Analiză Matematică — Notiţe de curs

(câteva noţiuni elementare pentru viitorii ingineri)

Conf. Univ. Dr. Maria-Magdalena Boureanu

Cuprins

CAPITOLUL 1

Şiruri. Convergenţă în $\mathbb{R}^N$

Noţiunea de şir convergent de numere reale este cunoscută din liceu.

Definiţia 1. *Spunem că* $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ *este convergent la* $x \in \mathbb{R}$ *dacă şi numai dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât oricare ar fi* $n \geq N_\varepsilon$, *să avem* $|x_n - x| < \varepsilon$.

Pentru a putea discuta despre convergenţa unui şir într-o altfel de mulţime, mai generală, introducem noţiunea de distanţă.

Definiţia 2. *Fie* M *o mulţime oarecare. Funcţia* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *se numeşte distanţă (metrică) dacă şi numai dacă au loc următoarele proprietăţi:*

(d1) $d(x, y) \geq 0,\ \forall\, x, y \in M; \quad d(x, x) = 0,\ \forall x \in M.$
(d2) $d(x, y) = d(y, x),\ \forall\, x, y \in M.$
(d3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),\ \forall\, x, y, z \in M.$

În acest caz spunem că (M, d) *este spaţiu metric.*

Exemple:

1. pentru $M = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.
2. pentru $M = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, iar
$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$
3. pentru $M = \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, iar
$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Observaţie. *Toate acestea sunt cazuri particulare ale cazului general în care* $M = \mathbb{R}^N$, *deci* $x, y \in M$ *sunt de forma* $x = (x_1, x_2, \ldots x_N)$, $y = (y_1, y_2, \ldots y_N)$, *iar*
$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2}.$$
Metrica d din aceste exemple se numeşte ***metrică (distanţă) Euclidiană****.*

Exemple:

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = (1,2)$, $y = (3,8)$. Atunci distanţa Euclidiană de la x la y este $d(x,y) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$.
2. Fie $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = (0,-3,2)$, $y = (5,1,4)$. Atunci distanţa Euclidiană de la x la y este $d(x,y) = \sqrt{(0-5)^2 + (-3-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{25+16+4} = 3\sqrt{5}$.

Există şi alte tipuri de distanţe, de exemplu, oricărei mulţimi de elemente M i se poate asocia aşa numita metrică trivială,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = y \\ 1, & \text{dacă } x \neq y. \end{cases}$$

Însă noi suntem interesaţi doar de spaţiile $\mathbb{R}^N$ (de obicei $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$) înzestrate cu metrica Euclidiană.

Exerciţiu: Arătaţi că metrica Euclidiană şi metrica trivială satisfac proprietăţile (d1)-(d3) descrise în Definiţia 2.

Revenind la discuţia iniţială, cea referitoare la convergenţa şirurilor, putem introduce următoarea definiţie.

Definiţia 3. *Spunem că $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ este convergent la $x \in \mathbb{R}^N$ dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N_\varepsilon$, să avem $d(x_n, x) < \varepsilon$.*

Proprietatea 1. *Proprietatea de convergenţă din $\mathbb{R}^N$ poate fi gândită pe componente, adică, pentru orice şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ cu $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^N)$, $n \geq 1$, avem*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^N) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n^1, \lim_{n\to\infty} x_n^2, \ldots \lim_{n\to\infty} x_n^N \right).$$

Demonstraţie:
Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Atunci

$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x_n^1 - x^1)^2 + (x_n^2 - x^2)^2 + \cdots + (x_n^N - x^N)^2} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_n^1 - x^1)^2 + (x_n^2 - x^2)^2 + \cdots + (x_n^N - x^N)^2 < \varepsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} |x_n^1 - x^1| < \varepsilon; \\ |x_n^2 - x^2| < \varepsilon; \\ . \\ . \\ . \\ |x_n^N - x^N| < \varepsilon. \end{cases} \qquad (1)$$

Reciproc, dacă (1) are loc, atunci parcurgând drumul invers deducem că $d(x_n, x) < \varepsilon\sqrt{N}$. □

Exemplu: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{-3n+4}{5n+9}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3n+4}{5n+9}\right) = \left(0, -\frac{3}{5}\right)$.

O altă modalitate de a-l privi pe $\mathbb{R}^N$ este ca spaţiu vectorial normat, dat fiind că $\left(\mathbb{R}^N, +, \cdot\right)$ are structură de spaţiu vectorial.

DEFINIŢIA 4. *Fie $(X, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$. Aplicaţia $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ se numeşte normă dacă şi numai dacă au loc proprietăţile*

(n1) $\|x\| \geq 0,\ \forall\, x \in X;\quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \forall x \in M.$
(n2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in X.$
(n3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall\, x, y \in X.$

În acest caz spunem că $(X, \|\cdot\|)$ este spaţiu normat.

Pe $\left(\mathbb{R}^N, +, \cdot\right)$ definim **norma Euclidiană** astfel:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}, \quad \text{pentru } x = (x_1, x_2, \ldots x_N).$$

Exemplu: Fie $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (1, 2-5)$. Atunci $\|x\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$.

Exerciţiu: Arătaţi că norma Euclidiană satisface proprietăţile (n1)-(n3) descrise în Definiţia 4.

De remarcat faptul că orice spaţiu normat este spaţiu metric deoarece putem defini $d(x, y) = \|x - y\|$. Reciproc nu, deoarece pentru a fi spaţiu normat trebuie să fie în primul rând spaţiu vectorial, în timp ce pentru a avea un spaţiu metric nu avem nicio restricţie de acest tip, orice mulţime poate fi spaţiu metric (dacă este înzestrată cu o distanţă).

Rescriem acum definiţia convergenţei în $\mathbb{R}^N$ cu ajutorul noţiunii de normă.

DEFINIŢIA 5. *Spunem că $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ este convergent la $x \in \mathbb{R}^N$ dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N_\varepsilon$, să avem $\|x_n - x\| < \varepsilon$.*

OBSERVAŢIE. *La fel cum s-a învăţat în liceu, dacă un şir nu este convergent, atunci el se numeşte şir divergent.*

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Fie $x, y, z, v \in \mathbb{R}^2$, $x = (-1, 2)$, $y = (0, 3)$, $z = (4, 2)$, $v = (-3, -2)$. Determinaţi: $\|x\|$, $\|y\|$, $\|z\|$, $\|v\|$, $\|x - y\|$, $\|y - x\|$, $\|x - z\|$, $d(x, z)$, $d(x, v)$, $d(y, z)$, $d(z, y)$, $d(v, z)$, $d(y, v)$.
2. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, $x = (-1, 0, 2)$, $y = (0, -3, 1)$, $z = (-1, 1, 2)$. Determinaţi: $\|x\|$, $\|y\|$, $\|z\|$, $\|x - y\|$, $d(x, z)$, $d(y, z)$.
3. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde:

   a) $x_n = \left(\dfrac{n^2 + 5n - 4}{2n^2 + 7n + 111}, \dfrac{n^2 + 59}{-8n^3 + 6n^2 + 8n + 8}\right)$;

   b) $x_n = \left(\dfrac{-8n^5 + 5n^3 - 41}{n^6 + n + 1}, \dfrac{-3n^4 - 9}{-6n^4 + 8n^2}, \dfrac{-n^3 + n^2 - 3}{n^3 + 2n + 4}\right)$;

   c) $x_n = \left(\dfrac{(-1)^n}{n^6 + n^3 - n^2}, \dfrac{2n^2 + 12n}{4n^2 - 10n - 13}\right)$;

   d) $x_n = \left(\dfrac{\cos(n^2 + 3n)}{n^2 - n + 2}, \dfrac{-n^2 + n - 19}{n^4 + n^2 + 2}, \dfrac{n - 1}{7n + 2}\right)$;

   e) $x_n = \left(\dfrac{\sin(25n - 14)}{-4n^3 + n^2 - 5n}, n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

CAPITOLUL 2

Serii

1. Serii de numere reale. Criterii de convergenţă

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$. Acestui şir i se poate asocia:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = x_1\\
&S_2 = x_1 + x_2\\
&S_3 = x_1 + x_2 + x_3\\
&.\\
&.\\
&.\\
&S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n\\
&S_{n+1} = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + x_{n+1}\\
&.\\
&.\\
&.
\end{aligned}
$$

Definiţia 6. *Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$. Şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ definit prin $S = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ poartă numele de şirul sumelor parţiale asociate lui $(x_n)_{n\geq 1}$, iar perechea $(x_n, S_n)_{n\geq 1}$ poată numele de serie generată de şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ şi se notează de obicei cu $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$.*

Observaţie. *Seria trebuie gândită ca o sumă infinită de termeni,*

$$\sum_{n\geq 1} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \ldots.$$

De asemenea, putem avea $\sum\limits_{n\geq 0} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \ldots$ sau $\sum\limits_{n\geq k} x_n = x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n + \ldots$. De fapt forma generală este $\sum\limits_{n\geq k} x_n$, cu $k \in \mathbb{N}$ arbitrar fixat, însă pentru simplitate vom prezenta toate *proprietăţile seriilor folosind notaţia* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$*, purtând în minte faptul că acestea sunt valide pentru* $\sum\limits_{n\geq k} x_n$.

Operaţii cu serii de numere reale:

1. Adunarea. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$. Atunci
$$\sum_{n\geq 1} x_n + \sum_{n\geq 1} y_n = \sum_{n\geq 1} (x_n + y_n).$$
2. Înmulţirea cu scalari. Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci
$$\alpha \sum_{n\geq 1} x_n = \sum_{n\geq 1} (\alpha x_n).$$

Preocuparea pentru sume infinite este cunoscută încă din Grecia Antică, cu aproximativ 2500 de ani în urmă, de când datează paradoxul lui Zenon (490-430 î.e.n.) Astfel se pune problema parcurgerii unei distanţe d dintre două puncte A şi B în felul următor: prima dată se parcurge jumătate din distanţa d, apoi jumătate din distanţa rămasă, apoi jumătate din distanţa rămasă, apoi jumătate din distanţa rămasă... şi tot aşa, ajungând la
$$d = \frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \frac{d}{8} + \frac{d}{16} + \cdots = \frac{d}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{d}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Definiţia 7. *Spunem că o serie* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă există* $S \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. *În acest caz spunem că seria* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *are suma* S*, notăm* $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *şi înţelegem* $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. *Dacă* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *nu este serie convergentă, atunci ea se numeşte serie divergentă.*

Exemple:

1. Din discuţia de mai sus, se observă că $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\frac{d}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ este o serie convergentă de sumă d. Folosind operaţia de înmulţire cu scalari a seriilor pentru a împărţi prin d, obţinem că suma seriei $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ este 1. Această constatare intuitivă va putea fi demonstrată cu

ajutorul argumentului pe care îl vom folosi puţin mai jos, atunci când vom discuta despre seriile geometrice.

2. Seria $\sum\limits_{n\geq 4} \frac{1}{n^2-n}$ este convergentă şi are suma $\frac{1}{3}$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k^2-k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=4}^{n} \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=4}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Am văzut că fiecărui şir i se poate asocia şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 1}$. Şi reciproc este valabil: dacă ştim sumele parţiale, putem determina termenii şirului procedând astfel

$$\begin{aligned}
&x_1 = S_1 \\
&x_2 = S_2 - S_1 \\
&x_3 = S_3 - S_2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&x_n = S_n - S_{n-1} \\
&x_{n+1} = S_{n+1} - S_n \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}$$

Bazându-ne pe această observaţie putem formula următorul rezultat.

TEOREMA 1. ***(Criteriul necesar de convergenţă)*** *Dacă* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *este convergentă, atunci* $x_n \to 0$ *când* $n \to \infty$.

Demonstraţie:
Demonstraţia este imediată. Fie $(S_n)_{n\geq 1}$ şirul sumelor parţiale asociate lui

$(x_n)_{n\geq 1}$ şi S suma acestei serii convergente. Cum ştim că $x_n = S_n - S_{n-1}$, trecând la limită deducem că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n+1} = S - S = 0.$$

$\square$

OBSERVAŢIE. *Reciproc nu este adevărat, sunt serii* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *care sunt divergente chiar dacă* $x_n \to 0$ *când* $n \to \infty$*, cum ar fi* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *(seria armonică), la care şirul sumelor parţiale este divergent.*

CONSECINŢA 1. *Dacă* $x_n \nrightarrow 0$ *când* $n \to \infty$*, atunci* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *este divergentă.*

Aplicaţii: Arătaţi că următoarele serii sunt divergente:

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{n+4}{2n-5}$;

b) $\sum_{n\geq 1} \frac{2n^2-3}{n+5}$;

c) $\sum_{n\geq 1} 4^n$.

Seria care apare în cel de-al treilea exerciţiu propus face parte dintr-o categorie mai largă de serii de numere reale pe care o tratăm în cele ce urmează.

Serii geometrice

DEFINIŢIA 8. *Orice serie de forma* $\sum_{n\geq 0} q^n$*, unde* q *este un număr real, se numeşte serie geometrică.*

Suntem interesaţi de convergenţa seriilor geometrice. Distingem următoarele două situaţii: $|q| \geq 1$ şi $|q| < 1$. Dacă $|q| \geq 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} q^n \neq 0$, deci, conform Consecinţei 1, deducem că seria $\sum_{n\geq 0} q^n$ este divergentă. Rămâne de investigat cazul în care $|q| < 1$. (Subliniem faptul că $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ nu garantează convergenţa seriei). Calculăm limita şirului sumelor parţiale.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
$$= \frac{1}{1-q} \quad \text{pentru } q \in (-1,1).$$

Prin urmare pentru $|q| < 1$ seria $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ este convergentă şi are suma $S = \dfrac{1}{1-q}$.

Aplicaţii: Aflaţi suma următoarelor serii geometrice:

a) $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$;

b) $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$;

c) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-5)^n}{8^n}$.

Câteva proprietăţi legate de convergenţă ale seriilor

PROPRIETATEA 2. *Dacă două serii* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ *sunt convergente, atunci şi suma lor,* $\sum\limits_{n\geq 1} (x_n + y_n)$*, converge. În plus, dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = S_1$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = S_2$*, atunci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = S_1 + S_2$.

Exerciţiu: Arătaţi că seria $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)$ este convergentă şi calculaţi-i suma.

Reciproca nu este adevărată, adică dacă suma a două serii este convergentă nu înseamnă că şi cele două serii sunt convergente. De asemenea, dacă două serii sunt divergente, nu înseamnă că şi suma lor este divergentă.

Exemplu: $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n\geq 0} 5^n + \sum\limits_{n\geq 0} \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 5^n\right)$.

PROPRIETATEA 3. *Proprietatea de convergenţă a seriilor se păstrează la înmulţirea cu scalari. Adică, dacă* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n\geq 1}(\alpha x_n)$ *converge, oricare ar fi* $\alpha \in \mathbb{R}$. *În plus, dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = S$*, atunci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n) = \alpha S$. *Pe de altă parte, dacă* $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n\geq 1}(\alpha y_n)$ *diverge, oricare ar fi* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exerciţiu: Studiaţi convergenţa seriei $\sum\limits_{n\geq 0}(8\cdot 5^n)$.

PROPRIETATEA 4. *Dacă într-o serie se schimbă ordinea unui număr finit de termeni, nu se schimbă convergenţa seriei, iar dacă seria a fost convergentă, suma rămâne aceeaşi.*

PROPRIETATEA 5. *Dacă într-o serie adăugăm sau scoatem un număr finit de termeni, nu se schimbă convergenţa seriei, dar, în cazul în care seria iniţială a fost convergentă, suma se va schimba.*

Exemplu: Calculaţi suma seriei $\sum\limits_{n\geq 2}\left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Rezolvare: Observăm că avem o serie geometrică cu $q = \frac{4}{9}$. Dat fiind că $|q| < 1$, deducem că

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}.$$

În acelaşi timp,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \left(\frac{4}{9}\right)^0 + \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n,$$

deci

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{9}{5} - 1 - \frac{4}{9} = \frac{16}{45}.$$

Alte criterii de convergenţă a seriilor

TEOREMA 2. ***(Criteriul lui Leibniz)*** *Fie $(x_n)_n$ un şir descrescător de numere pozitive care converge la 0. Atunci seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^n x_n$ este convergentă.*

OBSERVAŢIE. *Seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^n x_n$ se numeţe serie alternată deoarece oricare doi termeni consecutivi ai săi au semne diferite.*

De asemenea este util să reamintim câteva proprietăţi ale şirurilor de numere reale.

TEOREMA 3. ***(Teorema lui Weierstrass)*** *Orice şir monoton şi mărginit este convergent. În particular, orice şir mărginit inferior care descreşte converge, iar orice şir mărginit superior care creşte converge.*

În plus, se mai ştie din liceu că dacă un şir este pozitiv, limita sa, dacă există, va fi mai mare sau egală cu 0. Prin urmare, pentru a îndeplini condiţiile stipulate de Criteriul lui Leibniz este suficient să arătăm că şirul $(x_n)_n$ este pozitiv şi descrescător.

Aplicaţie: Arătaţi că seria $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă.

TEOREMA 4. ***(Criteriul lui Cauchy pentru serii)*** *Seria $\sum_{n\geq 1}x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N_\varepsilon$ şi oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^\star$ avem*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right| < \varepsilon.$$

CONSECINŢA 2. *Fie seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Dacă $\alpha \leq 1$, seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă.*
2. *Dacă $\alpha > 1$, seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă.*

Exemple:

1. Seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă.
2. Seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

OBSERVAŢIE. *Seria* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *se numeşte serie armonică, iar dacă* $\alpha \neq 1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *se numeşte serie armonică generalizată.*

TEOREMA 5. ***(Criteriul comparaţiei)*** *Fie* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ *două serii de numere pozitive cu proprietatea că există* $N \in \mathbb{N}$ *astfel încât oricare ar fi* $n \geq N$, $x_n \leq y_n$.

(i) *Dacă seria* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *este divergentă, atunci şi seria* $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ *este divergentă.*

(ii) *Dacă seria* $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ *este convergentă, atunci şi seria* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *este convergentă.*

Exemplu: Seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+14}$ este convergentă deoarece $\frac{1}{n^2+14} < \frac{1}{n^2}$, oricare ar fi $n \geq 1$, iar seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

TEOREMA 6. ***(Criteriul rădăcinii sau Criteriul radicalului)*** *Fie* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *o serie de numere pozitive. Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$, *atunci:*

(i) *Dacă* $l < 1$ *seria* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *este convergentă.*

(ii) *Dacă* $l > 1$ *seria* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *este divergentă.*

OBSERVAŢIE. *Dacă* $l = 1$ *nu se poate spune nimic despre convergenţa seriei* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *cu ajutorul acestui criteriu.*

Exemplu: Seria $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{8n^2-5n+3}{2n^2+3n+1}\right)^n$ este divergentă.

Rezolvare: Se observă că pentru orice $n\geq 1$, $\frac{8n^2-5n+3}{2n^2+3n+1}>0$, iar $x_n=\left(\frac{8n^2-5n+3}{2n^2+3n+1}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2-5n+3}{2n^2+3n+1}=\frac{4}{2}=2>1,$$

de unde deducem că $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{8n^2-5n+3}{2n^2+3n+1}\right)^n$ este serie divergentă.

TEOREMA 7. ***(Criteriul raportului)*** *Fie $\sum_{n\geq 1}x_n$ o serie de numere strict pozitive. Dacă există $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=l$, atunci:*

(i) *Dacă $l<1$ seria $\sum_{n\geq 1}x_n$ este convergentă.*

(ii) *Dacă $l>1$ seria $\sum_{n\geq 1}x_n$ este divergentă.*

OBSERVAŢIE. *Dacă $l=1$ nu se poate spune nimic despre convergenţa seriei $\sum_{n\geq 1}x_n$ cu ajutorul acestui criteriu.*

Exemplu: Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}$ este convergentă.

Rezolvare: Reamintim că $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\dots\cdot(n-1)\cdot n$.
$x_n=\frac{1}{n!}$, deci $x_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$, unde, conform definiţiei de mai sus, $(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\dots\cdot n\cdot(n+1)$. Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,$$

de unde rezultă că $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}$ este serie convergentă.

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Arătaţi că seria $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2+2n}$ este convergentă şi calculaţi-i suma.

2. Folosind consecinţa criteriului necesar de convergenţă, arătaţi că următoarele serii sunt divergente:

   a) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(-2n^5+16n^4-5n+3\right)$;

   b) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{-n^2-n+12}{n^2+n-1}$;

   c) $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{2n^3-n^2}{5n^2+9n-11}$;

   d) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{7n^8+5n^6-4n^4-3n^2}{6n+15}$;

   e) $\sum\limits_{n\geq 5} 7^n$.

3. Folosind proprietăţile seriilor geometrice, stabiliţi convergenţa seriilor şi determinaţi suma seriilor convergente:

   a) $\sum\limits_{n\geq 0} \left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$;

   b) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{7^n}{2^n}$;

   c) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{4^n}{(-5)^n}$;

   d) $\sum\limits_{n\geq 3} \dfrac{4^{n+1}}{5^n}$;

   e) $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{2^{n-1}}{3^{n+1}}$;

   f) $\sum\limits_{n\geq 4} \dfrac{7^{n-2}}{6^n}$;

$g)$ $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{(-2)^{2n+1}}{5^n}+\frac{5^n}{6^{n+2}}\right)$.

4. Folosind criteriul lui Leibniz, arătaţi că următoarele serii sunt convergente:

   $a)$ $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+5}$;

   $b)$ $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n^4+2}$;

   $c)$ $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{2^n}$;

   $d)$ $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n(n+2)}{n}$;

   $e)$ $\sum_{n\geq 3}\frac{(-1)^{n+1}n}{-5^n}$.

5. Folosind consecinţa criteriului lui Cauchy, precizaţi care dintre următoarele serii sunt convergente:

   $a)$ $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^5}$;

   $b)$ $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

   $c)$ $\sum_{n\geq 2}\frac{4}{n^3}$;

   $d)$ $\sum_{n\geq 6}\sqrt{\frac{5}{2n}}$;

   $e)$ $\sum_{n\geq 1}\frac{-3}{\sqrt[3]{4n^4}}$.

6. Folosind criteriul comparaţiei, precizaţi care dintre următoarele serii sunt convergente:

   $a)$ $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+5}$;

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{3}{n^4+15}$;

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{6}{5n^3-8}$;

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 4}\frac{5}{2\sqrt{n-2}}$;

e) $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\frac{9}{\sqrt[3]{4n^2+5n-3}}$;

f) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{2n+1}{5n^4+3n^2}$.

7. Folosind criteriul radicalului, precizaţi care dintre următoarele serii sunt convergente:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2n^2-n+3}{3n+1}\right)^n$;

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\left(\frac{21n^2+6}{28n^2-7n+11}\right)^n$;

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 20}\left(\frac{n-16}{n^2-n+9}\right)^n$;

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 4}\left(\frac{3n+5}{2n+3}\right)^{4n+5}$;

e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{5n-10}{n^4+3n+1}\right)^{2n-1}$;

f) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\cos^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$.

8. Folosind criteriul raportului, precizaţi care dintre următoarele serii sunt convergente:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n}{(n+5)!}$;

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{4^n}{n^4}$;

c) $\sum_{n\geq 3} \frac{2n-5}{6^n}$;

d) $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{6^n}$;

e) $\sum_{n\geq 1} \frac{5^n}{(n-1)!}$.

2. Serii Taylor. Dezvoltări în serie

DEFINIŢIA 9. *Fie $(a_n)_n$ un şir de numere reale şi $n \in \mathbb{N}$. Se numeşte serie Taylor centrată în x_0 cu coeficienţii a_n seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} f_n$, unde $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. O serie Taylor centrată în 0 se numeşte serie de puteri.*

Exemplu: seria geometrică este o serie de puteri, adică o serie Taylor centrată în origine, deoarece avem $f_n(x) = x^n$, deci $x_0 = 0$, iar $a_n = 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Şirul sumelor parţiale $(S_n)_n$ se defineşte similar celui de la seriile numerice, adică

$$S_n = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \sum_{k=0}^{n} f_k,$$

iar suma seriei reprezintă limita când $n \to \infty$ a acestui şir, adică

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right).$$

Interesul nostru în cele ce urmează este să stabilim mulţimea de valori ale lui x pentru care este convergentă o serie Taylor. Iar apoi, pornind de la o funcţie care reprezintă suma unei serii Taylor, să putem scrie seria Taylor asociată ei. Această procedură se numeşte **dezvoltare în serie Taylor**, iar funcţia de la care pornim se numeşte **funcţie dezvoltabilă în serie Taylor**. De exemplu, gândindu-ne la suma seriei geometrice, putem spune că funcţia

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul originii, iar devoltarea ei în serie Taylor este

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Pentru a da însă în mod riguros definiţia unei funcţii dezvoltabile în serie Taylor, este nevoie ca mai întâi să introducem alte câteva noţiuni.

DEFINIŢIA 10. *Fie* $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. *Elementul* $x \in \mathbb{R}$ *se numeşte punct de acumulare pentru* $(x_n)_n$ *dacă şi numai dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *oricare ar fi* $k \in \mathbb{N}$, *există* $n_k \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$.

OBSERVAŢIE. *Definiţia anterioară ne spune că* $x \in \mathbb{R}$ *este punct de acumulare pentru* $(x_n)_n$ *dacă şi numai dacă există un subşir al lui* $(x_n)_n$ *care converge la* x.

Exemplu: Şirul cu termenul general $x_n = (-1)^n$ are două subşiruri, date de paritatea lui n:

$(x_{2m})_m$ cu $x_{2m} = (-1)^{2m} = 1 \to 1$ când $n \to \infty$;
$(x_{2m+1})_m$ cu $x_{2m+1} = (-1)^{2m+1} = -1 \to -1$ când $n \to \infty$.

Deducem aşadar că şirul $(x_n)_n$ are două puncte de acumulare: 1 şi -1.

DEFINIŢIA 11. *Fie* $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ *şi notăm cu* γ *mulţimea punctelor sale de acumulare. Atunci infimumul acestei mulţimi,* $\inf \gamma$, *se numeşte limita inferioară a lui* $(x_n)_n$, *în timp ce supremumul acestei mulţimi,* $\sup \gamma$ *se numeşte limita superioară a lui* $(x_n)_n$.

Notaţii:

$$\inf \gamma = \liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n;$$

$$\sup \gamma = \limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

Reamintim că infimumul unei mulţimi A reprezintă cel mai mare minorant al acestei mulţimi, unde α este minorant dacă şi numai dacă $\alpha \leq a$, $\forall a \in A$. Iar supremumul unei mulţimi A reprezintă cel mai mic majorant al acestei mulţimi, unde β este majorant dacă şi numai dacă $\beta \geq a$, $\forall a \in A$.

Exemple:

1. Dacă $A = (-1, 8)$, $\inf A = -1$ iar $\sup A = 8$.

2. Dacă şirul $(x_n)_n$ este definit astfel

$$(x_n)_n : 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3, \dots$$

atunci $\gamma = \{1, 2, 3\}$, iar $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

OBSERVAŢIE. *Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *atunci*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Revenind cu discuţia la seriile Taylor, introducem următoarea definiţie.

DEFINIŢIA 12. *Fie* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *o serie Taylor centrată în* x_0 *de coeficienţi* a_n, $n \in \mathbb{N}$. *Prin raza de convergenţă a acestei serii înţelegem* $r \geq 0$ *dat de*

$$r = \begin{cases} 0, & \textit{dacă } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \textit{dacă } 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ \infty, & \textit{dacă } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Exemplu: Raza de convergenţă a seriei geometrice $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ este $r = 1$, deoarece $a_n = 1$ implică, evident, că

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

La exerciţii ceva mai complicate, următoarea observaţie poate fi utilă.

OBSERVAŢIE. *Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *atunci*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Exemplu: Pentru seria $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$, este mai uşor să calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

şi, luând în consideraţie observaţia anterioară, obţinem că raza acestei serii este $r = \infty$.

TEOREMA 8. *Fie* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *o serie Taylor centrată în* x_0 *de coeficienţi* a_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, cu raza de convergenţă* $r \geq 0$*.*

(i) *Dacă* $r = 0$*, singurul punct în care seria* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *este convergentă este* $x = x_0$*.*

(ii) *Dacă* $r > 0$*, atunci:*

a) *seria* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *este convergentă pentru* $x \in (x_0 - r,\, x_0 + r)$ *şi divergentă pentru* $x \in (-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, \infty)$*.*

b) *suma seriei admite derivate de orice ordin pe intervalul* $(x_0 - r,\, x_0 + r)$ *şi aceste derivate se pot calcula prin derivarea termen cu termen a seriei iniţiale, iar raza de convergenţă a seriilor nu se schimbă după derivare. Mai exact, seria derivată*

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n(x - x_0)^n\right)' = \sum_{n\geq 0} (a_n(x - x_0)^n)' = \sum_{n\geq 0} na_n(x - x_0)^{n-1}$$

are raza de convergenţă tot r *şi suma* S'*.*

c) *seria poate fi integrată termen cu termen pe orice interval* $[a, b] \subset (x_0 - r,\, x_0 + r)$*.*

OBSERVAŢIE. *Teorema 8 furnizează informaţii referitoare la convergenţa seriei pentru orice* $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0 \pm r\}$*. Cazul în care* $x \in \{x_0 \pm r\}$ *se studiază separat.*

Exemplu: Dat fiind că raza de convergenţă a seriei geometrice este $r = 1$, deducem, conform acestui rezultat teoretic, că

$$\sum_{n\geq 0} x^n \text{ este convergentă pentru } x \in (-1, 1),$$

$$\text{şi divergentă pentru } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$$

ceea ce coincide cu ceea ce am aflat şi noi în secţiunea anterioară, atunci când am investigat convergenţa seriei geometrice. Pentru punctele $x = \pm 1$ se studiază convergenţa seriilor ce se obţin prin înlocuirea lui x cu aceste două valori, şi constatăm că seriile $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ şi $\sum_{n\geq 0} 1^n$ sunt divergente, deci $\sum_{n\geq 0} x^n$ este divergentă pentru $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

În plus, Teorema 8, ne furnizează şi alte informaţii, cum ar fi faptul că, prin derivare termen cu termen, obţinem că seria

$$\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)' = \sum_{n\geq 0} n x^{n-1}$$

este convergentă pe (-1,1) şi are suma

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

OBSERVAŢIE. *Teorema 8 furnizează informaţii referitoare la convergenţa seriei pentru orice* $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0 \pm r\}$*. Cazul în care* $x \in \{x_0 \pm r\}$ *s studiază separat.*

Per ansamblu, Teorema 8 ne arată cum, pornind de la coeficienţii a_n, $n \in \mathbb{N}$, şi de la punctul fixat $x_0 \in \mathbb{R}$, deducem proprietăţi referitoare la suma seriei. Suntem interesaţi de drumul invers care, pornind de la o funcţie ce reprezintă suma unei serii Taylor, ne arată cum ajungem la această serie Taylor.

DEFINIŢIA 13. *Fie* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un interval deschis şi* $f : I \to \mathbb{R}$*. Funcţia* f *se numeşte dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului* $x_0 \in I$*, dacă există un interval* $(x_0 - r,\, x_0 + r) \subset I$*, unde* $r > 0$*, şi o serie* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$ *convergentă pe* $(x_0 - r,\, x_0 + r)$ *astfel încât* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *pentru orice* $x \in (x_0 - r,\, x_0 + r)$*.*

În mod firesc, ne întrebăm când este f dezvoltabilă în serie Taylor în jurul unui punct şi cum am putea determina coeficienţii a_n, $n \in \mathbb{N}$. Un răspuns parţial este furnizat de teorema următoare.

TEOREMA 9. *Fie* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un interval deschis şi* $f : I \to \mathbb{R}$*. Dacă* f *este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului* $x_0 \in I$*, atunci* f *admite derivate de orice ordin în* x_0 *şi pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*,* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$*.*

OBSERVAŢIE. *O funcţie care admite derivate de orice ordin în* x_0 *se numeşte indefinit derivabilă în* x_0*.*

Reciproca Teoremei 9 nu este valabilă, în sensul că dacă f este indefinit derivabilă în x_0 nu înseamnă neapărat că f este dezvoltabilă în serie în jurul lui x_0. De fapt, rolul Teoremei 9 este să ne indice când f **nu** este dezvoltabilă în serie în jurul lui x_0, şi anume, atunci când nu admite derivate de orice ordin în x_0.

Aplicaţie: Fie $f : (6, 10) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 8|$. Arătaţi că f nu este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 8$.

Rezolvare: Arătăm că f nu este indefinit derivabilă în $x_0 = 8$. Ştim că f este continuă,

$$f(x) = \begin{cases} x - 8, & \text{dacă } x \geq 8, \\ -x + 8 & \text{dacă } x \leq 8, \end{cases} \quad \text{şi} \quad f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 8, \\ -1 & \text{dacă } x < 8. \end{cases}$$

Cum $\lim\limits_{x \to 8;\, x > 8} f'(x) \neq \lim\limits_{x \to 8;\, x < 8} f'(x)$ rezultă că f nu este derivabilă în $x_0 = 8$. În concluzie f nu este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 8$.

Teorema 10. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis, $x_0 \in I$ un punct fixat şi $f : I \to \mathbb{R}$ indefinit derivabilă pe un interval deschis V care îl conţine pe x_0. Dacă există $M > 0$ astfel încât oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi oricare ar fi $x \in V$ să avem $|f^{(n)}(x)| \leq M$, atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0. Mai exact, pentru orice $x \in V$,*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots . \end{aligned}$$

Observaţie. *Dacă există, dezvoltarea în serie Taylor a unei funcţii este unică, dat fiind că această funcţie reprezintă suma seriei respective (deci folosim unicitatea limitei).*

Aplicaţie: Să se arate că funcţia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, este dezvoltabilă în serie de puteri pe $\mathbb{R}$ şi să se determine seria corespunzătoare.

Rezolvare: Trebuie să arătăm că f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul originii. Derivând obţinem

$$f'(x) = \cos x$$

$f''(x) = -\sin x$
$f^{(3)}(x) = -\cos x$
$f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$

.

.

.

Observăm că derivatele se repetă din 4 în 4, f este indefinit derivabilă şi $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Conform Teoremei 10, f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 0$ şi avem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(n)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Am obţinut aşadar că

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots.$$

OBSERVAŢIE. *Ţinând cont de definiţia sumei unei serii, Teorema 10 ne dă următoarea formulă:*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right).$$

Exemplu: Având în vedere dezvoltarea anterioară a funcţiei sin în serie de puteri, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sin x.$$

OBSERVAŢIE. *Uneori Teorema 10 nu se poate aplica. În această situaţie, ştiind că dezvoltarea în serie Taylor a unei funcţii este unică, încercăm să facem o legătură prin derivare sau integrare (nedefinită) între această funcţie şi suma unei serii Taylor cunoscute, apoi aplicăm Teorema 8b) sau Teorema 8c), după caz.*

Exemplu: Arătaţi că $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 - x)$, este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul originii şi scrieţi seria corespunzătoare.

Rezolvare: Observăm că f nu îndeplineşte ipotezele Teoremei 10 privind mărginirea derivatelor de orice ordin pe un interval deschis V care conţine originea. Prin urmare, în locul Teoremei 10 folosim faptul că

$$\ln(1 - x) = -\int \frac{1}{1 - x}\, dx.$$

Dat fiind că

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n \geq 0} x^n, \quad \text{când } x \in (-1, 1),$$

folosim Teorema 8c). Astfel, integrând termen cu termen seria geometrică $\sum\limits_{n \geq 0} x^n$, $x \in (-1, 1)$, deducem că f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul originii şi are dezvoltarea

$$\ln(1 - x) = -\sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n + 1}.$$

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Studiaţi convergenţa seriilor Taylor:
   a) $\sum\limits_{n \geq 0} (x - 2)^n$;
   b) $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$;
   c) $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n$;
   d) $\sum\limits_{n \geq 0} n!(x - 4)^n$;
   e) $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{3^n}{n!} x^n$.

2. Arătaţi că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$, este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul originii şi scrieţi seria corespunzătoare. Faceţi apoi legătura între aceasta şi dezvoltarea în serie Taylor centrată în origine a funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sin x$ folosind Teorema 8.

3. Arătaţi că $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^3}$, este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul originii şi scrieţi seria corespunzătoare. *(Indiciu: Se foloseşte faptul că* $\dfrac{1}{(1-x)^3}=\left(\dfrac{1}{2(1-x)^2}\right)'$*.)*

4. *a*) Arătaţi că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$, este dezvoltabilă în serie de puteri şi scrieţi seria corespunzătoare. Folosind această dezvoltare arătaţi că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

   b) Scrieţi dezvoltarea în serie Taylor în jurul punctului $x_0=1$ a funcţiei f.

CAPITOLUL 3

Limite de funcţii. Continuitate

Definiţia 14. *Spunem că* $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^N$ *este o bilă deschisă centrată în* x_0 *şi de rază* r *dacă*

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^N | \quad d(x, x_0) < r\}.$$

De asemenea,

$$\overline{B(x_0, r)} = \{x \in \mathbb{R}^N | \quad d(x, x_0) \leq r\}$$

se numeşte bilă închisă centrată în x_0 *şi de rază* r.

Reamintim definiţia distanţei Euclidiene:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2},$$

unde x, $y \in \mathbb{R}^N$, $x = (x_1, x_2, \ldots x_N)$, $y = (y_1, y_2, \ldots y_N)$.

Exemplu: dacă $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = (1, -2, 5)$, $y = (-2, -1, 3)$, norma diferenţei lor este

$$\|x - y\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$

Exemple de bile deschise:

1. În $\mathbb{R}$, bilele deschise centrate în x_0 sunt intervale deschise centrate în x_0, adică intervale de forma
$$(x_0 - r,\ x_0 + r).$$
2. În $\mathbb{R}^2$, bilele deschise centrate în x_0 sunt reprezentate de suprafaţa din interiorul cercurilor centrate în x_0, $\mathcal{C}(x_0, r)$ (sunt discuri de cerc fără frontieră, adică fără cercul propriu-zis).
3. În $\mathbb{R}^3$, bilele deschise centrate în x_0 sunt reprezentate de interiorul sferelor centrate în x_0, $\mathcal{S}(x_0, r)$.

Definiţia 15. *Fie* $x_0 \in \mathbb{R}^N$. *Spunem că* $V \subseteq \mathbb{R}^N$ *este o vecinătate a lui* x_0 *şi notăm* $V \in \mathcal{V}(x_0)$ *sau* $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ *dacă există* $B(x_0, r)$, *o bilă deschisă centrată în* x_0, *astfel încât* $B(x_0, r) \subseteq V$.

Exemplu: O vecinătate a punctului $x_0 = (3, 7) \in \mathbb{R}^2$ este suprafaţa dreptunghiulară $(1, 5) \times (6, 8)$.

În particular, orice bilă deschisă centrată în x_0 este o vecinătate a lui x_0, deci $B(x_0, r) \in \mathcal{V}(x_0)$.

Definiţia 16. *Spunem că $a \in \mathbb{R}^N$ este punct de acumulare pentru o mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^N$ dacă şi numai dacă în orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ există $x \in A$ astfel încât $a \neq x$ (cu alte cuvinte $A \cap (V \setminus \{a\}) \neq \emptyset$). Mulţimea tuturor punctelor de acumulare a unei mulţimi A se notează A' şi mai este numită şi mulţime derivată a lui A.*

Exemplu: $A = [1, 3) \cup \{4, 5, 9\} \Rightarrow A' = [1, 3]$.

Reamintim acum definiţia limitei unei funcţii definite pe axa reală, $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definiţia 17. *Spunem că $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limita $l \in \mathbb{R}$ în punctul $a \in A'$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in A$ cu $|x - a| < \delta$ avem*

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

Cu alte cuvinte, când x se apropie de a, valoarea lui f în x se apropie de l.

Trecem acum la definiţia generală, cea referitoare la orice funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$. Deoarece trecerea de la functiile de pe axa reală, studiate în liceu, la această clasă de funcţii poate părea puţin inconfortabilă la început, pentru studenţii din anul I, dăm câteva exemple de funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$.

Exemple:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $f(x) = (x + 1,\ 3x^2 - 2,\ \cos x,\ 4^{x-1})$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 7x^4y - 5xy + 10y^2 + 1$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = \left(\dfrac{x + yz}{y^2 + 2},\ e^{x+2y-z}\right)$.

Definiţia 18. *Spunem că $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ are limita $l \in \mathbb{R}^p$ în punctul $a \in A'$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$ avem*

$$\|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

Evident, aşa cum am mai explicat, definiţia de mai sus poate fi formulată şi cu ajutorul noţiunii de distanţă, dat fiind că $d(x, y) = \|x - y\|$.

TEOREMA 11. *Dacă există, limita este unică.*

De asemenea, este bine de menţionat că o funcţie care ia valori în $\mathbb{R}^p$ se numeşte funcţie vectorială şi este de forma

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)),$$

iar funcţiile $f_1,\ f_2, \dots, f_p : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ reprezintă componentele sale cu valori reale.

OBSERVAŢIE. *Limita poate fi privită pe componente, adică definiţia anterioară poate fi reformulată, ţinând cont de faptul că* $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ *şi* $l = (l_1, l_2, \dots, l_p)$, *după cum urmează.*

DEFINIŢIA 19. *Spunem că* $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ *are limita* $l \in \mathbb{R}^p$ *în punctul* $a \in A'$ *dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât oricare ar fi* $x \in A$ *cu* $|x_i - a_i| < \delta$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ *avem*

$$|f_j(x) - l_j| < \varepsilon \quad \textit{pentru orice } j \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

Exemple:

1. $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x},\ x^2 + 3\right) \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x},\ \lim_{x\to 0}(x^2 + 3)\right) = (1, 3).$$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x^2 + 2,\ xy - 3, 2x^3 + y^2) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(-1,2)} f(x, y) \\
&\quad = \left(\lim_{(x,y)\to(-1,2)}(x^2 + 2),\ \lim_{(x,y)\to(-1,2)}(xy - 3),\ \lim_{(x,y)\to(-1,2)}(2x^3 + y^2)\right) \\
&\quad = (3, -5, 2).
\end{aligned}$$

TEOREMA 12. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *dacă şi numai dacă oricare ar fi* $(x_n)_n \subset A$ *astfel încât* $x_n \to a$ *când* $n \to \infty$, *avem*

$$f(x_n) \to l \quad \textit{când } n \to \infty.$$

CONSECINŢA 3. *Dacă există* $(x_n)_n$, $(y_n)_n \subseteq A$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, *dar* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$, *atunci nu există* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Exerciţiu: Fie $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \quad x^2 + y^2 - z = 0\} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x, y, z) = \dfrac{2xy - z}{x^2 + y^2 - z}$. Stabiliţi dacă există $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$.

Rezolvare: Alegem

$$(x_n, y_n, z_n) = (0, \frac{1}{n}, 0) \to (0, 0, 0)$$

şi

$$(x'_n, y'_n, z'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0, 0, 0).$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) = 0,$$

dar

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n, z'_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n}} = 1,$$

ceea ce înseamnă că

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n, z_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n, z'_n)$$

şi conform Consecinţei 3, deducem că nu există $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$.

Definiţia 20. *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$. Spunem că f are limită în $a \in A'$ după direcţia $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ dacă există $\lim\limits_{t\to 0} f(a + tv)$.*

Observaţie. *Prin $0 \in \mathbb{R}^N$ întelegem elementul $(0, 0, \ldots, 0)$. În general, pentru simplificarea scrierii, nu facem diferenţă de notaţie între un scalar $x \in \mathbb{R}$ şi un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ deoarece considerăm că se subînţelege din context (de exemplu, în definiţia anterioară, 0 nu putea fi scalar deoarece avem $0 \in \mathbb{R}^N$.*

Proprietatea 6. *Dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, atunci f are limită în $a \in A'$ după orice direcţie $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ şi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{t\to 0} f(a + tv)$.*

Reciproc nu: se poate ca o funcţie să aibă limită în a după orice direcţie $v \neq 0$, dar să nu aibă limită în a.

Exemplu: În exerciţiul anterior, nu există $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$. Arătăm acum că f are limită în 0 după orice direcţie $v \neq 0$. Fie $v = (v_1, v_2, v_3) \in$

$\mathbb{R}^3$ arbitrar ales.

$$\lim_{t\to 0} f(0+tv) = \lim_{t\to 0} f(tv_1, tv_2, tv_3) = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2v_1v_2 - tv_3}{t^2v_1^2 + t^2v_2^2 - tv_3} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2tv_1v_2 - v_3}{tv_1^2 + tv_2^2 - v_3} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } v_3 \neq 0, \\ \dfrac{2v_1v_2}{v_1^2 + v_2^2} & \text{dacă } v_3 = 0. \end{cases}$$

Trecem acum la noţiunea de continuitate.

Definiţia 21. *Spunem că $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ este continuă în $a \in A \cap A'$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Dacă f nu este continuă în a, atunci spunem că f este discontinuă în a. Dacă f este continuă în orice $a \in A$, atunci spunem că f este continuă pe A.*

Teorema 13. *Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ este continuă în $a \in A \cap A'$ dacă şi numai dacă toate componentele ei f_i, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, sunt continue în a.*

Exerciţiu: Studiaţi continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dată de $f(x,y) = (f_1(x,y),\, f_2(x,y))$, unde

$$f_1(x,y) = x^5 - 6x^3y^2 + 12y - 6;$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

în punctul $(0,0)$.

Rezolvare: Funcţia f_1 este continuă în $(0,0)$ deoarece

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 6 = f_1(0,0).$$

De asemenea, $f_2(0,0) = 0$, iar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0$$

deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$ şi funcţia sin este mărginită. De aici rezultă că şi f_2 este continuă în $(0,0)$, ceea ce conduce la concluzia că f este continuă în $(0,0)$.

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Fie $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 \neq 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + 3y^2}$.
   a) Calculaţi limita funcţiei f în punctul $(-2, 2)$.
   b) Stabiliţi dacă există limita funcţiei f în punctul $(-2, 2)$ după orice direcţie $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; dacă există, calculaţi-o.
   c) Arătaţi că nu există limita funcţiei f în punctul $(0, 0)$.
   d) Determinaţi limita funcţiei f în punctul $(0, 0)$ după direcţia vectorului v, unde:
      (i) $v = (-3, 5)$;
      (i) $v = (0, 2)$;
      (iii) $v = (4, 1)$.

2. Fie $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, xy - x \neq 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{xy - y - x + 1}{xy - x}$.
   a) Calculaţi limita funcţiei f în punctul $(2, 1)$.
   b) Stabiliţi dacă există limita funcţiei f în punctul $(2, 1)$ după orice direcţie $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; dacă există, calculaţi-o.
   c) Arătaţi că nu există limita funcţiei f în punctul $(0, 1)$.
   d) Determinaţi limita funcţiei f în punctul $(0, 1)$ după direcţia vectorului $v = (3, 2)$.

3. Fie $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^3 + yz^2 \neq 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 y - 4z}{x^3 + yz^2}$.
   a) Calculaţi limita funcţiei f în punctul $(1, 1, -2)$.
   b) Calculaţi limita funcţiei f în punctul $(1, 1, -2)$ după direcţia vectorului $v = (0, 1, 3)$.
   c) Stabiliţi dacă există limita funcţiei f în punctul $(0, 0, 0)$.
   d) Determinaţi limita funcţiei f în punctul $(0, 0, 0)$ după direcţia vectorului $v = (2, 4, 1)$.

4. Fie funcţiile $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x - 2y \neq 0\} \to \mathbb{R}^3$,
$$f(x, y) = \left(x^2 y + 6,\ \frac{x^2 - 4y^2}{x - 2y},\ 3xy\right)$$
şi $g : (\mathbb{R}^\star)^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
$$g(x, y, z) = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} + 2,\ x + y + 4z,\ \frac{xy + 7y^2}{3y}\right).$$

Calculaţi limita funcţiei f în punctul $(4, 2)$ şi limita funcţiei g în punctul $(0, 0, 3)$.

5. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dată de $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z),\ f_2(x, y, z))$, unde

$$f_1(x, y, z) = |3y - 5|;$$

$$f_2(x, y, z) = \begin{cases} xy - (1 - z)\sin\dfrac{1}{1 - z} & \text{dacă } z \neq 1, \\ xy - 1 & \text{dacă } z = 1. \end{cases}$$

Studiaţi continuitatea funcţiei f în punctul $(1, 0, 1)$.

6. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dată de $f(x) = (f_1(x),\ f_2(x))$, unde

$$f_1(x) = \begin{cases} 5x - 3 & \text{dacă } x \leq 1, \\ -2x + 4 & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{dacă } x < 4, \\ 2x & \text{dacă } x \geq 4. \end{cases}$$

Studiaţi continuitatea funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

CAPITOLUL 4

DIFERENŢIABILITATE

Diferenţiabilitatea funcţiilor poate fi privită ca o generalizare a noţiunii de derivabilitate care a fost studiată în liceu şi rămâne în strânsă legătură cu aceasta. De aceea amintim în cele ce urmează cele mai importante formule ale derivatelor precum şi regulile de bază care apar în calculul derivatelor.

Derivate ale unor funcţii elementare

1. $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$. Consecinţe: $(const.)' = 0$, $x' = 1$;
2. $(a^x)' = a^x \ln a$. Consecinţă: $(e^x)' = e^x$;
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. Consecinţă: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
4. $(\sin x)' = \cos x$;
5. $(\cos x)' = -\sin x$;
6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
7. $(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$;
8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
9. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$;
11. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{x^2+1}$.

Câteva reguli de derivare

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$;
2. $(cf)' = cf'$, unde $c \in \mathbb{R}$;
3. $(fg)' = f'g + fg'$;
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$;
5. $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$.

Exemple:

1.
$$\begin{aligned}
&\left(-4x^{50} + 27x^3 - 16x^2 + 3x - 68\right)' \\
&\qquad = \left(-4x^{50}\right)' + \left(27x^3\right)' - \left(16x^2\right)' + (3x)' - (68)' \\
&\qquad = -4\left(x^{50}\right)' + 27\left(x^3\right)' - 16\left(x^2\right)' + 3x' \\
&\qquad = -200x^{49} + 81x^2 - 32x + 3;
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
&\left((6x^2 + x - 9)\cos x\right)' \\
&\qquad = \left(6x^2 + x - 9\right)' \cos x + (6x^2 + x - 9)\,(\cos x)' \\
&\qquad = (12x + 1)\cos x + (6x^2 + x - 9)(-\sin x);
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
\left(\frac{\log_5 x}{\operatorname{arctg} x}\right)' &= \frac{(\log_5 x)' \operatorname{arctg} x - \log_5 x\,(\operatorname{arctg} x)'}{\operatorname{arctg}^2 x} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x \ln 5} - \dfrac{\log_5 x}{1 + x^2}}{\operatorname{arctg}^2 x};
\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}
(\arccos\,(4^x))' &= \frac{-1}{\sqrt{1 - (4^x)^2}}\,(4^x)' \\
&= \frac{-4^x \ln 4}{\sqrt{1 - 4^{2x}}}.
\end{aligned}$$

Pentru a uşura procesul de însuşire a noţiunii de diferenţiabilitate, în funcţie de tipul funcţiilor studiate, vom trata, pe rând, următoarele cazuri:

1. cazul funcţiilor reale de variabilă reală, adică funcţii de tipul $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Exemplu: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^2 - 6$.
2. cazul funcţiilor vectoriale de variabilă reală, adică funcţii de tipul $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$.
   Exemplu: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (5x^2 - 6,\ 2x + 8,\ e^x)$.
3. cazul funcţiilor reale de variabilă vectorială, adică funcţii de tipul $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.
   Exemplu: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{x+y}$.
4. cazul funcţiilor vectoriale de variabilă vectorială, adică funcţii de tipul $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$.
   Exemplu: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,
   $$f(x, y, z) = (xyz,\ x^2 - 6z,\ \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 2),\ 2y + 4).$$

Înainte de a începe această discuţie introducem câteva definiţii utile.

DEFINIŢIA 22. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Punctul $x_0 \in A$ este punct interior al mulţimii A dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât $V \subseteq A$.*

DEFINIŢIA 23. *Mulţimea A se numeşte mulţime deschisă dacă este formată numai din puncte interioare. Complementara unei mulţimi deschise se numeşte mulţime închisă.*

OBSERVAŢIE. *O mulţime închisă poate fi gândită ca reuniunea dintre o mulţime deschisă A cu frontiera sa şi se notează prin $\bar{A}$.*

Exemple:

1. Toate bilele deschise sunt mulţimi deschise (a se vedea Definiţia 14 precum şi exemplele corespunzătoare).
2. Orice interval (a, b) este o mulţime deschisă. De asemenea, reuniunea, intersecţia şi produsul cartezian a două intervale deschise (sau a oricăror mulţimi deschise) reprezintă o mulţime deschisă. În acelaşi timp, un interval de forma $[a, b)$ nu este o mulţime deschisă deoarece punctul a nu este punct interior al acestui interval. Nici intervalele de forma $(a, b]$ sau $[a, b]$ nu sunt mulţimi

deschise, din motive similare. Mai mult, $[a, b]$ este o mulţime închisă deoarece $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$.

DEFINIŢIA 24. *Fie V si W două spaţii vectoriale peste $\mathbb{R}$. Se numeşte aplicaţie liniară o funcţie $f : V \to W$ având următoarele proprietăţi:*

1. *f este aditivă, adică $f(x+y) = f(x)+f(y)$, oricare ar fi x, $y \in V$;*
2. *f este omogenă, adică $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $x \in V$.*

OBSERVAŢIE. *O aplicaţie liniară mai este numită şi morfism de spaţii vectoriale.*

PROPRIETATEA 7. *Fie V si W două spaţii vectoriale peste $\mathbb{R}$. Funcţia $f : V \to W$ este aplicaţie liniară dacă şi numai dacă*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

oricare ar fi α, $\beta \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi x, $y \in V$.

Aceste noţiuni intervin în definiţia diferenţiabilităţii.

1. Diferenţiabilitatea funcţiilor de variabilă reală

1.1. Funcţii reale de variabilă reală.

DEFINIŢIA 25. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $x_0 \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Funcţia f se numeşte diferenţiabilă în punctul x_0 dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0.$$

Dacă f este diferenţiabilă în $x_0 \in A$, aplicaţia liniară L_{x_0} se numeşte diferenţiala funcţiei f în punctul x_0 şi se notează df_{x_0}. Funcţia f se numeşte diferenţiabilă pe A dacă este diferenţiabilă în fiecare punct $x \in A$, iar funcţia $df : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dată de

$$df(x) = df_x,$$

se numeşte diferenţiala funcţiei f pe A, unde mulţimea $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ reprezintă mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$.

TEOREMA 14. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $x_0 \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Atunci f este diferenţiabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă f este derivabilă în x_0, iar*

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h,$$

oricare ar fi $h \in \mathbb{R}$.

Exemplu: Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Funcţia f este derivabilă, $f'(x) = \cos x$, deci conform teoremei anterioare f este diferenţiabilă şi diferenţiala sa este dată de $df_x(h) = h \cos x$.

OBSERVAŢIE. *Teorema 14 poate fi privită şi invers, adică dacă f este diferenţiabilă în punctul x_0, atunci f este derivabilă în x_0, iar*

$$f'(x_0) = df_{x_0}(1).$$

Reamintim din liceu că o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu poate fi derivabilă în $x_0 \in A$ dacă nu este continuă în $x_0 \in A$.

1.2. Funcţii vectoriale de variabilă reală.

DEFINIŢIA 26. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $x_0 \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}^N$. Funcţia f se numeşte diferenţiabilă în punctul x_0 dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ astfel încât*

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)\|}{|h|} = 0.$$

Dacă f este diferenţiabilă în $x_0 \in A$, aplicaţia liniară L_{x_0} se numeşte diferenţiala funcţiei f în punctul x_0 şi se notează df_{x_0}.

Reamintim definiţia normei Euclidiene pentru $x = (x_1, x_2, \dots x_N) \in \mathbb{R}^N$:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}.$$

La fel ca în capitolele precedente, este mai simplu să lucrăm pe componente, atunci când avem de-a face cu cantităţi vectoriale din $\mathbb{R}^N$.

TEOREMA 15. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $x_0 \in A$ şi funcţia $f : A \to \mathbb{R}^N$, deci f este de forma $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$, cu componentele $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Funcţia f este diferenţiabilă în x_0 dacă şi numai dacă toate componentele sale $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, sunt* *diferenţiabile în x_0, iar diferenţiala funcţiei f în punctul x_0 este dată de formula*

$$\begin{aligned} df_{x_0}(h) &= (h \cdot f_1'(x_0),\, h \cdot f_2'(x_0), \dots, h \cdot f_N'(x_0)) \\ &= h \cdot (f_1'(x_0),\, f_2'(x_0), \dots, f_N'(x_0)), \end{aligned}$$

unde $h \in \mathbb{R}$.

DEFINIŢIA 27. *Funcţia f se numeşte diferenţiabilă pe A dacă este diferenţiabilă în fiecare punct $x \in A$.*

Exerciţiu: Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}^4$, $f(x) = (4x - 16,\, x^2,\, \ln x,\, \operatorname{arctg} x)$. Arătaţi că f este diferenţiabilă pe $(0, \infty)$ şi determinaţi diferenţiala sa.

Rezolvare: Funcţia f este de forma $f = (f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$, cu componentele

$$f_1(x) = 4x - 16, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = \ln x, \quad f_4(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Cum fiecare componentă f_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, este derivabilă pe $(0, \infty)$, din Teorema 14 deducem că f_1, f_2, f_3 şi f_4 sunt diferenţiabile pe $(0, \infty)$. Aplicând acum Teorema 15 obţinem că f este diferenţiabilă pe $(0, \infty)$, iar diferenţiala sa este dată de

$$\begin{aligned} df_x(h) &= h \cdot (f_1'(x),\, f_2'(x),\, f_3'(x),\, f_4'(x)) \\ &= (4h,\, 2xh,\, \frac{h}{x},\, \frac{h}{x^2 + 1}), \end{aligned}$$

oricare ar fi $h \in \mathbb{R}$.

2. Diferenţiabilitatea funcţiilor de variabilă vectorială

Înainte de a începe discuţia propriu-zisă despre diferenţiabilitate, introducem definiţia produsului scalar Euclidian, împreună cu câteva proprietăţi, deoarece o vom folosi în interiorul acestei secţiuni (şi, în plus, aceasta este o noţiune matematică deosebit de importantă).

2.1. Produsul scalar Euclidian.

DEFINIŢIA 28. *Se numeşte produs scalar Euclidian aplicaţia pozitiv definită, biliniară şi simetrică $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dată de*

$$\langle x,\, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdot + x_N y_N,$$

unde $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$.

OBSERVAŢIE. *O altă notaţie pentru produsul scalar, la fel de des utilizată, este* $x \cdot y$*, deci*

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdot + x_N y_N.$$

Noi vom utiliza ambele notaţii în cele ce urmează deoarece este important să familiarizăm cititorul cu ambele variante.

Exemplu: Fie $x = (1, 2, -5)$ şi $y = (-3, 2, -1)$. Produsul scalar al vectorilor x şi y este

$$\langle x,\, y\rangle = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + (-5) \cdot (-1) = -3 + 4 + 5 = 6$$

(sau, utilizând cealaltă notaţie, putem scrie $x \cdot y = -3 + 4 + 5 = 6$).

OBSERVAŢIE. $\langle x,\, x\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2 = \|x\|^2$. *Mai mult, deoarece în loc de* $\langle x,\, x\rangle$ *putem scrie* $x \cdot x$*, uneori în loc de* $\|x\|^2$ *scriem* x^2.

PROPRIETATEA 8. $\langle x,\, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\,\widehat{(x, y)}$.

Aplicaţie: Cosinusul unghiului făcut de vectorii $x = (2, 4, 0)$ şi $y = (3, -3, 8)$ este

$$\cos\,\widehat{(x, y)} = \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{6 - 12 + 0}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{82}} = -\frac{3}{\sqrt{410}}.$$

CONSECINŢA 4. *Doi vectori* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *sunt ortogonali (şi notăm* $x \perp y$*) dacă şi numai dacă* $\langle x,\, y\rangle = 0$ *(adică unghiul făcut de aceşti doi vectori este* $\frac{\pi}{2}$.

Exemplu: Fie $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = (1, 3)$, $y = (6, -2)$. Atunci $\langle x,\, y\rangle = 6 - 6 = 0$, deci $x \perp y$.

2.2. Funcţii reale de variabilă vectorială. Derivate parţiale.

DEFINIŢIA 29. *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}^N$ *o mulţime deschisă,* $x_0 \in A$ *şi* $f : A \to \mathbb{R}$. *Funcţia* f *se numeşte diferenţiabilă în punctul* x_0 *dacă există o aplicaţie liniară* $L_{x_0} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Dacă f *este diferenţiabilă în* $x_0 \in A$*, aplicaţia liniară* L_{x_0} *se numeşte diferenţiala funcţiei* f *în punctul* x_0 *şi se notează* df_{x_0}.

Reamintim că definiţia normei Euclidiene pentru $h \in \mathbb{R}^N$, unde $h = (h_1, h_2, \dots h_N)$, este $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_N^2}$.

Acum că avem definiţia diferenţiabilităţii unei funcţii reale de variabilă vectorială se pune întrebarea: oare cum putem face legătura cu derivabilitatea? Pentru aceasta introducem o nouă definiţie.

DEFINIŢIA 30. *Se numeşte derivată parţială a funcţiei $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ în raport cu variabila x_i în punctul $a \in A$, următoarea limită:*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_N) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N)}{t}.$$

Notaţii: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_{x_i} f(a)$, $f_{x_i}(a)$.

De fapt, pentru a afla $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, derivăm f în raport cu x_i în mod obişnuit (adică rămân valabile formulele cunoscute ale derivatelor funcţiilor elementare) în timp ce celelalte componente x_j, $j \neq i$, sunt privite ca şi cum ar fi constante.

Exemple:

1. Dacă $f(x, y) = x^9 \sin y$, atunci derivatele sale parţiale sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 9x^8 \sin y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^9 \cos y.$$

2. Dacă $g(x, y, z) = xy^2z^3 - 4y^5z^2 + 7z$, atunci derivatele sale parţiale sunt:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = y^2z^3,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = 2xyz^3 - 20y^4z^2,$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 3xy^2z^2 - 8y^5z + 7.$$

OBSERVAŢIE. *Rolul derivatei de la funcţiile de variabilă reală este jucat aici, unde funcţia f are variabilă vectorială, de vectorul care are drept componente derivatele parţiale ale lui f. Acest vector se numeşte*

gradientul *funcţiei f şi scriem*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}\right).$$

O altă notaţie pentru gradient este $\operatorname{grad} f$.

Exemple: Luând în considerare funcţiile f şi g din exemplele anterioare, avem:

1. $(\nabla f)(x, y) = (9x^8 \sin y,\ x^9 \cos y)$,
2. $(\nabla g)(x, y, z) = (y^2 z^3,\ 2xyz^3 - 20y^4 z^2,\ 3xy^2 z^2 - 8y^5 z + 7)$

TEOREMA 16. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în punctul a. Atunci,*

$$\begin{aligned} df_a(h) &= (\nabla f)(a) \cdot h \quad (= \textit{produsul scalar Euclidian } \langle (\nabla f)(a),\, h \rangle) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) h_N, \end{aligned}$$

oricare ar fi $h = (h_1, h_2, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N$.

Aplicaţie: Determinaţi diferenţiala funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, date de formula $f(x, y, z) = e^{3xy^4 - z^3}$, în punctul $(2, 1, -1)$.

Rezolvare: Reamintim din liceu, de la funcţiile reale de variabilă reală, următoarea formulă a derivatei unei funcţii compuse:

$$\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)} \cdot (u(x))'.$$

Avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= e^{3xy^4 - z^3} \frac{\partial}{\partial x}(3xy^4 - z^3) = 3y^4 e^{3xy^4 - z^3}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= e^{3xy^4 - z^3} \frac{\partial}{\partial y}(3xy^4 - z^3) = 12xy^3 e^{3xy^4 - z^3}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= e^{3xy^4 - z^3} \frac{\partial}{\partial z}(3xy^4 - z^3) = -3z^2 e^{3xy^4 - z^3}. \end{aligned}$$

În consecinţă,

$$(\nabla f)(x, y, z) = \left(3y^4 e^{3xy^4 - z^3},\ 12xy^3 e^{3xy^4 - z^3},\ -3z^2 e^{3xy^4 - z^3}\right),$$

iar

$$(\nabla f)(2, 1, -1) = \left(3e^7, 24e^7, -3e^7\right) = e^7\,(3, 24, -3)\,,$$

deci

$$df_{(2,1,-1)}(h) = e^7\,(3h_1 + 24h_2 - 3h_3) \quad \text{oricare ar fi } h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Observăm că în aplicaţia anterioară am derivat parţial o funcţie compusă. Formulele generale pentru derivatele parţiale ale unei funcţii $f \circ u$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sunt:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x}(x,y,z) = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z),$$
$$\frac{\partial f(u)}{\partial y}(x,y,z) = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z),$$
$$\frac{\partial f(u)}{\partial z}(x,y,z) = f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z).$$

Bineînţeles, se procedează similar atunci când avem de-a face cu funcţii u de două variabile, etc.

Exemplu: Pentru $f : \mathbb{R}^2 \to (0,\pi)$, $f(x,y) = \operatorname{arcctg}(2x^5 - 3x^3y^2)$, ne gândim la formula $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{x^2+1}$ şi la cele spuse mai sus, observând ca avem de-a face cu o funcţie de forma $\operatorname{arcctg} u$, unde $u(x,y) = 2x^5 - 3x^3y^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-1}{u^2+1}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{-10x^4 + 9x^2y^2}{(2x^5 - 3x^3y^2)^2 + 1},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{u^2+1}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{6x^3y}{(2x^5 - 3x^3y^2)^2 + 1}.$$

De asemenea, când avem de calculat derivatele parţiale ale produsului sau raportului a două funcţii, utilizăm formulele (adaptându-le la numărul de variabile corespunzător):

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x}; \quad \frac{\partial (fg)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}g + f\frac{\partial g}{\partial y};$$

respectiv,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}g - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}g - f\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}.$$

DEFINIŢIA 31. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$. Spunem că f este derivabilă parţial pe A dacă există derivatele parţiale ale lui f în raport cu toate variabilele sale în orice punct din A. Dacă, în plus, toate derivatele parţiale sunt continue, atunci spunem că f este de clasă C^1 pe A şi notăm $f \in C^1(A)$.*

TEOREMA 17. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^1(A)$, atunci f este diferenţiabilă pe A (adică f este diferenţiabilă în orice punct $a \in A$).*

2.3. Funcţii vectoriale de variabilă vectorială.

DEFINIŢIA 32. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o mulţime deschisă, $x_0 \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}^p$ ($p \geq 2$). Funcţia f se numeşte diferenţiabilă în punctul x_0 dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ astfel încât*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0.$$

Dacă f este diferenţiabilă în $x_0 \in A$, aplicaţia liniară L_{x_0} se numeşte diferenţiala funcţiei f în punctul x_0 şi se notează df_{x_0}.

OBSERVAŢIE. *În definiţia anterioară, $\|\cdot\|$ reprezintă norma Euclidiană din $\mathbb{R}^N$.*

Privind funcţia f pe componente avem

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, f_p(x_1, x_2, \ldots, x_N)),$$

cu $f_i : A \to \mathbb{R}$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

TEOREMA 18. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, $x_0 \in A$ şi funcţia $f : A \to \mathbb{R}^p$. Funcţia f este diferenţiabilă în x_0 dacă şi numai dacă toate componentele sale $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, sunt diferenţiabile în x_0.*

DEFINIŢIA 33. *Funcţia f se numeşte diferenţiabilă pe A dacă este diferenţiabilă în fiecare punct $x \in A$.*

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o mulţime deschisă, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}^p$ ($p \geq 2$), $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$. Dacă fiecare componentă f_i, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, este derivabilă parţial în a în raport cu fiecare variabilă x_i, atunci putem păstra toate aceste derivate parţiale într-o matrice.

DEFINIŢIA 34. *Matricea*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_N}(a) \\ . & . & & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & & . \\ \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}$$

se numeşte matrice Jacobi (sau matrice Jacobiană) asociată funcţiei f în punctul $a \in A$. Dacă această matrice este pătratică (adică $N = p$), atunci determinantul său se numeşte Jacobianul funcţiei f sau determinantul funcţional asociat lui f şi se notează

$$\det J_f(a) = |J_f(a)| = \frac{D(f_1,\, f_2,\, \dots, f_N)}{D(x_1,\, x_2,\, \dots, x_N)}(a).$$

TEOREMA 19. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}^p$ o funcţie diferenţiabilă în punctul a. Atunci*

$$df_a(h) = J_f(a)\, h,$$

oricare ar fi $h = (h_1, h_2, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N$.

Exerciţiu: Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x^2+xy,\ xyz,\ z^2x^3 - \operatorname{arctg}(yz))$.

a) Determinaţi diferenţiala funcţiei f.

b) Calculaţi Jacobianul lui f în punctul $(-1, 0, 1)$.

Rezolvare:

a) Componentele lui f sunt funcţiile $f_1,\ f_2,\ f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x, y, z) = x^2 + xy, \quad f_2(x, y, z) = xyz, \quad f_3(x, y, z) = z^2x^3 - \operatorname{arctg}(yz).$$

Calculăm derivatele parţiale ale acestor funcţii.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = 2x + y; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = x; \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = 0;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = yz; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = xz; \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = xy;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2z^2; \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{z}{1+y^2z^2};$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = 2zx^3 - \frac{y}{1+y^2z^2}.$$

Ţinând cont de Teorema 19, calculăm

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x+y & x & 0 \\ yz & xz & xy \\ 3x^2z^2 & -\frac{z}{1+y^2z^2} & 2zx^3 - \frac{y}{1+y^2z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2x+y)h_1 + xh_2 \\ yzh_1 + xzh_2 + xyh_3 \\ 3x^2z^2h_1 - \frac{zh_2}{1+y^2z^2} + 2zx^3h_3 - \frac{yh_3}{1+y^2z^2} \end{pmatrix}.$$

De aici deducem că
$df_{(x,y,z)}(h) =$

$$\left((2x+y)h_1 + xh_2, yzh_1 + xzh_2 + xyh_3, 3x^2z^2h_1 - \frac{zh_2 + yh_3}{1+y^2z^2} + 2zx^3h_3\right).$$

b)

$$|J_f(-1,0,1)| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(-1,0,1) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(-1,0,1) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(-1,0,1) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(-1,0,1) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(-1,0,1) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(-1,0,1) \\ \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x}(-1,0,1) & \dfrac{\partial f_3}{\partial y}(-1,0,1) & \dfrac{\partial f_3}{\partial z}(-1,0,1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \\ 0 & -1 & 0 \\ \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2.$$

Foarte strâns legate de derivatele parţiale sunt următoarele noţiuni care apar adesea în aplicaţiile specifice profilului ingineresc.

2.4. Divergenţă. Rotor. Derivata după o direcţie dată.

DEFINIŢIA 35. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă si $f : A \to \mathbb{R}^N$ o funcţie de clasă C^1 pe A. Atunci*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f(a) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) + \cdots + \frac{\partial f_N}{\partial x_N}(a). \end{aligned}$$

se numeşte divergenţa lui f în punctul $a \in A$.

Exemplu: Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (5x^2 - 3y,\ 2x^4y^{10})$. Prin urmare $f_1(x,y) = 5x^2 - 3y$, $f_2(x,y) = 2x^4y^{10}$ şi

$$\operatorname{div} f(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 10x + 20x^4y^9.$$

Observaţie. *Ţinând cont şi de noţiunea de gradient pe care am introdus-o în acest capitol, putem introduce o nouă noţiune, şi anume, operatorul Laplace asociat lui* $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *(A fiind mulţime deschisă)*

$$\begin{aligned}\Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f)\\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).\end{aligned}$$

Remarcăm aici prezenţa derivatelor parţiale de ordin superior (am presupus că putem deriva parţial încă o dată derivatele parţiale) care vor fi introduse ceva mai târziu, motiv pentru care deocamdată nu insistăm asupra acestei noţiuni.

Trecem acum la o altă noţiune importantă.

Definiţia 36. *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *o mulţime deschisă,* $a \in A$ *şi* $f : A \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^1(A)$. *Atunci*

$$\operatorname{rot}_a f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(a), \frac{\partial f_1}{\partial z}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(a)\right)$$

se numeşte rotorul lui f *în punctul* a.

Această definiţie se reţine mai uşor dacă se merge pe următoarea scriere formală a rotorului:

$$\operatorname{rot} f = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k},$$

unde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ reprezintă versorii corespunzători axelor de coordonate Ox, Oy, respectiv Oz ale unui sistem cartezian de coordonate din $\mathbb{R}^3$, prin urmare $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$. Reamintim că prin versor înţelegem un vector de lungime 1, adică un vector a cărui normă este 1.

Exerciţiu: Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (4x^2z,\, x+2y-z^3,\, \cos(3x^2-2z))$. Determinaţi $\operatorname{rot}_{(x,y,z)} f$ apoi calculaţi $\operatorname{rot}_{(0,4,3)} f$.

DEFINIŢIA 37. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, $a = (a_1, \ldots, a_N) \in A$, $f : A \to \mathbb{R}^3$ şi $v = (v_1, \ldots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ un versor dat. Funcţia f se numeţe derivabilă în a după direcţia v dacă*

$$(\exists) \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}.$$

Dacă există, această limită se numeşte derivata lui f după direcţia v în punctul a şi se notează $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$.

TEOREMA 20. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, $a = (a_1, \ldots, a_N) \in A$, $f : A \to \mathbb{R}^N$ şi $v = (v_1, \ldots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ un versor dat. Dacă f este diferenţiabilă în a, atunci*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v) = \nabla f(a) \cdot v.$$

Reamintim că $\nabla f(a)$ reprezintă gradientul lui f în a şi are expresia

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a)\right).$$

Exerciţiu: Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 5y^3 \ln(x^2+3y^4+1)$. Determinaţi derivata lui f în $(2, 1)$ după direcţia versorului $(-1, 0)$.

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Fie vectorii $u = (1, 2, -4)$, $v = (2, -3, 5)$ şi $w = (-2, -1, 0)$. Determinaţi $\|u\|$, $d(v, w)$, $\langle u, v\rangle$, $v \cdot w$, $\cos \widehat{(u, v)}$, v^2, w^2, $\cos \widehat{(w, v)}$.
2. Determinaţi:
   a) $(3x^8 - 4x^5 + 2x^2 - x + 9)'$;
   b) $(5x^{10} - 7x^8 + 12x^4 - x^2 + 9x - 3)'$;
   c) $(-x^6 + 7x^4 + x + 14x - \text{arcctg}\,'x)'$;
   d) $(x^7 \cdot \log_3 x)'$;
   e) $\left(\dfrac{x^3 - 4x + 1}{\sin x}\right)'$;
   f) $(\text{tg}\,(5x - 3))'$;
   g) $(\ln(3x^3 + 73x + 5))'$.
3. Determinaţi diferenţiala funcţiei f, unde:
   a) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x + 8$;
   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 9^x + x^9 + 9x + 9$;
   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (\sin x, \text{ctg}\, x, e^x + 4)$;
   d) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\cos(\ln x), x^4 + 3x)$;
   e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3x^4 + 7x^3y^2 - 2xy^4$;
   f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3z^4 + x \cos z + y^8 \text{arctg}\, x$;
   g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x^2 + 2yz,\ zy^3 - 2,\ 4x^2y - 5x^3y)$.
   În plus, calculaţi Jacobianul funcţiei f în punctul $(0, 1, 2)$.
4. Fie funcţiile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{7x-y^4}$ şi $g : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x + y, 3x^2 \ln y)$. Determinaţi $\nabla f(1, -1)$ şi $\text{div}\, g(5, 1)$.
5. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (e^z,\ 3xy^6+2yz,\ 4x^3y^2z)$. Determinaţi $\text{rot}_{(x,y,z)} f$. Cât este $\text{rot}_{(-2,1,0)} f$?

6. Stabiliţi care dintre următorii vectori este versor:

   a) în $\mathbb{R}^2$: $u = (1,2)$, $v = (0,-1)$, $w = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

   b) în $\mathbb{R}^3$: $u = (0,0,1)$, $v = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, $w = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

7. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \cos(xy^2 - 3xz^4)$. Determinaţi derivata lui f în $(0,5,1)$ după direcţia versorului $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

8. Fie f, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3y^2 7^x$, $g(x,y) = 4xy^3$. Determinaţi $\nabla(fg)$ şi $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right)$.

3. Derivate parţiale de ordinul 2. Aplicaţii

DEFINIŢIA 38. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Spunem că f este de două ori derivabilă parţial în a dacă şi numai dacă fiecare derivată parţială a lui f în a, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$,..., $\dfrac{\partial f}{\partial x_N}(a)$, este derivabilă parţial în raport cu toate variabilele. Derivata parţială a unei derivate parţiale se numeşte derivată parţială de ordinul 2 şi avem notaţia*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} & \text{dacă } i \neq j, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} & \text{dacă } i = j. \end{cases}$$

În acest context, derivatele parţiale ale lui f sunt numite derivate parţiale de ordinul întâi. Dacă derivatele parţiale de ordinul întâi ale unei funcţii reale de variabilă vectorială erau păstrate într-un vector care se numeţe gradient, derivatele parţiale de ordinul doi sunt păstrate într-o matrice, după cum urmează.

DEFINIŢIA 39. *Matricea*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(a) & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(a) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)(a) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(a) & \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(a) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(a) & \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(a) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)(a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(a) \end{pmatrix}$$

se numeşte matrice Hessiană asociată funcţiei f în punctul $a \in A$.

DEFINIŢIA 40. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă f este de de două ori derivabilă parţial în fiecare punct din A, spunem că f este de două ori derivabilă parţial pe A. Dacă f este de două ori derivabilă parţial pe A şi derivatele parţiale de ordinul 2 sunt continue, atunci spunem că f este de clasă C^2 pe A şi notăm $f \in C^2(A)$.*

TEOREMA 21. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^2(A)$, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, oricare ar fi $i, j \in \{1, \dots, N\}$.*

TEOREMA 22. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^2(A)$, atunci matricea Hessiană H_f este simetrică, adică $H_f =$*

$(H_f)^t$. *În plus, pentru a face legătura cu ceea ce se studiază de obicei la cursul de algebră de către studenţii din anul I de la facultăţi cu profil tehnic,* $H_f(a)$ *(cu* $a \in A$*) determină o formă pătratică* $\varphi_a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\varphi_a(h) = \sum\limits_{i,j=1}^{N} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$.

Exerciţiu: Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2+3xy+7y^2z^3$. Determinaţi Hessiana funcţiei f în punctul $(4, -1, 1)$.

OBSERVAŢIE. $\operatorname{Tr} H_f = \Delta f$, *unde prin* $\operatorname{Tr} H_f$ *înţelegem urma matricei* H_f, *adică suma elementelor de pe diagonala principală.*

3.1. Puncte de extrem local.

DEFINIŢIA 41. *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}^N$ *o mulţime deschisă şi* $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$. *Spunem că* a *este punct de extrem local al funcţiei* f *dacă există vecinătate* V *a lui* a *astfel încât* $f(x) - f(a)$ *să aibă semn constant pe* V. *Mai exact, dacă* $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in V$, *atunci* a *este punct de maxim local al funcţiei* f. *Iar dacă* $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in V$, *atunci* a *este punct de minim local al funcţiei* f.

OBSERVAŢIE. *Dacă* $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in A$, *atunci* a *este punct de maxim global al funcţiei* f. *Dacă* $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in A$, *atunci* a *este punct de minim global al funcţiei* f.

DEFINIŢIA 42. *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}^N$ *o mulţime deschisă şi* $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$. *Spunem că* a *este punct critic (sau staţionar) al lui* f *dacă şi numai dacă* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, *oricare ar fi* $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Exerciţiu: Determinaţi punctele critice ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy - 2y$.

TEOREMA 23. *(Teorema lui Fermat)*
Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ *o mulţime deschisă şi* $a \in A$. *Dacă* $f : A \to \mathbb{R}$ *este derivabilă parţial în* a *şi* a *este punct de extrem local al lui* f, *atunci* a *este punct critic al lui* f.

Cu alte cuvinte, pentru funcţiile derivabile parţial pe A, punctele de extrem local se caută printre punctele critice.

DEFINIŢIA 43. *Spunem că o mulţime* $A \subseteq \mathbb{R}^N$ *este convexă dacă şi numai dacă oricare ar fi* $x, y \in A$, $tx+(1-t)y \in A$, *oricare ar fi* $t \in [0, 1]$ *(adică o dată cu capetele unui segment, conţine şi segmentul).*

DEFINIŢIA 44. *Fie o matrice pătratică $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,*

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Minorii

$$\Delta_1 = b_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \dots,\ \Delta_n = \det B.$$

se numesc minori principali ai matricei B.

TEOREMA 24. *(Teorema lui Sylvester)*
Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi convexă şi $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$. Fie $a \in A$ un punct critic al lui f şi $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ minorii principali ai lui $H_f(a)$.

a) *Dacă $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_N > 0$, atunci a este punct de minim local pentru f.*
b) *Dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^N \Delta_N > 0$, atunci a este punct de maxim local pentru f.*

Dacă nu ne aflăm în niciuna dintre situaţiile descrise de Teorema lui Sylvester, apelăm la definiţia punctelor de extrem local sau la una dintre proprietăţile.

PROPRIETATEA 9. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$ şi $a \in A$ un punct critic al lui f.*
Dacă $H_f(a)$ are toate valorile proprii strict pozitive, atunci a este punct de minim local.
Dacă $H_f(a)$ are toate valorile proprii strict negative, atunci a este punct de maxim local.

Deosebit de utile sunt următoarele două proprietăţi care vizează cazurile 2-dimensional şi 3-dimensional, în aceleaşi ipoteze ca mai sus.

(i) Pentru $N = 2$, dacă $\Delta_2 < 0$, atunci a este punct de şa al lui f, nu punct de extrem.

(ii) Pentru $N = 3$, dacă Δ_3 şi $\operatorname{Tr} H_f(a)$ au semne diferite, atunci a este punct de şa al lui f, nu punct de extrem.

Algoritm de determinare a punctelor de extrem local

Sintetizând, pentru a stabili dacă o funcţie admite puncte de extrem local, parcurgem următoarele etape:

I determinăm punctele critice (dacă f nu admite puncte critice, nu admite nici puncte de extrem local);

II calculăm Hessiana şi aflăm valoarea Hessianei în fiecare punct critic găsit;

III pentru fiecare punct critic aplicăm Teorema 24 (Teorema lui Sylvester), definiţia, sau una dintre proprietăţie de mai sus, pentru a determina dacă este punct de extrem local.

Aplicaţie: Stabiliţi dacă următoarele funcţii admit puncte de extrem local.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy - 2y$;

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y \cos x$. Determinaţi Hessiana funcţiei f.
2.
2. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy^3 - 5xyz^2$. Determinaţi Hessiana funcţiei f în punctul $(3, 2, -2)$ şi Laplaceanul funcţiei f în punctul $(-1, -2, 1)$
3. Stabiliţi dacă următoarele funcţii admit puncte de extrem local.
   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = -x^3 - 3y^2 + 6x$;
   b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

CAPITOLUL 5

Integrabilitate

1. Integrale Riemann pe dreapta reală. Integrale improprii

Considerăm cunoscute din liceu definiţia şi principalele proprietăţi ale integralelor Riemann de pe dreapta reală, astfel că în cele ce urmează vom face doar o foarte scurtă recapitulare a anumitor proprietăţi şi definiţii. În plus, vom aminti două tipuri de aplicaţii în viaţa reală ale acestor integrale şi vom introduce o nouă noţiune – aceea de integrale improprii.

Definiţia 45. *Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : J \to \mathbb{R}$. Spunem că f admite primitivă pe J dacă există $F : J \to \mathbb{R}$ derivabilă pe J astfel încât $F' = f$. În acest caz spunem că F este primitiva funcţiei f.*

Observaţie. *Dacă f admite o primitivă F, atunci ea admite o infinitiate de primitive de forma $F + c$, unde c reprezintă o constantă reală.*

Reamintim din liceu următoarele formule.

Primitive ale unor funcţii elementare

1. $\displaystyle\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}$, aricare ar fi $\alpha \neq -1$.
   Consecinţă: $\displaystyle\int dx = x + \mathcal{C}$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + \mathcal{C}$.
3. $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}$. Consecinţă: $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + \mathcal{C}$.
4. $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + \mathcal{C}$.
5. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + \mathcal{C}$.

6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}.$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}.$
8. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + \mathcal{C}.$
9. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + \mathcal{C}.$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathcal{C}.$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + \mathcal{C}.$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \mathcal{C}.$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + \mathcal{C}.$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + \mathcal{C}.$

TEOREMA 25. *(Formula Leibniz-Newton)*
Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă care admite primitive. Atunci oricare ar fi F o primitivă a lui f pe $[a,b]$, avem

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Exemple:

1. $\displaystyle\int_0^2 \left(3^x + 3x^3\right)\, dx = \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^2 + \frac{3x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{3^2}{\ln 3} - \frac{3^0}{\ln 3} + \frac{3\cdot 2^4}{4} - \frac{3\cdot 0^4}{4} =$
$\displaystyle= \frac{8}{\ln 3} + 12.$
2. $\displaystyle\int_{-1}^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\, dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+5}\right)\Big|_{-1}^4 = \ln\left(4 + \sqrt{21}\right) - \ln\left(-1 + \sqrt{6}\right) =$
$\displaystyle= \ln\left(\frac{4+\sqrt{21}}{-1+\sqrt{6}}\right).$

Aplicaţii ale integralelor Riemann pe dreapta reală

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a, b]$. Atunci:

1. aria domeniului $D \subset \mathbb{R}^2$ mărginit de graficul funcţiei f, axa Ox, şi dreptele de ecuaţii $x = a$ şi $x = b$, este dată de formula
$$\mathcal{A}(D) = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$
Exemplu: Dacă $f(x) = x$, atunci, calculând aria subgraficului funcţiei f mărginite de axa Ox şi de dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = c > 0$, regăsim formula ariei unui triunghi dreptunghic isoscel cu catetele de lungime c:
$$\mathcal{A}_{\triangle} = \int_0^c |x|\, dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^c = \frac{c^2}{2}.$$
2. volumul corpului $D \subset \mathbb{R}^3$ obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox este dat de formula
$$\mathcal{V}(D) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$
Exemplu: Dacă $f; [0, h] \to \mathbb{R}$, $f(x) = r > 0$, atunci, calculând volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox, regăsim formula volumului unui cilindru circular drept de rază r şi înălţime h:
$$\mathcal{V}_{\text{cilindru}} = \pi \int_0^h r^2\, dx = \pi r^2 x\bigg|_0^h = \pi r^2 h.$$

Revenind cu discuţia la calculul integralelor Riemann, trebuie spus că, spre deosebire de ceea ce s-a învăţat în liceu, aici vom întâlni şi situaţii în care intervalul de integrare este nemărginit.

Definiţia 46. *Integralele pentru care intervalul de integrare este nemărginit se numesc integrale improprii în raport cu intervalul (sau integrale improprii de speţa a întâi).*

Aceste integrale se rezolvă în mod obişnuit doar că atunci când unul dintre capetele intervalului este nemărginit vom calcula limita în capătul respectiv. Dacă această limită nu există sau nu este finită, funcţia nu este integrabilă pe intervalul respectiv.

Ne putem întâlni cu unul dintre următoarele cazuri.

1. $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty;\,b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$

Exemple:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^2 5x^4\,dx = \lim_{a\to-\infty} x^5\Big|_a^2 = 2^5 - \lim_{a\to-\infty} a^5 = +\infty$. Prin urmare funcţia f dată de expresia $f(x) = 5x^4$ nu este integrabilă pe intervalul $(-\infty, 2)$. (Spunem că integrala sa este divergentă pe acest interval.)
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} =$ $= \dfrac{\pi}{4}$. Prin urmare funcţia f dată de expresia $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ este integrabilă pe intervalul $(1,\infty)$. (Spunem că integrala sa este convergentă pe acest interval.)

De asemenea, ne putem întâlni şi cu situaţia în care integrandul (adică funcţia ce se doreşte a fi integrată) este nemărginit pe intervalul de integrare.

Definiţia 47. *Integralele pentru care integrandul este nemărginit pe intervalul de integrare se numesc integrale improprii în raport cu funcţia (sau integrale improprii de speţa a doua).*

De această dată vom utiliza limitele laterale. Ne putem întâlni cu unul dintre următoarele cazuri.

1. Dacă f nu este definită în a, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a;\,t>a}\int_t^b f(x)\,dx.$
2. Dacă f nu este definită în b, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b;\,t<b}\int_a^t f(x)\,dx.$

Exemplu: $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to0;\,t>0} \ln|x|\Big|_t^4 = \ln 4 - \lim_{t\to0;\,t>0}\ln t = 4 + \infty =$ $= +\infty$. Aşadar această integrală este divergentă.

Dacă se întâmplă ca într-un interval să apară mai multe puncte din acestea în care funcţia nu este definită, vom ajunge la unul dintre cele două cazuri expuse mai sus folosind proprietatea de aditivitate a integralei:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

unde $c \in [a, b]$.

Să recapitulăm acum câteva dintre tehnicile de calcul al integralelor.

Teorema 26. *(Formula de integrare prin părţi)*
Fie f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile cu derivate integrabile. Atunci

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Aplicaţii: Calculaţi:

1. $\displaystyle\int_1^2 xe^x\,dx;$
2. $\displaystyle\int_1^3 \ln x\,dx;$
3. $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{6}}^0 x^2\cos x\,dx.$

Teorema 27. *(Prima formulă de schimbare de variabilă)*
Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta]$. Atunci

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt.$$

Aplicaţii: Calculaţi:

1. $\displaystyle\int_{-3}^2 e^{3x}\,dx;$
2. $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x^2+1)\,dx;$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+3}.$

4. $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2}\, dx.$

Trecem acum la integrarea funcţiilor raţionale.

DEFINIŢIA 48. *Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval. O funcţie $f : J \to \mathbb{R}$ se numeşte raţională dacă şi numai dacă există P, $Q \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, oricare ar fi $x \in J$.*

Un rol special este jucat de funcţiile raţionale simple, încadrate în următoarele trei categorii:

a) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, unde $a_k \in \mathbb{R}$, oricare ar fi k, $n \in \mathbb{N}$. Avem $\displaystyle\int_b^c f(x)\, dx = \left(a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_b^c$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}$, unde $n \in \mathbb{N}^\star$, $a \in \mathbb{R}$. Avem de tratat două situaţii.
Dacă $n \geq 2$, $\displaystyle\int_b^c f(x)\, dx = \int_b^c (x-a)^{-n}(x-a)'\, dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}\Bigg|_b^c$.
Dacă $n = 1$, $\displaystyle\int_b^c f(x)\, dx = \ln|x-a|\Bigg|_b^c$.

c) $f(x) = \dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, unde $n \in \mathbb{N}^\star$, A, B, p, $q \in \mathbb{R}$, iar $p^2 - 4q < 0$. Pentru calculul integralelor din acest tip de funcţii se utilizează forma canonică a ecuaţiei de gradul II, adică faptul că $x^2 + px + q = (x + p/2)^2 - \Delta/4$.

Celelalte funcţii raţionale pot fi descompuse în funcţii raţionale simple. Vom arăta cum poate fi descompusă în funcţii raţionale simple o funcţie de forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ în care $\text{grad}(P(x)) < \text{grad}(Q(x))$. Cazul în care $\text{grad}(P(x)) \geq \text{grad}(Q(x))$ se reduce la cazul anterior aplicând teorema împărţirii cu rest:

$$\text{dacă } P(x) : Q(x) = L(x) \text{ rest } R(x),$$

atunci

$$P(x) = Q(x) \cdot L(x) + R(x),$$

deci

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

cu $\text{grad}(R(x)) < \text{grad}(Q(x))$.

TEOREMA 28. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$, o funcţie raţională, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, cu grad$(P(x)) <$ grad$(Q(x))$. Dacă descompunerea lui Q în factori ireductibili peste $\mathbb{R}[X]$ este*

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l},$$

unde n_i, p_j, $q_j \in \mathbb{R}$, cu $i \in \{1,\dots,k\}$, $j \in \{1,\dots,l\}$, atunci

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{A_i^1}{x-a_i} + \frac{A_i^2}{(x-a_i)^2} + \dots + \frac{A_i^{n_i}}{(x-a_i)^{n_i}}\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{B_j^1x + C_j^1}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{B_j^2x + C_j^2}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \dots + \frac{B_j^{m_j}x + C_j^{m_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}}\right)$$

iar coeficienţii care apar la numărător se determină prin metoda identificării coeficienţilor de la polinoame egale.

Exemplu: $f(x) = \dfrac{x^4+4}{x(x-5)^3(x^2+x+1)^2} =$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{(x-5)^2} + \frac{D}{(x-5)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+x+1)^2}.$$

Aplicaţii: Calculaţi:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{4}{x^3+4x^2+4x}\,dx;$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+3)(x+1)}\,dx.$

Încheiem recapitularea metodelor studiate în liceu cu a doua schimbare de variabilă.

Teorema 29. *(A doua schimbare de variabilă)*
Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continuă şi* $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$, *bijectivă, derivabilă şi cu derivata nenulă. Atunci*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Trebuie precizat că nu există o regulă general valabilă de alegere a funcţiei φ. Cu toate acestea, anumite cazuri sunt standard, şi prezentăm două astfel de cazuri.

1. $\displaystyle\int_b^c R(a^x)\,dx$, unde R este o funcţie raţională.

   Metodă de rezolvare: Se efectuează schimbarea de variabilă $a^x = t$, de unde se obţine că $x = \log_a t = \varphi(t)$.

2. $\displaystyle\int_b^c R(\sqrt[k_1]{x}, \sqrt[k_2]{x}, \ldots, \sqrt[k_n]{x})\,dx$, unde R este o funcţie raţională.

   Metodă de rezolvare: Se calculează cel mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor, $m = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$, şi apoi se efectuează schimbarea de variabilă $\sqrt[m]{x} = t$, de unde se obţine că $x = t^m = \varphi(t)$.

Aplicaţii: Calculaţi:

1. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{5 - 6e^x}$;
2. $\displaystyle\int_0^{16} \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}}\,dx$.

2. Integrale simple cu parametru

Definiţia 49. *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}$ *şi* $f : A \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie cu proprietatea că, pentru fiecare* $x \in A$, *funcţia* $t \longrightarrow f(x,t)$ *este integrabilă pe* $[a,b]$. *Funcţia* $F : A \to \mathbb{R}$ *definită prin* $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ *se numeşte integrală cu parametru (parametrul fiind* x*).*

Teorema 30. *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}$ *un interval şi* $f : A \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* $A \times [a,b]$. *Atunci funcţia* $F : A \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$, *este continuă pe* A.

TEOREMA 31. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : A \times [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $A \times [a, b]$ şi admite derivată parţială în raport cu x care este continuă pe $A \times [a, b]$, atunci funcţia $F : A \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$, este derivabilă pe A şi derivata sa este dată de*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt,$$

această derivată fiind şi continuă pe A.

Algoritm de calculare a integralelor cu parametru

Pentru a calcula $\int_a^b f(x, t)\, dt$ parcurgem următoarele etape:

- I notăm $F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$ şi arătăm că f este continuă pe $A \times [a, b]$;
- II calculăm $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ si arătăm că este continuă pe $A \times [a, b]$;
- III calculăm $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt$;
- IV determinăm primitivele lui F', găsind funcţia F după condiţiile impuse de problemă.

TEOREMA 32. *(Teorema lui Fubini)*
Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : A \times [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $A \times [a, b]$. Atunci funcţia $F : A \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$, este integrabilă pe orice interval compact $[\alpha, \beta] \subset A$ şi avem

$$\int_\alpha^\beta F(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, t)\, dx \right) dt.$$

De fapt, Teorema lui Fubini ne spune că

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x, t)\, dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, t)\, dx \right) dt,$$

adică, dacă f este continuă, se poate inversa ordinea în care integrăm.

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Calculaţi primitivele:

   a) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2+5} + \cos x \right) dx;$

   b) $\displaystyle\int \left(x^{-3} + \frac{1}{3-x^2} \right) dx;$

   c) $\displaystyle\int \left(\frac{8}{\sqrt{7-x^2}} + 14x^{-1} \right) dx;$

   d) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2x^2-3} + 4\operatorname{ctg} x \right) dx;$

   e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{6x^2-8}}\, dx.$

2. Calculaţi următoarele integrale improprii şi specificaţi dacă sunt convergente:

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \left(-2x^2 + 5x - 3 \right) dx;$

   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{-7}{4x^2+2}\, dx;$

   c) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^8 - 3x^5 + x - 11}{x}\, dx;$

   d) $\displaystyle\int_{5}^{6} \frac{1}{x-6}\, dx;$

3. Calculaţi

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (3x+16)\, e^x\, dx;$

   b) $\displaystyle\int_{-3}^{0} x \sin x\, dx;$

   c) $\displaystyle\int_{1}^{e} x\ln^2 x\, dx;$

   d) $\displaystyle\int_{0}^{3} e^{10x} \cos x\, dx;$

$e)$ $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{2x-3}\,dx;$

$f)$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{16}} \sin(8x)\,dx;$

$g)$ $\displaystyle\int_{-1}^2 x^2 5^{x^3-4}\,dx;$

$h)$ $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{(5x-9)^3}\,dx;$

$i)$ $\displaystyle\int_3^6 \frac{x+3}{x^2+6x-3}\,dx;$

$j)$ $\displaystyle\int_3^6 \frac{dx}{x^2+6x-3};$

$k)$ $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2+x+2}.$

4. Calculaţi

$a)$ $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x+2}{(x-1)^3}\,dx;$

$b)$ $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+5}{(x+1)^7}\,dx;$

$c)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}\,dx;$

$d)$ $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+x};$

$e)$ $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^3+5x}\,dx;$

$f)$ $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{(2x^2+7)(x-1)}\,dx.$

5. Calculaţi

$a)$ $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx;$

b) $\displaystyle\int_{16}^{81} \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1}\, dx;$

c) $\displaystyle\int_{0}^{9} \frac{x+1}{\sqrt{x}+1}\, dx;$

d) $\displaystyle\int_{7}^{26} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$

e) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{5^x}{5^x+5}\, dx;$

f) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{1+e^{3x}};$

g) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{3-2e^{x}};$

h) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{3^{2x}}{4\cdot 3^x+2}\, dx.$

6. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x,t)\, dt$, unde $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, iar $f(x,t) = \ln\dfrac{(1+xt)(2-t)}{(1-xt)(2+t)}$.

3. Integrale multiple

În cele ce urmează ne ocupăm de calculul integralelor duble, pentru funcţii de două variabile, şi de integrale triple, pentru funcţii de trei variabile.

DEFINIŢIA 50. *Spunem că mulţimea $D \subset \mathbb{R}^N$ este conexă dacă nu există două mulţimi deschise disjuncte M_1, $M_2 \in \mathbb{R}^N$ astfel încât $D \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap D \neq \emptyset$ şi $M_2 \cap D \neq \emptyset$. O mulţime deschisă şi conexă se numeşte domeniu. Un domeniu închis şi mărginit se numeşte domeniu compact.*

Fie $D \subset \mathbb{R}^N$ un domeniu compact. Principalele proprietăţi care erau valabile în cazul integralelor simple rămân valabile pentru integralele multiple.

PROPRIETATEA 10. *Dacă f este continuă pe D, atunci f este integrabilă pe D.*

Proprietatea 11. *(Proprietatea de liniaritate)*
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ *şi* $f,\ g : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

(i) *Dacă* $N = 2$ *atunci*

$$\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

(ii) *Dacă* $N = 3$ *atunci*

$$\iiint\limits_D (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))\, dxdydz =$$

$$= \alpha \iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz + \beta \iiint\limits_D g(x,y,z)dxdydz.$$

Proprietatea 12. *(Proprietatea de aditivitate a domeniului)*
Fie $f : D = D_1 \cup D_2 \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

(i) *Dacă* $N = 2$ *atunci*

$$\iint\limits_{D=D_1\cup D_2} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, dxdy.$$

(ii) *Dacă* $N = 3$ *atunci*

$$\iiint\limits_{D=D_1\cup D_2} f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_{D_1} f(x,y,z)\, dxdydz + \iiint\limits_{D_2} f(x,y,z)\, dxdydz.$$

Proprietatea 13. *(Proprietatea de monotonie)*
Fie $f,\ g : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

(i) *Dacă* $N = 2$ *şi* $f(x,y) \le g(x,y)$ *oricare ar fi* $(x,y) \in D$, *atunci*

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)\, dxdy.$$

(ii) *Dacă* $N = 3$ *şi* $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ *oricare ar fi* $(x,y,z) \in D$, *atunci*

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\, dxdydz \le \iiint\limits_D g(x,y,z)\, dxdydz.$$

Proprietatea 14. *Fie* $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

(i) *Dacă* $N = 2$ *atunci*

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\, dxdy.$$

(ii) *Dacă* $N = 3$ *atunci*

$$\left| \iiint\limits_D f(x,y,z)\, dxdydz \right| \leq \iiint\limits_D |f(x,y,z)|\, dxdydz.$$

De asemenea, o observaţie importantă este aceea că

$$\iint\limits_D dxdy = \text{aria domeniului } D,$$

iar

$$\iiint\limits_D dxdydz = \text{volumul domeniului } D.$$

3.1. Calculul integralelor duble. Considerăm $D = [a,b] \times [c,d]$, deci D este un domeniu dreptunghiular şi $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Vom gândi ca la derivarea parţială, adică atunci când integrăm în raport cu x, îl tratăm pe y ca şi cum ar fi constantă, iar când integrăm în raport cu y, îl tratăm pe x ca şi cum ar fi constantă.

Exemplu: Fie $D = [-1,1] \times [0,2]$ şi $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3xy^2 - 2$. Atunci

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)dxdy &= \int_0^2 \left[\int_{-1}^1 \left(3xy^2-2\right)\,dx\right]dy\\ &= \int_0^2 \left(3y^2\int_{-1}^1 x\,dx - 2\int_{-1}^1 dx\right)dy\\ &= \int_0^2 \left(\frac{3x^2y^2}{2}\bigg|_{x=-1}^{x=1} - 2x\bigg|_{x=-1}^{x=1}\right)dy\\ &= \int_0^2 (-4)\,dy = -4y\bigg|_{y=0}^{y=2}\\ &= -8.\end{aligned}$$

Fie $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă. După cum am văzut din Teorema lui Fubini (Teorema 32), dacă f este continuă, atunci ordinea de integrare nu contează:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy.$$

Constatăm că are loc această proprietate pe exemplul anterior, în care funcţia $f(x,y)=3xy^2-2$ este continuă pe $D=[-1,1]\times[0,2]$:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^1\left[\int_0^2(3xy^2-2)\,dy\right]dx\\ &= \int_{-1}^1\left(xy^3-2y\right)\bigg|_{y=0}^{y=2}dx = \int_{-1}^1(8x-4)\;dx\\ &= -8.\end{aligned}$$

Dat fiind că la funcţii continue nu contează, ordinea de integrare se alege astfel încât calculul să fie mai uşor (numai când avem de-a face cu astfel de funcţii).

Ne referim acum la situaţia în care domeniul D nu este dreptunghic. În această situaţie recurgem la **schimbarea de variabilă**. Mai exact, facem trecerea de la (x,y) la (u,v) printr-o transformare punctuală T care duce (u,v) în (x,y):

$$\begin{cases} x = & x(u,v) \\ y = & y(u,v) \end{cases}$$

astfel încât $T(D^*) = D$, unde D^* reprezintă noul domeniu. Prin urmare vom avea

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv,$$

unde $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ reprezintă Jacobianul acestei transformări, adică,

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}.$$

Atragem atenţia asupra faptului că acest D folosit în notaţia asociată Jacobianului nu are nicio legătură cu domeniul D. De asemenea, să reţinem că în schimbarea de variabilă Jacobianul este în modul.

Constatăm că determinarea transformării T este vitală. Din nefericire, nu există nici aici o alegere universal valabilă pentru T, ci va trebui să ne orientăm după ecuaţiile care definesc frontiera domeniului D. O transformare uzuală este următoarea.

Transformarea în coordonate polare

După cum ştim, de multe ori, pentru a determina poziţia exactă a unui punct M situat în plan, fixăm un reper cartezian xOy şi folosim abscisa şi ordonata lui M, prin urmare avem $M(x,y)$. O altă modalitate de a stabili poziţia lui M în reperul cartezian xOy este folosind lungimea segmentului OM şi unghiul făcut de acesta cu axa Ox (în viaţa reală se ajunge deseori la o anumită destinaţie folosind o busolă şi măsurând distanţa parcursă). Aşadar, dacă notăm $OM = r$, şi notăm cu θ unghiul făcut de OM cu axa Ox, putem face legătura între (x,y) şi (r,θ) cu ajutorul funcţiilor trigonometrice:

$$\sin\theta = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}} = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}} = \frac{x}{r}.$$

În consecinţă, transformarea

$$\begin{cases} x = & x(r,\theta) \\ y = & y(r,\theta) \end{cases}$$

este dată în mod concret de ecuaţiile

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\sin\theta. \end{cases}$$

Jacobianul acestei transformări este

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Exemplu: Calculaţi $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, unde D reprezintă discul limitat de cercul $\mathcal{C}(A(1,2),2)$. Reamintim că ecuaţia unui cerc de centru $A(x_A,y_A)$ şi rază r, notat $\mathcal{C}(A(x_A,y_A),r)$, este

$$\mathcal{C}(A(x_A,y_A),r) : \, (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 = r^2.$$

De aceea, în cazul domeniului nostru avem

$$\mathcal{C}(A(1,2),2) : \, (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2^2.$$

Este clar că pentru a calcula această integrală este necesară trecerea la coordonate polare. Însă observăm că centrul cercului nu este situat în centrul sistemului cartezian de coordonate xOy, deci ese necesar să facem o translaţie, ceea ce implică trecerea la coordonate polare sub următoarea formă:

$$\begin{cases} x-1 = & r\cos\theta \\ y-2 = & r\sin\theta, \end{cases}$$

unde $r \in [0,2]$, $\theta \in [0,2\pi]$, deci $D^* = [0,2] \times [0,2\pi]$ (fără această transformare nu ne putem descurca cu D deoarece nu putem diviza integrala dublă în două integrale simple). Ajungem la

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left[(r\cos\theta+1)^2 + (r\sin\theta+2)^2 \right] r\,d\theta \right) dr$$

care se rezolvă în mod obişnuit deoarece noul domeniu de integrare D^* este un domeniu dreptunghiular.

De remarcat faptul că D poate fi un semidisc, caz în care, când trecem la coordonate polare, $\theta \in [0, \pi]$, sau $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \pi\right]$, etc. De asemenea, putem avea domenii care reprezintă un sfert de disc, 2/3 dintr-un disc etc.

3.2. Calculul integralelor triple. Integralele triple se tratează în mod similar celor duble. Considerăm $D = [a, b] \times [c, d] \times [\alpha, \beta]$, deci D este un domeniu paralelipipedic. Fie $f : [a, b] \times [c, d] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. La fel ca la integralele duble, vom folosi faptul că, dacă f este continuă, atunci nu contează ordinea de integrare.

Exemplu: Fie $D = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \times [0, 3] \times [1, e]$ şi $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \dfrac{y \cos x}{z}$. Calculaţi $\iiint\limits_D f(x, y, z) dxdydz$.

În situaţia în care domeniul D nu este paralelipipedic recurgem la **schimbarea de variabilă** făcând trecerea de la (x, y, z) la (u, v, w) printr-o transformare punctuală T care duce (u, v, w) în (x, y, z) prin

$$\begin{cases} x = & x(u, v, w) \\ y = & y(u, v, w) \\ z = & z(u, v, w) \end{cases}$$

astfel încât $T(D^*) = D$, unde D^* reprezintă noul domeniu. Vom avea

$$\iiint\limits_D f(x, y, z) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{D^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| dudvdw,$$

unde $\dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ reprezintă Jacobianul acestei transformări, adică,

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u, v, w) & \dfrac{\partial x}{\partial w}(u, v, w) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u, v, w) & \dfrac{\partial y}{\partial w}(u, v, w) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u, v, w) & \dfrac{\partial z}{\partial w}(u, v, w). \end{vmatrix}.$$

Din nou, nu există nici aici o alegere universal valabilă pentru T, astfel că ne orientăm după ecuaţiile care definesc frontiera domeniului D. O transformare uzuală este următoarea.

Transformarea în coordonate cilindrice

Dacă suntem în spaţiu, cu un reper cartezian $Oxyz$ fixat, un punct M este unic determinat de coordonatele sale (x,y,z), unde $x = \mathrm{pr}_{Ox}M$, $y = \mathrm{pr}_{Oy}M$, $z = \mathrm{pr}_{Oz}M$. O altă modalitate de a stabili poziţia lui M în reperul cartezian $Oxyz$ este folosind lungimea segmentului $OM' = r$, unde $OM' = \mathrm{pr}_{xOy}OM$, unghiul θ făcut de OM' cu axa Ox şi $z = \mathrm{pr}_{Oz}M$. Cu ajutorul funcţiilor trigonometrice, transformarea

$$\begin{cases} x = & x(r,\theta,z) \\ y = & y(r,\theta,z) \\ z = & z(r,\theta,z) \end{cases}$$

este dată în mod concret de ecuaţiile

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\sin\theta \\ z = & z. \end{cases}$$

Jacobianul acestei transformări este

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial x}{\partial z}(r,\theta,z) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial y}{\partial z}(r,\theta,z) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial z}{\partial z}(r,\theta,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Calculaţi $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, unde:

   a) $D = [0,6] \times [0,1]$ şi $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{xy}}{x+2}$;

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [-2,1], y \in [0,\pi]\}$ şi $f(x,y) = x\cos y - y^2 e^x$;

c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ şi $f(x,y) = \dfrac{y}{1+xy}$;

d) D reprezintă discul limitat de cercul $\mathcal{C}(A(2,-3),3)$ şi $f(x,y) = 3x - 8y$;

e) D reprezintă un sfertul de disc din cel de-al doilea cadran al cercului $\mathcal{C}(A(5,5),1)$ şi $f(x,y) = xy$.

2. Calculaţi $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$, unde:

a) $D = [-1,4] \times [-2,0] \times [1,3]$ şi $f(x,y,z) = 1$. Se poate determina valoarea acestei integrale fără a utiliza calculul integral?

b) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \in [1,2], y \in [0, 2\sqrt{2}], z \in [1,e]\}$ şi $f(x,y,z) = \dfrac{4^x}{z(2-y^2)}$;

c) D reprezintă discul cilindrul circular drept care are ca bază cercul $\mathcal{C}(A(-4,-1),3)$ şi generatoarea de lungime 2, iar $f(x,y,z) = x + y^2 + z^4$.

4. Integrala curbilinie de primul tip (de speţa întâi)

Definiţia 51. *Orice funcţie continuă $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, cu a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ se numeşte drum în $\mathbb{R}^N$, iar $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ reprezintă capetele drumului γ. Dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, atunci spunem că γ este drum închis.*

Dacă $\gamma = (f_1, f_2, \ldots, f_N)$, atunci egalităţile

$$\begin{cases} f_1(t) = & x_1 \\ f_2(t) = & x_2 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ f_N(t) = & x_N \end{cases}$$

se numesc ecuaţii parametrice ale drumului γ, iar

$$(\gamma) = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t))|\, t \in [a, b]\}$$

se numeşte imaginea drumului γ sau traiectoria drumului γ.

DEFINIŢIA 52. *Un drum $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ se numeşte neted dacă $\gamma \in C^1$ şi $\gamma'(t) \neq 0$, oricare ar fi $t \in [a, b]$.*

De exemplu, drumul $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ este un drum neted şi închis, de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} \cos t = & x \\ \sin t = & y \end{cases}$$

care are ca traiectorie cercul trigonometric $x^2+y^2 = 1$. De asemenea, dacă vom considera drumul $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r \cos t,\, r \sin t)$, atunci acesta are ca traiectorie cercul centrat în origine de rază r: $x^2 + y^2 = r^2$. Dacă vrem să gândim acest cerc în dimensiunea 3, avem $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (r \cos t,\, r \sin t,\, 0)$, deci ecuaţiile sale parametrice sunt

$$\begin{cases} \cos t = & x \\ \sin t = & y \\ 0 = & z. \end{cases}$$

DEFINIŢIA 53. *Două drumuri $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ şi $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^N$ se numesc echivalente dacă există $h : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ bijectivă, continuă, cu inversa continuă, astfel încât $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t))$, oricare ar fi $t \in [a, b]$.*

DEFINIŢIA 54. *Se numeşte curbă în $\mathbb{R}^N$ orice clasă de drumuri echivalente din $\mathbb{R}^N$. Dacă drumurile dintr-o curbă sunt netede, atunci curba se numeşte curbă netedă.*

PROPRIETATEA 15. *Toate drumurile care aparţin unei curbe netede au aceeaşi lungime, iar aceasta se numeşte lungimea curbei.*

În cele ce urmează, vom nota cu γ fie un drum, fie o curba generată de acesta.

DEFINIŢIA 55. *Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ o curbă netedă de ecuaţii*

$$\begin{cases} f(t) = & x \\ g(t) = & y \end{cases}$$

şi fie F o funcţie continuă (deci integrabilă) pe un domeniu ce conţine imaginea lui γ. Atunci integrala curbilinie de primul tip (sau de speţa *întâi) a lui F de-a lungul lui γ este dată de formula*

$$\int\limits_{\gamma} F(x,y)\,dl = \int_a^b F((f(t),g(t))\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt.$$

În mod similar, pentru o curbă netedă $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ dată de ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} f(t) = & x \\ g(t) = & y \\ h(t) = & z, \end{cases}$$

definim integrala curbilinie de primul tip (sau de speţa întâi) a lui F de-a lungul lui γ prin formula

$$\int\limits_{\gamma} F(x,y,z)\,dl = \int_a^b F((f(t),g(t),h(t))\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2+(h'(t))^2}\,dt.$$

De reţinut că atunci când calculăm o integrală curbilinie de primul tip nu contează sensul de parcurgere al lui γ. De asemenea, dacă γ este dat de o ecuaţie de tipul $y = \tilde{f}(x)$, putem nota $x = t$ pentru a obţine o parametrizare a curbei γ.

Aplicaţii ale integralei curbilinii de primul tip

1. **Lungimea unei curbe:** curba reprezentată de drumul neted $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ are lungimea $l_\gamma = \int\limits_{\gamma} dl$.
2. **Masa unui fir material:** dacă imaginea (γ) a drumului neted $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ modelează un fir material, iar $\rho : (\gamma) \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă care asociază fiecărui punct $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in (\gamma)$ densitatea $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ a firului în acel punct, atunci masa firului este $m = \int\limits_{\gamma} \rho(x_1, x_2, \ldots, x_N)\,dl$.

Exemple:

1. Pentru $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r\cos t,\ r\sin t)$ calculând lungimea curbei reprezentate de γ regăsim formula de lungime a cercului

de rază r. Într-adevăr, ţinând cont că ecuaţiile parametrice ale acestui drum sunt

$$\begin{cases} r\cos t = & x \\ r\sin t = & y, \end{cases}$$

deci

$$f(t) = r\cos t, \qquad g(t) = r\sin t,$$

avem

$$l_\gamma = \int\limits_\gamma dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\, dt = rt\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi r = l_{\mathcal{C}(O(0,0),1)}.$$

2. Să se calculeze masa unui fir material cu densitatea $\rho(x,y,z) = xyz + 5$, modelat de imaginea unei curbe $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^3$, care este dată prin ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = & 2t \\ y = & -t+1 \\ z = & 1-2t. \end{cases}$$

5. Integrala de suprafaţă de primul tip (de speţa întâi)

DEFINIŢIA 56. *Orice funcţie de clasă C^1, $S : D \to \mathbb{R}^3$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ este un domeniu (mulţime deschisă şi conexă) se numeşte pânză netedă. Dacă matricea Jacobiană asociată lui S are rangul doi în orice punct al domeniului D, atunci S se numeşte pânză netedă nesingulară.*

$S(D)$ reprezintă imaginea pânzei S.

DEFINIŢIA 57. *Spunem că două pânze $S_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$ şi $S_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3$ sunt echivalente dacă şi numai dacă există o aplicaţie $T : D_1 \to D_2$ bijectivă, de clasă C^1, cu inversa de clasă C^1, astfel încât Jacobianul asociat lui T să fie strict pozitiv în fiecare punct din D_1, iar $S_1 = S_2 \circ T$.*

DEFINIŢIA 58. *O clasă de pânze netede nesingulare se numeşte suprafaţă netedă, iar imaginea unei suprafeţe reprezintă imaginea unei pânze din clasa respectivă de echivalenţă.*

TEOREMA 33. *Fie $\Phi : V \to \mathbb{R}$ (V fiind un domeniu care conţine imaginea lui S) o funcţie continuă (deci şi integrabilă), unde S este o suprafaţă netedă.*

(i) *Dacă S este dată de ecuaţiile parametrice*

$$\begin{cases} x = & x(u,v) \\ y = & y(u,v) \\ z = & z(u,v), \end{cases}$$

unde $(u,v) \in D$, atunci integrala de suprafaţă de primul tip (sau de speţa întâi) a funcţiei Φ pe S este dată de

$$\iint\limits_S \Phi(x,y,z)dS =$$

$$= \iint\limits_D \Phi(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}dudv,$$

unde

$$A(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix},$$

$$B(u,v) = \frac{D(x,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix},$$

$$C(u,v) = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}.$$

(ii) *Dacă S este dată explicit de ecuaţia*

$$z = f(x,y), \quad \textit{unde } (x,y) \in D,$$

atunci integrala de suprafaţă de primul tip (sau de speţa întâi) a funcţiei Φ pe S este dată de

$$\iint\limits_S \Phi(x,y,z)dS =$$

$$= \iint_D \Phi(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Aplicaţii ale integralei curbilinii de primul tip

1. **Aria unei suprafeţe:** aria suprafaţei $S : D \to \mathbb{R}^3$ este $\mathcal{A}_S = \iint_S dS$.
2. **Masa unei suprafeţe:** dacă funcţia de integrat Φ repezintă densitatea materialului din care este confecţionată suprafaţa S, atunci integrala de suprafaţă de primul tip a funcţiei Φ pe S reprezintă masa suprafeţei S.

Exemplu: Ţinând cont că o sferă centrată în origine şi de rază R este dată de ecuaţia $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, şi că ea se parametrizează astfel:

$$\begin{cases} x = & R\cos\varphi\sin\theta \\ y = & R\sin\varphi\sin\theta \\ z = & R\cos\theta, \end{cases}$$

cu $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$, putem "recupera" formula ariei sferei folosind integrala de suprafaţă de primul tip a funcţiei $\Phi \equiv 1$ pe sferă. Mai exact,

$$\mathcal{A}_S = \iint_S dS = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{A^2(\varphi, \theta) + B^2(\varphi, \theta) + C^2(\varphi, \theta)} d\varphi\right) d\theta,$$

unde

$$A(\varphi, \theta) = \frac{D(x, y)}{D(\varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \end{vmatrix},$$

$$B(\varphi, \theta) = \frac{D(x, z)}{D(\varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) & \dfrac{\partial z}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \end{vmatrix},$$

$$C(\varphi,\theta)=\frac{D(y,z)}{D(\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}(\varphi,\theta) & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(\varphi,\theta) \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}(\varphi,\theta) & \dfrac{\partial z}{\partial \theta}(\varphi,\theta) \end{vmatrix},$$

iar

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi,\theta)=-R\sin\varphi\sin\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta}(\varphi,\theta)=R\cos\varphi\cos\theta,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \varphi}(\varphi,\theta)=R\cos\varphi\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}(\varphi,\theta)=R\sin\varphi\cos\theta,$$
$$\frac{\partial z}{\partial \varphi}(\varphi,\theta)=0, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta}(\varphi,\theta)=-R\sin\theta.$$

Prin urmare,

$$A(\varphi,\theta)=\begin{vmatrix} -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\cos\theta \\ \\ R\cos\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix}=-R^2\sin\theta\cos\theta,$$

$$B(\varphi,\theta)=\begin{vmatrix} -R\sin\varphi\sin\theta & -R\cos\varphi\cos\theta \\ \\ 0 & -R\sin\theta \end{vmatrix}=R^2\sin\varphi\sin^2\theta,$$

$$C(\varphi,\theta)=\begin{vmatrix} R\cos\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta \\ \\ 0 & -R\sin\theta \end{vmatrix}=-R^2\cos\varphi\sin^2\theta,$$

de unde obţinem că

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_S &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{R^4\sin^2\theta\cos^2\theta+R^4\sin^2\varphi\sin^4\theta+R^4\cos^2\varphi\sin^4\theta d\varphi}\right)d\theta,\\
&= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{R^4\sin^2\theta\cos^2\theta+R^4\sin^4\theta}\,d\varphi\right)d\theta,\\
&= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}R^2|\sin\theta|\,d\varphi\right)d\theta=\int_0^{\pi}\left(R^2\sin\theta\,\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\right)d\theta,\\
&= -2\pi\,R^2\cos\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}=4\pi\,R^2.
\end{aligned}$$

Menţionăm că în calculele de mai sus s-a folosit formula fundamentală a trigonometriei: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ şi faptul că funcţia sin este pozitivă pe $[0,\pi]$.

Exerciţii pentru fixarea noţiunilor nou introduse

1. Să se calculeze lungimea curbei $\gamma : [-1,2] \to \mathbb{R}^2$ date de ecuaţiile parametrice
$$\begin{cases} x = & 3t \\ y = & t+2 \end{cases}$$
În plus, ştiind că densitatea firului de material modelat de (γ) este dată de funcţia $\rho(x,y) = x^2 - 7y + 1$, calculaţi masa acestui fir de material.
2. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma}(x + 2y + 3z)\,dl$, unde $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t,\, \sin t,\, t)$.
3. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma} xy\,dl$, unde γ este dată de ecuaţia $y = 2x^2$, cu $x \in [-3,3]$. *(Indiciu: notăm $x = t$. De asemenea, reamintim că dacă f este funcţie pară, atunci $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$, iar dacă f este funcţie impară, atunci $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.)*
4. Să se calculeze $\iint\limits_{S}(2z+3)dS$ unde S este dată parametric prin
$$\begin{cases} x = & 2u\cos v \\ y = & -2u\sin v \\ z = & 3u, \end{cases}$$
unde $u \in [0,1]$, $v \in [0,\pi]$.
5. Să se calculeze aria unei suprafeţe S date de ecuaţia $z = x + 4y$, $(x,y) \in [1,2]\times[0,2]$. În plus, ştiind că densitatea materialului din care este confecţionată suprafaţa este $\rho(x,y,z) = y^3 + 3xy + 2z^2$, să se calculeze masa acestei suprafeţe.

CAPITOLUL 6

Despre desfăşurarea examenului

Structura Examenului de Analiză Matematică de la ELA+MR

Examenul este divizat în două părţi, cu pondere egală, numite Parţial I şi Parţial II. La final se face media notelor obţinute la Parţial I şi Parţial II.

Parţial I

Din oficiu: – 1 punct

Ex. 1. – are 2 subpuncte:

$a)$ – limita unui şir din $\mathbb{R}^2$– **(1 punct)**

$b)$ – una dintre următoarele noţiuni: norma unui vector, distanţa dintre doi vectori, produsul scalar a doi vectori, cosinusul unghiului a doi vectori – **(1 punct)**

Ex. 2. – are 2 subpuncte:

$a)$ – de stabilit convergenţa unei serii numerice – **(1 punct)**

$b)$ – o serie Taylor – **(1 punct)**

Ex. 3. – are 2 subpuncte:

- – derivata unei funcţii polinomiale – **(1 punct)**
- – una dintre următoarele chestiuni: o derivată parţială de tipul $\dfrac{\partial}{\partial y}(f \cdot g)$, o derivată parţială de tipul $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{f}{g}\right)$ sau o derivată parţială a unei funcţii compuse – **(1 punct)**

Ex. 4. – are 4 subpuncte care au punctajul total de – **(3 puncte)**

- – 1 subpunct legat de limite sau continuitate.

- – 1 subpunct cu una dintre următoarele noţiuni: rotor, divergenţă, Laplacean, gradient, derivata după o direcţie dată.
- – 1 subpunct cu determinarea matricei Jacobiene sau a Jacobianului (dacă matricea e pătratică).
- – 1 subpunct cu determinarea punctelor de extrem local (implicit se calculează şi matricea Hessiană).

Parţial II

Din oficiu: – 1 punct

Ex. 1. – are 6 subpuncte cu integrale simple:

a) – o integrală definită după o formulă din tabelul cu integrale – **(0,75 puncte)**

b) – o integrală definită după o formulă din tabelul cu integrale – **(0,75 puncte)**

c) – o integrală improprie – **(0,75 puncte)**

d) – o integrală care se rezolvă prin părţi – **(0,75 puncte)**

e) – o integrală care se rezolvă cu prima schimbare de variabilă (a se vedea funcţiile compuse) – **(0,75 puncte)**

f) – o integrală de funcţie raţională de forma $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}$ sau $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ – **(0,75 puncte)**

Ex. 2. – are 2 subpuncte cu integrale multiple:

a) – o integrală triplă – **(1,5 puncte)**

b) – o integrală dublă care se rezolvă prin trecerea la coordonate polare – **(1,5 puncte)**

Ex. 3. – o integrală curbilinie de primul tip sau o integrală de suprafaţă de primul tip – **(1,5 puncte)**

Analiză Matematică – variantă model de examen parţial 1

Student:
Fac. de Autom., Calc. şi Electr.,
Anul I, Grupa:
Numărul 1, Data:

1. Să se calculeze:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde $x_n = \left(\dfrac{-5n^4+3n^3+2n^2-12}{3n^4-16n^2+9}, \dfrac{\sin(3n^2-n-1)}{3n^2-n}\right)$.

   b) $\|x\|$, unde $x = (4, -2, -3)$.

2. *a*) Stabiliţi convergenţa seriei $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{2n}{(n+7)!}$ folosind criteriul raportului.

   b) Scrieţi dezvoltarea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$ în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 0$.

3. Să se determine:

   a) $\left(x^9 - 4x^7 + 6x^2 - 41\right)'$; *b*) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{f}{g}\right)$

   unde $f(x,y) = x^3y^4 - 3x^5y$ şi $g(x,y) = \cos y$.

4. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dată de $f(x,y) = (f_1(x,y),\ f_2(x,y),\ f_3(x,y))$, unde $f_1(x,y) = xy + 6x^2$, $f_2(x,y) = 5x^3y^2$ şi $f_3(x,y) = xe^y$.

   a) Calculaţi limita funcţiei f în punctul $(-1, 2)$.

   b) Determinaţi matricea Jacobiană asociată lui f.

   c) Determinaţi gradientul lui f_2 în punctul $(1, 3)$.

   d) Stabiliţi dacă funcţia f_1 admite puncte de extrem local.

Analiză Matematică – variantă model de examen parţial 2

1. Să se calculeze următoarele integrale simple:

a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg} x\, dx;$

b) $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{1}{\sqrt{x^2-7}}\, dx;$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{3} (x^2+5x-4)\, dx;$

d) $\displaystyle\int_{0}^{6} (2x-3)\sin x\, dx;$

e) $\displaystyle\int_{1}^{2} 3^{5x-6}\, dx;$

f) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+3)^8}.$

2. Să se calculeze următoarele integrale multiple:

a) $\iiint\limits_D f(x,y,z)\, dxdydz$, unde $f(x,y,z) = 2x^6y^4z^2$, iar $D = [-2,0]\times[0,1]\times[2,3]$;

b) $\iint\limits_D (7x-4y)dxdy$, unde D reprezintă discul limitat de cercul $\mathcal{C}(A(-2,3),5)$.

3. Să se calculeze integrala $\iint\limits_S f(x,y,z)\, dS$, unde suprafeţa S este dată de ecuaţia $z = y-2x$, $(x,y)\in[-4,0]\times[1,3]$, iar $f(x,y,z) = x^2-5y^4+2yz+3z$.