R^2\int_0^\pi|\cos\theta|\mathrm{d}\theta=(\pi-2)R^2.$$

Nu este lipsit de interes să reamintim că în capitolul IV, §2.2 am definit lungimea unui arc de curbă parametrizată de clasă C^1 ca fiind marginea superioară a lungimilor liniilor poligonale înscrise în acel arc; dar o definiţie similară pentru aria unei porţiuni de suprafaţă ca marginea superioară a ariilor reţelelor de triunghiuri cu vârfuri pe suprafaţă conduce la contradicţii.

Fie din nou $\Sigma = s(M)$ o porţiune de suprafaţă ca mai sus, unde $M \subset \Delta$ este o submulţime măsurabilă şi fie $F(x, y, z)$, $F : U \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$ care conţine pe Σ.

Definiţia 2.4. *Se numeşte* **integrală de suprafaţă a funcţiei** F **pe** Σ *numărul real*

$$\int_\Sigma F(x,y,z)\mathrm{d}\sigma \triangleq \iint_M F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot ||\bar{r}_u \times \bar{r}_v|| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v. \qquad (20)$$

(Expresia diferenţială $\mathrm{d}\sigma = ||\bar{r}_u \times \bar{r}_v||\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ se mai numeşte *element de suprafaţă*).

În cazul când Σ este o porţiune din planul xOy, avem $z = 0$, $\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$ şi $\bar{r}_x \times \bar{r}_y = \bar{\imath} \times \bar{\jmath}$ deci $||\bar{r}_x \times \bar{r}_y|| = 1$ şi se obţine integrala dublă uzuală pe M o funcţiei $F(x, y, 0)$. Aşadar integralele de suprafaţă constituie o extindere a integralelor duble.

Indicăm câteva proprietăţi de calcul ale integralelor de suprafaţă, care rezultă direct din definiţia (20) şi din proprietăţi corespunzătoare ale integralelor duble; totodată aceste proprietăţi sunt similare celor date în capitolul IV, §3 pentru integrale curbilinii.

a) $\int_\Sigma F(x,y,z)d\sigma$ *este independentă de parametrizarea lui Σ în sensul că pentru două parametrizări echivalente valoarea integralei este aceeaşi.*

Aceasta rezultă din teorema 1.5 de schimbare de variabilă în integrala dublă.

b) *Dacă F şi G sunt funcţii continue pe un deschis care conţine Σ şi dacă α, β sunt constante reale, atunci*

$$\int_\Sigma (\alpha F + \beta G)\mathrm{d}\sigma = \alpha \int_\Sigma F\mathrm{d}\sigma + \beta \int_\Sigma G\mathrm{d}\sigma \quad \text{(liniaritate)};$$

c) *Dacă Σ este juxtapunerea, într-un sens uşor de explicitat,a două porţiuni disjuncte Σ_1, Σ_2 de suprafaţă, atunci*

$$\int_\Sigma F\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\Sigma_1} F\mathrm{d}\sigma + \int_{\Sigma_2} F\mathrm{d}\sigma \quad \text{(aditivitate)};$$

d) *Dacă Σ este "capacul" unei suprafeţe $z = f(x, y)$ proiectabile pe planul xOy pe o mulţime măsurabilă M din planul xOy (vezi fig. V. 16), atunci*

$$\int_\Sigma F(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_M F(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$$

e) *Aria unei porţiuni de suprafaţă Σ ca mai sus este*

$$\text{aria}\,\Sigma = \int_\Sigma 1 \cdot \mathrm{d}\sigma \quad \text{(conform (19))}.$$

Ca în cazul integralelor curbilinii se poate da o altă definiţie a conceptului de integrală de suprafaţă, cu ajutorul unor sume de tip Riemann, asociate unor diviziuni ale porţiunii respective de suprafaţă; definiţia 2.4 prin formula de calcul (20) are însă avantaje incontestabile şi în acelaşi timp permite o interpretare intuitivă a integralelor de suprafaţă.

Orientarea suprafeţelor

Ne situăm în ipostazele făcute de la început relativ la pânza de suprafaţă $s : \Delta \to \mathbb{R}^3$, cu urma $\Sigma = s(\Delta)$. Pentu orice punct $Q \in \Sigma$ există şi este unic un punct $(u, v) \in \Delta$ astfel încât $Q = s(u, v)$ (căci aplicaţia s este injectivă); în punctul Q există doi versori normali la T_Q, anume $\pm\bar{N}_Q$ unde

$$\bar{N}_Q = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{||\bar{r}_u \times \bar{r}_v||} \qquad (21)$$

În general se numeşte *orientare pe* Σ orice *aplicaţie continuă* $\Sigma \to \mathcal{V}_3$ asociind oricărui punct $Q \in \Sigma$ unul din vectorii $\varepsilon_Q \cdot \bar{N}_Q$ cu $\varepsilon_Q = +1$ sau -1. Atunci asocierea $\Sigma \to \{-1, 1\}$, $Q \mapsto \varepsilon_Q$ va fi continuă şi cum Σ este mulţime conexă (deoarece Δ este conex şi s este continuă), rezultă că asocierea anterioară este constantă, adică fie $\varepsilon_Q = +1$ pentru orice $Q \in \Sigma$ (*orientarea pozitivă* $Q \mapsto \bar{N}_Q$), fie $\varepsilon_Q = -1$ pentru orice $Q \in \Sigma$ (*orientarea negativă* $Q \mapsto \bar{N}_Q$). Dacă pe Σ există o orientare, se mai spune că Σ *este orientabilă* sau că "are două feţe", corespunzând alegerii versorilor-normală $\pm\bar{N}_Q$.

Dacă $s_1 : \Delta_1 \to \mathbb{R}^3$ ($\Delta_1 \subset \mathbb{R}^2$ conex, s_1 injectivă nesingulară) este o pânză echivalentă cu s şi dacă $F : \Delta \to \Delta_1$ este un difeomorfism astfel încât $s_1 \circ F = s$ cu jacobianul strict pozitiv în fiecare punct, atunci s şi s_1 au aceeaşi orientare, în sensul că pentru orice $(u, v) \in \Delta$ notând $(\xi, \eta) = F(u, v)$, avem

$$\frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{||\bar{r}_u \times \bar{r}_v||} = \frac{\bar{r}_\xi \times \bar{r}_\eta}{||\bar{r}_\xi \times \bar{r}_\eta||} \text{ unde } (s) : \bar{r} = \bar{r}(u, v)$$

şi $(s_1) : \bar{r} = \bar{r}(\xi, \eta)$.

Se pot imagina varietăţi de dimensiune 2 în $\mathbb{R}^3$ (definiţia 5.14 din capitolul III) care nu sunt orientate, adică nu pot fi aleşi versori normală care să varieze continuu pe întrega varietate. Astfel, răsucind o foaie dreptunghiulară, lipind capetele şi omiţând marginile foii se obţine banda lui A.F. MÖBIUS (1790-1868), care este o varietate de dimensiune 2 având o singură faţă, deci versorul normală nu poate fi ales variind continuu pe *întreaga* bandă. Deşi Q' tinde către Q, $\bar{N}_{Q'}$ nu tinde către $\bar{N}'_Q$ (fig. V. 18).

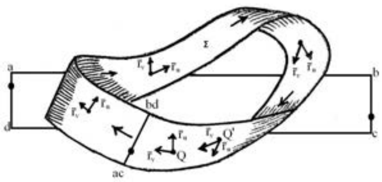


Fig. V.18

Fluxul unui câmp vectorial printr-o porţiune de suprafaţă

Fie $\bar{v} = P(x, y, z)\bar{\imath} + Q(x, y, z)\bar{\jmath} + R(x, y, z)\bar{k}$ un câmp continuu pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. Fie $\Sigma = s(M)$ o porţiune de suprafaţă parametrizată de clasă C^1 (injectivă, nesingulară), conţinută în U, unde $M \subset \Delta$ este o submulţime măsurabilă. Fixăm o orientare pe Σ, de exemplu orientarea pozitivă, prin alegerea normalei $\bar{N} = \dfrac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{||\bar{r}_u \times \bar{r}_v||}$ în punctul curent $(u, v) \in \Delta$.

Definiţia 2.5. *Se numeşte* **fluxul câmpului** $\bar{v}$ **prin** Σ *integrala de suprafaţă*

$$\Phi_\Sigma(\bar{v}) \triangleq \int_\Sigma (\bar{v} \cdot \bar{N})\, \mathrm{d}\sigma \tag{22}$$

Aşadar, ţinând cont de (20)

$$\Phi_\Sigma(\bar{v}) = \iint_M \left(\bar{v} \cdot \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{||\bar{r}_u \times \bar{r}_v||}\right) \cdot ||\bar{r}_u \times \bar{r}_v||\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \iint_M (\bar{v}, \bar{r}_u, \bar{r}_v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v,$$

unde produsul mixt este

$$(\bar{v}, \bar{r}_u, \bar{r}_v) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Dacă se alegea cealaltă orientare pe Σ se obţinea fluxul $-\Phi_\Sigma(\bar{v})$. Dacă suprafaţa Σ este proiectabilă pe planul xOy şi are ecuaţia carteziană $z = f(x, y)$ cu f de clasă $C^1(\Delta)$, unde Δ este un deschis din planul xOy, atunci $\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + f(x, y)\bar{k}$, iar

$$(\bar{v}, \bar{r}_x, \bar{r}_y) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R,$$

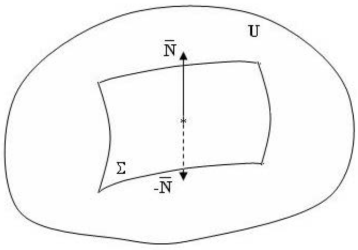


Fig. V.19

deci fluxul lui $\bar{v}$ prin Σ va fi egal cu

$$\pm \iint_M \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{23}$$

unde semnul dinaintea integralei este fixat în funcţie de orientarea aleasă (pozitivă sau respectiv negativă), iar în integrant se înlocuieşte $z = f(x, y)$, (fig. V. 19)

Proprietăţile integralelor de suprafaţă induc proprietăţi ale fluxului unui câmp vectorial (independenţa de parametrizare, liniaritate, aditivitate etc.).

Exemple. 1) Calculăm fluxul câmpului vectorilor de poziţie $\bar{v} = \bar{r}$ prin emisfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$, după normala care face unghi ascuţit cu semiaxa pozitivă Ox (fig. V. 20)

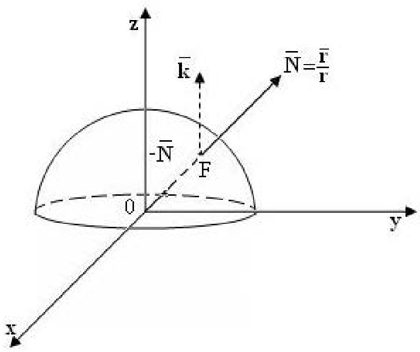


Fig. V.20

Aşadar, $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; în acest caz orientarea pozitivă este cea care corespunde lui $\bar{N} = \dfrac{\bar{r}_x \times \bar{r}_y}{||\bar{r}_x \times \bar{r}_y||}$, unde $\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\bar{k}$ deci $\bar{N} = \dfrac{x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\bar{k}}{R}$ şi deoarece $\bar{N} \cdot k > 0$, rezultă că $\bar{N}$ face unghi ascuţit cu semiaxa pozitivă Oz. În acest caz, aplicând formula (23) rezultă

$$\Phi_\Sigma(\bar{v}) = + \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \left(\frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{y^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$R^2 \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \frac{\rho\, \mathrm{d}\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 2\pi R^3.$$

2) Calculăm fluxul lui $\bar{v} = (x + y)\bar{\jmath} + z^2\bar{k}$ prin porţiunea de suprafaţă $x^2 + z^2 \leq 9$, $y = 0$ (fig. V. 21), după normala îndreptată spre y pozitiv (adică $\bar{N} = \bar{\jmath}$). În acest caz, $\bar{v} \cdot \bar{N} = x + y$ deci

$$\Phi_\Sigma(\bar{v}) = \int_\Sigma (x + y)\, \mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma x\, \mathrm{d}\sigma = \iint_{x^2+z^2 \leq 9} x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z = 0.$$

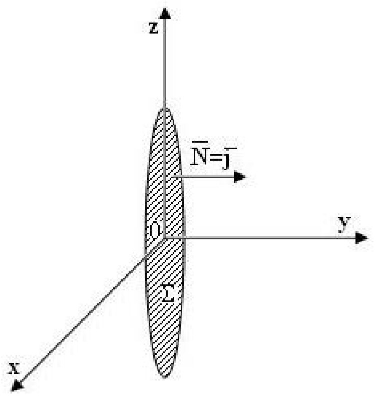


Fig. V.21

5.2.4 Formulele Green-Riemann, Gauss-Ostrogradski, Stokes

Fixăm un reper ortogonal plan xOy de versori $\bar{\imath}, \bar{\jmath}$. O mulţime $M \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte *compact bordat* dacă M este compactă şi frontiera Fr M este reuniunea unui număr finit de curbe plane parametrizate presupuse de clasă C^1 pe porţiuni, nesingulare, simple şi închise; în plus, presupunem că Fr M este orientată pozitiv. În fig. V. 22 sunt indicate câteva exemple de compacţi bordaţi, împreună cu frontierele orientate respectiv.

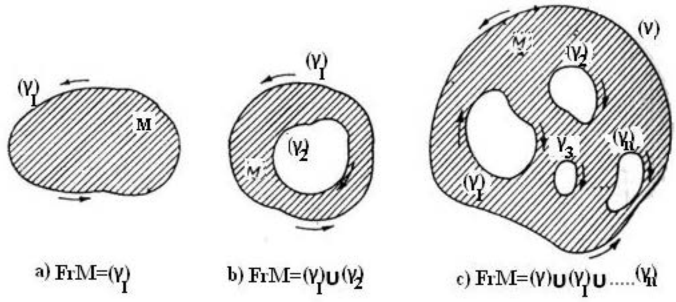


Fig. V.22

Exemple efective de compacţi bordaţi se obţin considerând intergrafice proiectabile pe Ox de tipul

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

cu $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţii de clasă C^1 astfel încât $g_1 \leq g_2$ (fig. V. 23).

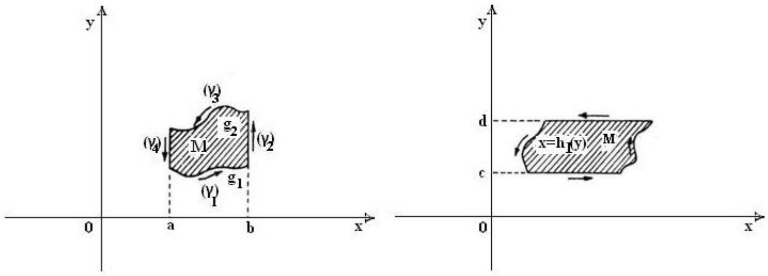


Fig. V.23

În mod similar se pot considera intergrafice proiectabile pe Oy. Vom spune că un compact bordat $M \subset \mathbb{R}^2$ este *elementar* dacă M se poate descompune ca reuniunea unui număr finit de intergrafice proiectabile pe Ox, având două câte două în comun cel mult puncte ale frontierelor şi dacă M admite o descompunere similară în intergrafice proiectabile pe Oy. Evident, triunghiurile, poligoanele convexe, discurile etc. sunt compacţi bordaţi elementari. Dacă M este un compact bordat elementar şi $M = \bigcup_{i=1}^{p} M_i$ este o descompunere ca mai sus, atunci pentru orice funcţie continuă P pe un deschis care conţine M, avem

$$\circlearrowleft \oint_{Fr\ M} P(x,y)\mathrm{d}x = \circlearrowleft \sum_{i=1}^{p} \oint_{Fr\ M_i} P(x,y)\mathrm{d}x. \qquad (24)$$

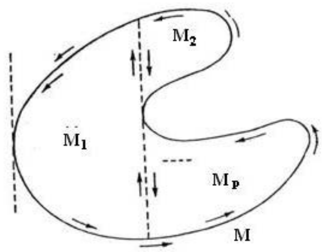


Fig. V.24

Într-adevăr, aplicăm aditivitatea integralei curbilinii relativ la juxtapunerea de drumuri, observând că reuniunea curbelor Fr M_i se compune din Fr M şi din segmente verticale (sau orizontale) care au permis descompunerea lui M, fiecare segment fiind parcurs de două ori în sensuri diferite, (fig. V. 24). Atunci în suma din membrul drept al relaţiei (24) se reduc integralele pe aceste segmente şi se obţine tocmai membrul sâng al acestei formule.

a. Stabilim acum o legătură importantă *între integrala curbilinie şi integrala dublă*, folosită mai ales pentru prelucrarea integralelor curbilinii în lungul drumurilor închise.

Teorema 2.1 (formula Green-Riemann); B. RIEMANN, 1826-1866, G. GREEN, 1793-1841). *Fie $M \subset \mathbb{R}^2$ un compact bordat elementar şi $P(x,y)$, $Q(x,y)$ funcţii de clasă C^1 pe un deschis care conţine M. Atunci*

$$\circlearrowleft \oint_{Fr\ M} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (25)$$

Demonstraţie. Mai întâi considerăm cazul când M este un intergrafic proiectabil pe Ox ca în figura V. 23. În acest caz,

$$\iint_M \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1)]\,\mathrm{d}x. \quad (26)$$

Pe de altă parte,

$$\circlearrowleft \oint_{Fr\ M} P\,\mathrm{d}x = \int_{\gamma_1} P\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} P\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_3} P\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_4} P\,\mathrm{d}x.$$

Integralele pe γ_2 şi γ_4 sunt nule deoarece x este constant acolo; apoi pe γ_1 se poate considera parametrizarea $x = t$, $y = g_1(t)$, $(\forall)\ t \in [a,b]$, deci

$$\int_{\gamma_1} P\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(t, g_1(t))\,\mathrm{d}t$$

şi în mod similar,

$$\int_{\gamma_3} P\,\mathrm{d}x = -\int_a^b P(t, g_2(t))\,\mathrm{d}t,$$

deci

$$\circlearrowleft \oint_{Fr\,M} P\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(t, g_1(t))\,\mathrm{d}t - \int_a^b P(t, g_2(t))\,\mathrm{d}t = \\ = \int_a^b [P(t, g_1(t)) - P(t, g_2(t))]\,\mathrm{d}t. \quad (27)$$

Din relaţiile (26) şi (27) rezultă

$$\circlearrowleft \oint_{Fr\,M} P\,\mathrm{d}x = -\iint_M \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad (28)$$

Formula (28) are loc şi în cazul când M este un compact bordat elementar oarecare, deoarece descompunem M în intergrafice proiectabile pe Ox, $M = \bigcup_{i=1}^{p} M_i$, scriem formula (28) pentru fiecare M_i şi adunăm relaţiile obţinute, folosind proprietatea de aditivitate a integralei duble şi relaţia (24).

Repetând raţionamentul anterior pentru intergrafice proiectabile pe Ox rezultă

$$\circlearrowleft \oint_{Fr\,M} Q\,\mathrm{d}y = \iint_M \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad (29)$$

Adunând relaţiile (28) şi (29), se obţine formula (25) a lui Green-Riemann.

Corolar 1. *În condiţiile teoremei 1, fie câmpul vectorial* $\bar{v} = P(x, y)\bar{\imath} + Q(x, y)\bar{\jmath}$. *Atunci circulaţia lui* $\bar{v}$ *în lungul lui* $Fr\,M$ *este*

$$\circlearrowleft \oint_{Fr\,M} \bar{v}\cdot\mathrm{d}\bar{r} = \iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad (30)$$

În particular, dacă $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ *în* M, *atunci această circulaţie este nulă.*

Acest corolar este de fapt o reformulare a teoremei 2.1.

Corolar 2. În condiţiile teoremei 2.1, avem

$$\text{aria}\, M = \frac{1}{2} \circlearrowleft \oint_{Fr\,M} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Luăm $P(x, y) = -\dfrac{y}{2}$ şi $Q(x, y) = \dfrac{x}{2}$. Atunci $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ şi aplicăm formula (25).

Corolar 3. *Fie* M *un compact bordat cu frontiera alcătuită din drumurile* $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *ca în figura V. 22 c). Dacă* $\bar{v} = P(x, y)\bar{\imath} + Q(x, y)\bar{\jmath}$ *este un câmp de clasă* C^1 *pe un deschis* U *care conţine* M *astfel încât* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *pe* U, *atunci*

$$\circlearrowleft \oint_{\gamma} \bar{v}\cdot\mathrm{d}\bar{r} = \circlearrowleft \sum_{i=1}^{n} \circlearrowleft \oint_{\gamma_i} \bar{v}\cdot\mathrm{d}\bar{r}. \quad (31)$$

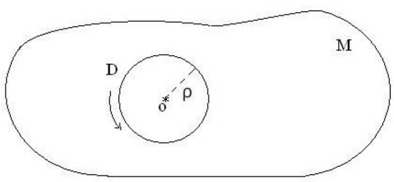


Fig. V.25

Demonstraţie. Este suficient să aplicăm formula (30); se obţine atunci

$$\circlearrowleft \oint_{Fr\,M} \bar{v}\cdot\mathrm{d}\bar{r} = 0, \quad \text{adică} \quad \circlearrowleft \oint_{\gamma} \bar{v}\cdot\mathrm{d}\bar{r} + \sum_{i=1}^{n} \circlearrowleft \oint_{\gamma_i} \bar{v}\cdot\mathrm{d}\bar{r} = 0.$$

Exemplu. Dacă M este un compact bordat elementar care nu conţine originea, atunci

$$\circlearrowleft \oint_{Fr\,M} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Într-adevăr, în acest caz $P = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$ deci $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ şi se aplică corolarul 1. Dacă $\overset{\circ}{M}$ conţine punctul $(0,0)$, atunci P şi Q nu mai sunt funcţii de clasă C^1 pe nici un deschis care conţine M şi formula (25) sau (30) nu mai poate fi aplicată. În acest caz, alegând un disc D centrat în origine de rază ρ, conţinut în M şi aplicând (31) rezultă că

$$\circlearrowleft \oint_{Fr\, M} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \circlearrowleft \oint_{Fr\, D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{x^2+y^2=\rho^2} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

şi ultima integrală se calculează punând $x = \rho\cos t$, $y = \rho\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ şi se obţine valoarea 2π (în cele de mai sus, Fr (M) a fost parcursă o singură dată).

b. Vom stabili în cele ce urmează o legătură *între integrala de suprafaţă şi integrala triplă*, care va constitui analogul tridimensional al formulei Green-Riemann. Sunt necesare câteva pregătiri.

O suprafaţă Σ în $\mathbb{R}^3$ (adică o varietate diferenţială de dimensiune 2) se numeşte *închisă* dacă Σ se obţine ”prin deformare continuă” din suprafaţa sferei unitate $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, adică există o aplicaţie bijectivă $\varphi : S \to \Sigma$ astfel încât φ şi φ^{-1} să fie continue. De exemplu sfera, elipsoidul, cilindrul $\{x^2+y^2 = 1,\ 0 \le z \le 3\} \cup \{x^2+y^2 \le 1,\ z = 0\} \cup \{x^2+y^2 \le 1,\ z = 3\}$, fig. V. 26, sunt suprafeţe închise; planele nu sunt suprafeţe închise.

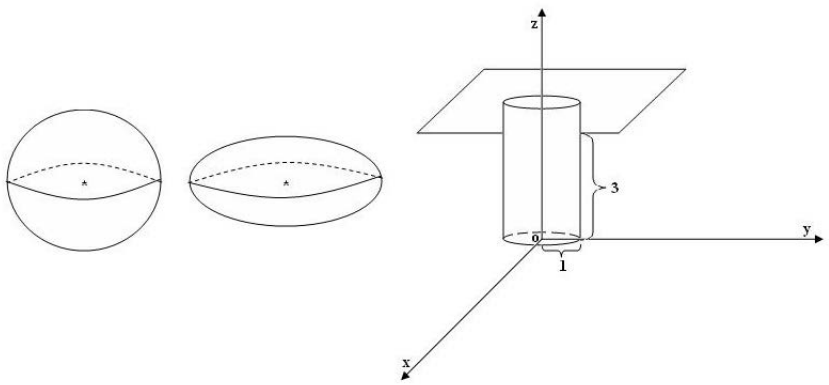


Fig. V.26

Definim o clasă importantă de mulţimi compacte în $\mathbb{R}^3$ astfel: se consideră un compact bordat elementar M în planul xOy, două funcţii f_1, f_2 $(f_1 \le f_2)$ de clasă C^1 pe un deschis din planul xOy care conţine M şi se ia

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in M \text{ şi } f_1(x, y) \le z \le f_2(x, y)\}.$$

(vezi fig. V. 27). Vom numi o astfel de mulţime *intergrafic proiectabil pe planul* xOy; în mod similar, se pot considera intergrafice proiectabile pe planele xOz, yOz.

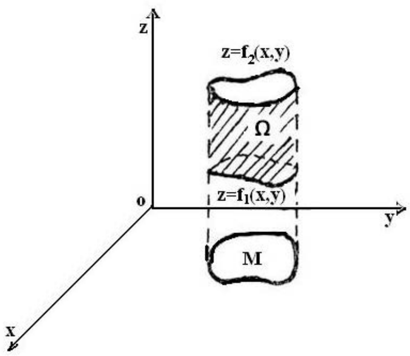


Fig. V.27

O mulţime $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte *compact elementar* dacă Ω poate fi descompus ca reuniune a unui număr finit de intergrafice proiectabile pe planul xOy având două câte două intersecţii neglijabile (au în comun cel mult puncte ale frontierelor) şi au loc descompuneri similare ale lui Ω în intergrafice proiectabile pe planele yOz şi xOz; în plus, se presupune că frontiera $\Sigma = \mathrm{Fr}\,\Omega$ se compune dintr-un număr finit de suprafeţe închise, nesingulare, orientate.

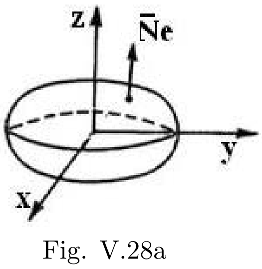


Fig. V.28a

Dacă Ω este un compact elementar, atunci se poate defini în mod natural versorul normală exterioară $\bar{N}_e$ în punctul curent al frontierei $\Sigma = \mathrm{Fr}\,\Omega$. Intergraficele, sfera $\{x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$, elipsoidul $\left\{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$, cilindrul $\{x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 3\}$ împreună cu bazele, inelul sferic $\{1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$ etc. sunt compacţi elementari (fig. V. 28a, b şi c).

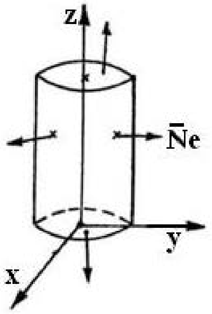


Fig. V.28b

În fig. V. 29 este indicat un exemplu de compact elementar în $\mathbb{R}^3$ cu frontiera $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ împreună cu normala exterioară care "iese" din Ω.

Teorema 2.2 (formula Gauss-Ostrogradski; C.F. GAUSS, 1777-1855, M.V. OSTROGRADSKI, 1801-1861). *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un compact elementar cu frontiera o suprafaţă închisă Σ şi $\bar{v} = P\bar{\imath} + Q\bar{\imath} + R\bar{k}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe un deschis care conţine Ω. Atunci fluxul lui $\bar{v}$ prin Σ după normala exterioară $\bar{n} = \bar{N}_e$ este egal cu integrala divergenţei lui $\bar{v}$ pe Ω adică*

$$\int_{\Sigma} (\bar{v} \cdot \bar{n})\, \mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \bar{v})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z. \tag{32}$$

Demonstraţie. Presupunem mai întâi că Ω este un intergrafic proiectabil pe planul xOy, deci există un compact bordat M în planul xOy şi funcţii $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ de clasă C^1 pe un deschis conţinând M astfel încât

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in M, \quad f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}.$$

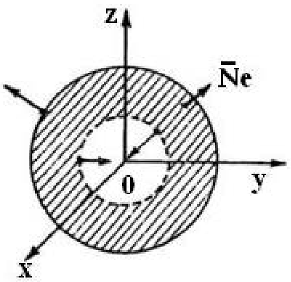


Fig. V.28c

Vom proba în aceste condiţii relaţia

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_{\Sigma} R(\bar{k} \cdot \bar{n})\, \mathrm{d}\sigma, \tag{33}$$

unde R este componenta pe axa Oz a câmpului $\bar{v}$.

Fie $\Sigma_1 : z = f_1(x,y)$, $\Sigma_2 : z = f_2(x,y)$ "capacele" intergraficului Ω. Atunci conform teoremei 1.3 rezultă

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint_{M} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, \mathrm{d}z =$$

$$= \iint_{M} [R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y))]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

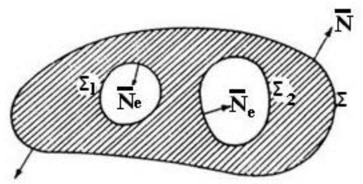


Fig. V.29

Pe de altă parte, pe Σ_1 normala exterioară este orientată "spre z descrescător", deci $\bar{n}_{\Sigma_1} = \dfrac{p_1\bar{\imath} + q_1\bar{\jmath} - \bar{k}}{\sqrt{p_1^2 + q_2^2 + 1}}$ unde $p_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}$, $q_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial y}$, de unde $\bar{k} \cdot \bar{n}_{\Sigma_1} = -\dfrac{1}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + 1}}$ şi ca atare,

$$\int_{\Sigma_1} R(\bar{k} \cdot \bar{n})\, \mathrm{d}\sigma = -\iint_{M} R(x,y,f_1(x,y))\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \quad \text{deoarece}$$

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{p_1^2 + q_1^2 + 1}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

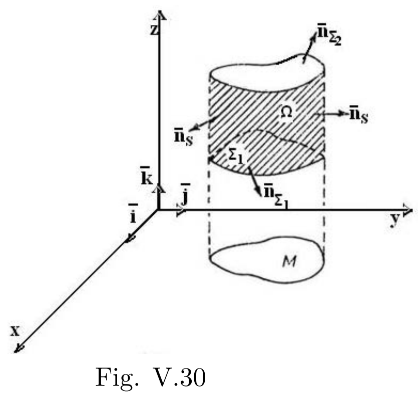


Fig. V.30

În mod similar, pe Σ_2 norma exterioară este orientată "spre z crescător", deci $\bar{n}_{\Sigma_2} = \dfrac{-p_2\bar{\imath} - q_2\bar{\jmath} + \bar{k}}{\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + 1}}$ unde $p_2 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$, $q_2 = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}$, deci $\bar{k} \cdot \bar{n}_{\Sigma_2} = \dfrac{1}{\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + 1}}$ şi ca atare, deoarece $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + 1}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, avem

$$\int_{\Sigma_2} R(\bar{k} \cdot \bar{n})\, \mathrm{d}\sigma = \iint_{M} R(x,y,f_2(x,y))\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Frontiera lui Ω se compune din porţiunile de suprafaţă Σ_1, Σ_2 şi din porţiunea de cilindru S definit prin

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in \operatorname{Fr} M,\ f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$$

şi este evident că $\displaystyle\int_S R(\bar{k} \cdot \bar{n})\, \mathrm{d}\sigma = 0$, deoarece în lungul lui S avem $\bar{n}_s \perp \bar{k}$, adică $R(\bar{n} \cdot \bar{k}) = 0$ pe S.

În concluzie, deoarece $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, rezultă

$$\int_\Sigma R(\bar{k}\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\Sigma_1} R(\bar{k}\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\Sigma_2} R(\bar{k}\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma + \int_S R(\bar{k}\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \iint_M R(x,y,f_1(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_M R(x,y,f_2(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 0 =$$

$$= \iint_M [R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y))]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

şi relaţia (32) este probată în cazul unui intergrafic proiectabil pe planul xOy.

Deoarece Ω se poate descompune într-un număr finit de intergrafice proiectabile pe planul xOy având în comun cel mult puncte ale frontierelor, aplicând aditivitatea integralelor de suprafaţă şi a celor de volum şi faptul că "pereţii comuni" apar de câte două ori cu versori normală exterioară $\bar{n}$, $-\bar{n}$, rezultă că integralele pe suprafeţele interioare se anulează reciproc şi se deduce formula (33) în cazul unui compact elementar oarecare.

În mod similar, proiectând pe planul xOz şi apoi pe planul yOz, se obţin relaţiile

$$\iiint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_\Sigma Q(\bar{\jmath}\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma \tag{34}$$

şi

$$\iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_\Sigma P(\bar{\imath}\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma. \tag{35}$$

Adunând relaţiile (33), (34) şi (35), rezultă

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_\Sigma (P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k})\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Observaţii. Fie $\bar{v} = P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$ şi M_0 un punct din U (fig. V. 32). Alegem un şir de compacţi elementari Ω_n, conţinuţi în U, conţinând M_0 şi având frontiera Σ_n, $n \geq 1$, astfel încât diametrul lui Ω_n să tindă către zero pentru $n \to \infty$ (de exemplu, $\Omega_n =$ bila centrată în M_0 de rază $\frac{1}{n}$). Atunci

$$\mathrm{div}_{\,M_0}\bar{v} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}\,\Omega_n}\int_{\Sigma_n} (\bar{v}\cdot\bar{N})\,\mathrm{d}\sigma;$$

într-adevăr, folosind formula (32) rezultă conform formulei de medie

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\,\Omega_n}\int_{\Sigma_n} (\bar{v}\cdot\bar{N})\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\mathrm{vol}\,\Omega_n}\iiint_{\Omega_n} (\mathrm{div}\ \cdot\bar{v})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{A_n} + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{B_n} + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{C_n}$$

unde $A_n, B_n, C_n \in \Omega_n$. Făcând $n \to \infty$, rezultă că $\{A_n\} \to M_0$, $\{B_n\} \to M_0$, $\{C_n\} \to M_0$, şi folosind faptul că P, Q, R sunt funcţii de clasă C^1, se obţine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}\,\Omega_n}\int_{\Sigma_n} (\bar{v}\cdot\bar{N})\,\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0} = \mathrm{div}_{\,M_0}\bar{v}.$$

Această relaţie arată independenţa lui $\mathrm{div}_{\,M_0}\bar{v}$ de sistemul de coordonate ales $Oxyz$ de versori $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ şi dependenţa ei exclusiv de $\bar{v}$ şi M_0.

Folosind notaţiile din teorema 2.2, dacă $\varphi(x,y,z)$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ este un câmp scalar de clasă C^1 ($U \supset \Omega$) şi dacă $\bar{a}$ este un vector constant *arbitrar*, atunci pentru $\bar{v} = \varphi\cdot\bar{a}$ avem $\mathrm{div}\,\bar{v} = \bar{a}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi$ şi formula (32) devine

$$\bar{a}\cdot\int_\Sigma \varphi\cdot\bar{N}\,\mathrm{d}\sigma = \bar{a}\cdot\iiint_\Omega (\mathrm{grad}\,\varphi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

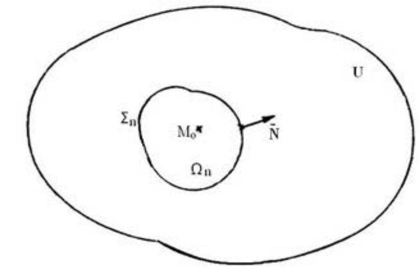


Fig. V.31

(integrarea se face pe componente); cum $\bar{a}$ este arbitrar, rezultă că

$$\int_\Sigma \varphi \cdot \bar{N}\, \mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega (\mathrm{grad}\, \varphi)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \quad (\textit{formula gradientului}).$$

Raţionând ca mai sus, rezultă că $\mathrm{grad}_{\,M_0}\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\mathrm{vol}\, \Omega_n} \displaystyle\int_{\Sigma_n} \varphi\, \bar{N}\, \mathrm{d}\sigma$ ceea ce arată că $\mathrm{grad}_{\,M_0}\varphi$ este independent de reperul ales (şi depinde numai de φ şi M_0).

În fine, dacă $\bar{w}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 pe U şi notăm $\bar{v} = \bar{w} \times \bar{a}$ (cu $\bar{a}$ vector constant *arbitrar*), atunci $\mathrm{div}\, \bar{v} = \bar{a} \cdot \mathrm{rot}\, \bar{w}$ şi conform formulei (32) rezultă

$$\int_\Sigma (\bar{w} \times \bar{a}) \cdot \bar{N}\, \mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega (\bar{a} \cdot \mathrm{rot}\, \bar{w})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

adică

$$\bar{a} \cdot \int_\Sigma (\bar{N} \times \bar{w})\, \mathrm{d}\sigma = \bar{a} \cdot \iiint_\Omega \mathrm{rot}\, \bar{w}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z;$$

deoarece $\bar{a}$ este vector arbitrar, rezultă

$$\int_\Sigma (\bar{N} \times \bar{w})\, \mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \mathrm{rot}\, \bar{w}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \quad (\textit{formula rotorului}).$$

Raţionamentul deja făcut anterior arată că

$$\mathrm{rot}_{\,M_0}\bar{w} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}\, \Omega_n} \int_{\Sigma_n} (\bar{N} \times \bar{w})\, \mathrm{d}\sigma,$$

deci rotorul lui $\bar{w}$ în M_0 depinde exclusiv de $\bar{w}$ şi M_0.

Expresiile anterioare ale divergenţei, gradientului şi rotorului într-un punct sunt intrinseci (independente de reper) şi definesc aceste entităţi ca ”derivate spaţiale”.

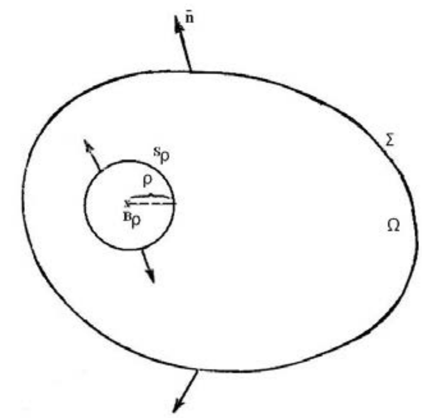


Fig. V.32

Exemple. 1) Fie Ω un compact elementar având ca frontieră o suprafaţă închisă Σ care nu conţine originea. Fie $\bar{v} = \dfrac{\bar{r}}{r^3}$ câmpul newtonian. Dacă $0 \notin \Omega$, atunci $\mathrm{div}\, \bar{v} = 0$ în fiecare punct din Ω şi conform (32), rezultă că fluxul lui $\bar{v}$ prin Σ este nul. Dacă $0 \in \overset{\circ}{\Omega}$, atunci există o bilă deschisă $B_\rho = \{x^2 + y^2 + z^2 < \rho^2\} \subset \Omega$ (fig. V. 32).
Considerăm compactul elementar $\Omega \setminus B_\rho$ având ca frontieră $\mathrm{Fr}\, \Omega \cup S_\rho$. Deoarece $\mathrm{div}\, \bar{v} = 0$ în $\Omega \setminus B_\rho$, rezultă, conform formulei (32), că fluxul lui $\bar{v}$ prin Σ şi prin S_ρ este acelaşi (în ambele cazuri după normala exterioară). Dar normala exterioară la S_ρ este $\dfrac{\bar{r}}{r}$ şi fluxul lui $\bar{v}$ prin S_ρ este

$$\int_{S_\rho} \frac{\bar{r}}{r^3} \cdot \frac{\bar{r}}{r}\, \mathrm{d}\sigma = \int_{S_\rho} \frac{\rho^2}{\rho^4}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\rho^2} \cdot \mathrm{aria}\, S_\rho = 4\pi.$$

În general, dacă Σ este o porţiune de suprafaţă de clasă C^1, nesingulară, orientată, astfel încât $0 \notin \Sigma$, se numeşte *unghi solid* ω în care Σ este văzută din origine, fluxul câmpului $\bar{v} = \dfrac{\bar{r}}{r^3}$ prin Σ, adică $\omega = \displaystyle\int_\Sigma \frac{\bar{r}}{r^3} \cdot \bar{n}\, \mathrm{d}\sigma$. Dacă Σ este închisă, ca la început, atunci rezultă că

$$\omega = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad 0 \notin \Omega \\ 4\pi & \text{dacă} \quad 0 \in \overset{\circ}{\Omega}\,. \end{cases}$$

2) Indicăm o aplicaţie remarcabilă a formulei Gauss-Ostrogradski. Presupunem că un lichid, având densitatea de volum constantă c, se află într-un recipient Ω asimilat cu un compact elementar conţinut în semispaţiul $z < 0$ din $\mathbb{R}^3$ (spaţiul $\mathbb{R}^3$ este raportat la un triedru ortogonal $Oxyz$ de versori $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$).

Presupunem de asemenea că "presiunea creşte proporţional cu adâncimea", deci câmpul presiunilor lichidului este $\bar{v} = c\, z\, \bar{k}$, c fiind densitatea de volum.

Fluxul lui $\bar{v}$ prin frontiera Σ a lui Ω se numeşte *forţa ascensională* Φ *a lichidului.*

Aşadar, deoarece $\operatorname{div} \bar{v} = c$, rezultă

$$\Phi = \int_\Sigma \bar{v} \cdot \bar{n}\, \mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega (\operatorname{div} \bar{v})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iiint_\Omega c \cdot\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z =$$

$$= c \cdot \text{volumul lui } \Omega = \text{masa lichidului},$$

obţinându-se astfel *legea lui Arhimede.*

c. Trecem la demonstrarea formulei fundamentale a lui Stokes, *care leagă integrala curbilinie în spaţiu de integrala de suprafaţă.*

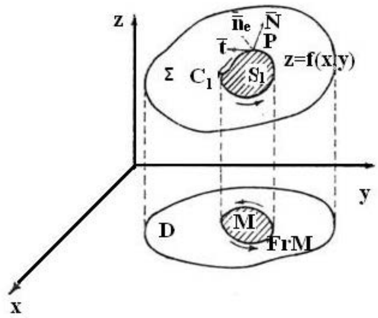


Fig. V.33

Fie Σ o suprafaţă de ecuaţie carteziană $z = f(x, y)$, cu f funcţie de clasă C^2 pe un deschis $D \subset \mathbb{R}^2$, cu orientarea pozitivă asociată reprezentării parametrice

$$x = u,\ y = v,\ z = f(u, v),\ (\forall)\ (u, v) \in D.$$

Dacă $M \subset D$ este un compact bordat elementar, atunci este bine definită o porţiune din suprafaţa Σ, anume

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y),\ (x, y) \in M\}. \tag{36}$$

Curba $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y),\ (x, y) \in \operatorname{Fr} M\}$ cu orientarea indusă de pe $\operatorname{Fr} M$ se numeşte *bordul orientat al lui* S_1; notând cu $\bar{N}$ versorul normalei la suprafaţa S_1 în punctul curent P al lui C_1, cu $\bar{\tau}$ versorul tangentei în punctul P la curba C_1 şi cu $\bar{n}_e$ versorul normalei exterioare la bordul C_1 (situat în planul tangent la Σ în punctul P, perpendicular pe $\bar{\tau}$ şi "ieşind" din S_1) rezultă că $\bar{N} = \bar{n}_e \times \bar{\tau}$. Orientarea fixată pe bordul C_1 poate fi reprezentată sugestiv astfel: un observator care parcurge C_1 în sensul lui $\bar{\tau}$ şi având capul spre $\bar{N}$, are mâna stângă înspre S_1, fig. V. 33. În mod similar se pot considera porţiuni de suprafaţă carteziană $x = f(y, z)$ sau $y = f(x, z)$ etc.

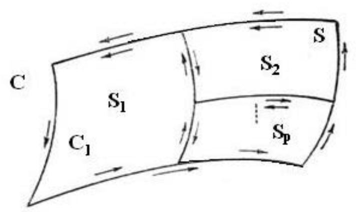


Fig. V.34

O porţiune de suprafaţă orientată (de clasă C^2) S se numeşte *elementară* dacă se poate descompune într-un număr finit de porţiuni de suprafaţă $S_1, S_2, \ldots, S_p$, ca mai sus, prin arce de curbă care sunt părţi ale bordurilor orientate corespunzătoare (ca în fig. V. 34). În acest caz se poate defini bordul orientat C al lui S, ca fiind drumul închis obţinut prin juxtapunerea arcelor de curbă care aparţin numai la câte unul din bordurile porţiunilor $S_1, S_2, \ldots, S_p$.

Teorema 2.3. (formula lui J.G. STOKES, 1819-1903). *Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o porţiune de suprafaţă elemetară de clasă C^2 şi C bordul orientat, închis, al lui S. Fie $\bar{v}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe un deschis din $\mathbb{R}^3$ care conţine S. Atunci circulaţia lui $\bar{v}$ în lungul lui C este egală cu fluxul rotorului lui $\bar{v}$ prin S, adică*

$$\int_C \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = \int_S \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{N}\, \mathrm{d}\sigma. \tag{37}$$

Demonstraţie. Presupunem că S se descompune în porţiunile $S_1, S_2, \ldots, S_p$ ca mai sus şi ne fixăm atenţia asupra lui S_1, presupunând că are reprezentarea (36). Dacă $\bar{v} = P(x, y, z)\bar{\imath} + Q(x, y, z)\bar{\jmath} + R(x, y, z)\bar{k}$ cu P, Q, R funcţii de clasă C^1 pe un deschis care conţine S, atunci

$$\int_{C_1} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = \circlearrowleft \oint_{C_1} P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y + R\, \mathrm{d}z = \circlearrowleft \oint (P + Rp)\, \mathrm{d}x + (Q + Rq)\, \mathrm{d}y,$$

deoarece în lungul lui C_1 avem $z = f(x, y)$, deci

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = p\, \mathrm{d}x + q\, \mathrm{d}y \quad (\text{unde } p = \frac{\partial f}{\partial x},\ q = \frac{\partial f}{\partial y}).$$

Dar

$$\circlearrowleft \oint_{C_1} (P + Rp)\, \mathrm{d}x + (Q + Rq)\, \mathrm{d}y = \circlearrowleft \oint_{Fr\ M} (P + Rp)\, \mathrm{d}x + (Q + Rq)\, \mathrm{d}y,$$

deoarece dacă C_1 are o parametrizare locală de forma $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, atunci Fr M are parametrizarea $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = 0$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Aplicând în ultima integrală formula Green-Riemann, rezultă că

$$\int_{C_1} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = \iint_M \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q + Rq) - \frac{\partial}{\partial y}(P + Rp) \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \tag{38}$$

Notăm $\bar{A} = -p\bar{\imath} - q\bar{\jmath} + \bar{k}$ şi probăm relaţia

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q + Rq) - \frac{\partial}{\partial y}(P + Rp) = \bar{A} \cdot \operatorname{rot} \bar{v}. \tag{39}$$

Într-adevăr,

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q + Rq) - \frac{\partial}{\partial y}(P + Rp) =$$

$$= \left[\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot p + q \left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \cdot p \right) + R \frac{\partial q}{\partial x} \right] -$$

$$- \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot q + p \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \cdot q \right) + R \frac{\partial p}{\partial y} \right];$$

cum

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

căci funcţia f este de clasă C^2, rezultă că

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q + Rq) - \frac{\partial}{\partial y}(P + Rp) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} - q \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) -$$

$$-p \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) = (-p\bar{\imath} - q\bar{\jmath} + \bar{k}) \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{\imath} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \bar{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k} \right] = \bar{A} \cdot \operatorname{rot} \bar{v}$$

şi relaţia (39) este dovedită. Atunci relaţia (38) se scrie sub forma

$$\int_{C_1} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = \iint_M (\bar{A} \cdot \operatorname{rot} \bar{v}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \tag{40}$$

Pe de altă parte, normala în punctul curent la S_1 este

$$\bar{N} = \frac{-p\bar{\imath} - q\bar{\jmath} + \bar{k}}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = \frac{\bar{A}}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

şi atunci membrul drept al formulei (37) este

$$\int_{S_1} \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{N} \, \mathrm{d}\sigma = \iint_M (\operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{A}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

şi din formula (40), se obţine egalitatea

$$\int_{C_1} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{N} \, \mathrm{d}\sigma.$$

Egalităţi similare se obţin pentru $S_2, \ldots, S_p$ şi adunând cele p relaţii, se va obţine

$$\int_S \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{N} \, \mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{p} \int_{C_i} \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r}.$$

Dar membrul drept este egal cu suma circulaţiilor câmpului $\bar{v}$ în lungul tuturor arcelor de curbă ale bordurilor orientate, pentru toate porţiunile S_i,

$1 \leq i \leq p$. Deoarece arcele comune la câte două porţiuni S_i, S_j având frontieră comună sunt parcurse de câte două ori în sens opus, suma respectivă este tocmai circulaţia lui $\bar{v}$ în lungul arcelor care sunt parcurse o singură dată şi acestea alcătuiesc tocmai bordul C al lui S; se obţine astfel formula (37).

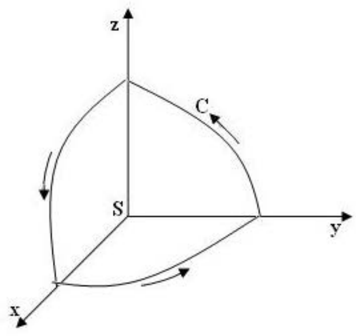


Fig. V.35

Exemple. 1) Considerăm octantul de sferă $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ şi calculăm circulaţia câmpului newtonian $\bar{v} = \dfrac{\bar{r}}{r^3}$ în lungul bordului C orientat ca în fig. V. 35.

Aplicând formula lui Stokes luând pentru S porţiunea de sferă corespunzătoare, rezultă că

$$\int_C \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = \int_S \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{N} \, \mathrm{d}\sigma = 0, \text{ deoarece } \operatorname{rot} \bar{v} = \operatorname{rot} \frac{\bar{r}}{r^3} = 0.$$

2) Calculăm fluxul câmpului $\bar{v} = xz\bar{\imath} + yz\bar{\jmath} + z^2\bar{k}$ prin porţiunea S din paraboloidul $z = x^2 + y^2$ decupată de cilindrul $x^2 + y^2 = 1$, după normala exterioară (fig. V. 36)

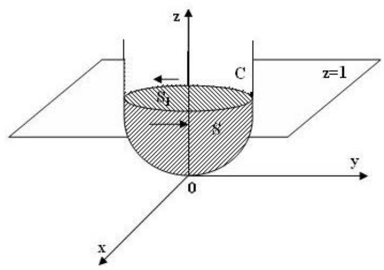


Fig. V.36

Avem de calculat $\Phi = \displaystyle\int_S \bar{v} \cdot \bar{N} \, \mathrm{d}\sigma$. Se observă că $\bar{v} = \operatorname{rot} \bar{w}$, unde $\bar{w} = \dfrac{1}{2}(yz^2\bar{\imath} - xz^2\bar{\jmath})$, deci aplicând formula lui Stokes, rezultă

$$\Phi = \int_{C^-} \bar{w} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = -\frac{1}{2} \int_C yz^2 \, \mathrm{d}x - xz^2 \, \mathrm{d}y;$$

pentru curba C se poate lua parametrizarea $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$ şi rezultă imediat $\Phi = \pi$. Iată şi o altă metodă: considerând suprafaţa închisă definită de S şi de porţiunea S_1 din planul $z = 1$ situată în interiorul cilindrului şi aplicând formula Gauss-Ostrogradski, rezultă că

$$\int_{S \cup S_1} \bar{v} \cdot \bar{N} \, \mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div} \bar{v} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 0,$$

deoarece $\operatorname{div} \bar{v} = 0$. Aşadar,

$$\Phi = \int_S \bar{v} \cdot \bar{N} \, \mathrm{d}\sigma = -\int_{S_1} \bar{v} \cdot \bar{N} \, \mathrm{d}\sigma.$$

Versorul normală corespunzătoare la S_1 este $\bar{N} = \bar{k}$ şi atunci

$$\Phi = -\int_{S_1} (xz\bar{\imath} + yz\bar{\jmath} - z^2\bar{k})\bar{k} \, \mathrm{d}\sigma = \int_{S_1} z^2 \, \mathrm{d}\sigma = \int_{S_1} \mathrm{d}\sigma = \text{aria } S_1 = \pi.$$

Observaţie. În acest paragraf expunerea a trebuit să se abată uneori de la exigenţele rigorii maxime, în favoarea elementelor euristice şi interpretărilor geometrice şi fizice, de altfel generatoare ale întregii teorii. Formulele fundamentale stabilite anterior pot fi unificate într-o singură formulă (numită formula generală a lui Stokes), utilizând rezultate din teoria formelor diferenţiale pe varietăţi diferenţiabile.

5.2.5 Exerciţii

1. a) Să se calculeze în punctul curent divergenţa şi rotorul câmpurilor vectoriale $\bar{v} = x\bar{\imath} + xy\bar{\jmath} + xyz\bar{k}$; $\bar{v} = \dfrac{\bar{k} \times \bar{r}}{r^3}$; $\bar{v} = r^n(\bar{a} \times \bar{r})$, $n \in \mathbb{Z}$; $\bar{v} = (\bar{a} \cdot \bar{r})\bar{r}$; $\bar{v} = \bar{a} \times (\bar{r} \times \bar{a})$.

b) Să se arate că $\operatorname{rot} \dfrac{\bar{r} \times \bar{a}}{r^3} = \operatorname{grad} \left(\dfrac{\bar{r} \cdot \bar{a}}{r^3} \right)$ ($\bar{a}$ este un vector constant şi $\bar{r}$ este vectorul de poziţie).

2. Să se determine câmpurile vectoriale $\bar{v}$ de clasă C^1 în $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ astfel încât $\operatorname{rot} \bar{v} = \dfrac{\bar{r}}{r^3}$ şi $\bar{v} \cdot \bar{k} = 0$.

3. Să se determine o funcţie $f(r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ de clasă C^2 astfel încât rotorul câmpului $\bar{v} = f(r)(\bar{k} \times \bar{r})$ să fie coliniar cu $\bar{r}$.

4. Fie $\bar{v}$ un câmp vectorial de clasă C^1 într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. O curbă parametrizată $\gamma : [a,b] \to U$, $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de clasă C^1 se numeşte *linie de câmp* (sau *linie de forţă*) a lui $\bar{v}$ dacă pentru orice $t \in [a,b]$, vectorul $\gamma'(t)$, tangent la curbă, este coliniar cu vectorul $\bar{v}(x(t), y(t), z(t))$ al câmpului.

a) Să se arate că dacă $\bar{v} = P(x,y,z)\bar{\imath} + Q(xyz)\bar{\jmath} + R(x,y,z)\bar{k}$, atunci pentru orice linie de câmp cu ecuaţiile parametrice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a,b]$, există o funcţie $\lambda(t)$ astfel încât $x'(t) = \lambda(t) \cdot P(x(t), y(t), z(t))$, $y'(t) = \lambda(t) \cdot Q(x(t), y(t), z(t))$, $z'(t) = \lambda(t) \cdot R(x(t), y(t), z(t))$ (mai succint $\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q} = \frac{\mathrm{d}z}{R}$ sau $\bar{v} \times \mathrm{d}\bar{r} = 0$).

b) Să se determine liniile de câmp pentru $\bar{v} = 2x\bar{\imath} + yz\bar{\jmath} + z\bar{k}$, $\bar{v} = xy\bar{\imath} + yz\bar{\jmath} + y\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{r}$, $\bar{v} = \bar{a} \times \bar{r}$, $\bar{v} = \bar{a} \times (\bar{r} \times \bar{a})$, unde $\bar{a}$ este un vector constant.

c) Să se arate că dacă φ, ψ sunt câmpuri scalare de clasă C^1, atunci liniile de câmp ale câmpului vectorial nenul $\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{grad}\psi$ sunt curbele $\varphi(x,y,z) = c_1$, $\psi(x,y,z) = c_2$ cu c_1, c_2 constante arbitrare.

5. a) Se poate aplica formula Green-Riemann pentru calculul circulaţiei câmpului $\bar{v} = \dfrac{yi - x\bar{\jmath}}{x^2+y^2}$ în lungul cercului unitate din $\mathbb{R}^2$ parcurs pozitiv o singură dată?

b) Să se calculeze circulaţia lui $\bar{v} = (x \ln|x| - y)\bar{\imath} + 2xy\bar{\jmath}$ în lungul frontierei pătratului $[-1,1] \times [-1,1]$, parcursă pozitiv o singură dată; se poate aplica formula Green-Riemann?

6. Să se calculeze aria decupată de cilindrul $x^2 + z^2 = 1$ din paraboloidul $y = 1 + x^2 + z^2$,

7. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\bar{v} = \bar{k} \times \bar{r}$ prin porţiunea de suprafaţă $1 - z = x^2 + y^2$, $z > 0$, după normala care face unghi ascuţit cu axa Oz.

8. Se consideră suprafaţa definită prin ecuaţiile parametrice $x = (a + R\cos u)\cos v$, $y = (a + R\cos u)\sin v$, $z = R\sin u$ unde $0 < R < a$ sunt constante şi $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$ (*torul tridimensional*).

Să se calculeze fluxul câmpului $\bar{v} = \dfrac{\bar{r}}{r}$ prin această suprafaţă şi să se afle aria şi volumul acestui tor.

Indicaţie. Notăm $r = \sqrt{x^2+y^2}$. În planul rOz se consideră $(r-a)^2 + z^2 = R^2$ adică $r = a + R\cos u$, $z = R\sin u$, $0 \le u \le 2\pi$; dacă acest cerc se roteşte în jurul lui Oz se obţine torul, cu parametrizarea anterioară. Se observă că $||\bar{r}_u \times \bar{r}_v|| = R(a + R\cos u)$ şi că $\bar{N} = \cos u \cos v\bar{\imath} + \cos u \sin v\bar{\jmath} + \sin u\bar{k}$. Aria torului este egală cu $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R(a + R\cos u)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 4\pi^2 aR$ etc.

9. Să se calculeze direct şi folosind formula lui Stokes circulaţia lui $\bar{v} = y\bar{\imath} + z\bar{\jmath} + x\bar{k}$ în lungul curbei $\{x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x + y + z = 2\}$ parcursă o singură dată şi orientată astfel încât proiecţia curbei pe planul xOy să fie orientată pozitiv.

10. Se consideră câmpul vectorial $\bar{v} = z^2\bar{\imath} + x^2\bar{\jmath} + y^2\bar{k}$. Să se calculeze fluxul lui $\bar{v}$ prin suprafaţa definită prin $\{x + y + z \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$, după normala exterioară şi circulaţia lui $\bar{v}$ în lungul elipsei $\{x^2 + y^2 = 4,\ x + z = 2\}$ cu orientarea "compatibilă" cu orientarea pozitivă a proiecţiei elipsei pe planul xOy.

11. Se consideră câmpul vectorial $\bar{v} = 2xz\bar{\imath} + 2yz\bar{\jmath} - (x^2 + y^2)\bar{k}$.

a) Să se determine un drum parametrizat de clasă C^1 nesingular $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ astfel încât $\bar{v}(\gamma(t))$ să fie coliniar cu $\gamma'(t)$, $(\forall) t \in [0,1]$.

b) Să se calculeze fluxul lui $\bar{v}$ prin suprafaţa definită de $x^2+y^2+2z^2=1$, $z>0$ după normala exterioară, precum şi circulaţia lui $\bar{v}$ în lungul drumului $\gamma_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t\cos t, t\sin t, t)$.

12. Fie $\bar{v} = \dfrac{\bar{k}\cdot\bar{r}}{r^4}\bar{r}$ definit în $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$. Să se calculeze, direct şi folosind formula Gauss-Ostrograski, fluxul lui $\bar{v}$ prin suprafaţa definită $x^2+y^2=4-z$, $z>h$ (unde $0<h<4$ este o constantă dată); rămâne valabil calculul făcut dacă $h<0$?

5.3 Aplicaţii

5.3.1 Câmpuri irotaţionale (conservative). Câmpuri solenoidale (fără surse)

Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ un deschis fixat.

Definiţia 3.1. *Un câmp vectorial $\bar{v}$ de clasă C^1 în U se numeşte* **irotaţional în** U **dacă rot** $_a\bar{v}=0$ **pentru orice punct** $a \in U$.

Dacă $\bar{v} = P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k}$, cu P, Q, R funcţii de clasă C^1 pe U, atunci faptul că $\bar{v}$ este irotaţional în U revine la verificarea condiţiilor

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

în fiecare punct din U. Aşadar, *câmpul $\bar{v}$ este irotaţional dacă şi numai dacă $\bar{v}$ este conservativ* (adică forma diferenţială $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ este închisă în U; vezi IV, §5.1).

Din formula (37) rezultă direct că dacă $\bar{v}$ este irotaţional în U, atunci pentru orice porţiune de suprafaţă elementară situată în U cu bordul orientat închis C, circulaţia lui $\bar{v}$ în lungul lui C este nulă. Termenul de "rotor", introdus de J. MAXWELL (1831-1879), este legat de faptul că circulaţia în lungul lui C a câmpului $\bar{v}$ al vitezelor particulelor unui fluid (situat în U) reprezintă o măsură a cantităţii de fluid care circulă în lungul lui C şi aceasta este nulă dacă curgerea este irotaţională (adică rot $\bar{v}=0$).

Conform corolariilor teoremelor 5.2, 5.3 din capitolul IV, se obţine următoarea caracterizare completă a câmpurilor irotaţionale:

Teorema 3.1. *Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ un deschis stelat şi $\bar{v}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe U. Atunci $\bar{v}$ este irotaţional în U $\leftrightarrow$ există o funcţie $f(x,y,z)$ de clasă C^1 în U astfel încât $\bar{v}$ = grad f $\leftrightarrow$ circulaţia lui $\bar{v}$ în lungul oricărui drum închis de clasă C^1 pe porţiuni situat în U, este nulă.*

Reamintim că funcţia f este unic determinată până la o constantă aditivă şi se numeşte potenţial scalar al lui $\bar{v}$ (dacă $\bar{v}$ = grad f_1 şi $\bar{v}$ = grad f_2, atunci grad $(f_1-f_2)=0$, deci diferenţa f_1-f_2 este constantă în U).

Definiţia 3.2. *Un câmp vectorial $\bar{v}$ de clasă C^1 în U se numeşte* **solenoidal** *în U dacă div$_a\bar{v}=0$ pentru orice punct $a \in U$.*

Exemple. Câmpul newtonian $\bar{v} = \dfrac{\bar{r}}{r^3}$ este irotaţional şi solenoidal în deschisul $U = \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$; câmpul $\bar{v} = x^2\bar{\imath} + xz\bar{\jmath} - 2xz\bar{k}$ este solenoidal, dar nu irotaţional, în $\mathbb{R}^3$, iar câmpul $\bar{v}$ = grad φ (φ câmp scalar de clasă C^2) este solenoidal dacă şi numai dacă funcţia φ este armonică, adică $\Delta\varphi=0$.

Verificarea este imediată.

Din formula (32) rezultă că dacă $\bar{v}$ este solenoidal în U, atunci fluxul lui $\bar{v}$ prin frontiera (închisă) a oricărui compact elementar situat în U, este nul. În mod similar teormeei 3.1, vom proba

Teorema 3.2 (de caracterizare a câmpurilor solenoidale). *Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ un deschis şi $\bar{v}$ un câmp vectorial de clasă C^1 în U. Atunci sunt echivalente afirmaţiile*:

(a) $\bar{v}$ *este solenoidal în* U;

(b) $\bar{v}$ *este local un câmp de rotori (adică pentru orice punct* $a \in U$ *există o vecinătate deschisă* V, $a \in V \subset U$ *şi un câmp vectorial* $\bar{w}$ *de clasă* C^2 *în* V *astfel încât* $\bar{v} = \operatorname{rot} \bar{w}$ *în* V*).*

(c) *fluxul lui* $\bar{v}$ *prin frontiera închisă a oricărui compact elementar situat în* U*, este nul.*

Demonstraţie. Faptul că (a) $\Rightarrow$ (c) a fost probat anterior, folosind relaţia (32). Implicaţia (c) $\Rightarrow$ (a) rezultă în modul următor: fixăm un punct oarecare $a \in U$ şi alegem o bilă $B'(a, \varepsilon) \subset U$ de rază $\varepsilon > 0$; atunci conform ipotezei (c), folosind (32), rezultă că

$$\iiint_{B'(a,\varepsilon)} \operatorname{div} \bar{v} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 0.$$

Utilizând formula de medie şi făcând $\varepsilon \to 0$ rezultă că $\operatorname{div}_a \bar{v} = 0$, deci $\bar{v}$ este solenoidal în U. Implicaţia (b) $\Rightarrow$ (a) este evidentă (căci dacă $\bar{v} = \operatorname{rot} \bar{w}$, atunci $\operatorname{div} \bar{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot} w = 0$). Rămâne de dovedit implicaţia (a) $\Rightarrow$ (b). Presupunem că $\bar{v} = P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k}$, cu P, Q, R funcţii de clasă C^1 în U; conform ipotezei (a), avem

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad \text{în fiecare punct din } U. \tag{41}$$

Fixăm un punct $a \in U$, $a = (x_0, y_0, z_0)$ arbitrar şi alegem o bilă deschisă $V \subset U$, centrată în a. Arătăm că există un câmp de forma $\bar{w} = w_1(x, y, z)\bar{\imath} + w_2(x, y, z)\bar{\jmath}$ de clasă $C^2(V)$ astfel încât $\operatorname{rot} w = \bar{v}$, deci

$$\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ w_1 & w_2 & 0 \end{vmatrix} = P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k},$$

adică sistemul în w_1, w_2

$$\frac{\partial w_2}{\partial z} = -P, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = Q, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = R$$

are soluţie. Din primele două relaţii rezultă că $(\forall)(x, y, z) \in V$ avem

$$w_1(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} Q(x, y, t) \, \mathrm{d}t + A(x, y),$$

$$w_2(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} P(x, y, t) \, \mathrm{d}t + B(x, y)$$

cu A, B funcţii arbitrare de clasă C^1. Trebuie probat că ultima relaţie poate fi satisfăcută alegând convenabil A şi B; aceasta revine la relaţia

$$-\int_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, t) \, \mathrm{d}t + \frac{\partial B}{\partial x} - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, t) \, \mathrm{d}t - \frac{\partial A}{\partial y} = R,$$

adică

$$-\int_{z_0}^{z} \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right] \mathrm{d}t + \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = R$$

şi ţinând cont de (41) rezultă

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = R(x, y, z_0).$$

Este evident că există funcţii A, B verificând această unică relaţie şi astfel, existenţa câmpului $\bar{w} = w_1\bar{\imath} + w_2\bar{\jmath}$ cu proprietatea că $\operatorname{rot} \bar{w} = \bar{v}$ în V este probată.

Dacă $\bar{v}$ este solenoidal, atunci orice câmp $\bar{w}$ astfel încât $\operatorname{rot}\bar{w} = \bar{v}$ se numeşte *potenţial vector al lui* $\bar{v}$. Dacă deschisul U este stelat, atunci $\bar{w}$ este unic până la un câmp de gradienţi (dacă $\operatorname{rot}\bar{w}_1 = \bar{v}$, $\operatorname{rot}\bar{w}_2 = \bar{v}$, atunci $\operatorname{rot}(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) = 0$, deci $\bar{w}_1 - \bar{w}_2 = \operatorname{grad}\varphi$ etc.).

În condiţiile formulei lui Stokes (37), fluxul unui câmp solenoidal $\bar{v}$ poate fi exprimat prin circulaţia unui potenţial vector $\bar{w}$ al lui $\bar{v}$, anume

$$\int_S \bar{v} \cdot \bar{N}\, \mathrm{d}\sigma = \int_S (\operatorname{rot}\bar{w} \cdot \bar{N})\, \mathrm{d}\sigma = \int_C \bar{w} \cdot \mathrm{d}\bar{r}.$$

Observaţii. Câmpurile solenoidale se mai numesc *câmpuri fără surse.* O justificare a acestei terminologii este următoarea. Presupunem că într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$ există un fluid şi $\bar{v}$ este câmpul vectorial al vitezelor particulelor de fluid. Pentru a evalua cantitatea de fluid care traversează o porţiune de suprafaţă Σ într-un interval de timp T, facem ipoteza că fluidul umple pentru orice element de suprafaţă $\mathrm{d}\sigma$, în timpul T, un cilindru cu volumul $||\bar{v}|| \cdot \mathrm{d}\sigma \cdot \cos\widehat{(\bar{v}, \bar{n})} \cdot T = (\bar{v} \cdot \bar{n})T \cdot \mathrm{d}\sigma$; însumând aceste volume de fluid, este rezonabil să considerăm că întreaga suprafaţă Σ este traversată în intervalul de timp T de o cantitate de fluid egală cu

$$T \cdot \int_\Sigma (\bar{v}, \cdot\bar{n})\mathrm{d}\sigma.$$

Aşadar, făcând $T = 1$ rezultă că fluxul lui $\bar{v}$ orin Σ exprimă şi modelează matematic cantitatea de fluid care traversează Σ în unitatea de timp.

Dacă Σ este frontiera închisă a unui compact elementar Ω ca în formula Gauss-Ostrogradski şi dacă fluxul lui $\bar{v}$ după normala exterioară este pozitiv, atunci rezultă că din Ω "iese fluid" sau "fluidul diverge din Ω", sau cum se mai spune, în Ω există surse de fluid; fig. V. 37. Dacă $\bar{v}$ este solenoidal, fluxul este nul şi ca atare, nu există surse de fluid în Ω. Rezultă totodată o justificare a termenului de "divergenţă", introdus tot de Maxwell.

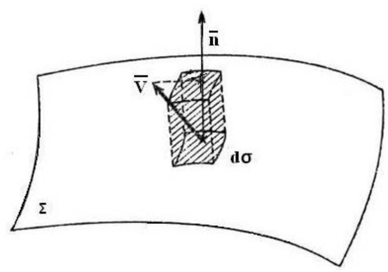


Fig. V.37

5.3.2 Câmpuri armonice

Definiţia 3.3. *Un câmp vectorial $\bar{v}$ de clasă C^1 într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte* **armonic în** *U dacă $\bar{v}$ este irotaţional şi solenoidal în U.*

Exemplu. Câmpul newtonian $\bar{v} = -k\dfrac{\bar{r}}{r^3}$ ($k > 0$ constant) este armonic în deschisul $U = \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$. De asemenea, câmpul $\bar{v} = 2x\bar{\imath} + 4yz\bar{\jmath} + (2y^2 - 2z^2 - 2z)\bar{k}$ este armonic în $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.3 (de caracterizare a câmpurilor armonice). *Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ un deschis stelat şi $\bar{v}$ un câmp vectorial de clasă C^1 în U. Sunt echivalente afirmaţiile*:

(a) *câmpul $\bar{v}$ este armonic în U*;

(b) *există o funcţie armonică $\varphi(x,y,z)$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ (adică $\varphi \in C^2(U)$ şi $\Delta\varphi = 0$ în U) astfel încât $\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi$.*

Demonstraţie. (b) $\Rightarrow$ (a). Dacă $\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi$, atunci $\operatorname{rot}\bar{v} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$, deci $\bar{v}$ este irotaţional. Apoi $\operatorname{div}\bar{v} = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \Delta\varphi = 0$, deci $\bar{v}$ este şi solenoidal.

(a) $\Rightarrow$ (b). Presupunem că $\bar{v}$ este armonic în U, deci $\operatorname{rot}\bar{v} = 0$. Din teorema 3.1 rezultă că există o funcţie $\varphi \in C^2(U)$ astfel încât $\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi$. Deoarece $\bar{v}$ este solenoidal, rezultă că $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0$, adică $\Delta\varphi = 0$, deci funcţia φ este armonică.

Exemplu. Considerăm un fluid situat într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$ având densitatea $\mu(x,y,z)$ şi viteza $\bar{v}(x,y,z,t)$ în punctul $(x,y,z) \in U$ şi la momentul t, presupuse funcţii de clasă C^1 în $U \times \mathbb{R}$.

Pentru *orice* compact elementar $\Omega \subset U$ având frontiera Σ, masa fluidului din Ω la momentul t este conform V, §1,2

$$m(t) = \int_\Omega \mu(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \quad \text{deci} \quad m'(t) = \int_\Omega \frac{\partial \mu}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Pe de altă parte, din considerente fizice,

$$m'(t) = -\int_\Sigma (\mu\bar{v}) \cdot \bar{n}\,\mathrm{d}\sigma \quad (\text{fluxul lui } \mu\bar{v} \text{ prin } \Sigma).$$

Aplicând în ultima relaţie formula Gauss-Ostrogradski, rezultă

$$m'(t) = -\int_\Omega \operatorname{div}(\mu\bar{v})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

şi ca atare, $\displaystyle\int_\Omega \left[\operatorname{div}(\mu\bar{v}) + \frac{\partial\mu}{\partial t}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$. Deoarece Ω este arbitrar, se obţine relaţia

$$\operatorname{div}(\mu\bar{v}) = -\frac{\partial \mu}{\partial t} \quad (\text{numită } \textit{ecuaţia de continuitate}).$$

Presupunem acum că densitatea μ este constantă şi că $\bar{v}$ este un câmp de gradienţi, $\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi$. Se spune atunci că fluidul este *incompresibil*, iar φ este numit *potenţialul vitezelor*. Din ecuaţia de continuitate, rezultă $\operatorname{div}\bar{v} = 0$, adică $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$, $\Delta\varphi = 0$, deci $\bar{v}$ *este un câmp armonic în* U.

Un rezultat important în teoria funcţiilor armonice îl constituie teorema care urmează, care constituie în acelaşi timp o interpretare remarcabilă a laplacianului unei funcţii.

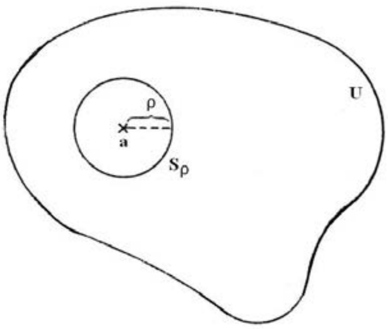


Fig. V.38

Teorema 3.4. *Fie $\varphi(x,y,z)$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. Atunci pentru orice punct fixat $a \in U$, $a = (x_0, y_0, z_0)$ are loc formula de evaluare a laplacianului lui φ în punctul a:*

$$(\Delta\varphi)(a) = \lim_{\rho \to 0} \frac{3}{2\pi\rho^4} \int_{S_\rho} [\varphi(x,y,z) - \varphi(x_0,y_0,z_0)]\mathrm{d}\sigma, \tag{42}$$

unde S_ρ este sfera cu centrul în a şi de rază $\rho > 0$ suficient de mică; fig. V. 37

Tot fără demonstraţie, enunţăm:

Teorema 3.5 (teorema de medie pentru funcţii armonice). *Fie $\varphi : U \to \mathbb{R}$ o funcţie armonică într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. Atunci pentru orice punct $a \in U$ şi pentru orice $\rho > 0$ astfel încât $B(a,\rho) \subset U$, avem*

$$\varphi(a) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{S_\rho} \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma.$$

Teorema 3.5 se interpretează astfel: membrul drept se numeşte uneori *media lui φ pe sfera S_ρ* şi atunci această medie coincide cu valoarea lui φ în centrul sferei; această proprietate sugerează existenţa unei armonii în repartizarea valorilor lui φ, ceea ce justifică denumirea de funcţie armonică.

Alte proprietăţi ale câmpurilor armonice sunt concentrate în

Teorema 3.6. *Fie U un deschis în $\mathbb{R}^3$ şi $\Omega(\bar{\Omega} \subset U)$ un compact elementar conex având frontiera închisă Σ.*

(a) *Două funcţii armonice în U care coincid pe Σ coincid în Ω.*

(b) *Două câmpuri armonice în U (presupus stelat) ale căror componente normale coincid pe Σ, coincid în Ω.*

Demonstraţie. (a) Fie φ, ψ funcţii armonice în U şi $\varphi = \psi$ pe Σ. Funcţia $h = \varphi - \psi$ este armonică în U, deci $\Delta h = 0$ şi $h = 0$ pe Σ. Considerăm câmpul vectorial $\bar{v} = h \cdot \mathrm{grad}\, h$; evident, $\mathrm{div}\, \bar{v} = \mathrm{grad}\, h \cdot \mathrm{grad}\, h + h \cdot \Delta h = ||\mathrm{grad}\, h||^2$ şi $\bar{v} \cdot \bar{n} = h \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}n} = 0$ (pe Σ). Aplicând formula (32), rezultă că

$$\iiint_\Omega ||\mathrm{grad}\, h||^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 0,$$

deci $\mathrm{grad}\, h = 0$, adică $h =$ constant în Ω. Cum $h = 0$ pe $\Sigma = \mathrm{Fr}\, \Omega$, rezultă că $h = 0$ în Ω, adică $\varphi = \psi$ în Ω.

(b) Fie $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ două câmpuri armonice în U astfel încât componentele lor normale să coincidă pe Σ, adică $\bar{v}_1 \cdot \bar{n} = \bar{v}_2 \cdot \bar{n}$ pe Σ şi fie $\bar{w} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$ deci $\bar{w} \cdot \bar{n} = 0$ pe Σ. Cum $\bar{w}$ este armonic, avem $\bar{w} = \mathrm{grad}\, \varphi$ cu φ armonică în U (conform teoremei 3.3). Aplicând formula (32) pentru $\bar{v} = \varphi \cdot \bar{w}$ (observând că $\mathrm{div}\, \bar{v} = \varphi \mathrm{div}\, \bar{w} + \bar{w} \cdot \mathrm{grad}\, \varphi = \varphi \Delta \varphi + \mathrm{grad}\, \varphi \cdot \mathrm{grad}\, \varphi = ||\mathrm{grad}\, \varphi||^2$ şi că $\bar{v} \cdot \bar{n} = \varphi(\bar{w} \cdot \bar{n}) = 0$ pe Σ), se obţine

$$\iiint_\Omega ||\mathrm{grad}\, h||^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 0,$$

de unde $\mathrm{grad}\, \varphi = 0$, în Ω, adică $\bar{w} = 0$ în Ω şi ca atare $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ în Ω.

Observaţii. Multe din rezultatele anterioare pot fi refăcute pentru cazul câmpurilor plane, locul formulei Gauss-Ostrogradski fiind luat atunci de formula Green-Riemann.

O problemă clasică având multe aplicaţii importante este *problema Dirichlet*, care constă în determinarea unei funcţii continue $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ care să fie armonică în $\mathring{\Omega}$, cunoscând valorile ei pe $\Sigma = \mathrm{Fr}\, \Omega$. Din teorema 3.6 (a) rezultă *unicitatea* soluţiei problemei Dirichlet; dificultatea majoră constă în demonstrarea *existenţei* soluţiei respective şi a determinării ei efective. Pentru mulţimi Ω de un tip particular (sfera, paralelipipede etc.) există formule standard care explicitează soluţia. O problemă similară este *problema Neumann* (F. NEUMANN, 1798-1895), care constă în determinarea unei funcţii continue $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ care să fie armonică în $\mathring{\Omega}$, cunoscând valorile lui $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n}$ pe Σ; teorema 3.6 (b) indică unicitatea soluţiei problemei Neumann.

Merită să fie subliniată aici importanţa principală, de natură filozofică, a acestor consideraţii: din cunoaşterea unor date la frontiera lui Ω şi din proprietatea de armonicitate, se determină valorile funcţiei necunoscute în Ω; aşadar, având acces prin instrumente de măsură la frontiera unor domenii, se pot deduce informaţii despre comportarea unor mărimi fizice în interiorul acelor domenii!

Consideraţiile anterioare sunt dezvoltate în cadrul capitolului de matematică intitulat "Ecuaţiile fizice matematice".

5.3.3 Coordonate curbilinii în $\mathbb{R}^3$

Fie A un deschis fixat din $\mathbb{R}^3$. Considerăm apoi un reper ortogonal $Oxyz$ de versori $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$. Fie $F : A \to \mathbb{R}^3$, $(u, v, w) \mapsto (x, y, z) = F(u, v, w)$ o aplicaţie injectivă de clasă $C^1(A)$, cu jacobianul $\dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ strict pozitiv în fiecare punct din A. Pentru orice punct $M \in F(A)$ se numesc *coordonatele curbilinii* ale lui M definite de F acel unic triplet de numere reale $(u, v, w) \in A$ astfel încât $M = F(u, v, w)$. Dacă notăm (f, g, h) componentele lui F, rezultă că punctul curent M din $F(A)$ are coordonatele carteziene

$$\begin{cases} x = f(u, v, w) \\ y = g(u, v, w) \\ z = h(u, v, w) \end{cases}, \text{ unde } (u, v, w) \in A.$$

Vectorul de poziţie al punctului M va fi

$$\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k} = f(u, v, w)\bar{\imath} + g(u, v, w)\bar{\jmath} + h(u, v, w)\bar{k}.$$

Aplicaţia F se mai numeşte *schimbare de coordonate* (trecere de la coordonatele curbilinii u, v, w la coordonate carteziene), în conformitate cu terminologia fixată în definiţia 5.3, unde F era presupus difeomorfism.

Vom presupune în continuare că aplicaţia F *defineşte un sistem ortogonal de coordonate curbilinii în* A, în sensul că vectorii $\bar{r}_u = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \bar{r}_v = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v}, \bar{r}_w = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial w}$ sunt doi câte doi ortogonali; mai precis,

$$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = 0 \text{ şi } \bar{r}_w = \bar{r}_u \times \bar{r}_v, \quad (\forall)(u, v, w) \in A.$$

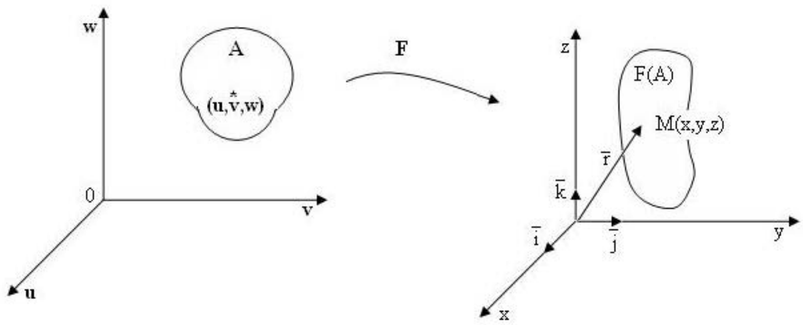


Fig. V.39

Notăm cu $\bar{e}_u, \bar{e}_v, \bar{e}_w$ respectiv versorii vectorilor $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{r}_w$ şi cu H_u, H_v, H_w mărimile aceloraşi vectori. Aşadar, $\bar{r}_u = H_u \bar{e}_u$, $\bar{r}_v = H_v \bar{e}_e$, $\bar{r}_w = H_w \bar{e}_w$. Funcţiile H_u, H_v, H_w sunt funcţii pozitive continue în A şi sunt numite *parametri lui* G. LAMÉ (1795-1870). Produsul mixt $(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_w)$ este pe de o parte evident egal cu determinantul funcţional $\dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ şi pe de altă parte, este $H_u H_v H_w (\bar{e}_u, \bar{e}_v, \bar{e}_w)$ şi cum $\bar{e}_u, \bar{e}_v, \bar{e}_w$ sunt versori doi câte doi ortogonali şi $\bar{e}_w = \bar{e}_u \times \bar{e}_v$, rezultă că $(\bar{e}_u, \bar{e}_v, \bar{e}_w) = 1$; deci

$$H_u \cdot H_v \cdot H_w = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}.$$

Exemple. 1) Considerăm coordonatele cilindrice ρ, φ, z; în acest caz se poate lua $A = \{\rho > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}\}$ şi aplicaţia F corespunzătoare este $F : (\rho, \varphi, z) \mapsto (x, y, z)$, definită prin $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. În acest caz, $\bar{r} = \rho \cos \varphi \bar{\imath} + \rho \sin \varphi \bar{\jmath} + z\bar{k}$, deci $\bar{r}_\rho = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} = \cos \varphi \bar{\imath} + \sin \varphi \bar{\jmath}$, $\bar{r}_\varphi = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \bar{\imath} + \rho \cos \varphi \bar{\jmath}$, $\bar{r}_z = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial z} = \bar{k}$ şi parametri Lamé sunt $H_\rho = ||\bar{r}_\rho|| = 1$, $H_\varphi = \rho$, $H_z = 1$, iar $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = H_\rho H_\varphi H_z = 1 \cdot \rho \cdot 1 = \rho$.

2) Considerăm coordonatele sferice r, θ, φ; în acest caz, $A = \{r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ şi $\bar{r} = r \sin \theta \cos \varphi \bar{\imath} + r \sin \theta \sin \varphi \bar{\jmath} + r \cos \theta \bar{k}$. Rezultă imediat parametri Lamé corespunzători $H_r = \left\| \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial r} \right\| = 1$, $H_\theta = \left\| \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \right\| = r$, $H_\varphi = \left\| \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} \right\| = r \sin \theta$ şi determinantul funcţional este $\dfrac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$. Se verifică uşor că atât coordonatele cilindrice cât şi cele sferice definesc sisteme ortogonale de coordonate curbilinii.

Indicăm acum, fără demonstraţie, modul de calcul al gradientului, divergenţei şi laplacianului în coordonate curbilinii, ortogonale, în cazul general considerat la început.

Teorema 3.7. *Fie* $\varphi(u, v, w)$ *o funcţie de clasă* C^1 *în* A. *Atunci*

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{H_u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \bar{e}_u + \frac{1}{H_v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \bar{e}_v + \frac{1}{H_w} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \bar{e}_w \, . \tag{43}$$

Teorema 3.8. *Fie* $\bar{v} = U(u,v,w)\bar{e}_u + V(u,v,w)\bar{e}_v + W(u,v,w)\bar{e}_w$ *un câmp vectorial de clasă* $C^1(A)$. *Atunci*

$$\operatorname{div}\bar{v} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(UH_vH_w) + \frac{\partial}{\partial v}(VH_wH_u) + \frac{\partial}{\partial w}(WH_uH_v)\right]. \qquad (44)$$

Ca aplicaţie, indicăm formula de calcul al laplacianului în coordonate curbilinii ortogonale. Fie $f(u,v,w)$ o funcţie de clasă $C^2(A)$. Atunci, conform formulelor (43), (44) rezultă

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{1}{H_uH_vH_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_vH_w}{H_u}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_wH_u}{H_v}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_uH_v}{H_w}\cdot\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right].$$

De exemplu, în coordonate cilindrice, $u = \rho$, $v = \varphi$, $w = z$, $H_\rho = 1$, $H_\rho = \rho$, $H_z = 1$, deci

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

În particular, laplacianul lui $f(\rho,\theta)$ în coordonate polare plane ρ,θ este

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}.$$

În mod similar, în coordonatele sferice r,θ,φ se obţine

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}.$$

Matematica face ca din proprietăţi care nu-i aparţin să se poată obţine alte proprietăţi care nu îi aparţin; utilizatorul de matematică trebuie să asimileze teorii şi tehnici subtile pentru a beneficia de marele potenţial al calculatorului.
(L. WITTGENSTEIN, 1889-1951)

Capitolul 6

Elemente de Analiză funcţională

Introducere

În acest capitol final al cursului, vom indica succint câteva dezvoltări fireşti ale Analizei matematice clasice, subliniind cu precădere fenomenul de trecere de la studiul unei singure funcţii fixate la considerarea unor spaţii de funcţii. În acest mod se realizează un important salt calitativ în utilizarea instrumentelor matematicii moderne, atât la formularea cât şi în rezolvarea unor probleme de optim care conduc la extremele anumitor funcţionale, în abordarea operatorială a teoriei sistemelor, în elaborarea calculului cu distribuţii, în fundamentarea analizei armonice a semnalelor şi în multe alte probleme de mare interes pentru cunoaştere, ale căror baze teoretice se aşază în zilele noastre.

Se poate afirma că Analiza funcţională constituie o ramură de vârf a matematicii, oferind un limbaj unitar, unificator pentru abordarea problemelor de fizică matematică, ecuaţii diferenţiale, calcul variaţional, teoria semnalelor, control optimal, economie matematică etc., iar metodele funcţional-analitice se aplică în strânsă legătură cu metodele numerice, pe care dealtfel le-a influenţat în mod decisiv. Fiecare paragraf al capitolului cuprinde câteva rezultate de bază şi o prezentare a aplicaţiilor posibile, conjugând, aşa cum am făcut şi până acum, modelul matematic cu modelul fizic generator.

În ţara noastră există o şcoală puternică de Analiză funcţională şi teoria operatorilor, având contribuţii teoretice şi aplicative recunoscute pe plan mondial. Aceste cercetări se desfăşoară în cadrul Institutului de Matematică al Academiei Române şi la universităţile din Bucureşti, Iaşi, Timişoara. Putem cita numele câtorva matematicieni români având rezultate de valoare în domeniul amintit: A. Ghika, M. Nicolescu, Gh. Marinescu, iar în anii noştri V. Barbu, C. Foiaş, S. Teleman, I. Singer, D. Voiculescu ş.a.

6.1 Funcţionale şi operatori pe spaţii Hilbert

6.1.1 Spaţii Hilbert, exemple, proprietăţi

Definiţia 1.1. *Un spaţiu vectorial real H se numeşte* **prehilbertian** *dacă este fixată o aplicaţie $H \times H \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ astfel încât pentru orice $x, y, z \in H$ şi pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ să fie satisfcute proprietăţile: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, $\langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$; în plus, numărul real $\langle x, x \rangle$ este pozitiv şi este nul dacă şi numai dacă $x = 0$. Spaţiile prehilbertiene finit dimensionale se mai numesc* **euclidiene**.

Se mai spune că în H este fixat un **produs scalar** $\langle \ , \ \rangle$, în analogie cu cazul spaţiului $H = \mathcal{V}_3$, înzestrat cu produsul scalar uzual de vectori.

Revenind la cazul unui spaţiu prehilbertian oarecare H, se observă că pentru orice $x_1,\dots,x_m,\ y_1,\dots,y_m \in H$ şi pentru orice $\lambda_1,\dots,\lambda_m,\ \mu_1,\dots,\mu_n \in \mathbb{R}$, avem

$$\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,\ \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j \rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \langle x_i, y_j\rangle.$$

Doi vectori $x, y \in H$ se numesc *ortogonali* (şi se scrie $x \perp y$) dacă $\langle x, y\rangle = 0$.

Pentru orice $x \in H$ se notează $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Evident, $||x|| \geq 0$ şi $||x|| = 0 \leftrightarrow x = 0$. Nu întâmplător $||x||$ se numeşte *norma lui* x, deoarece vom vedea că sunt satisfăcute proprietăţile unei norme pe H.

Exemple. 1) Fie $H = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$ fixat). Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$ se notează $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (numit *produsul scalar euclidian*). Notând cu $\{e_1,\dots,e_n\}$ baza canonică în $\mathbb{R}^n$, este evident că $e_i \perp e_j$, pentru orice $i \neq j$; mai precis pentru orice $1 \leq i, j \leq n$, avem

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad i \neq j \\ 1 & \text{dacă} \quad i = j \end{cases}, \text{ adică } \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

O generalizare a acestui exemplu îl constituie următorul: se consideră spaţiul vectorial real $H = M_{m,n}(\mathbb{R})$ al matricilor de tip (m, n) cu coeficienţi reali şi pentru orice $A, B \in H$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, se notează

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = \text{ urma matricii pătratice } {}^tA \cdot B.$$

Se obţine un produs scalar şi ca atare o structură de spaţiu prehilbertian pe $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dacă $x = (x_1,\dots,x_n)$, se asociază matricea-coloană

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

şi se observă că $\mathbb{R}^n$ şi $M_{n,1}(\mathbb{R})$ sunt spaţii vectoriale reale izomorfe şi în plus, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}^n$, produsul scalar $\langle X, Y\rangle$ definit anterior coincide cu produsul euclidian al vectorilor x, y, adică $\langle x, y\rangle = {}^tX \cdot Y$.

2) O generalizare infinit dimensională a lui $\mathbb{R}^n$ o constituie *spaţiul* l_2. Prin definiţie, un element din l_2 este un şir $x = \{x_n\}_{n\geq 0}$ de numere reale astfel încât seria $\sum_{n\geq 0} x_n^2$ să fie convergentă. De exemplu, şirul $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n\geq 0}$ aparţine lui l_2, dar $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right\}_{n\geq 0}$ nu are această proprietate. Două elemente $x = \{x_n\}_{n\geq 0}$, $y = \{y_n\}_{n\geq 0}$ din l_2 se consideră egale ($x = y$) dacă şi numai dacă $x_n = y_n$ pentru orice $n \geq 0$; se definesc apoi suma $x + y = \{x_n + y_n\}_{n\geq 0}$ şi $\lambda x = \{\lambda x_n\}_{n\geq 0}$ pentru orice scalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Evident $\lambda x \in l_2$; apoi din inegalitatea $2|x_n y_n| \leq x_n^2 + y_n^2$, $(\forall) n \geq 0$, rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} x_n y_n$ este absolut convergentă deci convergentă şi atunci seria $\sum_{n\geq 0}(x_n^2 + 2x_n y_n + y_n^2) = \sum_{n\geq 0}(x_n + y_n)^2$ este convergentă, adică $x + y \in l_2$. Aşadar, l_2 este spaţiu vectorial real. Pentru orice $x, y \in l_2$ ca mai sus, se poate defini numărul real

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\geq 0} x_n y_n$$

şi se verifică uşor proprietăţile unui produs scalar, deci l_2 este spaţiu prehilbertian (Se poate considera în mod similar spaţiul l_2 al şirurilor indexate după $\mathbb{Z}$, nu numai după $\mathbb{N}$).

Elementele lui l_2 se mai numesc *semnale discrete de energie finită*. Anume, considerând $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ca mulţime de momente, orice element $x = \{x_n\}_{n\geq 0}$ din l_2 este o funcţie $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto x_n$ deci este un semnal discret, conform cu terminologia fixată în Capitolul 1. Numărul real şi pozitiv $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum\limits_{n\geq 0} x_n^2}$ se mai numeşte *energia semnalului* x.

3) Fie $[a, b]$, $a < b$ un interval fixat pe dreapta reală. Pe spaţiul vectorial real $C^0_{[a,b]}$ al funcţiilor continue $[a, b] \to \mathbb{R}$ se obţine un produs scalar (numit *produsul scalar* L^2) punând

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x, \quad (\forall)f, g \in C^0_{[a,b]}.$$

De exemplu, în spaţiul $C^0_{[0,2\pi]}$ se verifică, prin calcul direct, că pentru orice numere întregi $m, n \geq 1$, au loc relaţiile

$$\langle \sin mx, \sin nx\rangle = \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\mathrm{d}x = \pi\cdot\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad m \neq n \\ \pi & \text{dacă} \quad m = n \end{cases}; \quad (1)$$

$$\langle \sin mx, \cos nx\rangle = \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\mathrm{d}x = 0; \quad (2)$$

$$\langle \cos mx, \cos nx\rangle = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\mathrm{d}x = \pi \cdot \delta_{mn}. \quad (3)$$

Aceste relaţii se mai numesc *relaţii de ortogonalitate pentru sinuşi-cosinuşi pe intervalul* $[0, 2\pi]$.

La exemplele anterioare vom adăuga altele noi, după acumularea câtorva rezultate teoretice.

Teorema 1.1. *Fie H un spaţiu prehilbertian real.*
(a) *Pentru orice $x, y \in H$ are loc relaţia*

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad \textit{(inegalitatea lui Schwartz)}; \quad (4)$$

(b) *H este spaţiu vectorial normat, relativ la norma $H \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ||x||$;*
(c) *Pentru orice $x, y \in H$ are loc relaţia*

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \quad \textit{(regula paralelogramului)}. \quad (5)$$

Demonstraţie. (a) Dacă $y = 0$, atunci $||y|| = 0$, $\langle x, y\rangle = 0$ şi relaţia (4) este evidentă. Presupunem $y \neq 0$ şi fie λ un număr real arbitrar. Atunci $\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \geq 0$, adică $\langle x, x+\lambda y\rangle + \langle \lambda y, x+\lambda y\rangle \geq 0$, deci $\langle x, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \geq 0$. Aşadar

$$||y||^2 \cdot \lambda^2 + 2\langle x, y\rangle \cdot \lambda + ||x||^2 \geq 0.$$

Se obţine astfel un trinom de gradul doi în λ (x, y fiind fixat) cu coeficienţi reali, pozitiv pentru orice λ, în care coeficientul lui λ^2 este strict pozitiv. În mod necesar discriminantul trinomului este ≤ 0 şi se obţine relaţia (4).

(b) Trebuie verificate condiţiile N_1, N_2, N_3 din definiţia 3.2 (cap. II, §2) a unei norme. De exemplu, avem $\langle \lambda x, \lambda y\rangle = \lambda^2\langle x, x\rangle$, adică $||\lambda x||^2 = \lambda^2||x||^2$, deci $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$, pentru orice $x \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Apoi pentru orice $x, y \in H$, $||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle+2\langle x, y\rangle+\langle y, y\rangle \leq ||x||^2+2||x||\cdot||y||+||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$, deci $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

(c) Avem $||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2$, $||x - y||^2 = \langle x-y, x-y\rangle = ||x||^2 - 2\langle x, y\rangle + ||y||^2$ şi adunând aceste relaţii, se obţine relaţia (5).

Observaţii. În orice spaţiu prehilbertian H se poate dezvolta un limbaj geometric sugestiv. Pentru orice $x \in H$, norma $||x||$ a lui x se mai numeşte *lungimea vectorului* x; dacă $x, y \in H$, numărul real $\mathrm{d}(x, y) = ||x-y||$ se numeşte *distanţa între* x *şi* y, iar dacă x, y sunt nenuli, raportul $\dfrac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||}$ este cuprins între -1 şi 1 (conform relaţiei (4)) şi numim *unghi al vectorilor* x, y numărul real $\theta \in [0, \pi]$ astfel încât $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||}$. Identificând orice punct $x \in H$ cu vectorul său de poziţie $\overline{Ox}$, se extind consideraţiile geometrice uzuale din $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$ etc. Astfel, regula paralelogramului (teorema 1.1, (c)) extinde la un spaţiu prehilbertian oarecare o proprietate binecunoscută din $\mathbb{R}^2$ conform căreia suma pătratelor lungimilor diagonalelor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor lungimilor celor patru laturi. În mod similar, dacă $x, y \in H$ şi $x \perp y$ (adică $\langle x, y\rangle = 0$), atunci se obţine relaţia

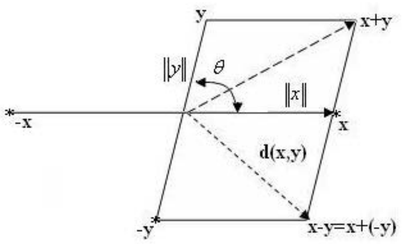


Fig. VI.1a

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2, \tag{6}$$

numită în mod justificat *teorema lui Pitagora* (fig. VI. 1, b)).

Deoarece orice spaţiu prehilbertian H este în mod natural un spaţiu metric relativ la distanţa

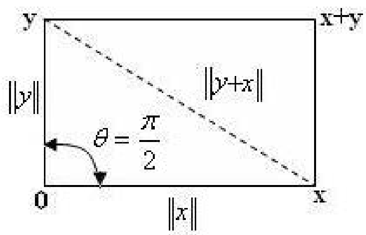


Fig. VI.1b

$$\mathrm{d}(x, y) = ||x-y|| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}, \quad (\forall) x, y \in H$$

se poate vorbi de convegenţa şirurilor de elemente din H, numită uneori *convergenţa în normă* sau *convergenţa tare*: un şir $\{u_n\}_{n\geq 0}$ de elemente din H *converge (tare)* către $u \in H$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n - u|| = 0$.

Definiţia 1.2. *Se numeşte* **spaţiu Hilbert** *orice spaţiu prehilbertian în care orice şir Cauchy este convergent.*

Aşadar, spaţiile Hilbert sunt tocmai spaţiile prehilbertiene complete; în particular, *orice spaţiu Hilbert este în mod natural un spaţiu Banach.*

Exemple. 1) Spaţiul $\mathbb{R}^n$ este evident un spaţiu Hilbert relativ la produsul scalar euclidian; se poate arăta fără dificultate că l_2 este de asemenea un spaţiu Hilbert.

2) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval în $\mathbb{R}$; notăm cu $L^2(I)$ mulţimea tuturor funcţiilor măsurabile $f : I \to \mathbb{R}$ astfel încât $\displaystyle\int_I f^2(x)\mathrm{d}x < \infty$. Dacă $f, g \in L^2(I)$, atunci din inegalitatea

$$[f(x) + g(x)]^2 \leq 2[f^2(x) + g^2(x)], \quad (\forall) x \in I,$$

rezultă că $f + g \in L^2(I)$; dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ este o constantă, atunci este evident că $\lambda f \in L^2(I)$. Aşadar, $L^2(I)$ este un spaţiu vectorial real. Apoi pentru orice $f, g \in L^2(I)$ avem $(|f(x)| - |g(x)|)^2 \geq 0$, de unde

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)], \quad (\forall) x \in I,$$

deci are sens numărul real

$$\langle f, g\rangle \triangleq \int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Se verifică uşor că se defineşte astfel un produs scalar şi deci $L^2(I)$ este spaţiu prehilbertian (facem convenţia de a identifica orice două funcţii $I \to \mathbb{R}$ care coincid a.p. pe I). Pentru I mărginit avem $1 \in L^2(I)$, $L^2(I) \subset L^1(I)$.

Pentru orice $f \in L^2(I)$ se poate defini norma lui f

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_I f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Un fapt important şi nebanal îl constituie următoarea:

Teorema 1.2. $L^2(I)$ *este spaţiu Hilbert.*

Observaţie. Funcţiile din $L^2(I)$ se mai numesc *semnale (continuale) de energie finită pe* I; pentru orice astfel de semnal $f : I \to \mathbb{R}$ norma lui f, adică numărul real şi pozitiv

$$||f|| = \left(\int_I f(x)^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

se numeşte *energia lui* f.

Toate cele spuse anterior se extind la cazul când scalarii sunt numere complexe, iar funcţiile iau valori complexe; în particular, se poate defini noţiunea de spaţiu prehilbertian complex. În cele ce urmează, ne restrângem la cazul real.

Fixăm un spaţiu Hilbert real $(H, \langle\ ,\ \rangle)$. Dacă $a \in H$ şi $A \subset H$ se spune că a este *ortogonal pe* A (şi se scrie $a \perp A$) dacă $\langle a, x\rangle = 0$ pentru orice $x \in A$. Mulţimea tuturor elemenelor $a \in H$ ortogonale pe A formează un subspaţiu vectorial al lui H, notat cu $A^\perp$ (numit *ortogonalul* lui A).

Teoria generală a spaţiilor Hilbert este dominată de următoarele două teoreme, ambele datorate lui F. RIESZ (1880-1956).

Teorema 1.3 (teorema de proiecţie). *Fie* $H_1 \subset H$ *un subspaţiu vectorial închis al lui* H *şi* $a \in H$ *un vector arbitrar fixat. Atunci* $(\exists!)p \in H_1$ *astfel încât* $(\forall)x \in H_1$, $||a - p|| \le ||a - x||$ *şi* $a - p \perp H_1$.

Demonstraţie. Mulţimea de numere reale $\{||a - x|| \,|x \in H_1\}$ este mărginită inferior de 0, deci are o margine inferioară i, adică $i = \mathrm{d}(a, H_1)$. Conform definiţiei marginii inferioare, pentru orice $n \ge 1$ există $x_n \in H_1$ astfel încât

$$i \le ||a - x_n|| < i + \frac{1}{n}. \tag{7}$$

Vom arăta mai întâi că şirul $\{x_n\}_{n\ge1}$ astfel obţinut este convergent; pentru aceasta, este suficient să arătăm că el este şir Cauchy (deoarece H este spaţiu complet). Aplicăm în acest scop relaţia (5) pentru $x = x_m - a$, $y = x_n - a$ $(m, n \ge 1)$ şi obţinem

$$||x_m + x_n - 2a||^2 + ||x_m - x_n||^2 = 2(||x_m - a||^2 + ||x_n - a||^2),$$

de unde

$$0 \le ||x_m - x_n||^2 = 2||x_m - a||^2 + 2||x_n - a||^2 - ||x_m + x_n - 2a||^2 \overset{cf.(7)}{\le}$$

$$\overset{cf.(7)}{\le} 2\left(i + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(i + \frac{1}{n}\right)^2 - 4\left\|\frac{x_m + x_n}{2} - a\right\|^2 \le 2\left(i + \frac{1}{m}\right)^2 +$$

$$+2\left(i + \frac{1}{n}\right)^2 - 4i^2 = \frac{2}{m^2} + \frac{2}{n^2} + 4i\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right),$$

deci

$$\lim_{m,n\to\infty} ||x_m - x_n|| = 0.$$

Aşadar, şirul $\{x_n\}_{n\ge1}$ este convergent şi fie $p = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Deoarece $x_n \in H_1$, $(\forall)n \ge 1$, rezultă $p \in H_1$ şi cum H_1 este închis, avem $p \in H_1$. Conform relaţiei (7) pentru $n \to \infty$, rezultă că $||a - p|| = i$, deci $(\forall)x \in H_1$, $||a - p|| \le ||a - x||$.

Demonstrăm proprietatea secundă a lui p. Fixăm $(\forall)x \in H_1$ şi arătăm că $a - p \perp x$. Dacă $x = 0$, afirmaţia este clară; putem deci presupune $x \ne 0$. Pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ avem $p + \lambda x \in H_1$ şi vom evalua în două moduri expresia $||a - p - \lambda x||^2$. Pe de-o parte, $||a - p - \lambda x||^2 = \langle a - p - \lambda x, a - p - \lambda x\rangle = ||a-p||^2 - 2\lambda\langle a-p, x\rangle + \lambda^2||x||^2$ şi pe de alta, $||a-p-\lambda x||^2 = ||a-(p+\lambda x)^2|| \ge \ge i^2 = ||a - p||^2$; deducem astfel că $\lambda^2||x||^2 - 2\lambda\langle a - p, x\rangle \ge 0$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, deci neapărat $\langle a - p, x\rangle = 0$.

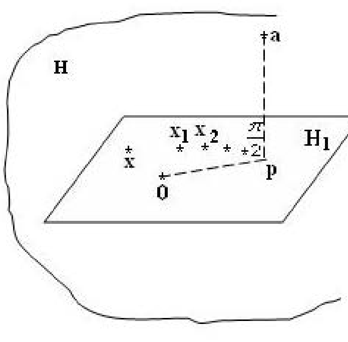


Fig. VI.2

În sfârşit, probăm unicitatea lui p; dacă ar mai exista un element $p' \in H_1$, astfel încât $a - p' \perp H_1$, atunci cum $p, p' \in H_1$ şi $p' - p \in H_1$, rezultă că $(a - p') \perp (p' - p)$. Conform teoremei lui Pitagora se obţine atunci $||a - p'||^2 + ||p' - p||^2 = ||a - p||^2 = i^2$.

Dar $||a - p'|| \geq i$, deci $||p' - p||^2 \leq 0$ adică $||p' - p|| = 0$ şi $p' = p$.

Teorema 1.3 este complet demonstrată.

Observaţie. Elementul p se numeşte *proiecţia lui a pe* H_1. Desigur, dacă $a \in H_1$, atunci $p = a$. Această teoremă este un rezultat de optim şi reprezintă extinderea la spaţii Hilbert a unor consideraţii geometrice simple din cazul când $H = \mathbb{R}^3$ şi H_1 este mulţimea punctelor unei drepte sau ale unui plan (trecând prin origine).

Corolar 1. *Dacă H_1 este un subspaţiu vectorial închis al lui H, atunci* $H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$.

Demonstraţie. Orice vector $a \in H$ se scrie unic sub forma $a = u + v$ cu $u \in H_1$, $v \in H_1^{\perp}$; anume, luăm $u = p$, $v = a - p$ (fig. VI. 3).

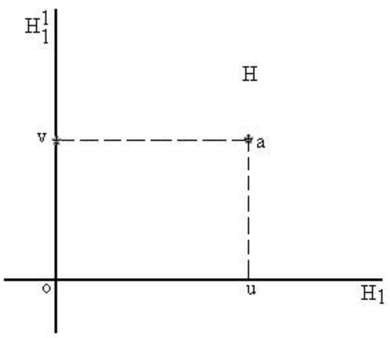


Fig. VI.3

Corolar 2. *Fie $H_1 \subset H$ un subspaţiu închis al lui $H, H_1 \neq H$. Atunci există $a \in H \setminus H_1$, $a \neq 0$ astfel încât $a \perp H_1$.*

Demonstraţie. Alegem $b \in H$, $b \notin H_1$ şi fie p proiecţia lui b pe H_1 (dată de teorema 1.3). Deoarece $b \notin H_1$, rezultă că $p \neq b$ şi luăm $a = p - b$. Atunci $a \neq 0$, $a \notin H_1$ şi tot din teorema 1.3 ştim că $a \perp H_1$.

Celălalt rezultat important în teoria generală a spaţiilor Hilbert îl constituie

Teorema 1.4 (a lui F. Reisz de reprezentare). *Fie H un spaţiu Hilbert şi $L : H \to \mathbb{R}$ o aplicaţie liniară şi continuă. Atunci $(\exists !)$ un vector $v \in H$ depinzând de L astfel încât*

$$L(u) = \langle u, v \rangle, \quad (\forall) u \in H. \tag{8}$$

Demonstraţie. Dacă $L = 0$ luăm $v = 0$. Putem presupune $L \neq 0$ şi fie $H_1 = \operatorname{Ker} L$; evident, $H_1 = L^{-1}(\{0\})$ şi cum L este funcţie continuă şi $\{0\}$ este mulţime închisă în $\mathbb{R}$, rezultă că H_1 este un subspaţiu vectorial închis (teorema III 2.2). În plus, $H_1 \neq H$ (căci dacă $H_1 = H$, ar rezulta că $L = 0$). Aplicând corolarul 2 al teoremei 1.3, există $a \in H \setminus H_1$, $a \neq 0$ astfel încât $a \perp H_1$.

Atunci $L(a) \neq 0$ şi $||a|| \neq 0$ şi putem considera elementul $v = \dfrac{L(a)}{||a||^2} a$.

Evident

$$\langle a, v \rangle = \langle a, \frac{L(a)}{||a||^2} a \rangle = \frac{L(a)}{||a||^2} \langle a, a \rangle = L(a). \tag{9}$$

Trecem acum la verificarea relaţiei (8). Fie $(\forall) u \in H$ fixat şi $u_1 = u - \dfrac{L(u)}{L(a)} a$; atunci $L(u_1) = L(u) - \dfrac{L(u)}{L(a)} \cdot L(a) = L(u) - L(u) = 0$, deci $u_1 \in \operatorname{Ker} L$, adică $u_1 \in H_1$. Deoarece a este ortogonal la H_1 rezultă că $a \perp u_1$ şi cum v este coliniar cu a, rezultă că $v \perp u_1$, adică $\langle v, u_1 \rangle = 0$, Avem $u = u_1 + \dfrac{L(u)}{L(a)} a$, deci

$$\langle u, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \frac{L(u)}{L(a)} \langle a, v \rangle \overset{cf.(9)}{=} \langle u_1, v \rangle + \frac{L(u)}{L(a)} L(a) = 0 + L(u) = L(u)$$

şi am verificat (8).

Rămâne să probăm unicitatea lui v; presupunem că ar mai exista un element $v' \in H$ astfel încât

$$L(u) = \langle u, v' \rangle, \quad (\forall) u \in H.$$

Atunci $\langle u, v \rangle = \langle u, v' \rangle$ pentru orice $u \in H$, adică $\langle u, v - v' \rangle = 0$; luând $u = v - v'$, se obţine $||v - v''||^2 = 0$, deci $v = v'$.

Teorema 1.4 este demonstrată.

Observaţie. Teorema 1.4 se mai numeşte *teorema de reprezentare a funcţionalelor liniare şi continue pe un spaţiu Hilbert* şi afirmă pe scurt că o astfel de funcţională este obţinută ca produs scalar cu un vector fixat. Cu notaţiile din enunţ, ea se mai scrie

$$L = \langle \cdot, v \rangle,$$

unde $v \in H$ este un element unic determinat de L. Se poate afirma că şi teorema 1.4 este o abstragere a unui fapt evident: dacă $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţională liniară şi dacă notăm $c_k = L(e_k)$, $1 \le k \le n$ unde $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este baza canonică în $\mathbb{R}^n$, atunci $(\forall)u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, avem $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ şi $L(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i L(e_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i$; astfel, $L(u)$ este egal cu $\langle c, u \rangle$, produsul scalar euclidian al vectorilor $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ şi $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definiţia 1.3. *Se numeşte* **operator liniar şi continuu al unui spaţiu Hilbert real** H *orice aplicaţie* $\mathbb{R}$*-liniară şi continuă* $H \to H$.

Operatorii au o interpretare sistemică remarcabilă. Anume, considerând că intrările şi ieşirile sunt elemente din H, un operator T al spaţiului Hilbert H poate fi asimilat cu un sistem liniar şi continuu.

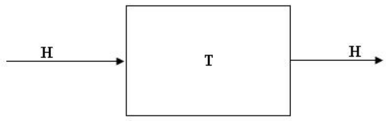


Fig. VI.4

O consecinţă importantă a teoremei 1.4 este existenţa adjunctului oricărui operator al unui spaţiu Hilbert. Mai precis, are loc

Teorema 1.5. *Pentru orice operator* $T : H \to H$ *al unui spaţiu Hilbert există un unic operator* T^* *al lui* H, $T^* : H \to H$ *astfel încât*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \quad (\forall)x, y \in H.$$

Demonstraţie. Fixăm $(\forall)y \in H$ şi considerăm funcţionala liniară $L : H \to \mathbb{R}$ definită prin $L(x) = \langle Tx, y \rangle$, $(\forall)x \in H$.

Este evident că L este aplicaţie continuă. Într-adevăr, dacă $x_n \overset{\text{în } H}{\longrightarrow} 0$ atunci $Tx_n \overset{\text{în } H}{\longrightarrow} 0$, adică $\lim_{n\to\infty} ||Tx_n|| = 0$. Apoi, conform inegalităţii lui Schwartz,

$$0 \le |\langle Tx_n, y \rangle| \le ||Tx_n|| \cdot ||y||,$$

deci $\lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, y \rangle = 0$, adică $L(x_n) \to 0$.

Conform teoremei 1.4, există şi este unic $v \in H$, depinzând de y astfel încât $L(x) = \langle x, v \rangle$, $(\forall)x \in H$. Acest element se notează $v = T^*y$ şi satisface $L(x) = \langle x, T^*y \rangle$, adică $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$, pentru orice $x, y \in H$.

Se arată fără dificultate că T^* este aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară şi continuă, iar teorema este dovedită.

Un operator T al unui spaţiu Hilbert se numeşte *autoadjunct* (sau *hermitic*) dacă $T = T^*$.

Exemple. 1) Fie $H = l_2$ şi operatorul $F : H \to H$ care asociază oricărui şir $x = \{x_0, x_1, \ldots\}$, şirul $Tx = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Atunci adjunctul lui T este operatorul $T^* : H \to H$ definit prin $T^*x = \{0, x_0, x_1, \ldots\}$. Într-adevăr, avem $\langle Tx, y \rangle = x_1 y_0 + x_2 y_1 + \ldots = \langle x, T^*y \rangle$, $(\forall)x, y \in l_2$.

2) Dacă $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ este o aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară, operatorul T este autoadjunct dacă şi numai dacă matricea M_T asociată lui T (în baza canonică) este simetrică.

6.1.2 Funcţii de matrici; funcţii de operatori

Fixăm o matrice oarecare $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$; ea se poate identifica prin punctul $(a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{nn})$ din $\mathbb{R}^{n^2}$ şi are loc izomorfismul de spaţii vectoriale reale $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$; în particular, structura de spaţiu Banach de pe $\mathbb{R}^{n^2}$ se poate transfera la $M_n(\mathbb{R})$. Mai precis, punând

$$||A|| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

se obţine o normă pe $M_n(\mathbb{R})$; se verifică uşor că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ şi dacă $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ este un vector coloană, atunci $||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$, $||A \cdot x|| \leq ||A|| \cdot ||x||$, unde $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$; în particular, pentru orice $k \geq 1$, avem

$$||A^k|| \leq ||A||^k.$$

Teorema 1.6. *Fie o serie de puteri reale* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ *cu raza de convergenţă* $\rho > 0$. *Atunci pentru orice matrice pătratică* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *astfel încât* $||A|| < \rho$, *seria de matrici*

$$\sum_{n\geq 0} a_n A^n = a_0 U_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots \tag{10}$$

(privită ca serie de elemente din spaţiul Banach $M_n(\mathbb{R})$*) este o serie convergentă.*

Suma ei se notează cu $f(A)$ *şi se numeşte* **funcţia de matricea** A **definită de** f.

Demonstraţie. Alegem $r > 0$ astfel încât $||A|| < r < \rho$. Conform teoremei II. 4. 11, seria numerică $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ este AC, deci seria de numere reale pozitive $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ este C. Avem $(\forall) n \geq 0$.

$$||a_n A^n|| = |a_n| \cdot ||A^n|| \leq |a_n| \cdot ||A^n|| \leq |a_n| r^n.$$

Conform criteriului de comparaţie (teorema II 3.9. a) rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} ||a_n A^n||$ este C, adică seria de matrici $\sum_{n\geq 0} a_n A^n$ este AC; conform teoremei II 3.7, rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} a_n A^n$ este convergentă în spaţiul Banach $M_n(\mathbb{R})$.

Vom demonstra un rezultat oarecum surprinzător (teorema 1.6), dar mai întâi este necesară

Lema 1. *Dacă* H *este un spaţiu Banach real şi* $V \subset H$ *este un subspaţiu finit dimensional al lui* H, *atunci* V *este o mulţime închisă.*

Teorema 1.7. *În condiţiile teoremei 1.6, matricea* $f(A)$ *se poate exprima ca o combinaţie liniară de* $A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A$, U_n, *cu coeficienţi reali (unde* n *este ordinul matricii* A*).*

Demonstraţie. Dacă $P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + \ldots + C_{n-1}\lambda + C_n = \det(A - \lambda U_n)$ este polinomul caracteristic al matricii A, atunci conform teoremei Hamilton-Cayley avem $P(A) = 0$, deci A^n este o combinaţie liniară de $A^{n-1}, \ldots, A, U_n$ şi la fel vor fi $A^{n+1}, A^{n+2}, \ldots$ ca şi orice polinom de matricea A. Fie V subspaţiul vectorial al lui $M_n(\mathbb{R})$ generat de $A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, U_n$. Aşadar, orice polinom de matricea A aparţine lui V. Deoarece $f(A)$ este limita sumelor parţiale ale seriei (10), adică limită de polinoame de matricea A, rezultă că $f(A) \in \bar{V}$, adică $f(A) \in V$, conform lemei 1.

Cea mai importantă funcţie de matrici este exponenţiala. Considerăm seria de puteri $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ având raza de convergenţă $\rho = \infty$ şi a cărei sumă este e^x, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Pentru *orice* matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ condiţia $||A|| < \rho$ este automat îndeplinită şi aplicând teorema 1.5, rezultă că *seria de matrici* $U_n + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots$ este *convergentă*. Suma ei se notează e^A sau $\exp A$ şi se numeşte **exponenţiala matricii** A. Aşadar, $e^A \in M_n(\mathbb{R})$ şi

$$e^A = U_n + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} = \ldots \tag{11}$$

Proprietăţile principale ale exponenţialei de matrici sunt concentrate în

Teorema 1.8. (a) $e^0 = U_n$, $e^{\lambda U_n} = e^\lambda \cdot U_n$, $(\forall)\lambda \in \mathbb{R}$;

(b) *Dacă* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *şi* $AB = BA$, *atunci* $e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A = e^{A+B}$;

(c) *Pentru orice matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *matricea* e^A *este nesingulară şi* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$;

(d) *Fie* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *este o matrice fixată. Atunci pentru orice matrice nesingulară* $T \in M_n(\mathbb{R})$, *are loc relaţia*

$$e^A = T \cdot e^{T^{-1}AT} \cdot T^{-1}. \tag{12}$$

Demonstraţie. (a) rezultă direct din definiţie (formula (11)).

(b) Avem

$$e^{A+B} = \sum_{n\geq 0} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k}\right),$$

aplicând formula binomului lui Newton pentru matrici (aici se foloseşte esenţial faptul că A şi B comută între ele). Aşadar,

$$e^{A+B} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{0\leq p,q\leq n\\ p+q=n}} \frac{A^p \cdot B^q}{p!q!}\right) = \left(\sum_{p\geq 0}\frac{A^p}{p!}\right)\left(\sum_{q\geq 0}\frac{B^q}{q!}\right).$$

Ultima relaţie rezultă din teorema II §3.14 care se extinde direct şi la serii de matrici. În concluzie, $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ şi de aici, $e^{A+B} = e^{B+A} = e^B \cdot e^A$.

(c) Aplicăm faptul că $e^A \cdot e^{-A} = e^0 = U_n$.

(d) Prin inducţie după k se poate verifica fără dificultate că $(T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^kT$. Atunci

$$T^{-1}e^AT = T^{-1}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{A^k}{k!}\right)T = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(T^{-1}A^kT) = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(T^{-1}AT)^k = e^{T^{-1}AT},$$

de unde rezultă formula (12).

Formula (12) are loc pentru orice funcţie de matrice $f(A)$, anume $f(A) = T \cdot f(T^{-1}AT) \cdot T^{-1}$ (T nesingulară), cu aceeaşi demonstraţie ca mai sus.

Aplicaţie

Considerăm un sistem diferenţial de ordinul I, liniar şi omogen, cu coeficienţi constanţi ($A \in M_n(\mathbb{R})$)

$$x'(t) = A \cdot x(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{13}$$

unde $x(t)$ reprezintă coloana necunoscutelor,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}.$$

Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ se poate considera matricea At. În general, dacă se consideră o matrice pătratică de funcţii derivabile se poate defini derivata acestei matrici derivând fiecare element în parte; se extind unele din proprietăţile uzuale ale derivatelor. Astfel, pentru orice întreg $p \geq 0$ avem $((At)^p)' = Ap \cdot (At)^{p-1}$.

Apoi pentru orice polinom P rezultă $P(At)' = A \cdot P'(At)$ şi mai general, pentru orice funcţie de matrici, în condiţiile teoremei 1.5, avem $f(At)' = A \cdot f'(At)$; în particular, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ avem $(e^{At})' = A \cdot e^{At}$.

Se ştie că pentru orice $t_0 \in \mathbb{R}$ şi pentru orice vector-coloană n-dimensional fixat x_0, sistemul (13) are soluţie unică $x(t)$ astfel încât $x(t_0) = x_0$; folosind exponenţiala unei matrici se poate da o reprezentare elegantă a acestei soluţii, anume

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x_0. \tag{14}$$

Este suficient să observăm că vectorul (14) verifică într-adevăr sistemul (13): $x'(t) = Ae^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) = A \cdot x(t)$ şi condiţia $x(t_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 = e^0 \cdot x_0 = U_n \cdot x_0 = x_0$. Matricea $e^{A(t-t_0)}$ se numeşte *matricea de tranziţie a sistemului* (13) *de la momentul* t_0 *la momentul* t.

Mai general, pentru un sistem diferenţial de ordinul I liniar, cu coeficienţi constanţi, neomogen

$$x'(t) = A \cdot x(t) + B(t)$$

unde $B(t)$ este o coloană de n funcţii continue şi mărginite pe un interval $J \subset \mathbb{R}$, atunci soluţia $x(t)$ pe J verificând o condiţie de forma $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \in J$ fixat) este

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} \cdot B(s)\mathrm{d}s, \quad (\forall) t \in J. \tag{15}$$

Într-adevăr, este evident că $x(t_0) = x_0$ şi apoi derivând sub integrală, avem

$$x'(t) = Ae^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} Ae^{A(t-s)} \cdot B(s)\,\mathrm{d}s + e^{A(t-s)} \cdot B(s)|_{s=t} =$$

$$= A\left[e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} \cdot B(s)\,\mathrm{d}s\right] + e^0 \cdot B(t) = A \cdot x(t) + B(t),\ (\forall) t \in J.$$

Formula (15) are o interpretare senzaţională: dacă se cunosc parametri de stare $x_1, \ldots, x_n$ ai sistemului dinamic $x' = Ax + B(t)$ la un moment t_0, atunci se pot determina valorile lor la orice alt moment $t \in J$.

Apare ca utilă indicarea unor metode de calcul al exponenţialei unei matrice, sarcină a Algebrei matriceale.

6.1.3 Exerciţii

1. Se consideră spaţiul prehilbertian real $H = C^0_{[0,2\pi]}$, cu produsul scalar L^2. Să se arate că şirul de funcţii continue $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ având graficul din figura VI. 5, este şir Cauchy.

Indicaţie. Pentru orice $m, n \geq 1$ avem

$$||f_m - f_n||^2 = \int_0^{2\pi} (f_m(x) - f_n(x))^2 \mathrm{d}x \leq \frac{2}{n};$$

apoi $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} (f_n(x) - g(x))^2 \mathrm{d}x = 0$ unde

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \qquad \text{etc.}$$

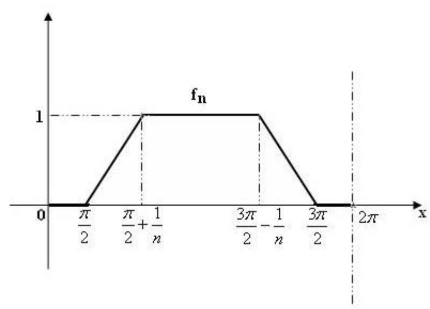


Fig. VI.5

2. Să se arate că în spaţiul l_2 mulţimea vectorilor $x \in l_2$ cu $||x|| \leq 1$ este închisă şi mărginită fără a fi compactă.

3. a) Să se arate că orice aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară injectivă $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este un izomorfism liniar şi continuu.

b) Să se arate că aplicaţia $\varphi : l_2 \to l_2$, $\{x_0, x_1, x_2, \ldots,\} \to \{0, x_0, x_1, \ldots\}$ este $\mathbb{R}$-liniară, injectivă, continuă, dar nu este surjectivă.

4. Să se dea exemplu de spaţii Banach în care norma nu provine dintr-un produs scalar (deci nu este spaţiu Hilbert).

Indicaţie. Luăm $H =$ spaţiul funcţiilor mărginite $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ cu norma sup; funcţiile $f = \sin$, $g = \cos$ nu verifică relaţia paralelogramului. (Anume

$||f|| = 1$, $||g|| = 1$, $||f+g|| = \sqrt{2}$, $||f-g|| = 1$). Aşadar, norma-sup nu provine dintr-un produs scalar.

5. Fie H un spaţiu prehilbertian real. Se spune că un şir $\{x_n\}_{n\geq 1}$ de elemente din H *converge slab* către un element $a \in H$ dacă $\langle x_n, y\rangle \to \langle a, y\rangle$, $(\forall)y \in H$, pentru $n \to \infty$. Să se arate că

1) dacă $x_n \overset{\text{în } H}{\longrightarrow} a$, atunci x_n converge slab către a;

2) reciproca are loc în spaţiul $H = \mathbb{R}^n$, dar nu în general.

Indicaţie. 1) $\langle x_n, y\rangle - \langle a, y\rangle = \langle x_n - a, y\rangle$ şi $|\langle x_n - a, y\rangle| \leq ||x_n - a|| \cdot ||y||$ etc.

2) Luăm $H = C^0_{[0,2\pi]}$; şirul $\{\sin nx\}_{n\geq 1}$ converge slab către 0, dar nu converge în H.

6. Fie $I = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Să se arate că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$ este integrabilă pe I dar $f \notin L^2(I)$.

6.2 Serii trigonometrice; analiză Fourier

Seriile trigonometrice sunt utilizate curent în electrotehnică, în radiotehnică, în mecanica undelor şi în orice procese vibratorii periodice. De asemenea, studiul seriilor trigonometrice şi mai ales al seriilor Fourier este strâns legat de reprezentarea semnalelor periodice cu posibilităţi de adaptare a tehnicilor moderne de calcul. Poate părea surprinzător, dar Cantor a introdus operaţiile de reuniune, intersecţie, diferenţă etc. între mulţimi studiind mulţimile de convergenţă punctuală ale unor serii trigonometrice!

6.2.1 Noţiunea de serie trigonometrică

Reamintim că o funcţie reală $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte *periodică* dacă există un număr real $T \neq 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$ să avem $x + t \in A$, $x - T \in A$ şi $f(x+T) = f(x)$. Numărul real $T > 0$ minim (dacă există !) cu această proprietate se numeşte *perioada principală a lui f*. Atunci $f(x) = f(x + nT)$, $(\forall)n \in \mathbb{Z}$.

Exemple. Funcţiile $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$ şi $x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$, $(\omega, \varphi \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0)$ au perioada principală $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$. Funcţiile $x \mapsto \sin\dfrac{\pi x}{l}$, $x \mapsto \cos\dfrac{\pi x}{l}$ ($l > 0$ fixat) au deci perioada principală $2l$. În general, dacă o funcţie $f(x)$ are perioada T, atunci $f\left(\dfrac{Tx}{2\pi}\right)$ are perioada 2π, astfel că este suficient să studiem funcţiile periodice de perioadă 2π.

În cele ce urmează, vom nota cu $\mathcal{P}$ mulţimea funcţiilor reale $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care sunt continue pe porţiuni pe orice interval compact din $\mathbb{R}$ (cu limite laterale finite în orice punct) şi care în plus sunt periodice de perioadă 2π. Aceste funcţii sunt integrabile pe orice interval compact şi $\mathcal{P} \subset L^2_{[-\pi,\pi]}$. În plus, remarcăm că $(\forall)f \in \mathcal{P}$, $(\forall)a \in \mathbb{R}$, avem

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

(Într-adevăr, este suficient să observăm că

$$\int_{-\pi}^{\pi} f = \int_{-\pi}^{a} f + \int_a^{a+2\pi} f + \int_{a+2\pi}^{\pi} f \quad \text{şi că} \quad \int_{-\pi}^{a} f + \int_{a+2\pi}^{\pi} f = 0,$$

ultima relaţie rezultând imediat prin schimbarea de variabilă $x = t - 2\pi$).

Aşadar, integrala lui f este aceeaşi pe orice interval de lungime 2π.

Exemple. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\sin x|$ aparţine evident mulţimii $\mathcal{P}$.

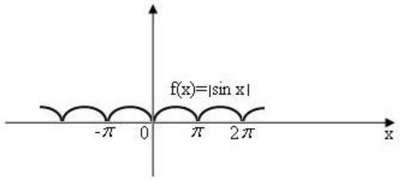


Fig. VI.6a

De asemenea, funcţia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$u(x) = \begin{cases} e^x & \text{dacă} \quad x \in [0, \pi) \\ 0 & \text{dacă} \quad x \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

prelungită prin periodicitate la $\mathbb{R}$, aparţine mulţimii $\mathcal{P}$ (fig. VI.6a şi b). Pentru orice două funcţii $f, g \in \mathcal{P}$ vom nota

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{produsul scalar } L^2. \tag{17}$$

Definiţia 2.1. *Fie $a_0, a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots$ două şiruri de numere reale. Seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0 = \dfrac{a_0}{2}$, $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, $(n \geq 1)$ se numeşte* **seria trigonometrică de coeficienţi** *a_i, b_j $(i \geq 0,\ j \geq 1)$. Sumele parţiale ale unei astfel de serii se numesc* **polinoame trigonometrice**.

Deoarece funcţiile f_n, deci şi sumele parţiale ale seriei trigonometrice

$$\sum_{n\geq 0} f_n(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots$$

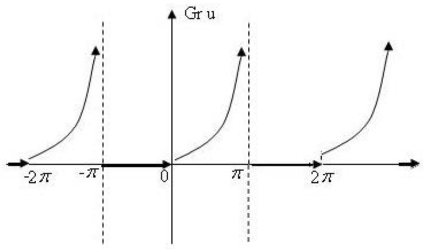


Fig. VI.6b

sunt funcţii periodice de perioadă 2π, este suficient să studiem convergenţa unor astfel de serii pe un interval de lungime 2π, de exemplu $[-\pi, \pi]$. Proprietăţile sumelor unor serii trigonometrice punctual convergente sunt sistematizate în teorema care urmează.

Teorema 2.1. *Presupunem că seria trigonometrică*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{18}$$

este PC pe $[\pi, \pi]$ (deci pe întreaga dreaptă reală) şi fie $S(x)$ suma acestei serii.

(a) *Funcţia $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică de perioadă 2π;*

(b) *Dacă seria (18) este UC pe $[-\pi, \pi]$, atunci $S \in \mathcal{P}$ şi în acest caz, au loc relaţiile*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos kx\,\mathrm{d}x, k \geq 0; \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\sin kx\,\mathrm{d}x,\ k \geq 1. \tag{19}$$

Demonstraţie. (a) Fie $\{S_n\}_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale ale seriei (18). Aşadar, $S_0 = \dfrac{a_0}{2}$, $S_n = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_n \sin kx)$, $n \geq 1$. Conform ipotezei $S_n \xrightarrow{\text{PC}} S$ şi cum toate funcţiile S_n sunt periodice de perioadă 2π, aceeaşi proprietate o are funcţia S.

(b) Deoarece seria (18) este o serie uniform convergentă de funcţii continue, suma ei va fi continuă pe $\mathbf{R}$, deci $S \in \mathcal{P}$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $S(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Înmulţind cu funcţia mărginită $\cos kx$ (respectiv cu $\sin kx$), convergenţa uniformă se păstrează şi se obţin relaţiile

$$S(x) \cdot \cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx),$$

$$S(x) \cdot \sin kx = \frac{a_0}{2}\sin kx + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx \sin kx + b_n \sin nx \sin kx).$$

Integrând aceste relaţii pe intervalul $[-\pi, \pi]$ şi ţinând cont de relaţiile (1), (2), (3) din §1, rezultă relaţiile (19).

6.2.2 Seria Fourier asociată unei funcţii

Teorema 2.1 sugerează următoarea construcţie, datorată matematicianului francez J. FOURIER (1768-1830).

Definiţia 2.2. *Fixăm o funcţie oarecare $f \in \mathcal{P}$ şi considerăm şirurile*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x, \quad k \geq 0; \tag{20}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x, \quad k \geq 1. \tag{21}$$

În acest mod, oricărei funcţii $f \in \mathcal{P}$ i se asociază seria trigonometrică

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

numită **seria Fourier a lui** f*; coeficienţii a_k, b_k se numesc* **coeficienţii Fourier a lui** f.

Fie $\varphi : [-a, a] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe porţiuni. Se ştie că dacă φ este o funcţie pară (respectiv impară), atunci

$$\int_{-a}^{a} \varphi = 2 \int_{0}^{a} \varphi \quad (\text{respectiv} \int_{-a}^{a} \varphi = 0). \tag{22}$$

Funcţiile pare (respectiv impară) au graficul simetric în raport cu axa Oy (respectiv în raport cu originea).

Dacă $f \in \mathcal{P}$ este o funcţie pară, atunci funcţia $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) \cdot \cos kx$ este pară, iar $x \mapsto f(x) \cdot \sin kx$ impară, deci formulele (20), (21) devin

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x, \ k \geq 0 \ \text{ şi } \ b_k = 0, \ k \geq 1. \tag{23}$$

Similar, dacă $f \in \mathcal{P}$ este impară, atunci

$$a_k = 0, \ k \geq 0 \text{ şi } b_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x. \tag{24}$$

Desigur, modificarea valorilor lui f într-un număr finit de puncte nu modifică valorile coeficienţilor Fourier ai lui f deci nu contează dacă funcţia f este considerată pe $(-\pi, \pi]$, $[-\pi, \pi]$ sau numai pe intervalul $(-\pi, \pi)$. Definiţia 2.2 poate fi dată mai general, pentru funcţii integrabile Lebesgue.

Legătura între funcţia $f \in \mathcal{P}$ şi seria ei Fourier este până acum doar o *legătură de asociere*. Seria Fourier a lui f poate să fie divergentă sau chiar dacă este punctual convergentă pe $\mathbb{R}$, ea poate să nu aibă ca sumă funcţia f.

Teorema care urmează dă totuşi condiţii în care seria Fourier a unei funcţii $f \in \mathcal{P}$ converge punctual a.p., cu suma f; ea se numeşte *teoremă de reprezentare* (a unor funcţii reale ca sume de serii trigonometrice) şi printre aplicaţii, notăm descompunerea unui semnal în armonicele sale, care apar ca termeni ai seriei Fourier asociate.

Teorema 2.2 (teorema lui Fourier-Dirichlet de reprezentare). *Fie $f \in \mathcal{P}$ o funcţie derivabilă pe porţiuni, cu derivate laterale finite în orice punct. Atunci seria Fourier a lui f este PC pe $\mathbb{R}$; mai precis, suma seriei Fourier a lui f în punctul $x \in \mathbb{R}$ este egală cu $m = \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ (media aritmetică a limitelor laterale ale lui f în x).*

Demonstraţie este nebanală şi o omitem.

Direct din teorema 2.2 decurge următoarea consecinţă.

Corolar. *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie periodică, continuă, derivabilă pe porţiuni, atunci seria Fourier a lui f este PC având ca sumă f.*

Observaţii. 1) *Forma complexă a seriilor Fourier.* Considerăm seria trigonometrică (18) cu coeficienţi reali. Folosind formulele lui Euler avem

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx});$$

această serie devine

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right).$$

Notând

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \text{ şi } c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{dacă} \quad n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & \text{dacă} \quad n < 0, \end{cases}$$

atunci seria devine

$$c_0 + \sum_{n \geq 1} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \text{(forma complexă)}.$$

Se verifică imediat că pentru orice $m, n \in \mathbb{R}$ avem

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot e^{inx} \mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & \text{dacă} \quad m + n = 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad m + n \neq 0. \end{cases} \tag{25}$$

În general, o serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n$ este prin definiţie convergentă dacă seriile $\sum_{n \geq 0} z_n$, $\sum_{n \geq 1} z_{-n}$ sunt simultan convergente şi suma ei se obţine adunând sumele acestor două serii. În ipoteza că seria $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ este UC pe $\mathbb{R}$ cu suma $S(x)$, atunci $S(x) \cdot e^{-ikx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx} \cdot e^{-ikx}$ şi integrând pe intervalul $[-\pi, \pi]$ şi ţinând cont de (25) se obţine

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot e^{-ikx} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot e^{-ikx} \mathrm{d}x = c_k, \quad (\forall) k \in \mathbb{Z}.$$

Dacă f este o funcţie satisfăcând condiţiile teoremei lui Dirichlet, atunci considerând coeficienţii lui Fourier

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-ikx} \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{26}$$

rezultă că *seria* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ *este PC pe* $\mathbb{R}$ *cu suma* $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

2) Dacă în definiţia unei funcţii din clasa $\mathcal{P}$ păstrăm toate ipotezele doar că presupunem f periodică de perioadă principală $2l$, $l > 0$ (în loc de 2π), atunci toate construcţiile şi rezultatele anterioare rămân valabile; în acest caz, coeficienţii Fourier sunt

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x; \ k \geq 0; \ b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x; \ k \geq 1$$

şi în cazul formei complexe, $c_k = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\,\mathrm{d}x$. Teorema 2.2 se scrie

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\frac{k\pi x}{l}}.$$

3) *Interpretări fizice.* Dacă $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$ este un semnal continual, periodic (de perioadă 2π) verificând condiţiile teoremei lui Dirichlet, atunci coeficientul $\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ reprezintă "media" lui f pe intervalul $[-\pi,\pi]$, termenul $a_1\cos t + b_1 \sin t$ reprezintă "oscilaţia principală" a lui f în jurul poziţiei medii, termenii $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ au perioada principală $\dfrac{2\pi}{n}$ ($n \geq 1$) şi corespund "armonicelor oscilaţiei principale". Formula de reprezentare $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n\geq 1}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ se interpretează ca descompunerea semnalului f în armonice. În practică cunoaşterea coeficienţilor Fourier permite evidenţierea importanţei diverselor armonice şi în funcţie de context, arată care din ele trebuie atenuate sau amplificate. Pentru calculul coeficienţilor Fourier ai unui semnal obţinut experimental se utilizează metode aproximative. În ultimul timp s-au elaborat metode speciale (de exemplu, algoritmul de transformare Fourier rapidă) în conjugare cu tehnica de vârf a calculatoarelor.

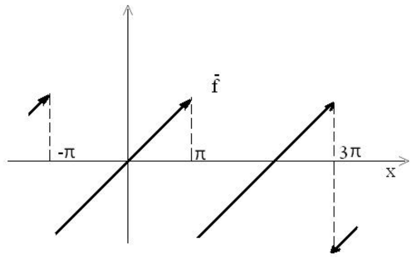


Fig. VI.7a

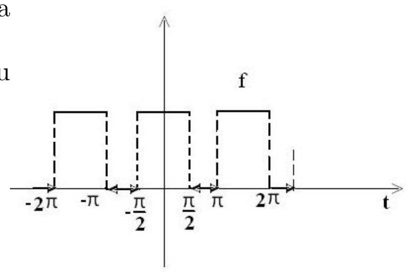


Fig. VI.7b

Exemple. 1) Considerăm funcţia $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x$ şi fie $\tilde{f}$ funcţia obţinută prelungind f prin periodicitate la întreg $\mathbb{R}$ a.p.; funcţia $\tilde{f}$ satisface condiţiile teoremei lui Dirichlet şi este impară (fig. VI.7a şi b).

Folosind formulele (24) coeficienţii ei Fourier sunt $a_k = 0$, $k \geq 0$ şi pentru orice $k \geq 1$,

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k}(-1)^{k+1},$$

ţinând cont că $\sin k\pi = 0$, $\cos k\pi = (-1)^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Atunci pentu orice $x \in \mathbb{R}$ avem $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \displaystyle\sum_{k\geq 1} b_k \sin kx$ iar pentru $x \in (-\pi,\pi)$ rezultă direct $x = 2\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$. În particular, pentru $x = \dfrac{\pi}{2}$ avem $\dfrac{\pi}{2} = 2\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{kx}{2} = 2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)$, deci $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots = \dfrac{\pi}{4}$.

2) Fie semnalul dreptunghiular $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ definit prin

$$f(t) = \begin{cases} A\,(\text{constant}), & \text{dacă} \quad t \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{dacă} \quad \left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right), \end{cases}$$

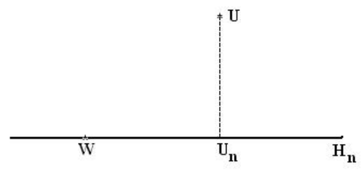


Fig. VI.8

prelungit apoi prin periodicitate (fig. VI. 8). În acest caz, f este funcţie pară, deci conform formulelor (23) avem $b_k = 0$, $k \geq 1$, $a_0 = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} A\,\mathrm{d}t = A$ şi $a_k = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} A\cos kt\,\mathrm{d}t = \dfrac{2A}{k\pi}\sin\dfrac{k\pi}{2}$. Deci pentru orice $t \in (-\pi,\pi)$, $t \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$ avem reprezentarea $f(t) = \dfrac{A}{2} + \dfrac{2A}{\pi}\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{2}\cos kt$.

Media semnalului pe $(-\pi,\pi)$ este $\dfrac{A}{2}$, oscilaţia principală este $\dfrac{2A}{\pi}\cos t$ etc.

Am întâlnit în acest curs două tipuri importante de serii de funcţii-seriile de puteri şi seriile trigonometrice şi este utilă o comparaţie între acestea. Seriile de puteri sunt mai uşor de mânuit (sumele lor parţiale fiind polinoame algebrice), iar în domeniul de convergenţă, suma lor este o funcţie de clasă C^∞. Un defect al lor este acela că, în general, o funcţie nu poate fi reprezentată printr-o serie de puteri pe întreg domeniul ei de definiţie (de exemplu, deşi $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ este de clasă C^∞ pe întreg $\mathbb{R}$, dezvoltarea ei $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$ este valabilă numai pentru $|x| < 1$). Seriile trigonometrice au ca sume parţiale polinoame trigonometrice şi reprezentarea funcţiilor prin serii Fourier are loc pe orice interval, ceea ce este deosebit de util. Seriile trigonometrice sunt mai puţin maniabile, de exemplu ele nu pot fi derivate sau integrate termen cu termen fără precauţii suplimentare.

6.2.3 Teoremele lui Weierstrass de aproximare

Teorema 2.3. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, periodică de perioadă 2π. Notăm cu s_n a n-a sumă parţială a seriei Fourier asociată lui f şi considerăm polinomul trigonometric $\sigma_n = \dfrac{1}{n}(s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1})$, $n \geq 1$. Atunci şirul de funcţii $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ converge uniform pe $\mathbb{R}$ către f.*

Nu dăm demonstraţia.

Corolar. *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, periodică de perioadă 2π având toţi coeficienţii Fourier nuli, atunci $f = 0$.*

Demonstraţie. Aşadar, $a_k = 0$, $(\forall)k \geq 0$ şi $b_k = 0$, $(\forall)k \geq 1$ deci $(\forall)n \geq 1$ avem $\sigma_n(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Cum $\sigma_n \xrightarrow{\text{UC}} f$ pe $\mathbb{R}$, rezultă că $f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

În particular, rezultă unicitatea reprezentării Fourier a funcţiilor continue periodice.

Se obţin acum fără dificultate teoremele de aproximare uniformă a funcţiilor continue prin polinoame trigonometrice şi prin polinoame algebrice.

Teorema 2.4 (teorema 1 a lui Weierstrass). *Orice funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodică de perioadă 2π se aproximează uniform prin polinoame trigonometrice (adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există un polinom trigonometric T_ε astfel încât $||f - T_\varepsilon|| < \varepsilon$).*

Demonstraţie. Deoarece $\sigma_n \xrightarrow{\text{UC}} f$ pentru $n \to \infty$, conform teoremei 2.3, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel încât $||f - \sigma_n|| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$. Luăm atunci $T_\varepsilon = \sigma_N$ şi teorema rezultă.

Teorema 2.5 (teorema 2 a lui Weierstrass). *Orice funcţie continuă pe un interval compact $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se aproximează uniform prin polinoame algebrice (adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există o funcţie polinomială $P_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $||f - P_\varepsilon|| < \varepsilon$, adică în "tubul de funcţii" $(f - \varepsilon, f + \varepsilon)$ se află graficul unei funcţii polinomiale).*

Demonstraţie. Presupunem mai întâi că $a = 0$, $b = 2\pi$ şi că $f(0) = f(2\pi)$. Atunci funcţia f se poate prelungi prin periodicitate la o funcţie continuă, periodică de perioadă 2π pe întreg $\mathbb{R}$ (pe care o notăm tot cu f). Conform teoremei 2.4 există un polinom trigonometric T_ε astfel încât $|T_\varepsilon(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $x \in [0, 2\pi]$. Dar T_ε este o sumă finită de sinuşi şi cosinuşi, deci este dezvoltabilă în serie de puteri pe întreg $\mathbb{R}$, $T_\varepsilon(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ (raza de convergenţă ∞) şi conform teoremei II. 4. 11, c) această serie este UC pe $[0, 2\pi]$ şi ca atare, există $N(\varepsilon)$ astfel încât $\left| T_\varepsilon(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pentru orice

$n \geq N$ şi orice $x \in [0, 2\pi]$. Atunci notând $P_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$, avem

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| \leq |f(x) - T_\varepsilon(x)| + |T_\varepsilon(x) - P_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pentru orice $x \in [0, 2\pi]$ şi cazul particular considerat este tranşat.

Presupunem acum că $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă oarecare (fără restricţia că $f(0) = f(2\pi)$). Definim $F(x) = f(x) - kx$, unde $k = [f(2\pi) - f(0)]/2\pi$; se obţine o funcţie $F : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continuă şi evident $F(0) = F(2\pi) = f(0)$. Atunci conform cazului anterior tratat, funcţia F se aproximează uniform prin polinoame algebrice şi aceeaşi proprietate o are f.

În fine, trecem la cazul general şi fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe in interval compact oarecare. Considerăm atunci funcţia auxiliară $\Phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, definită prin $\Phi(t) = f\left(a + \frac{t}{2\pi}(b - a)\right)$. Deoarece Φ este continuă, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o funcţie polinomială $R_\varepsilon(t)$ astfel încât $|\Phi(t) - R_\varepsilon(t)| < \varepsilon$ pentru orice $t \in [0, 2\pi]$. Pentru orice $x \in [a, b]$, notând $t = \frac{2\pi}{b - a}(x - a)$, rezultă $t \in [0, 2\pi]$, deci

$$\left|\Phi\left(\frac{2\pi}{b - a}(x - a)\right) - R_\varepsilon\left(\frac{2\pi}{b - a}(x - a)\right)\right| < \varepsilon.$$

Notând $P_\varepsilon(x) = R_\varepsilon\left(\frac{2\pi}{b - a}(x - a)\right)$, rezultă $|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ pentru orice $x \in [a, b]$ şi teorema este demonstrată complet.

Corolar. *Pentru orice funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ există un şir de funcţii polinomiale $\{P_n\}_{n \geq 0}$ care converg uniform pe $[a, b]$ către f.*

Demonstraţie. Este suficient să luăm $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ şi să alegem funcţii polinomiale P_n astfel încât $||f - P_n|| < \frac{1}{n}$.

6.2.4 Serii Fourier generalizate

Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este baza canonică în spaţiul Hilbert $\mathbb{R}^n$ (cu produsul scalar euclidian), atunci evident $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$ şi $e_i \perp e_j$ dacă $i \neq j$. Apoi pentru orice vector $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ avem evident $\langle x, e_j\rangle = x_k$, $1 \leq k \leq n$ deci $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$. Reprezentări similare se obţin pentru vectorii din anumite spaţii Hilbert, aşa cum vom vedea în continuare.

Definiţia 2.4. *Fie H un spaţiu Hilbert real; se numeşte* **sistem ortonormal total** *(sau* **bază ortonormală***) în H orice şir de vectori $\mathcal{R} = \{e_n\}_{n \geq 1}$ astfel încât $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, pentru orice $i, j \geq 1$ şi subspaţiul generat de $\mathcal{R}$ să fie dens în H (mulţimea $\mathcal{R}$ este finită sau numărabilă).*

Exemple. În $\mathbb{R}^n$ baza canonică este bază ortonormală. De asemenea în spaţiul Hilbert $H = l_2$ elementele $e_1 = \{1, 0, 0, \ldots\}$, $e_2 = \{0, 1, 0, 0, \ldots\}$, ... etc. formează o bază ortonormală $\{e_n\}_{n \geq 1}$. Nu orice spaţiu Hilbert are bază ortonormală (numărabilă).

Definiţia 2.5. *Fie H un spaţiu Hilbert având un sistem ortonormal total $\mathcal{R} = \{e_n\}_{n \geq 1}$. Pentru orice element $u \in H$ numerele reale $c_n = \langle u, e_n\rangle$, $n \geq 1$ se numesc* **coeficienţii Fourier (generalizaţi) al lui u relativ la $\mathcal{R}$.**

Teorema 2.6. *Fie H un spaţiu Hilbert (real) având un sistem ortonormal total $\mathcal{R} = \{e_n\}_{n \geq 1}$. Pentru orice element $u \in H$, seria $\sum_{n \geq 1} c_n e_n$ (c_n fiind* *coeficienţii Fourier al lui u relativ la $\mathcal{R}$) este convergentă în H cu suma u,*

$$u = \sum_{n\geq 1} c_n e_n \tag{27}$$

(*dezvoltarea Fourier generalizată a lui u*).

În plus, seria numerică $\sum_{n\geq 1} c_n^2$ este convergentă şi

$$\sum_{n\geq 1} c_n^2 = ||u||^2. \tag{28}$$

Demonstraţie. Fie $u_n = \sum_{p=1}^{n} c_p e_p$, $n \geq 1$. Atunci pentru orice k, $1 \leq k \leq n$, $\langle u_n, e_k\rangle = \langle c_1, e_1 + \ldots + c_n e_n, e_k\rangle = c_1\langle e_1, e_k\rangle + \ldots + c_n\langle c_n, e_k\rangle = c_k\langle e_k, e_k\rangle = c_k$, deci $\langle u_n, e_k\rangle = \langle u, e_k\rangle$, adică $\langle u_n - u, e_k\rangle = 0$. Pentru orice $n \geq 1$ fixat, notăm cu H_n subspaţiul vectorial al lui H generat de $e_1, e_2, \ldots, e_n$; aşadar, $u_n - u \perp H_n$, $(\forall)n \geq 1$. Pe de altă parte, H_n este subspaţiu închis (căci este finit dimensional şi aplicăm lema 1). Atunci conform teoremei 1.3 rezultă că u_n este proiecţia lui u pe H_n.

Fie $(\forall)\varepsilon > 0$ fixat. Cum subspaţiul generat de $\mathcal{R}$ este dens în H, atunci există un element v care este combinaţie liniară finită de elemente din $\mathcal{R}$ astfel încât $||u - v|| < \varepsilon$. Aşadar, există $N(\varepsilon)$ natural astfel încât $v \in H_n$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$. Conform teoremei 1.3, avem $||u - u_n|| \leq ||u - v||$, deci $||u - u_n|| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$. Am demonstrat astfel că $u_n \to u$ pentru $n \to \infty$, adică sumele parţiale ale serie $\sum_{n\geq 1}$ converg către u, de unde (27).

În fine,

$$||u_n||^2 = \langle u_n, u_n\rangle = \langle \sum_{p=1}^{n} c_p e_p, \sum_{q=1}^{n} c_q e_q\rangle =$$

$$= \sum_{1\leq p,q\leq n} c_p c_q \langle e_p, e_q\rangle = \sum_{1\leq p,q\leq n} c_p c_q \delta_{pq} = \sum_{p=1}^{n} c_p^2$$

şi făcând $n \to \infty$, rezultă (deoarece $u_n \to u$) că seria $\sum_{n\geq 1} c_n^2$ este convergentă, cu suma $||u||^2$, deci (28).

Observaţie. Pentru $u, \mathcal{R}$ fixate dezvoltarea (27) este unică, căci dacă $u = \sum_{n\geq 1} d_n e_n$, atunci notând $v_n = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$, rezultă $\langle v_n, e_k\rangle = d_k$ pentru orice $k \leq n$ şi făcând $n \to \infty$, rezultă (deoarece $v_n \to u$) că $\langle u, e_k\rangle = d_k$, adică $c_k = d_k$, pentru orice $k \geq 1$.

Fixăm $u \in H$. Am văzut că pentru orice n fixat, dintre toate elementele $w \in H_n$ (combinaţii liniare de $e_1, e_2, \ldots, e_n$) cel pentru care distanţa $\mathrm{d}(u, w) = ||u - w||$ este minimă este $w = u_n$ adică $w = \sum_{p=1}^{n} c_p e_p$ unde c_p sunt coeficienţii Fourier ai lui u relativ la $\mathcal{R}$. Distanţa $||u - w||$ se mai numeşte "abatere medie pătratică" a lui w de la u şi am probat că dintre vectorii din H_n, vectorul u_n ete cel care realizează abaterea medie pătratică minimă faţă de u; fig. VI. 8. Din relaţia (28) rezultă de asemenea că pentru orice n, $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq ||u||^2$ (*inegalitatea lui Bessel*).

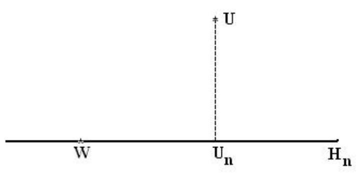


Fig. VI.8

Ne situăm în cazul cel mai important pentru aplicaţii, considerând spaţiul Hilbert $H = L^2_{[-\pi,\pi]}$ cu produsul scalar $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ (teorema 1.2).

Şirul

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots$$

formează un sistem ortonormal total în H (într-adevăr $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, $(\forall) i, j \geq 1$; apoi, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice funcţie $f \in H$, alegem o funcţie în scară $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ astfel încât $||f - g||_2 < \frac{\varepsilon}{3}$; mai departe, alegem o funcţie continuă $h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ şi un polinom trigonometric T astfel încât $||g - h||_2 < \frac{\varepsilon}{3}$, $||h - T||_2 < \frac{\varepsilon}{3}$, deci $||f - T||_2 < \varepsilon$, deci oricât de "aproape" de f se află un polinom trigonometric).

Fixăm o funcţie $u : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ din H; are sens să considerăm coeficienţii Fourier $\{a_k\}_{k\geq 0}$, $\{b_k\}_{k\geq 0}$ definiţi prin formulele (20), (21) (într-adevăr, conform inegalităţii lui Schwartz,

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right|^2 \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(x)^2 \mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x\right)$$

deci $\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos kx\,\mathrm{d}x < \infty$ şi în mod similar, $\int_{-\pi}^{\pi} u(x) kx\,\mathrm{d}x < \infty$, pentru orice $k \geq 0$ întreg).

Pe de altă parte, putem considera coeficienţii Fourier generalizaţi ai lui u relativ la sistemul ortonormal total $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de mai sus. Aşadar,

$$c_1 = \langle u, e_1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0,\ e_2 = \langle u, c_2\rangle = a_1\sqrt{\pi} \tag{29}$$

$c_3 = b_1\sqrt{\pi}$, $c_4 = a_2\sqrt{\pi}$ etc. iar seria Fourier generalizată va fi

$$\sum_{n\geq 1} c_n e_n = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \sin x + a_2\cos 2x + \ldots$$

Aşadar cele două concepte de serie Fourier asociată coincid. Am văzut că teorema 2.2, a lui Dirichlet dădea condiţii de convergenţă punctuală a seriilor Fourier (utile în aplicaţii tehnice). Teorema 2.6 arată că seria Fourier a oricărei funcţii $u \in L^2_{[-\pi,\pi]}$ converge tare şi are suma u. Conform (29), relaţia (28) devine în acest caz

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k\geq 1}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}||u||_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)^2 \mathrm{d}x \tag{30}$$

(*relaţia lui Parseval*).

Observaţii. 1) Se poate da acum un exemplu de serie trigonometrică punctual convergentă pe $\mathbb{R}$ care nu este seria Fourier a vreunei funcţii din $L^2_{[-\pi,\pi]}$. Anume, dacă seria trigonometrică $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx$ (punctual convergentă pe $\mathbb{R}$, aşa cum se vede aplicând criteriul lui Abel II. 3.13) ar fi serie Fourier, atunci seria numerică $\sum_{k\geq 1}(a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}$ ar rezulta convergentă, ceea ce este absurd.

2) Teoria seriilor Fourier pune în evidenţă un fenomen relevant. În condiţiile teoremei 2.6, pentru orice $u \in H$ şirul coeficienţilor Fourier (generalizaţi) $\{c_n\}_{n\geq 1}$ aparţine spaţiului l_2 (deoarece $\sum_{n\geq 1} c_n^2 < \infty$). Avem astfel o asociere între două spaţii Hilbert

$$\Phi : H \to l_2.$$

Această asociere este bijectivă. Injectivitatea rezultă din unicitatea dezvoltării Fourier; probăm surjectivitatea: fie $\{c_n\}_{n\geq 1} \in l_2$ şi notăm $u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$;

deoarece

$$||u_{n+p} - u_n||^2 = \langle u_{n+p} - u_n, u_{n+p} - u_n \rangle = \langle \sum_{i=n+1}^{n+p} c_i e_i, \sum_{i=n+1}^{n+p} c_i e_i \rangle = \sum_{i=n+1}^{n+p} c_i^2,$$

rezultă că şirul $\{u_n\}_{n\geq 1}$ este Cauchy deci convergent, $u_n \to u$. Deoarece $\langle u_n, e_k \rangle = c_k$, rezultă pentru $n \to \infty$ că $\langle u, e_k \rangle = c_k$, $k \geq 1$ deci $\Phi(u) = \{c_n\}_{n\geq 1}$. Mai mult, se arată uşor că Φ conservă produsele scalare (adică $\langle u, v \rangle = \langle \Phi(u), \Phi(v) \rangle$, pentru orice $u, v \in H$).

În cazul $H = L^2_{[-\pi,\pi]}$ aplicaţia Φ stabileşte o corespondenţă bijectivă între entităţi de natură distinctă, anume *între semnale continuale de energie finită şi semnale discrete de energie finită*. Dacă u este un semnal din $L^2_{[-\pi,\pi]}$, atunci şirul coeficienţilor Fourier ai săi este numit *spectral* (*discret*) *al lui* u şi se calculează prin formulele de tipul (20), (21), iar teorema lui Dirichlet (sau teorema 2.6) arată modul cum se recuperează semnalul din cunoaşterea spectrului său. Aceste consideraţii sunt dezvoltate în [14] şi poartă numele de *conversie analogic-digitală*.

6.2.5 Exerciţii

1. Să se studieze coeficienţii Fourier pentru funcţiile indicate mai jos, prelungite prin periodicitate de perioadă 2π la întreg $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} a & \text{dacă} \quad x \in [0, \pi) \\ -a & \text{dacă} \quad x \in (-\pi, 0), \end{cases}$ $a > 0$ dat;

b) $f(x) = |x|$ pentru $x \in [-\pi, \pi]$;

c) $f(x) = x^2$ pentru $x \in [-\pi, \pi]$.

Răspuns. a) $a_n = 0$, $(\forall) n \geq 0$; $b_n = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad n \text{ par} \\ \dfrac{4a}{n\pi} & \text{dacă} \quad n \text{ este impar.} \end{cases}$

b) $b_n = 0$, $(\forall) n \geq 1$; $a_0 = \pi$, $a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = -\dfrac{4}{\pi(2k+1)^2}$;

c) $a_0 = \dfrac{2\pi^3}{3}$, $a_k = \dfrac{4(-1)^k}{k^2}$; $b_k = 0$, $k \geq 1$.

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = x$, definită pe intervalul $[-1, 1)$ şi prelungită prin periodicitate de perioadă 2 la $\mathbb{R}$. Idem $f(x) = |\sin x|$ pe $[-\pi, \pi)$ prelungită la $\mathbb{R}$ prin periodicitate de perioadă π.

3. Să se dezvolte în serie de sinuşi (şi respectiv de cosinuşi) funcţia $f(x) = x + 1$, $x \in (0, \pi)$, prelungită prin imparitate (respectiv prin paritate) la $(-\pi, \pi)$ şi apoi prin periodicitate la întreg $\mathbb{R}$.

4. Fie $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilă şi $(\forall) k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b v(x) e^{ikx} \mathrm{d}x = 0$; arătaţi că $v = 0$ a.p.

5. Fixăm un interval $I \subset \mathbb{R}$ şi o funcţie continuă $\rho : I \to \mathbb{R}$ astfel încât $\rho > 0$ şi $\displaystyle\int_I \rho(x) \cdot x^k \mathrm{d}x < \infty$ pentru orice întreg $k \geq 0$ (numită *funcţie pondere*). Notăm cu H mulţimea tuturor funcţiilor măsurabile $f : I \to \mathbb{R}$ astfel încât $\displaystyle\int_I \rho f^2 < \infty$. Să se arate că:

a) H este spaţiu Hilbert relativ la produsul scalar $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_I \rho f g$;

b) există un şir de polinoame $\{P_n\}_{n\geq 0}$ cu coeficienţi reali, de forma $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x + a_{11}$, $P_2(x) = x^2 + a_{22}x + a_{21}, \ldots$ etc. astfel încât $\langle P_m, P_n \rangle = 0$ pentru orice $m, n \geq 0$, $m \neq n$ (numite *polinoame ortogonale relativ la* ρ).

(Dacă $I = [-1, 1]$ şi $\rho = 1$ se obţin polinoamele A.M. LEGENDRE (1752-1833) şi pentru $I = (-1, 1)$, $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ se obţin polinoamele P.L. CEBÎŞEV (1821-1894)).

c) dacă $f \in H$, atunci are loc o dezvoltare Fourier generalizată de forma $f = \sum\limits_{n\geq 0} c_n P_n$ unde $c_n = \dfrac{\langle f, P_n\rangle}{||P_n||^2}$, $n \geq 0$.

6.3 Noţiunea de distribuţie

Dăm câteva definiţii şi prime rezultate din Teoria distribuţiilor, împreună cu unele aspecte fizice, dealtfel generatoare ale întregii teorii. Conceptul de distribuţie este deosebit de important, el având aplicaţii în calculul operaţional, în Teoria ecuaţiilor fizicii matematice şi în studiul unor sisteme fizice, sisteme cu impulsuri etc.

6.3.1 Motivaţii fizice ale studiului distribuţiilor

a) Considerăm o reţea electrică RLC (în serie) conectată, la momentul $t = 0$, la o sursă de tensiune constantă v_0. Conform legilor lui Kirchhoff, intensitatea $i(t)$ a curentului în reţea verifică la fiecare moment t într-un interval de timp $[-T, T]$, condiţia

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t = v(t), \tag{31}$$

unde $v(t)$ este tensiunea la bornele reţelei. Dar

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t < 0 \\ v_0 & \text{dacă} \quad t \geq 0, \end{cases}$$

adică $v(t) = v_0 \cdot \sigma(t)$, unde σ este semnalul unitate

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t < 0 \\ 1 & \text{dacă} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

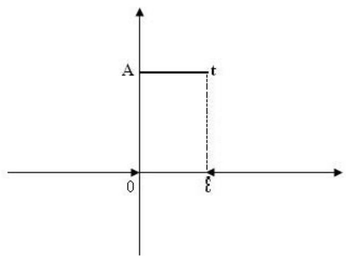


Fig. VI.9

Dacă momentul conectării era τ atunci $v(t) = v_0 \cdot \sigma(t - \tau)$.

Deoarece funcţia $v(t)$ nu este derivabilă (nu este nici măcar continuă !) relaţia (31) nu poate fi derivată, în raport cu t în cadrul analizei clasice.

Vom putea studia însă această ecuaţie şi implicit vom obţine informaţii asupra reţelei, folosind distrbuţiile.

b) Pentru a modela matematic ideea de "impuls" de amplitudine A, aplicat la momentul $t = 0$, este utilă considerarea funcţiei $h_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ definită prin $h_\varepsilon(t) = A$ dacă $t \in [0, \varepsilon]$ şi nulă în rest, impulsul acţionând doar în intervalul $[0, \varepsilon]$ (fig. VI. 9). Dacă aria dreptunghiului este egală cu 1, adică $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h_\varepsilon(t)\mathrm{d}t = 1$ (deci $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$) atunci impulsul se numeşte *unitar*. Despre numărul ε (lumgimea intervalului de acţiune a impulsului) nu am spus numic; impulsul unitar ideal se obţine pentru $\varepsilon \to 0$, adică ar fi definit prin limita punctuală

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(t), \quad (\forall)t \in \mathbb{R}$$

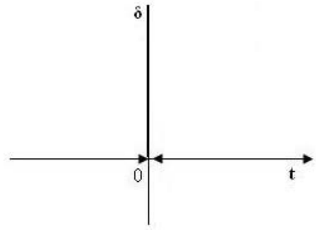


Fig. VI.10

adică $\delta(t) = 0$ dacă $t \neq 0$ şi $\delta(0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{1}{\varepsilon} = \infty$. Dar aceasta nu este o funcţie în sens uzual (fig. VI. 10).

c) Fie un punct material de masă m plasat în originea unei axe. Vrem să definim un concept de densitate liniară $\delta(x)$ a masei punctuale. Un raţionament tipic constă în a "împrăştia uniform" masa respectivă într-un interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$

centrat în origine, a defini densitatea medie liniară (masa pe unitatea de lungime) în fiecare punct $x \in \mathbb{R}$ al axei

$$\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{m}{2\varepsilon} & \text{dacă} \quad x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 0 & \text{dacă} \quad x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \end{cases} \tag{32}$$

şi a considera apoi limita $\delta(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Se obţine din nou "funcţia" de mai sus (înmulţită cu constanta m); în plus integrarea densităţii trebuie să fie masa totală, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \mathrm{d}x = m.$$

Dar $\delta = 0$ a.p. deci $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 0$ şi se ajunge la o contradicţie. Aşadar, conceptul de densitate a unei mase punctuale nu poate fi definit în cadrul clasic.

În mod similar, noţiunile ca: densitatea unei sarcini electrice punctuale, densitatea unui dipol electric, intensitatea unei tensiuni elastice aplicată concentrat într-un punct etc. *pot fi definite numai în cadrul distribuţional.*

Trecem acum la definiţii matematice riguroase.

6.3.2 Definiţia distribuţiilor. Exemple

Notăm cu $\mathcal{D}$ mulţimea funcţiilor $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care sunt indefinit derivabile pe $\mathbb{R}$ şi nule în afara unui interval mărginit (adică funcţii de clasă C^∞ cu suport compact). Funcţiile din $\mathcal{D}$ se mai numesc *funcţii-test.*

Exemple. 1) Funcţia clopot $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x^2 - 1}\right), & \text{dacă} \quad x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

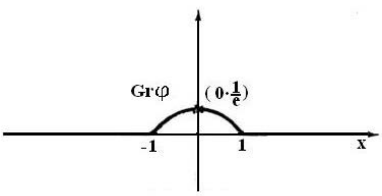


Fig. VI.11

aparţine lui $\mathcal{D}$ (fig. VI. 11).

2) Funcţiile $\sin x, \cos x$, e^x, x^2, σ, constantele nenule etc. nu aparţin lui $\mathcal{D}$, deoarece nu se anulează spre $+\infty$ şi $-\infty$. Dacă f este o funcţie de clasă C^∞ pe un interval deschis mărginit (a, b), atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate construi o funcţie $\varphi \in \mathcal{D}$ care să fie nulă în afara intervalul $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ şi să coincidă cu f pe intervalul (a, b) (fig. VI. 12).

3) Indicăm un şir de funcţii test φ_n, $n \geq 1$; anume

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} c_n \cdot \exp\left(\dfrac{1}{n^2x^2 - 1}\right), & \text{dacă} \quad |x| < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{dacă} \quad |x| \geq \dfrac{1}{n} \end{cases} \tag{33}$$

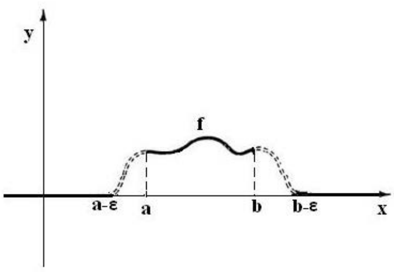


Fig. VI.12

Constantele pozitive c_n pot fi alese astfel încât $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\mathrm{d}x = 1$; evident, în acest caz $c_n \to \infty$ (căci $c_n \geq \dfrac{ne}{2}$, $(\forall) n \geq 1$).

Definiţia 3.1. *Un şir* $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ *de funcţii-test se numeşte* **convergent către zero pentru** $n \to \infty$ *(şi se scrie* $\varphi_n \overset{\text{în } \mathcal{D}}{\longrightarrow} 0$*) dacă există un interval compact* I *în afara căruia toate funcţiile* φ_n *se anulează şi în plus* $\varphi_n \overset{\text{în } UC}{\longrightarrow} 0$, $\varphi_n' \overset{\text{în } UC}{\longrightarrow} 0$, $\varphi_n'' \overset{\text{în } UC}{\longrightarrow} 0$ *etc. (convergenţă uniformă pe* I*).*

Dacă $\varphi \in \mathcal{D}$*, atunci* $\varphi_n \overset{\text{în } \mathcal{D}}{\longrightarrow} \varphi \overset{\Delta}{\longleftrightarrow} \varphi_n - \varphi \overset{\text{în } \mathcal{D}}{\longrightarrow} 0.$

Definiţia 3.2. *Se numeşte* **distribuţie (pe dreapta reală)** *orice aplicaţie $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ care este $\mathbb{R}$-liniară şi continuă prin şiruri (dacă $\varphi_n \overset{\text{în } \mathcal{D}}{\longrightarrow} 0$, atunci $f(\varphi_n) \overset{\text{în } \mathbb{R}}{\longrightarrow} 0$).*

Distribuţiile au fost introduse recent de matematicianul francez L. SCHWARTZ (1915-2002) şi de matematicianul rus S.L. SOBOLEV (1908-1989). Două distribuţii $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ se numesc *egale* dacă $f(\varphi) = g(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$. Suma $f + g$ şi produsul λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) se definesc în mod natural: $(f + g)(\varphi) \triangleq f(\varphi) + g(\varphi)$, $(\lambda f)(\varphi) \triangleq \lambda f(\varphi)$, $(\forall)\varphi \in \mathcal{D}$.

După cum o funcţie reală $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$) este "testată" pe numere din mulţimea A (în sensul că are sens $f(x)$ pentru orice număr $x \in A$) tot astfel, distribuţiile sunt "testate" pe funcţiile din $\mathcal{D}$.

Exemple de distribuţii

1) *Distribuţia lui* P. DIRAC (1902-1984) este funcţionala $\delta : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi(0)$ (se verifică imediat că δ este $\mathbb{R}$-liniară şi continuă prin şiruri).

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ este un punct fixat, se poate defini *distribuţia lui Dirac în punctul* x_0

$$\delta_{x_0} : \mathcal{D} \to \mathbb{R} \text{ punând } \delta_{x_0}(\varphi) \triangleq \varphi(x_0).$$

Aşadar, pentru orice funcţie $\varphi \in \mathcal{D}$, distribuţia δ_{x_0} reţine valoarea lui φ în punctul x_0. Evident dacă $x_0 = 0$, atunci $\delta_{x_0} = \delta$. Se mai spune că δ_{x_0} este *impulsul unitar aplicat în punctul* x_0 (iar în limbaj de semnale, δ_{t_0} este *impulsul unitar la momentul* t_0).

2) Fie $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă (adică integrabilă pe orice interval compact); evident, orice funcţie continuă sau chiar continuă pe porţiuni este local integrabilă. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ notăm

$$\underline{u}(\varphi) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x. \tag{34}$$

Integrala este convergentă şi se calculează pe un interval compact I în afara căruia se anulează φ. Aplicaţia $\underline{u} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ astfel definită este evident $\mathbb{R}$-liniară; apoi, dacă $\varphi_n \overset{\text{în } \mathcal{D}}{\longrightarrow} 0$, atunci $\varphi_n \overset{\text{în UC}}{\longrightarrow} 0$ pe I şi

$$\lim_{n\to\infty} \underline{u}(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_I u(x) \cdot \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \int_I u(x) \cdot \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x = 0,$$

adică $\underline{u}$ este continuă prin şiruri. Aşadar, $\underline{u}$ este o distribuţie, numită *distribuţia regulată definită de* u sau *distribuţia de tip funcţie* u.

Distribuţiile care nu sunt de forma $\underline{u}$ (cu u funcţie local integrabilă) se numesc *singulare*.

Notăm cu $\mathcal{D}'$ mulţimea tuturor distribuţiilor, cu L^1_{loc} mulţimea funcţiilor local integrabile, cu $\mathcal{R}_d$ (respectiv $\mathcal{S}_d$) mulţimea distribuţiilor regulate (respectiv singulare). Un rezultat fundamental îl constituie

Teorema 3.1. (a) *Aplicaţia*

$$\rho : L^1_{loc} \to \mathcal{R}_d, \quad u \mapsto \underline{u}$$

este bijectivă;

(b) *Distribuţia δ este singulară (adică $\delta \notin \mathcal{R}_d$).*

Demonstraţie. (a) Faptul că aplicaţia ρ este surjectivă rezultă din însăşi definiţia distribuţiilor regulate. Dacă $u, v \in L^1_{loc}$ şi dacă $\rho(u) = \rho(v)$, atunci $\underline{u} = \underline{v}$ deci $\underline{u}(\varphi) = \underline{v}(\varphi)$, $(\forall)\varphi \in \mathcal{D}$, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x; \quad \text{notând } h = u - v,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{D}. \tag{35}$$

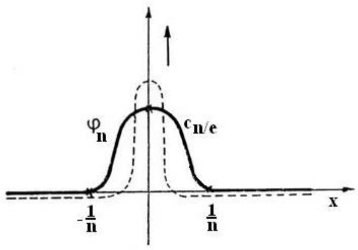


Fig. VI.13

Fixăm $(\forall)a \in \mathbb{R}$ şi considerăm o funcţie-test ψ ca în Fig. VI.13 şi fie $\psi_k(x) = \psi(x)e^{-ik\frac{\pi}{\varepsilon}x}$, $k \in \mathbb{Z}$. Conform (35) rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\psi(x)e^{-ik\frac{\pi}{\varepsilon}x}\mathrm{d}x = 0.$$

Aşadar, coeficienţii Fourier ai funcţiei $h \cdot \psi$, considerată pe intervalul $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ şi prelungită prin periodicitate la întreg $\mathbb{R}$, sunt nuli; ca atare $h \cdot \psi = 0$ a.p. în $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, deci $h = 0$ a.p. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, de unde $h = 0$ şi $u = v$ pe intervalul $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Punctul $a \in \mathbb{R}$ fiind oarecare, rezultă $u = v$ pe $\mathbb{R}$ (se face convenţia de a identifica două funcţii care coincid a.p.).

b) Raţionăm prin reducere la absurd. Dacă δ nu ar fi singulară ar exista o funcţie $u \in L_1^{loc}$ astfel încât $\delta = \underline{u}$, $\delta(\varphi) = \underline{u}(\varphi)$, adică

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$.

Considerând $\varphi = \varphi_n$ (şirul de funcţii test definite prin (33)) rezultă că

$$\frac{c_n}{e} = \varphi_n(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} u(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x, \quad n \geq 1.$$

Dar funcţia u este mărginită pe $[-1,1]$ şi fie $M = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |u(x)|$. Atunci $\dfrac{c_n}{e} \leq M \displaystyle\int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\mathrm{d}x = M$ şi ca atare, $c_n \leq M \cdot e$, absurd (deoarece $c_n \to \infty$).

Un exemplu remarcabil de distribuţie îl constituie distribuţia H a lui O. HEAVISIDE (1850-1925). Treapta unitate σ este evident o funcţie local integrabilă şi are sens distribuţia regulată asociată $H = \underline{\sigma}$. În mod explicit,

$$H(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x)\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} 1\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x,$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$.

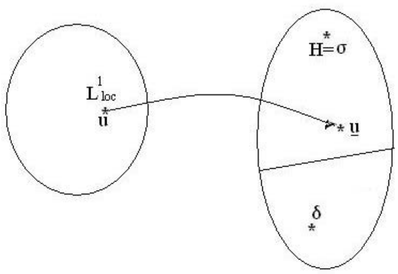


Fig. VI.14

Observaţie. Identificând, prin teorema 3.1 (a), funcţiile local integrabile cu distribuţiile asociate, putem admite că $L_{loc}^1 \subset \mathcal{D}'$ şi astfel, distribuţiile apar ca entităţi care extind funcţiile, justificând totodată de ce unii autori numesc distribuţiile - funcţii generalizate (fig. VI.14).

Pentru $u \in L_{loc}^1$ integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \quad \text{s-a notat } \underline{u}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Extinzând aceasta pentru orice distribuţie $f \in \mathcal{D}'$, scriem $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ în loc de $f(\varphi)$; astfel, pentru orice $t_0 \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(t_0) \quad \text{(formula de filtrare).}$$

6.3.3 Operaţii cu distribuţii; aplicaţii ale distribuţiilor

Pentru orice distribuţii $f, g \in \mathcal{D}'$ am definit ce înseamnă $f = g$, $f + g$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$. Se verifică uşor că $\mathcal{D}'$ este un spaţiu vectorial real. *Distribuţia nulă* este $\underline{0} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\underline{0}(\varphi) = 0$, $(\forall)\varphi \in \mathcal{D}$.

Dacă $f \in \mathcal{D}'$ este o distribuţie fixată şi $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^∞, atunci se defineşte produsul $a \cdot f$ ca fiind distribuţia definită prin

$$(a\cdot f)(\varphi) \triangleq f(a\cdot\varphi), \quad (\forall)\varphi \in \mathcal{D}.$$

De exemplu, $x^n\delta = 0$ pentru orice $n \geq 1$ şi mai general, $a \cdot \delta = a(0)\delta$ pentru orice funcţie $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indefinit derivabilă.

Dacă $\{f_n\}_{n\geq 1}$, f sunt distribuţii, se spune că $f_n \overset{\text{în } \mathcal{D}'}{\longrightarrow} f$ dacă $f_n(\varphi) \overset{\text{în } \mathbb{R}}{\longrightarrow} f(\varphi)$ pentru $n \to \infty$, $(\forall)\varphi \in \mathcal{D}$.

Teorema 3.2. *Considerăm şirul de funcţii* $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ *definite prin*

$$u_n(x) = \begin{cases} n & \text{dacă} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Atunci $\underline{u}_n \overset{\text{în } \mathcal{D}'}{\longrightarrow} \delta$.

Demonstraţie. Avem de arătat că $\underline{u}_n(\varphi) \overset{\text{în } \mathbb{R}}{\longrightarrow} \delta(\varphi)$, $(\forall)\varphi \in \mathcal{D}$, adică

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0), \quad \text{adică } \lim_{n\to\infty} n \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0).$$

Aplicând teorema de medie, rezultă $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\varphi(\xi_n)$ cu $\xi_n \in \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$.

Rămâne atunci de probat că $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\xi_n) = \varphi(0)$, ceea ce este evident, deoarece $\xi_n \to 0$ şi φ este funcţie continuă.

O operaţie de cea mai mare însemnătate este cea de derivare a distribuţiilor. *Pentru orice* distribuţiile $f \in \mathcal{D}'$ se pot defini derivatele $f', f'', \ldots, f^{(n)}, \ldots$ punând $f'(\varphi) \triangleq -f(\varphi')$, $f''(\varphi) \triangleq f(\varphi'')$ şi în general, $f^{(n)}(\varphi) \triangleq (-1)^n \cdot f(\varphi^{(n)})$, $(\forall)\varphi \in \mathcal{D}$. Aşadar, *orice distribuţie este indefinit derivabilă*; în particular, dacă $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie local integrabilă, atunci ea poate fi derivată ori de câte ori dorim (în sens distribuţional), derivând distribuţia ei asociată $\underline{u}$.

Exemplu. Arătăm că $H' = \delta$ (adică *derivata distribuţiei lui Heaviside este distribuţia lui Dirac*). Într-adevăr, avem de arătat că $H'(\varphi) = \delta(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, adică $-H(\varphi') = \varphi(0)$ sau

$$-\int_0^{\infty} \varphi'(t)\mathrm{d}t = \varphi(0), \text{ adică } -\varphi(t)\Big|_0^{\infty} = \varphi(0),$$

ceea ce este evident.

Derivatele lui δ se numesc impulsuri unitare de ordin superior $\delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0)$, $\delta''(\varphi) = \varphi''(0)$ etc. $(\forall)\varphi \in \mathcal{D}$.

Aplicaţii. Reluăm acum discuţia începută la punctul 1.

a) Se poate reconsidera acum întreaga teorie a ecuaţiilor diferenţiale, atâta timp cât ştim să înmulţim funcţii cu distribuţii, ştim să derivăm distribuţii etc.

Astfel, ecuaţia (31) se poate deriva în sens distribuţional şi devine

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = v_0 \cdot \delta$$

(folosind faptul că $H = \underline{\sigma}$ şi $H' = \delta$). Nu vom intra în detalii.

b) Revenim asupra conceptului de impuls, prezentat euristic la începutul §3. Cu notaţiile folosite acolo, pentru $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, considerarea limitei punctuale $\lim\limits_{n\to\infty} h_{1/n}(t)$ conduce la o contradicţie, aşa cum s-a văzut. Totuşi $\underline{h}_{1/n} \overset{\text{în } \mathcal{D}}{\longrightarrow} \delta$ pentru $n \to \infty$ (conform teoremei 3.2), astfel că distribuţia δ modelează ideea de impuls unitar.

c) O definiţie acceptată în fizica modernă este următoarea: se numeşte *densitate liniară* a masei punctuale m concentrată în origine, distribuţia $m \cdot \delta$, adică aplicaţia $\varphi \mapsto m \cdot \varphi(0)$. Mai general, dacă avem un sistem de puncte materiale (pe axa reală) $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de mase $m_1, m_2, \ldots, m_p$ respectiv, atunci densitatea liniară asociată este distribuţia $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} m_i\delta_{xi}$.

6.3.4 Exerciţii

1. Să se expliciteze distribuţiile $x^2\delta'$ şi $x^2\delta''$.

2. Se consideră distribuţia $f = H + \underline{u}$ unde $u(x) = \ln|x|$. Să se calculeze f' şi $f'' + xf'$.

3. Să se arate că notând $u_n(x) = \sin nx$ şi $v_n(x) = \dfrac{n}{n^2x^2+1}$ $(n \geq 1)$, avem $\underline{u}_n \overset{\text{în } \mathcal{D}'}{\longrightarrow} 0$ şi $\underline{v}_n \overset{\text{în } \mathcal{D}'}{\longrightarrow} \pi\delta$ pentru $n \to \infty$.

Capitolul 7

Varia

Întrebări de autocontrol

1. Care este deosebirea între sumă şi adunare, respectiv între produs şi înmulţire (de exemplu în mulţimea $\mathbb{Z}$) ? Cum formulaţi aceste deosebiri utilizând noţiunea de funcţie ?

2. Argumentaţi necesitatea adoptării limbajului mulţimilor în fundamentarea Analizei matematice (elaborarea conceptelor de funcţie, algoritm, limită, derivată, integrală etc.).

3. De ce ni se pare paradoxal că mulţimile $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{Z}$ au acelaşi cardinal deşi $\mathbb{N}$ este o submulţime strictă a lui $\mathbb{Z}$?

4. Care este deosebirea între cardinalul unei mulţimi finite şi numărul ei de elemente ?

5. Care este definiţia noţiunii de semnal ? Daţi exemple concrete de semnale discrete şi de semnale continuale.

6. Ce este o mulţime numărabilă ? Indicaţi o proprietate a mulţimilor numărabile pe care nu o posedă mulţimile finite.

7. Care este motivaţia studierii funcţiilor aritmetice ? Aveţi conştiinţa legăturii strânse între conceptele de algoritm şi de funcţie recursivă ?

8. Puteţi justifica denumirea de "număr real" ? Dar importanţa matematică a acestuia ?

9. O funcţie reală $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numeşte $\mathbb{R} - \mathbb{B}$ dacă există o funcţie booleană $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ astfel încât $(\forall)x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma(f(x)) = F(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))$. Dovediţi că funcţiile $f(x) = |x|$, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ sunt $\mathbb{R} \to \mathbb{B}$ şi reflectaţi la această legătură neaşteptată între funcţiile reale şi booleene.

10. Incluziunile $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sunt legate de extinderi ale cunoştinţelor noastre despre numere reale; precizaţi în ce mod.

11. Încercaţi să explicaţi conceptul de şir Cauchy şi pe cel de şir convergent cuiva care nu ştie analiză, dar manifestă curiozitate ştiinţifică.

12. Justificaţi legătura strânsă între numerele reale şi măsurarea mărimilor.

13. Care este importanţa filozofică a bijecţiei lui Descartes ?

14. Ce ştiţi despre infinitul actual şi infinitul potenţial ?

15. Ce este un spaţiu metric ? Justificaţi introducerea acestui concept.

16. Se pot defini şiruri convergente sau şiruri mărginite într-o mulţime oarecare ? Dar într-un spaţiu metric ?

17. Se poate vorbi de submulţime convexă a unui spaţiu metric ? Dar a unui spaţiu vectorial normat (SVN) ?

18. Funcţiile mărginite $A \to \mathbb{R}$ pot fi privite ca puncte într-un spaţiu metric, anume în $\mathcal{M}_A$. Există avantaje ale unei astfel de reprezentări ?

19. Enunţaţi principiul contracţiei. Daţi exemple de spaţii metrice complete.

20. Ce este o serie de numere reale ? Dar serie de numere complexe ? Dar serie de funcţii ?

21. Este corectă afirmaţia: "serie înseamnă o sumă finită"? De ce cadrul natural al teoriei seriilor îl constituie spaţiile vectoriale normate ?

22. Puteţi sublinia deosebirea între convergenţa uniformă şi convergenţa punctuală a şirurilor de funcţii ?

23. Vă amintiţi condiţiile în care o serie de funcţii poate fi derivată (respectiv integrată) termen cu termen ?

24. Scrieţi formula lui Taylor şi motivaţi rostul ei.

25. Enunţaţi câteva avantaje ale seriilor de puteri.

26. Reflectaţi la aproximările polinomiale de tip Taylor, Lagrange, Weierstrass ale funcţiilor.

27. Ştiţi ce înseamnă faptul că e şi π sunt numere transcendente ?

28. Sunteţi de acord că formula lui Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ este o dovadă de armonie a matematicii ? Cunoaşteţi o relaţie între e, i, π şi -1 ?

29. Puteţi spune ceva semnificativ despre analiza constructivistă ?

30. Care sunt submulţimile conexe (respectiv compacte) ale lui $\mathbb{R}$?

31. Daţi una din definiţiile continuităţii într-un punct. Corespunde conceptul matematic de continuitate intuiţiei noastre ?

32. Ce legătură există între conceptele de continuitate şi limită? Există o ordine logică obligatorie în prezentarea lor ?

33. Daţi un exemplu de o proprietate adevărată aproape peste tot (dar nu peste tot !).

34. Vă reamintiţi enunţul corect al teoremelor lui Fermat, Rolle, Lagrange ca şi al regulii lui l'Hôpital (1661-1704) ? Se extind acestea la funcţii cu valori în $\mathbb{R}^p$ $(p \geq 2)$?

35. Daţi definiţia derivatelor parţiale ale unei funcţii de două variabile într-un punct, cu precizarea condiţiilor. De ce nu poate fi acceptat un concept de "derivată totală" (nu parţială) a unei funcţii $f(x, y)$ într-un punct (x_0, y_0) prin considerarea limitei

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\neq(x_0,y_0)}} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \ ?$$

36. Precizaţi definiţia diferenţialei unei funcţii diferenţiabile într-un punct şi modul ei de calcul cu ajutorul derivatelor parţiale.

37. Definiţi punctele de extrem local ale funcţiilor cu valori reale (definite pe un spaţiu metric). Care este enunţul teoremei lui Fermat ?

38. În ce constă metoda multiplicatorilor lui Lagrange ?

39. Aveţi conştiinţa deosebirii dintre un drum parametrizat şi urma lui ?

40. Ce argumente aveţi pentru studiul varietăţilor diferenţiabile ?

41. Explicaţi esenţa metodei celor mai mici pătrate.

42. Teorema convergenţei dominate este un rezultat fundamental; ştiţi de ce ea este considerată punctul forte al integrabilităţii ?

43. Luarea integralei este o funcţională continuă, iar derivarea nu este continuă. Care sunt sensul exact şi morala care se degajă din aceste afirmaţii?

44. Cunoaşteţi o problemă fizică în care apar integrale improprii ?

45. Ce simetrii în spaţiu sugerează trecerea la coordonate sferice sau cilindrice ?

46. Daţi definiţia gradientului unui câmp scalar; ce interpretare geometrică a sa cunoaşteţi ?

47. Daţi definiţia divergenţei şi rotorului unui câmp vectorial; de ce nu depind acestea de alegerea sistemului de axe ?

48. Vă reamintiţi definiţiile circulaţiei şi fluxului unui câmp vectorial ?

49. Scrieţi formulele Green-Riemann, Gauss-Ostrograski, Stokes.

50. Enunţaţi teoremele de caracterizare a câmpurilor irotaţionale, solenoidale, armonice.

51. Justificaţi noţiunile de spaţiu Banach şi de spaţiu Hilbert.

52. Daţi definiţia funcţiilor de matrici şi enunţaţi proprietăţile de bază ale exponenţialei unei matrici.

53. Sunteţi de acord cu afirmaţia că funcţionalele şi operatorii sunt, înainte de orice, funcţii ? Dar cu afirmaţia că funcţionalele "duc funcţii în numere", iar operatorii "duc funcţii în funcţii" ?

54. Ce sunt seriile trigonometrice ? Dar seriile Fourier ?

55. Mai ştiţi enunţul teoremei lui Dirichlet de reprezentare ? Dar o interpretare fizică a ei ?

56. Ce este o distribuţie ? Daţi exemplu de o funcţie care nu poate fi considerată ca distribuţie (deci care nu aparţine lui L^1_{loc}).

57. Este δ o distribuţie asociată unei funcţii ? Dar H ?

58. Cunoaşteţi exemple de distribuţii nederivabile ? Calculaţi derivatele de ordin I şi II ale funcţiei nederivabile $x \mapsto |x|$ (privită ca distribuţie).

59. Prin adâncirea conceptului de limită, prin suportul ei specific - mulţimea $\mathbb{R}$, Analiza matematică descrie entităţile continuale. Calculatoarele sunt esenţialmente legate de entităţi discrete. Reflectaţi la modul cum se realizează totuşi (prin metode aproximative) legătura între continuu şi discret de pe poziţiile Analizei matematice.

60. Reflectaţi la aspectele algoritmice legate de fiecare din principalele teoreme ale Analizei.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Boboc, I. Colojoară - *Elemente de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

2. H. Cartan - *Calcul différentiel, Formes différentielles*, Hermann, Paris, 1967.

3. R. Cristescu - *Elemente de analiză funcţională*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1975.

4. J. Dieudonné - *Foundations of modern analysis I*, Academic Press, New York, 1960.

5. W. Flemming - *Functions of several variables*, Springer Verlag, Berlin, 1977.

6. O. Forster - *Höhere Mathematik, I, II, III*, mimeographed notes, Regensburg, 1970, 1971.

7. H. Grauert, I. Lieb - *Differential und integralrechnung, I, II, III*, Springer Verlag, Berlin, 1967, 1968.

8. M. Hirsch, S. Smale - *Differential equations, Dynamical Systems*, Academic Press, New York, 1974.

9. M. Jurchescu - *Introducere în analiza pe varietăţi*, Tipografia Universităţii, Bucureşti, 1980.

10. P. Lax, S. Burstein, A. Lax - *Calculus with applications and Computing, I*, Springer Verlag, Berlin, 1976.

11. S. Marcus - *Noţiuni de analiză matematică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1967.

12. M. Nicolescu - *Funcţii reale şi elemente de topologie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.

13. W. Rudin - *Principles of mathematical analysis*, Mc. Graw-Hill, New York, 1964.

14. D. Stanomir, O. Stănăşilă - *Metode matematice în teoria semnalelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

15. G. Şilov - *Matematiceski analiz*, Nauka, Moskva, 1974.

Culegeri de probleme recomandate

1. L. Aramă, T. Morozan - *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.

2. Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină - *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral II, III*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1966.

3. D.P. Demidovici - *Sbornik zadaci i uprajnenii po matematiceskomu analizu*, GIFML, Moskva, 1962.

4. N. Donciu, D. Flondor - *Algebră şi analiză matematică (culegere de probleme)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

5. Ana Niţă, Tatiana Stanăşilă - *Probleme rezolvate şi ecuaţii fundamentale*, Ed. ALL, 2004.

INDEX DE NOŢIUNI

A

B

C

D

E

F

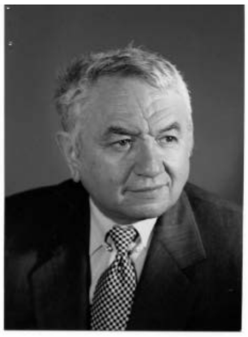
G

H

I

CUPRINS

O traiectorie autobiografică



După ce am cunoscut de copil ororile războiului şi ale anilor de restrişte 1945−55, am urmat liceul ceferiştilor "Aurel Vlaicu" din Bucureşti, situat în vecinătatea "Parcului Copilului". Aici am avut profesori buni de Matematică, Români şi ... Rugbi, unii foşti universitari exilaţi la periferia oraşului; mi-am descoperit uşurinţa de a asimila matematica, după nişte manuale bune, traduse din ruseşte. Îmi amintesc că am citit o Trigonometrie în două zile şi o noapte iar, mai târziu, câteva lecţii de Analiză matematică în numai o lună. Tot atunci descoperisem Gazeta Matematică şi am avut ocazia să mă întrec cu colegii de generaţie la Olimpiadele Naţionale.

Am absolvit facultatea de matematică la Bucureşti, în 1960, al doilea în promoţie şi am avut şansa să am profesori pe câţiva din maeştrii şcolii româneşti de matematică: Miron Nicolescu (care mi-a fost şi conducător de doctorat, un profesor solar care a marcat profund predarea Analizei matematice în România), Alexandru Froda, Victor Vâlcovici (ambii de mare cultură şi ţinută) şi, mai ales, Dan Barbilian (matematician pur sânge, pe care l-am găsit fascinant). După absolvire, a urmat o ucenicie de asistent la Politehnica din Bucureşti, apoi am obţinut prin concurs un post de cercetător la Institutul de Matematică al Academiei Române - IMAR. Aici am făcut exclusiv matematică, 10−14 ore pe zi, închegând prietenii ştiinţifice trainice. După primii doi ani, mi-am fixat domeniul strict de preocupare - Analiză complexă şi Geometrie algebrică, având ca mentori pe M. Jurchescu (un mare cercetător şi, simultan, profesor-comunicator) şi pe Al. Lascu (un algebrist deosebit). Aşa am depăşit presiunea publicării primelor articole originale.

Împreună cu Costică Bănică, l-am însoţit pe M. Jurchescu în crearea Şcolii româneşti de Spaţii Analitice, despre care avea să vorbească peste zece ani academicianul francez H. Cartan. Am urmat seminarii ştiinţifice (cu totul diferite de seminariile de la facultate): de cercetare, cu 6−7 participanţi (unde se prezentau articole publicate sau subiecte de reflecţie), altul de învăţare, cu alţi câţiva cu care citeam cărţi fundamentale pentru cultura matematică: Cartan, Ghelfand, Van der Waerden, Bourbaki, Grothendieck. Cei care expuneau (de două ori pe săptămână, câte 3−4 ore) erau traşi la sorţi dintre participanţi, aşa că eram cu toţii ţinuţi în priză. Prietenia ştiinţifică este altceva decât spiritul de gaşcă sau de turmă; astăzi pasiunile colective sunt tot mai rare! La IMAR selecţia era dură, nu existau pile, rubedenii, interese obscure şi era "muncă de miner", cum se exprima un coleg.

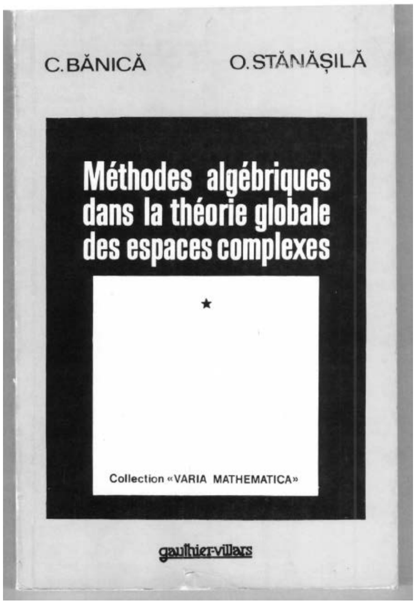
Austeritate autoimpusă, din pasiune pură, curiozitate ştiinţifică şi dorinţa de afirmare, departe de orice parvenire. Am cunoscut pe deplin succesul profesional: articole publicate în reviste de prestigiu sau invitaţii la universităţii mari. Împreună cu C. Bănică am reali-zat un ciclu de lucrări (pentru care am primit Premiul Academiei) şi o carte de sinteză devenită "best-seller" internaţional.

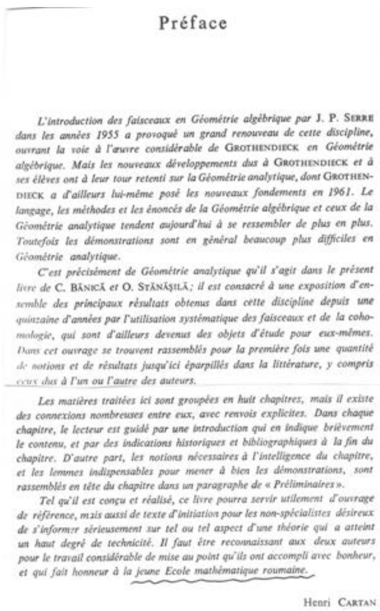
Nu pot spune că am avut o vocaţie specială pentru cercetare specializată, consacrată unui singur subiect. Am urmărit totdeauna să-mi lărgesc orizontul, îmi plăcea să comunic ceea ce înţelesesem singur; au început să mă intereseze şi alte domenii, influenţat şi de fratele meu, inginerul Cornel Stănăşilă, care mă atrăgea spre termodinamică şi aplicaţiile ei - un alt domeniu fascinant.

La Politehnică, am început să predau din 1973, pe un post de Conferenţiar, Analiza matematică la nou creata secţie de Calculatoare, unde media minimă de admitere era 9,50. Am fost încurajat şi de studenţii excepţionali pe care i-am întâlnit; îmi plăceau şi întrebările "tâmpite" ale unora (de tipul: "de ce $n \to \infty$ şi nu poate ca $n \to 5$; de ce $\infty - \infty$ nu este egal cu zero, sau mărturisirea unui student că a visat cum un câine muşca dintr-un polinom termen cu termen, la care eu l-am felicitat că acel câine nu muşca dintr-o serie că altfel nu s-ar mai fi trezit etc."); mi-am dezvoltat simţul comunicării, le povesteam despre marele Euler care n-a avut copii prea reuşiţi şi spunea că talentul la matematică se moşteneşte nu din tată în fiu, cât din socru în ginere; sau de prolificul Cauchy care comunica la Academie câte o teoremă pe săptămână, dar şi despre Clairaut devenit academician la 18 ani ... Am adus în Politehnică ideea unor seminarii comune - cadre didactice de diverse specializări, studenţi din ani mici sau mari, cercetători - în care lumea învăţa împreună, fără complexe, mai ales urmăriţi de spectrul calculatoarelor.

Această carte este rodul unui curs elaborat cu răbdare, orientat spre aplicaţii, spre apropieri de lumea ingineriei; la această carte am lucrat şapte ani, trecând şi printr-o versiune scrisă de mână.

Pe scurt, este "o carte mai bună decât autorul ei"!





Préface

L'introduction des faisceaux en Géométrie algébrique par J. P. SERRE dans les années 1955 a provoqué un grand renouveau de cette discipline, ouvrant la voie à l'œuvre considérable de GROTHENDIECK en Géométrie algébrique. Mais les nouveaux développements dus à GROTHENDIECK et à ses élèves ont à leur tour retenti sur la Géométrie analytique, dont GROTHENDIECK a d'ailleurs lui-même posé les nouveaux fondements en 1961. Le langage, les méthodes et les énoncés de la Géométrie algébrique et ceux de la Géométrie analytique tendent aujourd'hui à se ressembler de plus en plus. Toutefois les démonstrations sont en général beaucoup plus difficiles en Géométrie analytique.

C'est précisément de Géométrie analytique qu'il s'agit dans le présent livre de C. BĂNICĂ et O. STĂNĂȘILĂ; il est consacré à une exposition d'ensemble des principaux résultats obtenus dans cette discipline depuis une quinzaine d'années par l'utilisation systématique des faisceaux et de la cohomologie, qui sont d'ailleurs devenus des objets d'étude pour eux-mêmes. Dans cet ouvrage se trouvent rassemblés pour la première fois une quantité de notions et de résultats jusqu'ici éparpillés dans la littérature, y compris ceux dus à l'un ou l'autre des auteurs.

Les matières traitées ici sont groupées en huit chapitres, mais il existe des connexions nombreuses entre eux, avec renvois explicites. Dans chaque chapitre, le lecteur est guidé par une introduction qui en indique brièvement le contenu, et par des indications historiques et bibliographiques à la fin du chapitre. D'autre part, les notions nécessaires à l'intelligence du chapitre, et les lemmes indispensables pour mener à bien les démonstrations, sont rassemblés en tête du chapitre dans un paragraphe de « Préliminaires ».

Tel qu'il est conçu et réalisé, ce livre pourra servir utilement d'ouvrage de référence, mais aussi de texte d'initiation pour les non-spécialistes désireux de s'informer sérieusement sur tel ou tel aspect d'une théorie qui a atteint un haut degré de technicité. Il faut être reconnaissant aux deux auteurs pour le travail considérable de mise au point qu'ils ont accompli avec bonheur, et qui fait honneur à la jeune Ecole mathématique roumaine.

Henri CARTAN

Octavian şi Cornel Stănăşilă

Diplomă

Pentru rezultatele deosebite în domeniul matematicii,
Pentru contribuția remarcabilă la dezvoltarea școlii românești de matematică,
La propunerea Consiliului Științific al Institutului,

Se conferă titlul de ***Membru Onorific*** *al* ***Institutului de Matematică Simion Stoilow*** *al Academiei Române ~~Doamnei~~/Domnului* Octavian STANASÎLA

IMAR

București, 10 octombrie 2005

Director,
V. Brînzănescu
Dr. Vasile Brînzănescu

ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

ÎNTRUNITĂ ÎN SESIUNEA ADUNĂRII GENERALE DIN 28 februarie - 2 martie 1974

ACORDĂ, POTRIVIT ART. 64 LIT. g. DIN STATUTUL SĂU DE ORGANIZARE ȘI FUNCȚIONARE

PREMIUL GHEORGHE ȚIȚEICA

TOV. **OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ , CONSTANTIN BĂNICĂ**

PENTRU „Grupul de lucrări privind dualitatea analitică și aplicații”

DAT ÎN BUCUREȘTI LA 2 martie 1974

PREȘEDINTE, Miron Nicolescu

SECRETAR GENERAL,

Nr. 2

ACADEMIA ROMÂNĂ

ACORDĂ

PREMIUL GHEORGHE CARTIANU

pentru

Lucrarea :* *UNDINE. Teorie și aplicații

***Autor :* Octavian Stănășilă (în colectiv)**

Președinte
Acad. IONEL HAIDUC

Secretar general
Acad. PĂUN ION OTIMAN

Dat în București azi, 13 decembrie 2012